UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

MARCELLA LUANNA DA SILVA LIMA

SOBRE PENSAMENTO GEOMÉTRICO, PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS DE ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO NOS AMBIENTES LÁPIS E PAPEL E GEOGEBRA

CAMPINA GRANDE-PB

2015

MARCELLA LUANNA DA SILVA LIMA

SOBRE PENSAMENTO GEOMÉTRICO, PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS DE ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO NOS AMBIENTES LÁPIS E PAPEL E GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como requisito para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Profª. Drª. Abigail Fregni Lins (Bibi Lins)

CAMPINA GRANDE-PB

2015

L732s Marcella Luanna da Silva Lima
Sobre Pensamento Geométrico, Provas e Demonstrações Matemáticas de Alunos do 2º ano do Ensino Médio nos Ambientes Lápis e Papel e Geogebra [manuscrito] / Marcella Luanna da Silva Lima. - 2015.
192 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.
"Orientação: Profª Drª Abigail Fregni Lins, Departamento de Matemática".

1. Pensamento Geométrico. 2. Provas e Demonstrações Matemáticas. 3. Observatório da Educação (OBEDUC). 4. GeoGebra. 5. Educação Matemática. I. Título. 21. ed. CDD 516

MARCELLA LUANNA DA SILVA LIMA

SOBRE PENSAMENTO GEOMÉTRICO, PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS DE ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO NOS AMBIENTES LÁPIS E PAPEL E GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como requisito para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB. Área de Concentração: Educação Matemática

Aprovado em 21 de DEZEMBRO de 2015

Banca Examinadora

Profa. Dra. Abigail Fregni Lins (Bibi Lins) - UEPB
(Orientadora)

Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros - UEPB
(Examinador Interno)

Profa. Dra. Patrícia Sandalo Pereira - UFMS
(Examinadora Externa)

CAMPINA GRANDE-PB
2015

Dedico este trabalho às minhas queridas avós Arlinda Josefa da Silva (*in memoriam*) e Maria Eunice dos Anjos Lima e aos meus amados pais Marcelo Antônio dos Anjos Lima e Lucineide da Silva Lima, por serem meus exemplos vivos de fé, força, perseverança e amor.

AGRADECIMENTOS

Ao longo do Mestrado, foram muitos familiares e amigos que me ajudaram, apoiaram e me incentivaram a não desistir e buscar cada vez mais o aprendizado. Fica aqui minha gratidão por tudo que fizeram e fazem por mim.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela oportunidade que me foi concedida de voltar à Terra para um novo aprendizado e uma nova vida. Por seu amor e seu amparo, e por ser meu leme nos momentos de incertezas e dificuldades.

Em segundo lugar, à minha família que sempre me incentivou e me mostrou o caminho certo a seguir. Ao meu pai Marcelo Lima e à minha mãe Neide Lima (como gosta de ser chamada), por todo amor, dedicação, renúncias, conselhos e compreensão nos momentos de ausência. Sem vocês eu nada seria. Além de minha irmã, Bruna Lima, que sempre me apoiou nas minhas decisões, me dando forças e escutando todos os meus dramas e problemas com amor, atenção e carinho. Sou grata também aos meus tios e tias, primos e primas, avós, pois cada um deles sempre me apoiou e compreenderam minha ausência nos momentos oportunos.

Ao meu namorado Alan Gonçalves por todo amor, carinho e atenção durante esse momento do Mestrado. Sou grata por tudo que ele me proporciona, pela segurança que me dá, por seus conselhos e por seu incentivo, não deixando que eu fraqueje ou desista.

À professora Abigail Fregni Lins (Bibi Lins) por seu apoio e incentivo. Sou grata por ter me acolhido como orientanda e por todos os momentos de orientações e conselhos, tanto acadêmicos como da vida. Por ter me proporcionado uma vivência acadêmica tão rica com o ingresso de minha pesquisa em uma das equipes de um Projeto maior, OBEDUC/CAPES. Foi uma honra tê-la como orientadora.

À banca examinadora, nas pessoas de Profa. Dra. Patrícia Sândalo Pereira, Prof. Dr. Oscar João Abdounur e Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros por suas valiosas contribuições e ideias que enriqueceram meu trabalho.

À todos os docentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), da UEPB, pelas ricas contribuições em minha formação acadêmica.

À todos os companheiros do Projeto OBEDUC com os quais compartilhei estudos, viagens, risos, medos, anseios e muito aprendizado. Em especial, aos colegas da equipe Provas e Demonstrações Matemáticas, nas pessoas de Marconi Coelho, Anderson Nascimento, Leandro Souza e Helder Flaubert. Foram muitos os períodos de estudos e discussões que nos embasaram para a construção da nossa proposta didática. Agradeço também às amigas Andréa Moura e Adrielly Soraya, pelas conversas, incentivos e conselhos durante todo o Mestrado.

Por fim, agradeço à agência de fomento CAPES pela bolsa de estudos via Projeto OBEDUC em rede com as instituições UFMS, UEPB e UFAL.

“Ninguém poderá ser um bom professor sem
dedicação, preocupação com o próximo,
sem amor num sentido amplo”.

Ubiratan D’Ambrósio

RESUMO

LIMA, M. L. S**. Sobre pensamento geométrico, provas e demonstrações matemáticas de alunos do 2º Ano do Ensino Médio nos ambientes lápis e papel e GeoGebra.** 2015. 192f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba- UEPB, Campina Grande, 2015.

Nossa pesquisa investigou que tipo de provas, demonstrações matemáticas e nível de pensamento geométrico de alunos do 2º Ano do Ensino Médio podem ocorrer a partir de uma proposta didática nos ambientes lápis e papel e GeoGebra. Como pesquisa qualitativa, e estudo de caso, utilizamos como instrumentos redação com o tema Provas e Demonstrações Matemáticas, proposta didática desenvolvida por uma equipe de cinco pessoas que trabalhou de forma colaborativa inserida no Projeto CAPES/OBEDUC/UFMS/UEPB/UFAL Edital 2012, notas de campo, observação participante, gravações em áudio e fotos. Elaboramos uma proposta didática com 18 atividades, dividida em quatro partes, que incentivam alunos a refletirem, justificarem, provarem e demonstrarem. A aplicação dessa proposta se deu em julho de 2015 aos alunos do 2º Ano do Ensino Médio de uma escola pública na cidade de Areia, Paraíba. Para isso, os alunos se agruparam em duplas e um trio e a coleta dos dados se deu em três momentos. No primeiro momento, aplicamos a redação, revisamos com os alunos ângulos, triângulos e teoremas e trabalhamos com eles o aplicativo GeoGebra. No segundo momento, aplicamos as Partes I e II da proposta com 8 atividades sobre Teorema de Pitágoras e 3 atividades sobre Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, respectivamente. No terceiro momento, aplicamos a Parte III, com 2 questões sobre o Teorema do Ângulo Externo e a Parte IV, com 5 questões à serem trabalhadas no aplicativo GeoGebra sobre o Teorema de Pitágoras e Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Em nossa pesquisa analisamos o trabalho desenvolvido pelo trio de alunos, uma vez que foram ricos na tentativa de responder a todas as perguntas/atividades. Analisamos a Atividade 8 da Parte I, as Atividades 1 e 2 da Parte II e todas as Atividades da Parte IV, totalizando em 8 questões. Utilizamos o método de triangulação de dados para nosso estudo de caso e, primeiramente, traçamos o perfil do trio de alunos com relação às Provas e Demonstrações Matemáticas. Em seguida, investigamos o pensamento geométrico e as provas e demonstrações matemáticas utilizadas pelo trio de alunos nos ambientes lápis e papel e GeoGebra. Para isso, utilizamos as discussões sobre os níveis do pensamento geométrico propostos por Parzysz (2006) e tipos de provas propostos por Balacheff (2000) e Nasser e Tinoco (2003). A partir de nossos resultados pudemos concluir que o trio de alunos não conseguiu desenvolver suas justificativas nem provas, uma vez que não entendem o que vem a ser provas e demonstrações matemáticas, e em suas redações percebemos que estes alunos tratam provas matemáticas como as avaliações aplicadas bimestralmente pelo professor de Matemática. Além disso, as provas matemáticas realizadas por estes alunos se enquadram no empirismo ingênuo, prova pragmática (Balacheff, 2000) e justificativa gráfica (Nasser e Tinoco, 2003). Dessa forma, quando observamos o pensamento geométrico (Parzysz, 2006) destes alunos, notamos que se enquadra nos dois níveis da Geometria não axiomática: a Geometria Concreta (G0) e a Geometria Spatio-Graphique (G1), uma vez que estes alunos se utilizam de desenhos para justificar suas afirmações, como também a validação das afirmações foi feita pela percepção do trio. Acreditamos que se nas aulas de Matemática os professores contemplassem provas e demonstrações matemáticas, respeitando o nível de escolaridade, o grau de conhecimento e a maturidade dos alunos, contribuiriam fortemente para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e do pensamento geométrico, uma vez que os alunos seriam levados a refletir, justificar, provar e demonstrar suas ideias.

Palavras-Chave: Pensamento Geométrico; Provas e Demonstrações Matemáticas; Observatório da Educação (OBEDUC); GeoGebra; Educação Matemática.

ABSTRACT

LIMA, M. L. S. **On geometric thinking, proof and mathematical demonstration of High School Second Year students in pencil and paper and GeoGebra environments.** 2015. 192f. Dissertation (Master in Mathematics Education) – State University of Paraíba - UEPB, Campina Grande, 2015.

Our research work aimed to investigate what type of proof, mathematical demonstration and level of geometrical thinking can occur from a didactic proposal within pencil, paper and GeoGebra environments. As qualitative research and study case, we used as instruments essays with Mathematical Proof and Demonstration themes, a didactic proposal developed by a team of five people who inserted worked collaboratively in the CAPES/OBEDUC/UFMS/UEPB/UFAL Project, field notes, participant observation, audios and photos. We elaborated a didactic proposal with eighteen activities, divided into four parts, which encouraged the students to reflect, justify, prove and demonstrate. The proposal application was carried out in July 2015 with High School 2nd year students of a public school in the town of Areia, Paraíba. For such, the students organized themselves in couples and one trio and the data collection happened in three moments. In the first moment we applied the essay, revised angles, triangles and theorems with the students and worked GeoGebra application with them. In the second moment we applied Parts I and II of the proposal with eight activities on Pythagoras Theorem and three activities on Sum of the Internal Angles of a Triangle Theorem, respectively. In the third moment we applied Part III, with two questions on External Angle Theorem and Part IV, with five question to be worked with the GeoGebra application on Pythagoras Theorem and Sum of the Internal Angles of a Triangle Theorem. In our research work we analyzed the work developed by the trio of students, once they were great in responding all the questions/activities. We analyzed Activity 8 of Part I, Activity 1 and 2 of Part II and all Activities of Part IV, totalizing in eight questions. We used the triangulation method for our study case and, firstly, we traced the profiles of the trio in relation to Mathematical Proof and Demonstration. Then we investigated the geometric thinking and the mathematical proof and demonstration used by the trio of students in the pencil and paper and GeoGebra environments. For such, we used discussions around the level of geometrical thinking proposed by Parzysz (2006) and the type of proofs proposed by Balacheff (2000) and Nasser and Tinoco (2003). From our research results we could conclude that the trio of students could not develop the justifications or proofs, once they did not understand what are mathematical proof and demonstration are, in their essays they understand mathematical proofs as bimestrial evaluations applied by the mathematics teacher. Moreover, the mathematical proofs performed by these students were in accordance with naive empiricism, pragmatic proof (Balacheff, 2000) and graphic justification (Nassar and Tinoco, 2003). In this way, when we observed the students geometrical thinking (Parzysz, 2006) we noted that it fits into two levels of the non-axiomatic Geometry: the Concrete Geomety (G0) and the Spatio-Graphique Geometry (G1), once these students used drawings to justify their affirmations, as the validation of the affirmation was done by the trio. We believe that if in Mathematic classes the teachers contemplate mathematical proof and demonstration, respecting the level of education, the degree of knowledge and maturity of the students, they could strongly contribute to the process of teaching and learning Mathematics and geometrical thinking, once the students would be led to reflect, justify, prove and demonstrate their ideas.

Keywords: Geometrical Thinking; Mathematical Proof and Demonstration; Observatory of Education (OBEDUC); GeoGebra; Mathematics Education.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

CIBEM - Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.

EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática.

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio.

EPBEM – Encontro Paraibano de Educação Matemática.

LDB – Leis de Diretrizes e Bases.

OBEDUC – Observatório da Educação.

OCEM – Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

PB – Paraíba.

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais.

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).

PET – Programa de Educação Tutorial.

PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.

PPGECEM – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica.

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação.

UEPB – Universidade Estadual da Paraíba.

UFAL – Universidade Federal de Alagoas.

UFCG- Universidade Federal de Campina Grande.

UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nossa trajetória acadêmica iniciou quando ingressamos no Curso de Licenciatura Plena em Matemática, na Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, no primeiro semestre de 2008 e concluímos no primeiro semestre de 2012. Quando ingressamos no referido Curso não era necessário optar pela Licenciatura ou pelo Bacharelado logo no primeiro semestre (período). Ficou a nosso critério escolher as disciplinas as quais gostaríamos de cursar. Desse modo, optamos por disciplinas comuns à Licenciatura e ao Bacharelado. No segundo semestre já deveríamos escolher a modalidade que cursaríamos nos próximos, sendo assim, optamos pela Licenciatura Plena. Durante o Curso tivemos várias disciplinas comuns ao Bacharelado e, em relação aos anos anteriores, uma quantidade considerável de disciplinas pedagógicas e práticas. Porém, pudemos observar que o foco maior estava voltado ao Bacharelado.

No segundo ano do Curso, em 2009, ingressamos como bolsista em um projeto federal chamado Programa de Educação Tutorial – PET. Este projeto objetiva envolver os estudantes participantes em um processo de formação integral, proporcionando-os uma compreensão abrangente e aprofundada de sua área de estudos. Além disso, objetiva uma melhoria do ensino na Graduação, a formação ampla do aluno, a interdisciplinaridade e a atuação coletiva de planejamento e execução. Nesse projeto, apesar de estar na Licenciatura Plena, nosso contato maior foi com alunos do Bacharelado e estudos relacionados a esta modalidade. Nesse sentido, começamos a observar que preferíamos mais a Licenciatura ao Bacharelado, pois sentíamos falta de colocar em prática as teorias estudadas nas disciplinas pedagógicas, assim como gostaríamos de confirmar se realmente era a profissão de professora que gostaríamos de exercer.

Após um ano e três meses no PET, em março de 2010, decidimos nos desligar e ingressar em outro projeto voltado para a Licenciatura em Matemática, o qual se chama Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID. Este projeto objetiva melhorar a qualidade da formação inicial de professores em cursos de Licenciatura Plena em Matemática (neste caso, integrando a UFCG à Educação Básica), contribuir com a diminuição da evasão nos cursos de Licenciatura em Matemática e incentivar a atuação efetiva dos alunos na transformação do ensino público com práticas inovadoras. Quando ingressamos, o projeto já estava em seu segundo ano de execução, ou seja, finalizando em dezembro de 2010 e houve a seleção de novos bolsistas, pois alguns alunos tiveram que deixá-lo. Os bolsistas anteriores já haviam estudado sobre GeoGebra e Modelagem Matemática e foi pedido para os novos bolsistas escolher um dos grupos para fazer parte e continuar os trabalhos. Assim sendo, escolhemos participar do grupo sobre o GeoGebra, pois achamos o aplicativo interessante e nos motivou a estudá-lo. Foi a partir disso que confirmamos a nossa vocação na docência, pois pudemos ministrar algumas aulas na Escola parceira, como também ficamos encantadas com o aplicativo GeoGebra nas Oficinas por nós ministradas.

Ao finalizar o projeto, segundo semestre de 2011, ingressamos em um novo projeto do PIBID, no qual ficamos até a finalização de nossa graduação. Nesse novo projeto foram criados dois grupos, um sobre o GeoGebra e o outro sobre Materiais Manipuláveis e, novamente, optamos por ficar no grupo GeoGebra para continuar estudando o aplicativo. Desse modo, realizamos algumas Oficinas e Minicursos sobre o GeoGebra, tanto na Escola parceira como na UFCG. Aliado a essas práticas, escrevemos alguns artigos para Revistas e Eventos relatando experiências utilizando o aplicativo.

Na Graduação cursamos quatro disciplinas de Prática de Ensino de Matemática, nas quais pudemos estudar um pouco sobre as Tendências da Educação Matemática e saber um pouco sobre a própria Educação Matemática, em especial, a Didática Francesa. Desse modo, nos encantamos pelas leituras e debates ocorridos durante as aulas. Além disso, nos encantamos com a paixão e dedicação pela Educação Matemática da docente Dra. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque, quem nos inspirou a adentrar nessa área.

Durante o Curso de Licenciatura Plena em Matemática nossa vivência docente esteve ligada ao PIBID, uma vez que estudávamos manhã/tarde e optamos por estar em projetos ao invés de buscar por empregos. Desse modo, tivemos experiência docente em três Escolas Estaduais da cidade, duas foram a partir do PIBID e a terceira a partir dos Estágios Supervisionados da UFCG. Nesse sentido, foi a partir das duas primeiras que começamos a nos inquietar sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria nas escolas e como poderíamos tentar melhorar este quadro. Além disso, pudemos notar a melhora na aprendizagem dos alunos ao rever assuntos de Geometria a partir do aplicativo GeoGebra e como os professores tentam melhorar suas aulas por meio de cursos de aperfeiçoamento.

No primeiro semestre de 2012 cursamos a disciplina de Leitura e Produção de Textos Acadêmicos II e o docente nos propôs que fizéssemos um projeto de pesquisa como finalização da disciplina. Como já vinha com inquietações sobre a Geometria e o GeoGebra, conversamos com o docente e pedimos que nos orientasse no projeto, uma vez que queríamos utilizá-lo para ingressar em um Programa de Mestrado. Desse modo, nosso projeto foi sobre *Uma Proposta para o ensino aprendizagem de Geometria do Ensino Médio utilizando o software GeoGebra*.

Como iríamos concluir nosso curso em julho de 2012, tivemos oportunidade de tentar a seleção do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, em abril/maio de 2012. Realizamos a primeira etapa da seleção, a qual foi uma prova escrita com relação a um livro de Iran Abreu Mendes e fomos aprovadas nessa etapa. A segunda etapa da seleção foi uma entrevista, na qual defendemos nosso projeto de pesquisa e conversamos sobre planos de nossa carreira profissional. Nessa etapa também fomos aprovadas, mas um dos motivos que nos impediu de ingressar no Programa foi a greve geral, abraçada pela UFCG. Desse modo, não tínhamos o certificado de conclusão, não levando a uma pontuação necessária entre os aprovados e classificados. De qualquer forma, foi uma experiência muito boa e nos motivou a não desistir de uma nova seleção para o mestrado.

Em novembro de 2012, assim que concluímos o curso, nos inscrevemos para a seleção do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, no qual fomos aprovadas e tivemos a honra de ter como orientadora a docente Dra. Abigail Fregni Lins (Bibi Lins). Ao ingressar no Mestrado, nossa proposta inicial estava aliada ao uso de métodos e ferramentas tecnológicas que auxiliassem no ensino e aprendizagem da Matemática, em especial o GeoGebra e a Geometria. Nossa proposta era a de analisar tanto o ensino (professores) quanto a aprendizagem (alunos) por meio de aulas e atividades utilizando o aplicativo e comparando as aulas expositivas tradicionais com as aulas realizadas com o GeoGebra. Em conversa com nossa orientadora, percebemos que seria melhor optarmos pelo ensino ou pela aprendizagem para tornar possível e viável a pesquisa em si. Nesse sentido, optamos pela aprendizagem da Geometria com o auxílio do GeoGebra, não tendo ainda conteúdo(s) específico(s) a ser(em) trabalhado(s) com os alunos.

Além dessa conversa, nossa orientadora nos convidou a fazer parte de um Projeto dela e de outras duas docentes doutoras, uma da UFMS e outra da UFAL, intitulado *Trabalho colaborativo com professores que ensinam Matemática na Educação Básica em escolas públicas das regiões Nordeste e Centro-Oeste*, que faz parte do Programa Observatório da Educação OBEDUC/CAPES. Após algumas reuniões, juntamente com mestrandos do projeto e nossa orientadora, decidimos participar do mesmo uma vez que pudemos perceber o quanto um ambiente colaborativo poderia vir a ser enriquecedor. O acréscimo à minha proposta inicial (aprendizagem da Geometria com o auxílio do GeoGebra) se deu com Provas e Demonstrações, já foco de alguns dos mestrandos integrantes do projeto.

O Projeto das docentes dentro do Programa Observatório da Educação OBEDUC/CAPES é em rede, ou seja, possui três núcleos, um na UFMS, outro na UEPB e outro na UFAL. Na UEPB contamos com uma equipe de 20 pessoas, dentre essas 5 mestrandos, 7 professores da educação básica e 8 graduandos da UEPB, mais a coordenadora Abigail Fregni Lins. Nesse projeto, o trabalho é de cunho colaborativo e fazemos parte da equipe de *Provas e Demonstrações Matemáticas*. Essa equipe é composta por 5 membros, sendo 2 mestrandos, 1 professor da educação básica e 2 graduandos da UEPB e estudamos três perspectivas: provas e demonstrações, aplicativos e trabalho colaborativo.

Nossa equipe *Provas e Demonstrações Matemáticas* atuou na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira, localizada na cidade de Areia – Paraíba (PB), a qual consta com 6 professores de Matemática, sendo dois deles integrantes da nossa equipe. Dessa forma, atuamos nos três anos do Ensino Médio (1º, 2º e 3º anos) e buscamos investigar, por meio de uma proposta didática, que tipos de prova e demonstração matemática esses alunos conseguiriam desenvolver com atividades que o levassem a justificar, argumentar, provar e demonstrar.

Nesse sentido, pensamos na realização de uma pesquisa que motivasse os alunos a argumentarem, justificarem e provarem com mais frequência alguns enunciados da Geometria, aliando a sua verificação no aplicativo GeoGebra. O nosso objeto de estudo centrou nos alunos de 2º ano do Ensino Médio, buscando analisar que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico podem ocorrer a partir de uma proposta didática aplicada nos ambientes lápis e papel e GeoGebra.

No que diz respeito aos conteúdos da Geometria a serem trabalhados pelos alunos, toda a equipe concordou que nossa proposta didática abordasse três conteúdos, que são *Teorema de Pitágoras, Teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo e Teorema do ângulo externo de um triângulo*, uma vez que os alunos do Ensino Médio já teriam estudado esses conteúdos, como também são necessários para o entendimento de assuntos mais aprofundados deste ano de ensino.

Ao longo de um ano de análise e reflexão sobre o teor da pesquisa, especialmente a partir das reuniões semanais de equipe do Projeto OBEDUC, a riqueza das discussões acerca de provas e demonstrações, aplicativo GeoGebra e trabalho colaborativo, fomos conseguindo delinear o que nossa equipe pretendia, tendo como base a pesquisa de cada integrante. Desse modo, a partir do trabalho colaborativo, conseguimos entrelaçar as cinco pesquisas, proporcionando momentos enriquecedores para todos.

Ao longo de 2013 e 2014 tivemos contato com uma grande quantidade de artigos e livros, nos quais buscamos embasamento teórico a respeito de temas como *trabalho colaborativo*, *educação brasileira e Ensino Médio*, *ensino/aprendizagem da Geometria*, *provas e demonstrações matemáticas*, *desenvolvimento do pensamento geométrico*, *TIC e GeoGebra*. No ano de 2015, conseguimos delinear nosso referencial teórico e, por meio dele, elaboramos e aplicamos a proposta didática em três turmas do Ensino Médio da Escola Carlota Barreira.

Em 2013 tivemos a oportunidade de discutir nossa proposta no VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), ocorrido em setembro em Montevidéu (UY); XVII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM), realizado em novembro em Vitória (ES) e no I Seminário Anual OBEDUC, realizado em novembro em Maceió (AL). Em 2014 tivemos a oportunidade de discutir nossa proposta no XVIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM), realizado em novembro em Recife (PE) e no II Seminário Anual OBEDUC, realizado em novembro em Campina Grande (PB). Em 2015 compartilhamos nossas ideias e escritas no II Congresso Nacional de Educação (CONEDU), realizado em outubro em Campina Grande (PB) e no III Seminário Anual OBEDUC, realizado em outubro em Campo Grande (MS).

A participação nesses eventos contribuiu para o aprimoramento de nossa proposta e direcionou o embasamento teórico escolhido. Sendo assim, elaboramos nossa pesquisa tendo a seguinte questão norteadora:

Que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico podem ocorrer a partir de uma proposta didática por alunos do 2º Ano do Ensino Médio?

Orientadas por essa questão, objetivamos investigar que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível de pensamento geométrico de alunos do 2º Ano do

Ensino Médio podem ocorrer a partir de uma proposta didática nos ambientes lápis e papel e GeoGebra.

Nesse sentido, norteadas por essa questão, organizamos nosso trabalho em quatro distintos capítulos. No Capítulo 1 discutimos algumas colocações sobre provas e demonstrações matemáticas referentes à diferenciação desses termos na Matemática Pura e na Educação Matemática. Abordamos também sobre os tipos de provas propostos por alguns educadores matemáticos, como também apresentamos as funções das provas matemáticas, indicando quais consideramos para elaboração e análise da proposta didática. Além disso, trazemos alguns comentários dos PCN e de educadores matemáticos referentes à utilização das provas e demonstrações na aprendizagem da Matemática. À vista disso, elegemos autores como Jahn, Healy e Pitta (2007), Balacheff (2004), Balacheff (2000), Almouloud (2007), Aguilar Jr e Nasser (2012), Morais Filho (2010), Nasser e Tinoco (2003), Grinkraut (2009), Aguilar Jr (2012), De Villiers (2001), Hanna (1990), entre outros.

No Capítulo 2 apresentamos, sucintamente, algumas colocações das Leis Brasileiras, alguns comentários dos PCN e de educadores matemáticos referentes à Educação brasileira e ao ensino da Matemática no Brasil. Abordamos também algumas colocações sobre o ensino da Geometria no Brasil e a proposta de Parzysz (2006) sobre os níveis do pensamento geométrico, os quais utilizamos para análise de dados. Além disso, trazemos alguns recortes de educadores matemáticos referentes à utilização das TIC na sociedade e no ensino da Matemática, enfatizando o aplicativo GeoGebra. Nesse sentido, buscamos documentos e autores como Constituição Brasileira (1988), LDB (1996), Castro (1997), Krawczyk (2008), Carvalho (1994), Pires (2008), Miorim, Miguel e Fiorentini (1993), Pavanello (1993), Bertoluci (2003), Nascimento (2012), Nunes (2011), Ponte (2000), Janzen (2011), Gravina (2001), entre outros.

O Capítulo 3 aborda sobre os procedimentos metodológicos escolhidos nessa pesquisa. Iniciamos abordando sobre trabalho colaborativo, enfatizado via recortes de alguns educadores matemáticos, buscando esclarecer o trabalho realizado no Projeto OBEDUC. Além disso, descrevemos o local e os sujeitos envolvidos nesta pesquisa, como também caracterizamos o tipo de pesquisa que desenvolvemos e os procedimentos metodológicos utilizados para a realização da proposta.

O Capítulo 4 apresenta a análise dos dados como estudo de caso. Finalmente, após o Capítulo 4, nas Considerações Finais, revisitamos o objetivo do nosso trabalho e a questão norteadora, apontamos alguns resultados obtidos com a realização da pesquisa e discutimos as limitações da nossa pesquisa e trabalho futuro.

CAPÍTULO 1

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

No presente capítulo discutimos algumas colocações sobre provas e demonstrações matemáticas, observando as diferenças de nomenclaturas na Matemática Pura e na Educação Matemática. Apresentando, assim, as definições que estaremos considerando em nossa pesquisa.

Trazemos também algumas discussões acerca dos tipos de provas propostas por alguns renomados educadores matemáticos, apresentando alguns exemplos para clarificar as ideias de uma das propostas. Nesse sentido, também indicaremos os tipos de provas que nortearam a nossa análise de dados.

Discutimos também acerca das funções da prova propostas por alguns educadores matemáticos, apresentando as suas definições e entendimentos. Dessa forma, indicamos algumas funções da prova que nos nortearam a elaborar e organizar a nossa proposta didática.

Além disso, nesse capítulo trazemos alguns comentários dos PCN e de educadores matemáticos referentes à utilização das provas e demonstrações na aprendizagem da Matemática, enfatizando a sua importância e relevância para o desenvolver dos conhecimentos matemáticos dos alunos.

1.1 CONCEITOS E NOMENCLATURAS

As provas tem um papel muito importante na Matemática, uma vez que é a partir delas que confirmamos se algo é válido ou não. Segundo Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007), a prova matemática fornece aos seres humanos a forma mais pura de diferenciar o certo do errado. Com isso, o conceito de prova diz respeito ao:

> desenvolvimento e elevação da compreensão que o aluno deve ter. É um conceito que não apenas difunde-se em seu trabalho na matemática, mas é também envolvido em todas as situações onde a conclusão seja alcançada e decisão seja construída. Matemática tem uma única contribuição para realizar o desenvolvimento deste conceito (BALACHEFF, 2004, p. 2).

Nesse sentido Balacheff (2004) afirma que prova e linguagem estão rigorosamente relacionados. Ou seja, para se utilizar bem as provas e demonstrações é necessário sabermos que estas consistem na utilização da linguagem matemática. De acordo com Morais Filho (2010), a linguagem matemática consiste da linguagem materna e da linguagem simbólica, a qual usa símbolos matemáticos. Dessa forma, os enunciados de resultados e as demonstrações matemáticas são feitos utilizando-se esta linguagem.

Segundo Morais Filho (2010, p. 69), quando estamos estudando Matemática, percebemos que ela é repleta de teoremas e que, muitas vezes, já as utilizamos ou as demonstramos sem saber. Dessa forma, do ponto de vista puramente matemático, um teorema "é uma sentença condicional 'se P, então Q', cuja validade é garantida por uma demonstração. Nesse caso, a sentença P chama-se **hipótese** e a sentença Q chama-se **tese**". Didaticamente, para trabalharmos com as demonstrações, é mais fácil separarmos e destacarmos a hipótese e a tese de um teorema. Além disso, um teorema sempre deve ter um enunciado claro e preciso, no qual podemos identificar claramente a hipótese e a tese.

Ainda do ponto de vista puramente matemático, segundo Morais Filho (2010), para não abusarmos da palavra *teorema*, na Matemática, alguns teoremas recebem outros nomes, a saber:

> - chamamos **corolário** a um teorema obtido como consequência de outro recém provado. Nesse caso, o segundo teorema é chamado **corolário do teorema** provado;
> - já um teorema usado para provar outro que lhe sucede é chamado **lema**; podemos dizer que um lema é um teorema auxiliar ou preparatório, que será usado na demonstração de outro teorema;
> - em algumas ocasiões, chama-se **proposição** a um teorema que não é central no contexto e tem importância limitada (MORAIS FILHO, 2010, p. 79).

Na Matemática nada é aceito sem ser questionado, provado ou convencido. Dessa forma, é preciso que se demonstre para que acreditemos nos fatos. As demonstrações compõem, segundo Morais Filho (2010, p. 113), parte da estrutura lógica essencial do que é constituída a Matemática e da maneira como a Matemática funciona. Nesse sentido, uma **demonstração**, matematicamente falando, "de que uma proposição T é deduzida de outra proposição H é uma cadeia de argumentações lógicas, válidas, que usam H para concluir os resultados apresentados em T. Nesse processo, H chama-se **hipótese** e T chama-se **tese**".

Para isso, de acordo com Morais Filho (2010), cada passo de uma demonstração deverá ser provado utilizando-se argumentações válidas, usando-se hipóteses, axiomas, definições e outros resultados anteriormente provados, formando assim uma cadeia dedutiva de raciocínio. Ou seja:

> demonstrar é um ato de persuasão, de convencimento, baseado em argumentações lógico-dedutivas, por isso é tão importante (também) saber redigi-las. Ninguém deve acreditar em um fato matemático, mas deve ser convencido por meio de uma demonstração que ele é válido. Muitas vezes esse

> convencimento é para você mesmo, mas na maioria das vezes, a demonstração é para convencer outra pessoa da validade de algum fato (MORAIS FILHO, 2010, p. 115).

Outro ponto importante a ser comentado é a definição matemática. As definições matemáticas são importantes, pois evitam longas e desnecessárias repetições e, juntamente com as notações, são mais um aliado na ajuda com a economia da linguagem (MORAIS FILHO, 2010). Além disso, para se tentar demonstrar um resultado matemático é preciso conhecer o objeto com os quais iremos trabalhar e saber precisamente suas propriedades. Ou seja, "**definir** é dar nomes a objetos matemáticos, mediante determinadas propriedades interessantes que possuam e que os caracterizem" (MORAIS FILHO, 2010, p. 83).

No que diz respeito às terminologias, Morais Filho (2010) nos informa que os verbos *mostrar, demonstrar e provar* são sinônimos e têm o mesmo significado. Além disso, as palavras *encontrar, exibir, construir, obter, etc.*, só são possíveis de serem realizadas ou justificadas por meio de uma demonstração matemática.

Do ponto de vista da Educação Matemática, Aguilar Jr e Nasser (2012, p. 136), nos afirmam que "provar um resultado matemático é validar a declaração feita, a partir de hipóteses verificadas e certificadas como verdadeiras". Já Almouloud (2007), nos afirma que demonstrar é um procedimento de validação que caracteriza a Matemática e a distingue das Ciências Experimentais.

Sobre essas diferenças de terminologias, Balacheff (2000) faz uma distinção entre explicação, prova e demonstração. Para este autor, a *explicação* se situa no nível do sujeito locutor e estabelece e garante a validade de uma proposição, estando enraizada em seus conhecimentos e no que constitui sua racionalidade, ou seja, suas próprias regras de decisão da verdade. A base da explicação é essencialmente a língua natural. Quando a explicação é reconhecida como convincente para uma comunidade, ela adquire um estatuto social e se constitui uma prova para esta comunidade, podendo ser verdadeira ou não.

Desse modo, para Balacheff (2000) quando uma explicação é reconhecida e aceita por uma comunidade, convém chamá-la de prova. As *provas* são explicações aceitas em um determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para uma comunidade, mas também pode ser rejeitada por outra. Para este autor, quando a prova faz referência a um enunciado matemático, esta se denomina *demonstração*. Ou seja, as demonstrações se tratam de uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras. O que caracteriza as demonstrações como gênero de discurso é a sua forma estritamente codificada.

Almouloud, Regnier e Fusco (2009) afirmam que as demonstrações são provas particulares com as seguintes características:

> * são as únicas aceitas pelos matemáticos;
> * respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas em um conjunto de regras lógicas;
> * trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência (ALMOULOUD, REGNIER e FUSCO 2009, p. 2).

Nesse sentido, compreendemos que para Balacheff (2000) uma prova diz respeito a um discurso que valida uma proposição para uma determinada comunidade, podendo assumir diferentes níveis de generalização. Já a demonstração consiste em um tipo particular de prova, uma vez que utilizamos termos matemáticos para validar uma proposição, isto é, validamos por meio de um desenvolvimento dedutivo rigoroso de forma a atingir a prova formal.

Portanto, em nossa pesquisa consideramos que provas e demonstrações não são palavras sinônimas e adotamos as diferenças de terminologias propostas por Balacheff (2000), as quais dizem respeito à explicação, prova e demonstração, tendo significados diferentes. Assim como, Grinkraut (2009), tomaremos a prova em um significado mais amplo, podendo ser entendida como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, não necessariamente aceita no domínio matemático. Dessa forma, as justificativas encontradas nas produções dos alunos serão aceitas dentro do contexto escolar dos mesmos, em termos do raciocínio envolvido, mesmo sabendo que muitas vezes estes não consigam atingir a formalização necessária. Já a demonstração ou prova formal será considerada um tipo de prova aceita pela comunidade dos matemáticos, a qual é baseada em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, devendo ser obtida por meio de um processo hipotético-dedutivo.

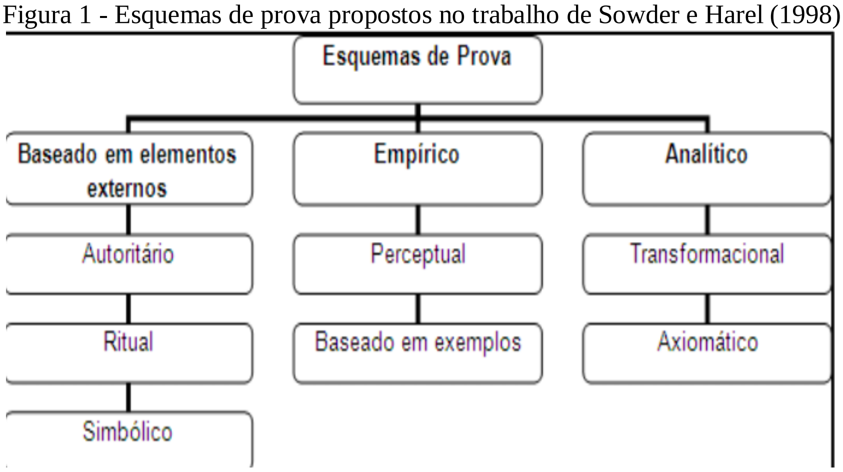
1.2 TIPOS DE PROVA

Sabemos que a prova é característica essencial da Matemática e que ela produz uma nova compreensão matemática, uma vez que ela possibilita que o aluno produza novas ligações conceituais e novos métodos para resolver determinados problemas. Os PCN nos recomendam que o currículo de Matemática deva propiciar experiências e atividades que possibilitem aos alunos o desenvolvimento de conjecturas e a formulação e a comunicação de argumentos matematicamente válidos.

Para isso, Balacheff (2004) nos afirma que o esquema de provar de um sujeito consiste em averiguar e convencer a si próprio, isto é, o averiguar e o persuadir são totalmente subjetivos e podem variar de sujeito para sujeito e de geração para geração, em uma mesma civilização. Dessa forma, devemos levar em conta o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, uma vez que um aluno pode se convencer da validade de um teorema utilizando apenas casos particulares para a sua prova.

Nesse sentido, há algumas pesquisas realizadas por educadores matemáticos os quais classificam as provas de diversas maneiras. O primeiro trabalho que comentaremos diz respeito ao de Sowder e Harel (1998 apud AGUILAR JR e NASSER, 2012), os quais categorizaram os tipos de prova do seguinte modo: *esquema de prova baseado em elementos externos*, *esquema de prova empírico* e *esquema de prova analítico* (ver Figura 1). Dessa forma, de acordo com os autores, o esquema de prova baseado em elementos externos diz respeito a elementos que tanto convence o aluno quanto persuade a outros. Já o esquema de prova empírico é aquele em que justificações são feitas exclusivamente com base em exemplos. E o esquema de prova analítico diz respeito ao mais elevado tipo de prova, ou seja, é o que exige um nível de rigor de justificações muito alto:

Figura 1 - Esquemas de prova propostos no trabalho de Sowder e Harel (1998)



Fonte: Aguilar Jr e Nasser (2012)

Balacheff (2000) argumenta que a forma mais elementar de uma prova é a exposição, ou seja, as operações e os conceitos que esta acarreta são executados, mas não são diferenciados nem articulados, uma vez que são utilizados apenas para a observação. Dessa forma, estas provas se fundamentam na capacidade de quem observa a figura para, a partir daí, reconstruir as razões que o locutor tinha em mente e que não sabia explicitar de outra maneira.

Nesse sentido, Balacheff (2000) identifica dois tipos básicos de provas: o **pragmático** e o **intelectual**. O primeiro, segundo Balacheff (2000, p. 22), diz respeito àquela prova que recorre a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar um determinado resultado, chamados pelo autor de 'recursos de ação'. O segundo "não recorre a tais recursos no momento de formular as propriedades envolvidas e as possíveis relações entre elas".

Balacheff (2000) denomina as provas pragmáticas como aquelas que recorrem à ação e a exposição, já as provas intelectuais são aquelas que, separando-as da ação, se apoiam em formulações das propriedades em jogo e de suas relações. Dessa forma, o autor sugere que as provas intelectuais estão fundamentadas em uma tomada de consciência do caráter genérico das situações consideradas.

Para Balacheff (2000), o desenvolvimento no terreno das provas intelectuais exige uma troca de posição, ou seja, o conhecimento que antes era tratado apenas na ação, exposição e observação, converte-se em um objeto de reflexões, discursos e debates. Porém, para o autor, é preciso mais do que isto para que o aluno seja capaz de elaborar provas formais e até demonstrações. Para o autor, a elaboração de demonstrações requer mais do que certo nível de conhecimentos, uma vez que estas devem constituir-se em uma verdadeira teoria reconhecida como tal, já que ela deve ser aceita por uma comunidade matemática:

> A demonstração em Matemática se fundamenta sobre um corpo de conhecimentos fortemente institucionalizado, sobre um conjunto de definições, de teoremas e de regras de dedução, cuja validade é aceita socialmente. Este princípio é um dos fundamentos do rigor matemático (BALACHEFF, 2000, p. 23).

Dessa forma, as provas pragmáticas são aquelas em que os alunos podem verificar uma conjectura construída por meio de ações experimentais sobre os objetos estudados. Se o resultado for positivo, o aluno pode considerar a conjectura como válida. Já as provas intelectuais são aquelas em que o discurso a ser utilizado pelo aluno é teórico, não necessitando tomar observações experimentais como argumentos para validar uma conjectura, mas apenas resultados teóricos já observados, como definições, teoremas, axiomas, entre outros.

Dentro desses dois tipos de provas propostos por Balacheff (2000), o mesmo distinguiu quatro tipos principais de provas pragmáticas e intelectuais que terão um lugar privilegiado na gênese cognitiva da demonstração: *empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental*.

Segundo Balacheff (2000), o empirismo ingênuo consiste em assegurar a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos, ou seja, consiste em afirmar a validade de uma conjectura após a observação de um pequeno número de casos. Esse tipo de prova é a mais rudimentar e é uma das primeiras formas no processo de generalização.

A experiência crucial, de acordo com este autor, diz respeito a uma experimentação cujo resultado permite escolher entre duas hipóteses, sendo verdadeira somente uma delas. Ou seja, consiste em afirmar a validade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar. Este tipo de validação se distingue do empirismo ingênuo na medida em que o aluno realiza experiências e toma consciência de que busca por um resultado geral, isto é, o aluno começa a levantar a generalização do problema de modo explícito.

Ainda de acordo com Balacheff (2000), o exemplo genérico consiste na explicação das razões de validade de uma conjectura para a validação de operações ou transformações de um objeto em qualidade de representante característico de determinada classe, ou seja, o aluno trabalha sobre um objeto particular, mas tem em mente a classe de objetos do qual o primeiro é um representante. Desse modo, o aluno busca uma generalização baseada em exemplos, mas procura justificá-la com a teoria relacionada a esta proposição.

A experiência mental, segundo Balacheff (2000), se centra na ação, interiorizando-a e separando-a de sua execução sobre um representante particular. Ou seja, consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos. Dessa forma, o aluno não faz mais referência ao caso particular, a afirmação é elaborada para uma classe de objetos e a validação é inteiramente sustentada pela teoria.

No que diz respeito essas modalidades de prova, Aguilar Jr e Nasser (2012) nos afirma que o empirismo ingênuo (empirismo natural para esses autores) e a experiência crucial (experimento crucial para eles) fazem parte do tipo de prova pragmática. Já a experiência mental (experimento mental para eles) reside no tipo de prova intelectual e o exemplo genérico transita entre os dois tipos de prova, uma vez que o aluno está começando a generalizar uma proposição por meio de exemplos.

Para entendermos melhor esses quatro tipos de provas propostos por Balacheff (2000), Aguilar Jr (2012, p. 37) considerou a seguinte proposição "A soma de dois números pares resulta um número par" e identificou possíveis exemplos de raciocínio para cada um desses tipos:

Figura 2 - Os tipos de prova propostos por Balacheff, suas descrições e exemplos

TIPO DE PROVA (BALACHEFF, 1988)	DESCRIÇÃO	EXEMPLOS
Empirismo Natural (naive empiricism)	Define-se empirismo natural o exercício de argumentação em que o aluno tira suas conclusões a partir de um pequeno número de "testes" e "experimentos" que realiza.	Os alunos verificam a validade da afirmativa testando vários exemplos: 12 + 26 = 38; 16 + 20 = 36
Experimento Crucial (crucial experiment)	Neste tipo de prova, verifica-se a realização de um experimento bastante particular e forte, ou seja, consiste em generalizar o problema e resolvê-lo mediante àquele experimento particular.	Os alunos julgam que, mostrando que a proposição vale com números muito grandes, valerá para todos os demais exemplos possíveis. Ex: 824 + 632 = 1456; 1890 + 2020 = 3910
Exemplo Genérico (generic example)	O exemplo genérico, como o termo sugere, é o tipo de prova em que o aluno elege um exemplo como representante da classe de todos os exemplos possíveis que atendem à proposição. Da manipulação deste exemplo tomado, são concluídas propriedades e estruturas.	Ex: 24 + 36 = 2(12 + 18) = 2 x 30 = 60; 128 + 26 = 2 (64 + 13) = 2 x 77 = 154.
Experimento Mental (thought experiment)	Segundo Balacheff (1998, p. 219), o experimento mental "evoca a ação, internalizando-a e desligando-se de uma representação particular".	Se p e q são números pares, então existem números naturais m e n tais que p = 2m e q = 2n. Então: p + q = 2m + 2n = 2 (m + n), com p e q números naturais. Logo, p + q é par

Fonte: Aguilar Jr (2012)

Além desses tipos de prova citados por Sowder e Harel (1998) e por Balacheff (2000), há outros dois tipos de provas bastante importantes. De acordo com Nasser e Tinoco (2003), existe a **prova formal**, que já foi citada anteriormente com os estudos de Morais Filho (2010), que diz respeito a "um desenvolvimento formal, que parte dos pressupostos (hipóteses) e, através do encadeamento do raciocínio e de resultados já conhecidos ou de teoremas, chega ao resultado que se quer mostrar que é verdadeiro (tese)". Para essas autoras, atualmente o que se observa é que a maioria dos alunos não domina esse tipo de prova, nem quando chegam à universidade, nem quando concluem, e ainda, nem quando começa a exercer um tempo de magistério.

À vista disso, pesquisadores como Gila Hanna (1995), do Canadá, e Nicholas Balacheff, da França, defendem a ideia da **prova ingênua**, a qual diz respeito a "uma argumentação aceitável, que pode ter diversos níveis de rigor, dependendo da idade e do ano de escolaridade do aluno que a apresenta". Sobre isso, Morais Filho (2010) também nos alerta de que alguns professores e autores de livro didático parecem abolir a palavra demonstração das salas de aula e dos livros, e que nós devemos ter o devido cuidado quando tratamos de demonstrações no Ensino Fundamental e Médio, pois, segundo este autor, há demonstrações que não são convenientes de serem apresentadas nestes ensinos, porém cabe ao professor fazer os devidos ajustes e procurar fazer com que os alunos, se não demonstrem, argumentem suas ideias e debatam com os colegas sobre elas.

Nasser e Tinoco (2003) nos apresentam ainda outros tipos de provas encontradas a partir de uma investigação feita por Rezende e Nasser (1994):

> - Justificativa pragmática: o aluno atesta a veracidade de uma afirmativa com base em apenas alguns casos particulares;
> - Recorrência a uma autoridade: o aluno afirma que o resultado é verdadeiro porque o professor falou, ou porque está no livro texto;
> - Exemplo crucial: o aluno desenvolve através de um exemplo o raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral;
> - Justificativa gráfica: o aluno mostra numa figura por que o resultado é verdadeiro (NASSER e TINOCO, 2003, p. 4-6).

Dessa forma, há várias possibilidades e tipos de provas a serem trabalhadas na Educação Básica, algumas delas foram apresentadas acima e foram propostas por renomados educadores matemáticos. Portanto, para que a utilização das provas e demonstrações seja mais efetiva no ensino e aprendizagem da Matemática, é necessário que o professor, primeiramente, tenha um bom conhecimento matemático e saiba adaptar provas e demonstrações aos conhecimentos dos alunos, levando em consideração o grau de maturidade deles e os conhecimentos prévios que esses alunos possuem da Matemática.

Além disso, é necessário que o professor perceba que o desenvolvimento cognitivo dos alunos sobre as provas são apresentadas em formas potencialmente compreensíveis por eles, ou seja, cada aluno apresentará uma justificativa ou uma prova para determinada afirmação de acordo com o seu desenvolvimento cognitivo. Dessa forma, não se deve restringir que a forma válida de uma prova seja somente a formal, uma vez que o grau de conhecimento varia de aluno para aluno e, por isso, se faz tão importante todos esses tipos de provas, uma vez que nos auxiliará no trabalho efetivo das provas e demonstrações em sala de aula.

Portanto, para fins de análise dos dados, consideraremos os quatro tipos de provas propostos por Balacheff (2000), somando a definição de prova ingênua de Gila Hanna, uma vez que iremos considerar a idade e os conhecimentos matemáticos dos alunos, como também consideraremos que os alunos não são incentivados a trabalharem com as provas desde cedo, o que torna inviável esperar que os mesmos provem formalmente determinadas afirmações. Consideraremos, também, os tipos de provas propostos por Nasser e Tinoco (2003), os quais dizem respeito à justificativa pragmática, a recorrência a uma autoridade, o exemplo crucial e a justificativa gráfica.

1.3 AS FUNÇÕES DA PROVA

Sabemos que a demonstração é o coração do pensamento matemático, do argumento dedutivo, o qual tem sua base teórica baseada no processo de provar, diferenciando, assim, a matemática das ciências empíricas. Dessa forma, é necessário que os alunos tomem conhecimento de sua importância, levando os professores a propiciarem situações de aprendizagem que instiguem isso nos alunos, que os motivem a buscar uma justificativa ou uma prova.

Para isso, os professores devem ter a clareza, o motivo e a necessidade dessa pertinência, pois para os alunos não é necessário construir uma prova formal para convencê-lo da veracidade de uma afirmação. Como nos afirma De Villiers (2001), isso ocorre porque os alunos não compreendem as funções das provas e demonstrações, uma vez que no ensino da Matemática a utilização desse recurso serve apenas para eliminar as dúvidas, para verificar a correção das afirmações matemáticas.

Dessa forma, De Villiers (2001) propõe seis tipos de funções de prova: *verificação, explicação, sistematização, descoberta, comunicação e desafio intelectual.* A verificação diz respeito à verdade de uma afirmação, ou seja, o aluno busca convencer a si próprio e aos outros por meio da veracidade de uma afirmação. Grinkraut (2009) afirma que os processos empíricos ou indutivos até podem convencer os alunos da validade de uma afirmação, mas, para eliminar as dúvidas é necessária a prova. A verificação se constitui na função mais evidente da prova e é a mais utilizada no ensino da Matemática.

A explicação diz respeito ao fornecimento de explicações quanto ao fato de uma afirmação ser verdadeira, ou seja, a compreensão de o porquê essa afirmação é verdadeira, proporcionando assim o entendimento dos motivos da validade da afirmação. Já a sistematização diz respeito à organização dos vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas.

A descoberta diz respeito à descoberta de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura, ou seja, a busca de uma prova não consiste apenas em um meio de verificar um resultado que já foi descoberto, mas também pode ser visto como um processo que implique em uma atividade investigativa e de criatividade, possibilitando ao aluno a exploração, a análise, a descoberta, a criação e a invenção de novos resultados.

A comunicação diz respeito à transmissão do conhecimento matemático, ou seja, a prova possibilita a interação ou a comunicação entre todos os envolvidos, promovendo uma negociação do significado entre os matemáticos, os professores e os alunos. Já o desafio intelectual diz respeito à realização pessoal e a gratificação resultante da construção de uma prova, isto é, há o desafio de provar alguma afirmação que se sabe que existe e que é verdade, porém essa função da prova enfatiza o caminho a ser percorrido, tomando como o processo de valorizar a argumentação ao invés do resultado final.

Nasser e Tinoco (2003) também propõem algumas funções da prova. As autoras afirmam que a mais conhecida e usada é a de **validar** um resultado, ou seja, quando há necessidade de comprovar que algo é verdadeiro ou não. Nasser e Tinoco (2003, p. 3), afirma que "essa função é, sem dúvida alguma, fundamental na Matemática, mas nem sempre é motivadora para alunos da escola básica". Além disso, essa função só se tornará motivadora quando há a necessidade de sanar alguma dúvida, isto é, quando for preciso validar ou refutar uma conjectura.

A segunda função da prova, como afirma Nasser e Tinoco (2003), é a de **explicar ou elucidar**, ou seja, mostrar o porquê o resultado é verdadeiro. Segundo as autoras, algumas provas são perfeitamente aceitas, mas não dão nenhum indício do motivo pelo qual a afirmativa vale. Dessa forma, de Villiers (1991, p. 261 apud NASSER e TINOCO, 2003, p. 3) afirma que "em vez de enfatizar na prova apenas seu papel de **verificação**, a função mais fundamental da prova como meio de **explicação** deve ser explorada, a fim de apresentar a prova como uma atividade significativa para os alunos".

A terceira função da prova, de acordo com Bell (1976 apud NASSER e TINOCO, 2003) diz respeito a **sistematizar**, ou seja, preparar o aluno para o domínio do processo dedutivo:

> acompanhando as demonstrações apresentadas pelo professor, o aluno vai tomando conhecimento das estruturas da matemática, para no futuro dominar o processo dedutivo, e até, em alguns casos, ser capaz de fazer demonstrações por si mesmo. Para isso, é necessário que o professor não esconda dos alunos as dificuldades encontradas e o motivo de certos passos tomados no desenvolvimento de uma demonstração (NASSER e TINOCO 2003, p. 3-4).

E a quarta função da prova, segundo as autoras, diz respeito à **descoberta** e a **comunicação** como funções da prova. A primeira como a descoberta de novos resultados e a segunda como a transmissão do conhecimento matemático.

Dessa forma, percebemos as principais funções das provas e demonstrações no ensino e aprendizagem da Matemática, observando que elas fazem com que o aluno questione, argumente e conjecture suas ideias e atitudes, esperadas pelos PCN. Além disso, as provas e demonstrações auxiliam na Matemática com o seu sentido de validação e de explicação de determinados fatos que não são aceitos de imediato.

Portanto, quando o professor tomar conhecimento dos tipos de provas e de suas funções, poderá haver uma mudança em suas concepções, uma vez que ele estará preparado para enfrentar esses novos desafios e conseguirá introduzir e utilizar a prova em um contexto escolar de forma correta, respeitando o desenvolvimento cognitivo dos alunos e estimulando-os para progredirem com seus argumentos e justificativas.

Nesse sentido, em termos das atividades elaboradas e aplicadas na nossa proposta didática, levamos em consideração algumas funções da prova, as quais os alunos poderiam trabalhar com provas que assumissem outros papéis além da simples verificação. Ou seja, exploramos atividades que envolvessem funções de explicação, comunicação e descoberta, conforme o que foi proposto por De Villiers (2001).

1.4 UTILIZAÇÃO DAS PROVAS E DEMONSTRAÇÕES NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

No que diz respeito à ênfase nos ensinos, segundo Almouloud (2007), a demonstração em Matemática é uma das competências indicadas nos PCN para o Ensino Fundamental e Médio, como parte integrante do currículo da escola básica. Além disso, de acordo com Aguilar Jr e Nasser (2012), mesmo sendo as provas e argumentações uma das competências indicadas nos PCN, as avaliações internas no Brasil, a exemplos da Prova Brasil e o ENEM, e as avaliações internacionais, como o PISA (Programme for International Student Assessement), mostram que nossos alunos não dominam a Matemática.

Além disso, de acordo com Fusco, Silva e Almouloud (2007), verifica-se que não se dá ênfase ao ensino de demonstrações em Matemática. Ao contrário do que se pede nos PCN, que de acordo com Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007), a preocupação com a argumentação e a produção de uma prova pode ser encontrada neles (Brasil, 1998), o qual recomenda que o currículo de Matemática deva contemplar experiências e atividades que possibilitem aos alunos o desenvolvimento e a comunicação de argumentos matematicamente válidos.

Ainda sobre os PCN, Fusco, Silva e Almouloud (2007) nos afirmam que a preocupação com as provas e demonstrações ao processo de formação dos alunos está presente nesses Parâmetros, tanto do Ensino Fundamental, quanto do Médio, os quais indicam que a demonstração deve ser parte integrante do currículo:

> [...] é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas (PCN, 1998, p. 71).

Nesse sentido, identificamos que nos PCN há certa preocupação com a argumentação e a produção de provas matemáticas, uma vez que eles apontam a importância do desenvolvimento de certas atitudes na formação dos alunos, como as atitudes de levantar hipóteses e argumentar. Além disso, os PCN defendem que um dos objetivos do ensino e aprendizagem da Matemática possibilite ao aluno:

> comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas. (p. 37)

À vista disso, Nasser e Tinoco (2003) afirmam que depois de séculos de um ensino puramente tradicional e estático, a abordagem adotada no ensino da Matemática vem sofrendo mudanças. Essas modificações passaram pela Matemática Moderna, a qual valorizava um enfoque puramente estruturalista, o que não é natural para os alunos da escola básica. Depois que resolveram deixar de lado as ideias da Matemática Moderna, abandonaram-se também o raciocínio dedutivo e as demonstrações:

> a realidade hoje mostra que a maioria dos alunos não está aprendendo a pensar e raciocinar quando estuda os diversos conteúdos da Matemática. Se pensarmos um pouco na natureza das aulas de Matemática na maioria das escolas brasileiras, chegamos a uma constatação: *os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias* (NASSER e TINOCO, 2003, p. 01).

Uma das formas de auxiliar na mudança desse cenário como também de auxiliar o ensino e aprendizagem da Matemática seria a utilização de provas e demonstrações, de modo a tornar mais claro o seu entendimento e a fazer com que os alunos construam, questionem, conjecturem e analisem todo o seu processo. Além disso, as habilidades de provar e demonstrar, segundo Aguilar Jr e Nasser (2012), em Matemática são importantes tanto para o desenvolvimento em Matemática quanto para a formação do cidadão crítico. Sobre isso, os PCN nos avisam que:

> [...] desenvolvimento no educando da capacidade/habilidade de comprovação, argumentação e justificação, com vistas à formação do cidadão crítico, além de propiciar que a Matemática seja encarada pelo estudante como um conhecimento que possibilita o desenvolvimento de seu raciocínio e de sua capacidade expressiva (PCN, 1997, p. 26).

Segundo Aguilar Jr e Nasser (2012), para que os professores desenvolvam este raciocínio com seus alunos, é importante que esses compreendam e aceitem os diversos níveis de argumentação e justificação que seus alunos possam vir a apresentar para provar um determinado resultado. Recaindo, dessa forma, na proposta de Hanna (1990 apud AGUILAR JR e NASSER, 2012), na qual afirma que a análise das demonstrações feitas pelos alunos deve levar em conta a faixa etária dos mesmos e seus conhecimentos matemáticos adquiridos até a fase escolar que se encontram.

Dessa forma, Hanna (1990 apud AGUILAR JR, 2012) afirma que o nível de aprendizagem do aluno e o nível de exigência quanto ao valor do argumento dado para a comprovação de uma declaração matemática não devem necessariamente seguir os padrões de rigidez quanto à validade de proposições, como é defendida na Academia. Além disso, Andrade e Nacarato (2005) compreendem que na educação básica não nos cabe falar em demonstração ou prova formal, mas sim em processos de validação, os quais envolvem as habilidades de justificar, argumentar e provar fatos matemáticos.

Dessa forma, segundo Grinkraut (2009) a construção da prova no contexto escolar é diferente daquela direcionada aos matemáticos na Academia, uma vez que na escola consiste em convencer alguém ou a si mesmo que determinada afirmação é verdadeira. Mas para isso, a qualidade dos argumentos necessários para tal convencimento, como também o nível de generalidade de uma prova é variável, já que, como discutimos anteriormente, um aluno pode se convencer da validade de um teorema apenas utilizando casos particulares. Isto quer dizer que os argumentos ou justificativas produzidas pelos alunos devem ser considerados como objetos de ensino e não apenas como respostas inconsistentes, mesmo que muitas vezes os alunos utilizem argumentos que não constituem uma demonstração ou prova formal aceita pela comunidade matemática.

Nesse sentido, é necessário tomar conhecimento de que, segundo Balacheff (2004), a educação para prova matemática não deve iniciar enfatizando a forma, mas pelo seu significado como atividade matemática. Ou seja, os alunos e os professores devem ver a prova matemática como uma atividade que está intrinsecamente relacionada à própria Matemática, a qual não pode ser vista separada desta área de conhecimento:

> a maior contribuição potencialmente significativa de prova para educação matemática é a comunicação sobre compreensão matemática" [...] "Um currículo matemático que objetiva refletir modelo real de prova rigorosa na matemática deve apresentar-se como ferramenta indispensável ao invés de estar mais no cerne desta ciência (HANNA & JAKE, 1996 apud BALACHEFF, 2004, p. 9).

Nesse sentido, para Aguilar Jr e Nasser (2012, p. 136), ensinar por meio de uma prova “consiste em mostrar ao educando a validade da declaração feita, exibindo as etapas do processo dedutivo, para assim desenvolver no educando o raciocínio lógico-dedutivo”. Além disso, para esses autores a argumentação lógico-dedutiva é uma habilidade que não pode ser ensinada em algumas aulas, ou seja, essa habilidade deve ser desenvolvida desde os primeiros anos, ao longo de toda escolaridade, em uma constante gradação dos níveis de argumentação, com o intuito de conduzir o aluno a construir justificativas que possam ser aceitas como provas de resultados matemáticos.

Sobre o porquê de desenvolver atividades de provas e demonstrações em sala de aula, Aguilar Jr e Nasser (2012) nos apresenta uma lista de componentes necessários para a compreensão, construção e avaliação de provas, proposta por Galbraith (1981, p. 4 apud AGUILAR JR E NASSER, 2012, p. 7):

> (a) entender e ser capaz de checar uma variedade de casos particulares;
> (b) detectar e utilizar um princípio externo relevante para a argumentação;
> (c) utilizar uma cadeia de inferências a fim de se convencer do resultado a ser alcançado;
> (d) reconhecer o domínio de validade de uma generalização;
> (e) interpretar corretamente condições e afirmativas;
> (f) apreciar e perceber a distinção entre implicação e equivalência;
> (g) reconhecer a arbitrariedade e propriedades de uma definição;
> (h) ser capaz de analisar uma prova como meio de expor os detalhes de um argumento.

Com essas relações de componentes necessários para a compreensão, construção e avaliação de provas, percebemos o quanto é importante e necessário trabalhar com as provas e demonstrações em sala de aula com o aluno, pois quanto mais cedo começarmos a fazer esse trabalho, de acordo com sua faixa etária e seus conhecimentos matemáticos, mais fácil será de formá-lo um cidadão crítico e capaz de defender suas ideias e argumentos, não só matematicamente, mas também socialmente. Como também, segundo os autores, “essa relação de competências confirma nossa crença de que os alunos devem ser preparados para dominar o processo dedutivo. (...) essas habilidades são adquiridas aos poucos, dependendo da experiência e maturidade dos alunos”.

Dessa maneira, Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007), nos indica que uma abordagem eficiente para o ensino da prova requer o conhecimento das dificuldades e concepções dos alunos, o desenvolvimento de situações de aprendizagem inovadoras que explorem novos contextos e ferramentas, os quais possibilitem a construção de argumentos matematicamente válidos, além da aceitação e da apropriação pelos professores dessas novas ferramentas e situações.

Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007), nos indica que uma investigação na problemática do ensino e aprendizagem da prova pode compreender dois enfoques inter-relacionados. Com relação ao primeiro enfoque, as autoras apresentam que se refere à elaboração de situações de aprendizagem, visando possibilitar aos aprendizes o desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. Já com relação ao segundo enfoque, este se centra no professor, que nessa nova abordagem de sala de aula, torna-se o agente principal desse processo de adaptação.

Nesse sentido, é importante observar como e quais as condições e suportes que favorecem a utilização da prova matemática pelo professor a partir do uso de novos recursos didáticos e como o aluno será capaz de construir seu próprio conhecimento por meio desse ensino. Dessa forma, o professor tem que escolher uma nova ferramenta que ele mesmo aceite e saiba se apropriar de seus comandos e possibilidades, contribuindo assim para o ensino e aprendizagem da Matemática de forma eficaz e duradoura.

Portanto, quando os professores passarem a aceitar e se apropriar dessas novas possibilidades e metodologias, teremos uma mudança efetiva no ensino e aprendizagem da Matemática. Além disso, como sugere Nasser e Tinoco (2003) e Hanna (1990), acreditamos que iniciando o trabalho com provas e demonstrações nas séries iniciais, levando em consideração a faixa etária e os conhecimentos prévios dos alunos, quando esses alunos chegarem às séries subsequentes o trabalho e a utilização das provas e demonstrações será bem mais fácil e mais eficaz na aprendizagem da Matemática.

CAPÍTULO 2

O ENSINO DA GEOMETRIA E O USO DAS TIC

No presente capítulo discutimos, rapidamente, algumas colocações das Leis Brasileiras, alguns comentários dos PCN e de educadores matemáticos referentes à Educação brasileira e ao ensino da Matemática no Brasil. Percebemos uma grande diferença entre aquilo que consta no papel, nas Leis, na teoria e aquilo que está acontecendo na prática. Como também observamos que o ensino da Matemática está muito aquém das propostas feitas pelos Parâmetros e esperadas pelo Governo.

Trazemos também algumas colocações sobre o ensino da Geometria no Brasil, fazendo uma comparação das mudanças ocorridas com as diversas propostas para o melhoramento do ensino e aprendizagem da Matemática. Além disso, trazemos a proposta de Parzysz sobre os níveis do pensamento geométrico, que nos auxiliará na análise de dados.

Discutimos rapidamente algumas colocações sobre a utilização das TIC na sociedade e na Educação Matemática, fazendo uma abordagem histórica do processo evolutivo das TIC em nossa sociedade e dos benefícios e dificuldades encontradas com a implementação dessas TIC na educação.

Por fim, trazemos alguns comentários de educadores matemáticos referentes ao uso das TIC no ensino da Matemática, enfatizando o aplicativo GeoGebra como um recurso de Geometria Dinâmica capaz de auxiliar no processo de desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos alunos.

2.1 A EDUCAÇÃO BRASILEIRA E O ENSINO DA MATEMÁTICA

A Educação no Brasil, de acordo com o que determina a Constituição Federal e as Leis de Diretrizes e Bases (LDB), deve ser gerida e organizada por cada nível de governo. Ou seja, a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios devem gerir e organizar seus respectivos sistemas de ensino. Logo, cada um desses sistemas educacionais públicos é responsável por sua própria manutenção, que gere fundos, bem como os mecanismos e fontes de recursos financeiros.

A educação brasileira é regulamentada pelo Governo Federal, por meio do Ministério da Educação, que define os princípios orientadores da organização de programas educacionais. Já os governos locais são responsáveis por estabelecer programas educacionais estaduais e seguir as orientações utilizando os financiamentos oferecidos pelo Governo Federal.

A Constituição Brasileira (1988), em seu artigo 205, estabelece que a educação seja um direito de todos e um dever do Estado e da família. Além disso, ela será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, objetivando o pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

A Lei número 9394, de 20 de dezembro de 1996, estabelece as diretrizes e bases na educação nacional. Isto é, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) foi publicada com o propósito de aproximar o cidadão dos conteúdos legislativos, para conhecimento de seus direitos e deveres, e assim estimular a participação consciente por parte da população.

Ainda no tocante à educação brasileira, a LDB (1996, p. 17) estabelece que “a educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores”. Isto é, a educação básica deverá formar cidadãos conscientes, capazes de cumprirem seus deveres junto à sociedade e capazes de se desenvolverem profissionalmente, conseguindo cumprir seus deveres junto ao ambiente de trabalho.

Com relação ao Ensino Médio, a LDB (1996) estabelece a inserção da experiência cotidiana e o trabalho no currículo deste ano de escolaridade, como elementos que irão facilitar a tarefa educativa de explicitar a teoria e prática. Nesse sentido, Castro (1997) observa que isso não implica em trabalhar somente o profissional e diminuir a teoria, mas sim de ensinar melhor a teoria, de forma bem ancorada na prática. Ou seja, para Castro (1997, p. 10) “as pontes entre teoria e prática têm que ser construídas cuidadosamente e de forma explícita”.

Para Castro (1997) deve ter uma mudança curricular no Ensino Médio, buscando atualizar as disciplinas e fazê-las mais próximas do mundo em que vivemos e onde trabalhamos. É preciso que as disciplinas lidem com conteúdos novos, mas que saibam fazer melhor a ponte entre a teoria e a prática.

Já Krawczyk (2008) cita termos como crise, apagão e ausência de sentido, como um dos problemas enfrentados no Ensino Médio, que são utilizados por governantes, pesquisadores, jornalistas e representantes de organizações não governamentais, ao analisar esse ensino. Além disso, a autora nos afirma que os docentes e os alunos falam de falta de interesse, falta de qualidade e desmotivação. O debate atual sobre este ensino no Brasil foi retomado devido a queda nas matrículas do Ensino Médio regular, pela ausência de professores especialistas (principalmente os de Química, Física e Biologia), pelo desempenho insatisfatório dos alunos nos exames (o SAEB e o ENEM) e também pela recente discussão sobre sua obrigatoriedade:

> as atuais deficiências do ensino médio em nosso país são a expressão da presença tardia de um projeto de democratização da educação pública, ainda inacabado, que sofre os abalos das mudanças ocorridas na segunda metade do século XX, que transformaram significativamente a ordem social, econômica e cultural, com importantes consequências para toda a educação pública (KRAWCZYK, 2008, p. 7).

À vista disso, concordamos com Krawczyk (2008), uma vez que o Ensino Médio deve ser modificado não só em uma ou duas escolas, mas em todas as escolas como um todo, modificando sua organização, seu funcionamento e seu currículo. Assim como é preciso que os professores também modifiquem suas práticas e concepções pedagógicas, tentando diminuir, aos poucos, as dificuldades que encontramos no ensino e aprendizagem de determinado conteúdo.

Nesse sentido, a escola dos dias de hoje deve fazer com que os alunos pensem, reflitam, questionem e argumentem sobre o que está sendo aprendido e debatido. Além disso, é necessário que os professores também mudem sua visão sobre o ensino e a aprendizagem da sua disciplina, fazendo com que esses alunos sejam capazes de construir seu próprio conhecimento e suas próprias decisões, tornando-se assim, como os PCN nos sugere, um cidadão crítico e consciente em uma sociedade cada vez mais moderna.

Com relação ao ensino da Matemática, sempre escutamos muitos alunos perguntarem o porquê de estudarem esta disciplina ou o para que estudá-la, pois estes não conseguem vê-la em situações simples do seu dia a dia ou estes estudam os conteúdos puramente matemáticos sem relação com suas vivências ou com a interdisciplinaridade. Nesse sentido, Carvalho (1994) nos afirma que no início da década de 90, o Documento Básico do Subprograma Educação para a Ciência (SPEC) destaca que o objetivo do ensino da Matemática seria o de “preparar o cidadão para atuar em uma sociedade complexa, cada vez mais permeada pela Ciência e pela Tecnologia” (MEC, CAPES, 1989).

Já Pires (2008) nos afirma que no período do Movimento da Matemática Moderna a grande questão era a de aproximar o ensino escolar da ciência, ou seja, esperava-se que a Matemática fosse útil para a técnica, para a ciência e para a economia moderna. Nesse sentido, o que foi colocado em prática estava distante de ser um ensino renovado e democrático da Matemática. Tinha-se um ensino formalizado ao extremo, decepado de todo suporte intuitivo, apresentando a Matemática a partir de situações artificiais e bastante seletivas.

Ainda de acordo com Pires (2008), quando ocorreu o declínio da Matemática Moderna buscou-se construir currículos de Matemática mais ricos, mais contextualizados cultura e socialmente, com o rigor e a conceituação matemáticos apropriados e acessíveis aos estudantes, tentando evidenciar o poder explicativo da Matemática.

Pires (2008) alega que na segunda metade do século XX podemos identificar três períodos marcantes de reformas de currículos:

> o primeiro, caracterizado pela influência do Movimento Matemática Moderna (de 1965 a 1980); o segundo, caracterizado por reformas que buscavam se contrapor ao ideário do Movimento Matemática Moderna (de 1980 a 1994) e lideradas por Secretarias Estaduais e Municipais de Ensino; o terceiro, organizado em nível nacional e consubstanciado num documento divulgado ao conjunto das escolas brasileiras, denominado Parâmetros Curriculares Nacionais (a partir de 1995) (PIRES, 2008, p. 16).

A autora afirma que no Brasil o primeiro período caracterizado pela influência da Matemática Moderna foi incorporado, inicialmente, por meio de livros didáticos, sem existir a adequada preparação dos professores nem uma suficiente discussão dos propósitos ou finalidades da Matemática Moderna. Isto é, ela surgiu como substituta definitiva da velha Matemática, com a qual não mantinha relação alguma. Foi nessa época que a Geometria e as Medidas foram relegadas a segundo plano, isto é:

> a Geometria era tratada como tema ilustrativo dos conjuntos ou da álgebra. [...] Do mesmo modo que não houve preparação adequada para a entrada dos professores no Movimento Matemática Moderna, também não houve discussão suficiente para que pudessem entender o que estava sendo criticado no trabalho com os conjuntos ou nos prejuízos acarretados pelo excesso de algebrismo, abandono da Geometria, falta de vínculos com o cotidiano, críticas essas que foram importantes na elaboração das propostas que orientaram os currículos nas décadas de 80 e 90 (PIRES, 2008, p. 20).

Nesse sentido, foi a partir dessas críticas ocorridas no primeiro período da reforma curricular e aliado ao novo contexto político e social no Brasil que nos anos 80 surgiu uma apresentação favorável de propostas para a construção de uma escola inspirada em valores democráticos. Logo, nesse segundo período, a proposta defendida era que o conteúdo a ser ensinado estivesse compreendido como “veículo para o desenvolvimento de uma série de ideias fundamentais, convenientemente articuladas, tendo em vista as grandes metas que são a instrumentação para a vida e o desenvolvimento do raciocínio” (PIRES, 2008, p. 22).

O terceiro período da reforma, iniciado em 1995, esteve inteiramente ligado ao Ministério da Educação que desencadeou, de 1995 a 2002, o processo de elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), para diferentes níveis e modalidades de ensino. Segundo Pires (2008), para os PCN da área de Matemática do Ensino Fundamental busca-se expressar a contribuição das investigações e das experiências na área de Educação Matemática.

Já os PCN do Ensino Médio, de acordo com Pires (2008), destacam que a Matemática nessa última fase da educação básica tem um valor formativo, ajudando o aluno a estruturar seu pensamento e raciocínio dedutivo, como também desempenha um papel instrumental, visto que é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas áreas específicas da atividade humana. Nesse sentido, é extremamente importante que o aluno perceba que as definições e demonstrações têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Consequentemente, se devemos ter essa nova maneira de trabalhar com a Matemática, também devemos ter uma nova relação entre professor e aluno. Ou seja, nessa nova concepção deve-se adotar métodos de aprendizado onde o professor é o mediador do processo de aprendizagem dos alunos e estes devem ser instigados e desafiados por esse professor a participarem e questionarem mais. Isso pode ser feito a partir da valorização das atividades coletivas, as quais proporcionam a discussão e elaboração de ideias e práticas, fazendo com que o aluno desenvolva seu senso crítico e sua capacidade de validação de ideias.

Dessa forma, os PCN do Ensino Médio nos informa que em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda como forma de desenvolver habilidades de pensamento. Nesses PCN, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, uma vez que ela se coloca como ciência com características próprias de investigação e de linguagem:

> aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos, traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e

> interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (PCN, 1998, p. 152).

Os PCN (EM) afirmam que o centro das reformas educacionais está na aquisição de competências por parte dos alunos, onde se recomenda que eles pensem, raciocinem, argumentem, comuniquem-se matematicamente, modelem, planejem e representem. Ou seja, os PCN (EM) esperam que os alunos percebam que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros, e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Dessa forma, nós sabemos que há muitos problemas e obstáculos a serem enfrentados para que haja realmente uma mudança significativa no ensino e na aprendizagem da Matemática no Brasil, uma dessas mudanças está inteiramente ligada aos professores em tentarem modificar sua prática pedagógica e o seu trabalho com os alunos em sala de aula, uma vez que não dá mais para imaginar o ensino da Matemática estático, onde não se valoriza as vivências dos alunos e o grupo social com o qual convive.

Portanto, como propõe os PCN, hoje em dia espera-se que os professores ensinem os conteúdos matemáticos levando em conta suas potencialidades, suas instrumentações para a vida, e seu auxílio no desenvolvimento de formas de pensar. Além disso, espera-se que os professores de Matemática levem em consideração o conhecimento prévio dos alunos na construção de seu aprendizado, instigando os alunos a pensar, questionar e argumentar os conteúdos aprendidos, desmistificando a crença de que a Matemática é uma ciência para poucos.

2.2 O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

Os PCN do Ensino Fundamental indicam vários objetivos a serem alcançados pelos alunos deste ensino com relação às finalidades do ensino da Matemática. Destacamos dois que afirma que a resolução de situações problemas, validando estratégias e resultados, desenvolvem formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizam conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos que levam a construção da cidadania por parte dos alunos. Além disso, os alunos aprenderão a comunicar-se matematicamente, isto é, eles irão descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas.

Com relação à Geometria, os PCN do Ensino Médio afirmam que ela é essencial para a descrição, representação, medida e dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. Ao utilizar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real, segundo os PCN, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas.

Em vista de todas essas propostas dos PCN, tanto do Ensino Fundamental quanto do Médio, nos questionamos se todas elas juntamente com seus objetivos estão sendo alcançados no desenvolvimento da Matemática, em especial da Geometria. Notamos que uma das maiores dificuldades no ensino e aprendizagem da Matemática é a Geometria, já que os alunos não conseguem compreender os conceitos dos conteúdos ministrados e os professores relegam o seu ensino. Segundo Reis e Lins (2010), em diversos documentos que norteiam a estruturação do currículo escolar, a exemplo dos PCN, a Geometria aparece como um dos elementos de grande importância. Mas é dada pouca relevância a esta disciplina quando ensinada no Ensino Fundamental e no Médio, assim como é senso comum entre professores e alunos desprezar o ensino dela, nos dando a impressão, conforme argumenta o professor Lorenzato (NACARATO e PASSOS, 2003, prefácio), de que a Geometria é a "parte da Matemática cujo ensino tem sido boicotado pelos professores".

Para compreendermos o motivo do boicote ou do desprezo do ensino e aprendizagem da Geometria é necessário analisarmos o porquê disso tudo acontecer e como ocasionou isso. Miorim, Miguel e Fiorentini (1993) fazem um retrospecto da implantação da Matemática Moderna no Brasil, abordando o anterior, o concomitante e o posterior período a essa implantação. Aqui comentaremos os dois primeiros períodos. Os autores afirmam que o primeiro momento, anterior ao Movimento da Matemática Moderna, é o mais longo, começando em 1799 até o início da década de 60. Esses autores afirmam que nesse período houve um equilíbrio na abordagem da Álgebra e da Geometria e que esta última era considerada "a matéria mais nobre", enquanto que a Álgebra era considerada uma "matéria mais instrumental".

Já no segundo momento, Miorim, Miguel e Fiorentini (1993) afirmam que a partir de 1960, com o aparecimento do Movimento da Matemática Moderna, tentou-se unificar os três campos fundamentais da Matemática, introduzindo elementos unificadores como a Teoria dos Conjuntos e as Estruturas Algébricas. Nesse segundo momento, a Álgebra passa a ocupar um lugar de destaque, enquanto que a Geometria, quando não abandonada, passou a ter uma abordagem eclética.

Já Pavanello (1993) traz uma perspectiva diferente com relação ao abandono da Geometria. A autora afirma que esse abandono tem sido verificado nessas últimas décadas no Brasil e é um fato bastante preocupante para os educadores matemáticos brasileiros. A autora ainda afirma que essa é uma tendência geral, porém mais evidente nas escolas públicas, principalmente depois da promulgação da Lei 5692/71:

> a liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula – talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão (PAVANELLO, 1993, p. 7).

Pavanello (1993) afirma que essa Lei 5692/71 facilitou o abandono da Geometria quando permitiu que cada professor montasse seu programa de acordo com as necessidades dos alunos. Dessa forma, a maioria dos alunos do 1º grau fica sem aprender Geometria, pois os professores se limitavam a ensinar somente a aritmética e as noções de conjuntos. Assim, o estudo da Geometria passa a ser feito apenas no 2º grau, quando isso realmente ocorre, com a dificuldade de que os alunos não sabem lidar com as figuras geométricas e sua representação, uma vez que o Desenho Geométrico foi substituído, nos dois graus de ensino, pela Educação Artística.

Há outras causas relacionadas ao abandono da Geometria no Brasil como Lorenzato (1995 apud BERTOLUCI, 2003) destaca, a saber: a má formação dos professores de Matemática; a exagerada importância que o livro didático desempenha; o currículo dos cursos de formação de professores que não oferece uma formação em Geometria adequada; os programas e guias curriculares que colocam a Geometria como complemento ou como apêndice; e o Movimento da Matemática Moderna, que tornou o ensino da Geometria altamente algebrizado.

Domingues (1994 apud NASCIMENTO, 2012) traz algumas sugestões que requerem mais atenção e dedicação quanto à aplicação da Geometria, a saber: o currículo escolar não respeita a Geometria; o programa da disciplina é ministrado por displicência e com descaso; em muitas escolas, a Geometria é ensinada somente no final de semestre, onde os professores não levam em conta as aplicações no dia a dia dessa disciplina, como também não tem material mínimo de suporte didático para ele e para os alunos. Dessa forma, esses fatos dificultam consideravelmente o ensino e aprendizagem da Geometria nas escolas brasileiras, apresentando assim um baixo desempenho tanto dos alunos quanto dos professores em Geometria.

Nascimento (2012) considera como problemas de desempenho docente no ensino da Geometria dois fatores. O primeiro, a maior parte dos professores não quer aprofundar seus estudos por falta de base na sua vida escolar, e o segundo, porque eles não sabem utilizar as tecnologias mais simples, por meio do uso dos instrumentos como: compasso, régua, transferidor, esquadro, como também as tecnologias da computação, como: informática básica, programas educativos em Matemática e etc. Além disso:

> no currículo da escola básica, de nível fundamental e médio, não se evidencia no projeto pedagógico das instituições educativas públicas uma disciplina específica sobre geometria. O que se verifica é a disciplina matemática delineada de forma generalista, onde a geometria se constitui apenas uma unidade de estudo, isto é, um só professor tem que abranger geometria e álgebra, o que dificulta ainda mais o interesse e a motivação para a realização de experiências no campo da geometria, quer por parte dos alunos e dos professores (NASCIMENTO, 2012, p. 30).

Os fatores acima mencionados e outros existentes contribuem bastante para o abandono do ensino da Geometria no Brasil. Pavanello (1993) afirma que a ausência desse ensino e a ênfase no ensino da Álgebra pode prejudicar a formação dos alunos, privando-os da possibilidade de se desenvolver integralmente nos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos. Para esta autora, o que conseguimos ensinar bem com a Geometria, pode favorecer a análise de fatos e de relações, o estabelecimento de ligações entre eles e a dedução, a partir daí, de novos fatos e novas relações. Além disso, o trabalho realizado com a Geometria pode proporcionar o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo, como os PCN afirmam em suas propostas.

À vista disso, Nunes (2011) afirma que ensinar bem Geometria está além de problemas e teoremas, está ligada diretamente ao contexto histórico e cultural dessa disciplina e de suas aplicações. Para este autor (2011, p. 40) "o estudo da geometria contribui para o desenvolvimento da visualização, do pensamento crítico, da intuição, da perspectiva, da resolução de problemas, do raciocínio dedutivo, do argumento lógico e da prova".

Nesse sentido, sabemos que o ensino da Geometria, muitas vezes, não produz esses fatos e outros esperados por nós e pelos PCN, mas isso não implica que o seu ensino seja deixado de lado. Esperamos que os professores busquem por uma formação continuada em Geometria e em novas metodologias de ensino, com o intuito de melhorar a qualidade desse ensino. Além disso, esperamos que as ações governamentais também proporcionem mais cursos e formações para os professores melhorarem seus conhecimentos geométricos, tornando o ensino e aprendizagem da Geometria mais rica e proporcionando aos alunos um trabalho mais efetivo quanto à argumentação, justificação e demonstração de fatos.

Portanto, quando houver uma modificação das visões do professor e do aluno e quando muitos perceberem a importância do ensino da Geometria nas escolas e no dia a dia, conseguiremos ter uma verdadeira aprendizagem em Matemática, pois os alunos serão levados a exploração concreta, a experimentação, a resolução de problemas, a elaboração de conjecturas, as justificativas informais e as provas.

2.3 OS NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Bernard Parzysz (2006) buscou desenvolver um quadro teórico para estudar o raciocínio geométrico dos sujeitos, tentando estabelecer uma articulação entre a percepção e a dedução. Dessa forma, ele propôs uma forma de articulação entre os níveis de pensamento geométrico baseado nas pesquisas desenvolvidas por Van Hiele (1984), Houdement & Huzniak (1998) e Henry (1999).

Van Hiele (1984 apud DIAS, 2009) estabeleceu cinco níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico da criança: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. No nível 0 (visualização), as figuras são identificadas unicamente pelos seus aspectos gerais, isto é, o aluno reconhece as formas e modelos geométricos, compara-os e até mesmo classifica-os. No nível 1 (análise), os alunos começam a distinguir as propriedades dos objetos, porém não conseguem ainda esclarecê-las. No nível 2 (dedução informal), o aluno estabelece relações intra e interfigurais, mas não conseguem realizar uma dedução formal, mesmo que conheçam as definições. No nível 3 (dedução formal), o aluno já é capaz de realizar uma dedução e esta é vista como instrumento de validação dentro de um sistema axiomático. Por fim, no nível 4 (rigor), o aluno é capaz de se colocar nos diferentes sistemas axiomáticos e conseguem fazer comparações entre os mesmos.

De acordo com Dias (2009), Parzysz, ao analisar os níveis de Van Hiele, coloca de um lado os níveis 0 e 1, nomeando-os como geometria "concreta", na qual os objetos são materiais e a validação é perceptiva. O autor também agrupa os níveis 3 e 4, classificando-os de geometria "teórica", na qual os objetos são abstratos e a validação é uma demonstração. Com relação ao nível 2, Parzysz afirma que este é um nível intermediário entre as duas geometrias, na qual o aluno se movimenta da validação perceptiva para a demonstração.

Parzysz (2006) também se apoia em Houdement & Kuzniak (1998 apud DIAS, 2009), os quais distinguem três paradigmas geométricos, que são caracterizados por sua relação com a intuição, a experiência e a dedução. O primeiro tipo diz respeito a uma *geometria natural* (G I), na qual a geometria se confunde com a realidade e a intuição norteia as observações. O segundo tipo é a *geometria axiomática natural* (G II), a qual apresenta um esquema da realidade, tendo lugar para as experimentações. O último tipo é a *geometria axiomática formalista* (G III), na qual não há mais vínculo com a realidade e os resultados são obtidos por meio da dedução.

Segundo Dias (2009), Parzysz afirma, com relação ao estudo de Houdement & Kuzniak, que o "concreto" vai cedendo lugar ao teórico e a validação baseada em observações é substituída pela demonstração no interior de um sistema axiomático.

Por fim, Parzysz (2006) também se apoia em Henry (1999 apud DIAS, 2009), o qual diferencia três tipos de relação com o espaço no ensino-aprendizagem da Geometria. Henry (1999) destaca, inicialmente, a situação "concreta", em seguida, uma primeira modelagem que se refere a uma abstração e simplificação da complexidade de uma situação real observada. E, por fim, uma matematização elaborada a partir de um modelo anterior, que é feita no domínio teórico.

A partir desses três estudos apresentados, Parzysz (2006) propôs outra articulação entre os níveis de pensamento geométrico. Ele tomou como base a natureza dos objetos que são estudados na Geometria e seu tipo de validação. Nesse sentido, o autor considera dois tipos de Geometria: a não-axiomática e a axiomática.

De acordo com Dias (2009), nas Geometrias não-axiomáticas, o estudo é voltado para uma situação concreta, os objetos são modelos da realidade, se referem a eles, ou a uma representação deles por meio de maquetes ou desenhos. A validação de uma afirmação sobre propriedades destes objetos ou relações entre eles é feita por meio da percepção, ou seja, o aluno afirma que é verdadeiro porque assim ele vê ou percebe.

Já nas Geometrias axiomáticas, Dias (2009) afirma que os objetos são teóricos e podem se referir ao real. A validação é feita por meio de teoremas e axiomas. Diferentemente da não-axiomática, nesta geometria uma afirmação que origina-se de uma observação da realidade ou não, só será verdadeira se a mesma puder ser demonstrada. O fato de a afirmação ser ou não fruto de observações é porque se admite que conjecturas podem nascer de resultados teóricos que já foram demonstrados anteriormente, ou no processo de prova. Este caráter assinala o aspecto abstrato desta geometria.

Desse modo, Parzysz (2006) propôs um quadro teórico que comporta um total de quatro paradigmas, que se articulam segundo o esquema abaixo:

Quadro 1 - Síntese da classificação da Geometria segundo Parzysz

	Geometrias não-axiomáticas		Geometrias axiomáticas	
Tipos de Geometria	Geometria concreta (G0)	Geometria spatio-graphique (G1)	Geometria proto-axiomática (G2)	Geometria axiomática (G3)
Objetos	Físicos		Teóricos	
Validação	Perceptiva		Dedutiva	

Fonte: Parzysz (2006)

Parzysz (2006) afirma que os elementos que repousam sobre sua proposta são, por um lado, a natureza dos objetos em jogo (físico vs teórico) e, por outro, os modos de validação (perceptiva vs dedutiva).

Nesse sentido, de acordo com Dias (2009, p. 24) as geometrias não-axiomáticas estão subdivididas em duas outras: a Geometria concreta (G0) e a Geometria spatio-graphique (G1). Em G0, “os objetos são físicos, e suas características físicas influenciam as observações e constatações. A validação é baseada somente na percepção”. Em G1, “os objetos, que eram físicos em G0, ganham uma representação gráfica, que pode ser um esboço ou um desenho construído por processos geométricos”. Dessa forma, essa ação já é um primeiro passo para o processo de abstração, uma vez que os alunos necessitam reconhecer as propriedades que são características do objeto para determiná-los e, assim, fazer sua representação gráfica. Em G1, a validação é baseada em comparação visual e sobreposições, realizadas por meio da régua graduada, do compasso e de esquadros.

Segundo Dias (2009, p. 24-25), as geometrias axiomáticas se subdividem em proto-axiomática (G2) e axiomática (G3). Em G2, "ainda pode-se recorrer a objetos físicos, tais como representações feitas por processos geométricos, mas a sua existência é garantida pelas definições, axiomas e propriedades entre figuras, no interior de um dado sistema axiomático – a geometria euclidiana". A validação dessa Geometria se dá por meio de um discurso dedutivo aplicado aos dados do enunciado do problema, se apoiando nos postulados e axiomas da Geometria Euclidiana. Em G3, "os objetos são teóricos, e a tentativa de representá-los pode incorrer em deformações do objeto representado. A existência dos objetos geométricos, bem como as relações entre si, é baseada em axiomas, definições e teoremas, que podem mudar de uma geometria para outra".

À vista disso, Luis (2006) afirma que a distinção de G2 em relação a G1 e a G3 é que a G2 é uma modelação do espaço físico (de G1), enquanto G3 não faz referência a nenhuma realidade, isto é, G2 é uma Geometria em que os axiomas estão parcialmente implícitos, enquanto G3 é uma versão euclidiana.

Com relação a uma articulação entre G1 e G2, Dias (2009) afirma que o aluno em G1 trabalha com objetos físicos e a validação é perceptiva, já em G2, é esperado que o aluno tenha a compreensão de objetos geométricos como objetos teóricos em última análise e a validação é dedutiva.

Dessa forma, Dias (2009, p. 26) afirma que "em G1 é requerido do aluno, por parte do professor, que ele identifique objetos geométricos por meio de suas representações (físicas ou desenhos construídos com processos geométricos ou não), e não por suas definições". Já em G2:

> espera-se que o aluno apreenda os objetos geométricos como entes abstratos, cuja representação por meio de desenhos ou modelos físicos são importantes para facilitar a sua apreensão, mas não indispensáveis para sua existência como objeto teórico, que é assegurada pela teoria geométrica; no caso de G2, a geometria euclidiana. Também é esperado que o aluno valide as suas observações e/ou resultados com o uso de axiomas e teoremas (DIAS, 2009, p. 26).

Sendo assim, ao analisarmos o que se espera dos alunos em G1 e em G2, percebemos que as ações e comportamentos que os professores esperam dos alunos nesses dois tipos de Geometrias são antagônicos, o que consiste em uma mudança de compreensão e postura diante de um problema geométrico.

Ainda com relação à articulação entre G1 e G2, Parzysz (2006) nos apresenta alguns tipos ou gêneros de tarefas geométricas referentes a essas duas Geometrias. Um desses tipos diz respeito à validação de uma dada conjectura, a qual Parzysz (2006) afirma que existem, no mínimo, duas maneiras de consegui-la:

> a) utilizar como técnica uma demonstração (eventualmente facilitada por uma figura) e se fundamentar em uma tecnologia constituída, por um lado, por uma geometria parcialmente axiomatizada, e, por outro, por um raciocínio hipotético-dedutivo, o conjunto pertencente à geometria G2 (a teoria correspondente sendo uma geometria euclidiana axiomatizada do tipo G3).
> b) utilizar como técnica a realização de um objeto gráfico (figura) e se apoiar em uma tecnologia constituída de um corpus de *construções geométricas* (saídas mais ou menos diretamente de G2) associada a validação perceptiva, o conjunto pertencente da geometria G1 (a teoria correspondente sendo a geometrografia) (PARZYSZ, 2006, p. 134).

Nesse sentido, a tecnologia é utilizada como suporte para auxiliar na verificação de um determinado objeto, por meio das propriedades inerentes àquele objeto, as quais os alunos já são capazes de argumentarem sobre elas (G2), ou pela observação das construções geométricas, estando relacionada apenas a análise da figura de maneira perceptiva (G1).

Com relação a uma articulação entre G2 e G3, Dias (2009) afirma que em G2, o aluno sabe que precisa justificar suas conjecturas utilizando teoremas e axiomas da Geometria Euclidiana, porém não considera os resultados como axiomas locais de modo consciente, ou seja, o aluno não admite uma propriedade, sendo necessária à demonstração de uma situação geométrica, mesmo sabendo que a prova desta propriedade existe, e que talvez ele não queira ou não saiba demonstrar naquele momento.

De acordo com Dias (2009, p. 30), é justamente esta tomada de consciência que diferencia G2 de G3. Para a autora, em G3, "o aluno ao admitir uma propriedade sem demonstração, o faz sabendo que deve prová-la, o que equivale a adicionar axiomas ad hoc". Dessa forma, para que o aluno consiga alcançar o nível G3 é necessário um amadurecimento geométrico, o qual ocorre por meio de um processo que não é rápido e nem fácil, uma vez que podem ocorrer obstáculos nesse processo do perceptivo ao dedutivo.

Para fins de análise dos dados, utilizaremos os quatro níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Parzysz e tentaremos observar em qual(is) dele(s) os alunos da Escola Estadual Carlota Barreira, localizada no município de Areia-PB, se enquadram.

2.4 UTILIZAÇÃO DAS TIC NA SOCIEDADE E NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

As tecnologias são tão antigas quanto à própria humanidade, pois seu surgimento se deu a partir da necessidade de o homem das cavernas fazer seus utensílios para a caça e a pesca, da necessidade de escrita em papiro no Egito, da necessidade de contar utilizando pedras na Antiguidade, da necessidade de criação do alfabeto para facilitar a comunicação das pessoas, dentre outras necessidades geradas a partir da evolução da sociedade.

Nesse sentido, desde os primórdios da humanidade já havia a utilização da tecnologia, passando da simples atividade agrária para a industrialização das cidades. Ou seja, que ocorreu assim a Revolução Industrial. Além disso, com o passar do tempo a informação deixou de ser um processo local, que dizia respeito a uma determinada sociedade, para se apresentar em âmbito global. Passando a reconfigurar o tempo e o espaço, e acelerando as práticas e encurtando as distâncias.

Com a utilização das tecnologias tudo mudou e muda muito rápido, e a sociedade passou a chamar essas mudanças de Era do Computador ou Era Digital, ou seja, a sociedade é chamada agora, não por aquilo que é ou por seus feitos, mas pelos instrumentos que a auxiliam a evoluir. Dessa forma, nessa atual configuração, muitos aspectos passaram a ser mais relevantes na sociedade, tais como:

> valorizou-se o conhecimento; a riqueza dos países passou a ser medida pelo acesso à tecnologia e sua capacidade de desenvolvimento na área; a informação e as práticas relacionadas a ela se tornaram o principal setor da economia. Estes três principais fatores levam hoje à instauração de um simbolismo da tecnologia como bem maior, a ser perseguido e incorporado em novas práticas sociais (KOHN e MORAES, 2007, p. 2).

Diante de toda essa revolução tecnológica em nossa sociedade, já era de se esperar que essa mesma revolução chegasse às escolas. Ou seja, os poderes públicos esperam que as escolas adquiram as tecnologias na sala de aula com o intuito de melhorar o ensino e aprendizagem das disciplinas. Nesse sentido, tanto os PCN do Ensino Fundamental quanto o do Médio, abordam as tecnologias da comunicação como recurso da seguinte forma:

> as tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas.
> Estudiosos do tema mostram que escrita, leitura, visão, audição, criação e aprendizagem são influenciados, cada vez mais, pelos recursos da informática. Nesse cenário, insere-se mais um desafio para a escola, ou seja, o de como incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer (PCN, 1998, p. 43).

Para que isso ocorra é necessário que tenhamos mais cautela quanto à implementação de tecnologias na escola, uma vez que se espera que a relação entre professor e aluno seja modificada, a formação do professor seja continuada e as escolas tenham espaço suficiente para a criação de um laboratório de informática, por exemplo, e que os materiais a serem utilizados nesse laboratório sejam eficientes e de boa qualidade.

Dessa forma, devemos ter em mente que o trabalho com as tecnologias não é algo que venha a substituir o nosso papel de professor ou de aluno, mas que essas tecnologias, segundo Lévy (1999, p. 168), “devem ser pensadas em termos de articulação e de criação de sinergia”. Ou seja, o professor e o aluno estarão em um mesmo espaço de aprendizagem, onde o professor media os conhecimentos e as ideias dos alunos e estes passam a questionar, argumentar e discutir mais as ideias apresentadas pelo professor:

> a principal função do professor não pode mais ser uma difusão dos conhecimentos, que agora é feita de forma mais eficaz por outros meios. Sua competência deve deslocar-se no sentido de incentivar a aprendizagem e o pensamento. O professor torna-se um *animador da inteligência coletiva* dos grupos que estão a seu encargo. Sua atividade será centrada no acompanhamento e na gestão das aprendizagens: o incitamento à troca dos saberes, a mediação relacional e simbólica, a pilotagem personalizada dos percursos de aprendizagem etc (LÉVY, 1999, p. 173).

Nesse trabalho estaremos levando em consideração a ideia de que os computadores não serão substitutos incansáveis dos professores ou que a informática irá oferecer máquinas de ensinar, mas sim de que os computadores serão considerados como instrumentos de comunicação, de pesquisa de informações, de cálculos, de produção de mensagens a serem colocados nas mãos dos alunos com a devida orientação do professor, o qual deverá ter planejado sua aula de maneira que não se torne monótona ou tradicional e que tenha as devidas precauções com o uso das tecnologias.

Nesse sentido, Ponte (2000) nos afirma que as novas tecnologias surgem como instrumentos para serem usados livre e criativamente por parte dos professores e dos alunos, e para isso seria necessário pensar em novos papéis para a escola, novos objetivos educacionais e novas culturas de aprendizagem. O autor ainda nos afirma o quanto é complicado integrar as TIC no processo de ensino e aprendizagem com os currículos atuais que temos e dentro dos condicionalismos existentes em cada escola:

> o professor, em suma, tem de ser um explorador capaz de perceber o que lhe pode interessar, e de aprender, por si só ou em conjunto com os colegas mais próximos, a tirar partido das respectivas potencialidades. Tal como o aluno, o professor acaba por ter de estar sempre a aprender. Desse modo, aproxima-se dos seus alunos. Deixa de ser a autoridade incontestada do saber para passar a ser, muitas vezes, aquele que menos sabe (o que está longe de constituir uma modificação menor do seu papel profissional) (PONTE, 2000, p. 76).

À vista disso, a relação professor e aluno poderá ser profundamente alterada pelo uso das TIC, especialmente se as mesmas forem utilizadas intensamente. Ponte (2000) afirma que as TIC irão proporcionar uma nova relação e um novo tipo de interação do professor com os alunos, como também uma nova forma de integração do professor na organização da escola e na comunidade profissional:

> os professores vêm a sua responsabilidade aumentar. Mais do que intervir numa esfera bem definida de conhecimentos de natureza disciplinar, eles passam a assumir uma função educativa primordial. E têm de o fazer mudando profundamente a sua forma dominante de agir: de (re)transmissores de conteúdos, passam a ser co-aprendentes com os seus alunos, com os seus colegas, com outros actores educativos e com elementos da comunidade em geral. Este deslocamento da ênfase essencial da actividade educativa – da transmissão de saberes para a (co)aprendizagem permanente – é uma das consequências fundamentais da nova ordem social potenciada pelas TIC e constitui uma revolução educativa de grande alcance (PONTE, 2000, p. 77).

Dessa forma, para que haja a apropriação benéfica das TIC na educação é necessária que aconteça muitas mudanças no setor educacional, as quais estão ligadas ao professor e ao aluno, uma vez que eles terão de redesenhar seu próprio papel e redefinir suas responsabilidades na escola atual. Além disso, essas mudanças também dizem respeito à direção da escola, à administração e à própria sociedade, já que é preciso que todos modifiquem suas visões e opiniões sobre o papel de cada um em seu dia a dia e, em especial, quando tratamos e trabalhamos na escola.

Portanto, sabemos que não é fácil o trabalho com as TIC na educação, mas também não é impossível. É necessário que o professor esteja preparado para situações em que ele não saberá responder, de imediato, um questionamento do aluno ou um problema encontrado pelo aluno no computador. Nesse sentido, as relações professor-aluno e aluno-aluno são modificadas, as quais o professor torna-se mediador do ensino e os alunos passam a questionar e perguntar mais sobre aqueles conhecimentos que estão sendo apresentados e propostos pelo professor.

2.5 O GEOGEBRA

Janzen (2011) nos afirma que para que o aluno tenha uma boa compreensão da matemática, é necessário que ele tenha representações mentais ricas de conceitos, que contenham vários aspectos deles, uma vez que isto permitirá uma maior flexibilidade na resolução de problemas. Porém, a autora afirma que na medida em que isso é necessário, percebe-se que há essa falta de compreensão nos alunos, uma vez que se fizermos qualquer mudança na estrutura de um problema ou na sua formulação, já lhes tira a capacidade de resolução. Para essa autora, os alunos, em geral, se limitam a usar uma única representação do conceito e assim falham em resolver o problema em questão.

Nesse sentido, para que os alunos venham a ter uma boa compreensão matemática, tendo representações mentais ricas de conceitos, uma possível abordagem no ensino é usar diversas representações de objetos desde o início, interligando uma a outra. Desse modo, segundo Janzen (2011), os ambientes computacionais são uma ferramenta útil para tal, pois neles também aparece o processo de visualização. Para esta autora, a visualização é entendida não como simplesmente ver o que está posto, mas sim olhar cada parte, buscar configurações e relações que possam ser exploradas.

À vista disso, o uso das tecnologias, em especial as calculadoras e os computadores, na sala de aula traz significativas contribuições para repensarmos sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Nesse sentido, os PCN do Ensino Fundamental nos orientam que essas contribuições se dão à medida que:

> - relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
> - evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
> - possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
> - permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo (PCN, 1998, pp. 43 e 44).

Já os PCN do Ensino Médio nos afirmam que a Tecnologia para a Matemática dispõe de programas de computador (*software* ou aplicativo) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos. Além disso, esses programas apresentam recursos que provocam, de forma natural, o processo de *pensar matematicamente*, isto é, os alunos são motivados a fazerem experimentos, testarem suas hipóteses, esboçarem conjecturas e criarem estratégias para a resolução de problemas. Ademais, são características desses programas:

> - conter um certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento;
> - oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica;
> - possibilitar a expressão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções;
> - permitir a manipulação dos objetos que estão na tela (OCEM, 2006, p. 88).

À vista disso, na Matemática e na Educação Matemática dispomos de vários *softwares*, isto é, aplicativos, e jogos com seus funcionamentos para a utilização de diferentes conhecimentos com o intuito de auxiliar na escrita matemática ou no ensino e aprendizagem da Matemática. Eles podem ser gratuitos ou pagos, como GeoGebra, Cabri

Géomètre, Poly, Equation Grapher, Geoplan, Geospace, Graphequation, Graphmatica, Matemática na Selva, MathGV, Modellus, NonEuclid, OOG (Object Orientation Game), Régua e Compasso, S-Logo, Tess, Torre de Hanói, Winarc, WinGeom, WinMat, WinPlot, MatLab, Maple, Geometer's Sketchpad, dentre outros.

Com essa gama de aplicativos disponíveis ou pagos na Educação Matemática e na Matemática, optamos por trabalhar com um aplicativo de Geometria Dinâmica, uma vez que esses aplicativos tornam as aulas mais dinâmicas e interativas; possibilitam que o aluno interligue a Geometria com a Álgebra, já que para uma figura geométrica há a sua representação algébrica e vice-versa; quando construímos algo nesses aplicativos, podemos aplicar movimento a seus elementos e as relações geométricas impostas à figura são preservadas; como também enriquecem as imagens mentais associadas às propriedades geométricas:

> o termo "Geometria Dinâmica" está fortemente relacionado aos softwares que permitem que as figuras geométricas possam ser arrastadas pela tela mantendo-se os vínculos estabelecidos durante sua construção. Isso provoca transformações que "ocorrem continuamente em tempo real, determinadas pelos movimentos do cursor controlados pelo usuário" (SHUMANN e GREEN, 1994 apud ZULATTO e PENTEADO, 2006, p. 1).

Sobre os principais benefícios e aplicações dos aplicativos de geometria dinâmica, King e Schattschneider (1997 apud JANZEN, 2011, p. 46) apontam: (a) a precisão de construções e a capacidade de visualização das relações geométricas; (b) a possibilidade de exploração das construções e a descoberta de relações e propriedades geométricas; (c) a busca de prova de teoremas, de forma experimental e heurística; (d) a geração de transformações e lugares geométricos; e (e) a possibilidade de simulação e de construção de micro-mundos com características próprias.

Petla (2008) nos afirma que esse termo Geometria Dinâmica (GD) é utilizado para especificar a Geometria implementada em computador, ou seja, a Geometria que permite que os objetos sejam movidos mantendo-se todos os vínculos estabelecidos inicialmente na construção. Além disso, essa nomenclatura é melhor entendida como uma oposição à Geometria Tradicional de régua e compasso, que é estática, porque após o aluno realizar uma construção, se ele desejar analisá-la com alguns dos objetos em outra disposição terá que construir um novo desenho. Já a Geometria Dinâmica possui um recurso de transformação contínua em tempo real, quando utilizamos o simples *arrastar* das construções.

Nesse sentido, na Geometria Dinâmica, quando os alunos arrastam as figuras geométricas com o cursor, as mesmas não perdem a propriedade geométrica relacionada a ela, fazendo com que eles compreendam melhor os conteúdos da Geometria envolvidos nas figuras construídas, como também possibilita a conjectura e a validação de teoremas desta área da Matemática. As OCEM nos afirmam que esse aplicativo de Geometria Dinâmica:

> exige, além de conhecimento em geometria, uma escolha de estratégia de resolução do problema, com a elaboração de um cronograma de ataque aos diferentes subproblemas que compõem o problema maior. É uma atividade que coloca em funcionamento diferentes habilidades cognitivas – o pensar geométrico, o pensar estratégico, o pensar hierárquico (OCEM, 2006, pp. 88 e 89).

Dessa forma, esses programas oferecem essa possibilidade de movimento e é o que os tornam dinâmico, uma vez que as figuras podem ser arrastadas e modificadas, enriquecendo, assim, a concepção de 'figura', uma vez que podemos ter várias representações de um mesmo objeto, sem que o mesmo perca suas propriedades geométricas. Com relação a isso, Olivero afirma que:

> a característica mais relevante dos softwares de geometria dinâmica é exatamente essa função de "arrastar" (dragging), isto é, a possibilidade de mover e manipular as figuras construídas na tela do computador: se uma figura foi construída corretamente, de acordo com as propriedades geométricas, ela manterá suas relações internas mesmo sendo arrastada (OLIVERO, 2002, p.59 apud JANZEN, 2011, p. 48).

Ainda com relação ao *arrastar*, Gravina (2001, p.83) classifica este recurso de *estabilidade sob ação do movimento*:

> estes programas oferecem o recurso de 'estabilidade sob ação do movimento': feita uma construção, mediante deslocamentos (dragging) aplicados aos elementos iniciais determinadores do objeto geométrico, o desenho na tela do computador – instância de representação do componente figural – transforma-se, mas preserva, nas novas instâncias, as relações geométricas impostas inicialmente à construção, bem como as relações delas decorrentes. Ou seja, para um dado objeto tem-se na tela do computador uma coleção de 'desenhos em movimento' que guarda certos invariantes geométricos, declarados ou não no procedimento de construção (GRAVINA, 2001, p.83).

Dessa forma, a possibilidade que os aplicativos de geometria dinâmica nos proporcionam com a função *arrastar* é grandiosa, uma vez que nos sugere novas maneiras de raciocinar e operar e até mesmo de conceber a Geometria, uma vez que nos apresenta o caráter relacional dos objetos geométricos. Ou seja, para Janzen (2011), nesses ambientes temos múltiplas construções possíveis para um mesmo objeto geométrico e assim os alunos passam a compreender que, a partir de certos fatos declarados (hipóteses), outros destes decorrem – os fatos estáveis implícitos (a tese do teorema), então passíveis de explicação. Para a autora, esta compreensão é parte fundamental para a construção de uma demonstração.

Com a utilização da função *arrastar*, temos uma problemática com relação aos conceitos de desenho e figura adequados à geometria dinâmica. Segundo Olivero (2002, p. 59 apud JANZEN, 2011, p. 50), o desenho pode representar um objeto geométrico, com relações internas, porém que se alteram em outros objetos pelo arrastar, já as figuras são invariantes geométricos que se mantém mesmo com o arrastar de alguma de suas partes.

Para Parzysz (2006), figura é um objeto geométrico teórico definido por um enunciado e desenho é uma representação material deste objeto teórico sobre um suporte plano, que pode ser uma folha de papel, tela de computador, entre outros.

Dessa forma, ao construirmos figuras em um ambiente dinâmico, estas adquirem um estatuto diferente dos simples desenhos, uma vez que as mesmas ao se arrastar alguns de seus pontos, não perderão as propriedades impostas a elas. À vista disso, Janzen (2011) nos afirma que essas figuras passam a ser exemplos genéricos, possibilitando uma exploração dinâmica das propriedades envolvidas, uma vez que a construção da figura utiliza explicitamente as suas propriedades, e isto proporciona uma visualização de muitas e diferentes representações de uma mesma classe de figuras.

Com todas essas possibilidades, optamos por trabalhar com o aplicativo GeoGebra que foi criado pelo austríaco Ph.D. Markus Hohenwarter, com início do projeto em 2001 na University of Salzburg e que continua seu desenvolvimento na Florida Atlantic University com uma equipe internacional de programadores, para a Educação Matemática nas escolas. O nome GeoGebra reúne GEOmetria, ÁlGEBRA e Cálculo. Esse aplicativo recebeu muitos prêmios internacionais, incluindo o prêmio de software educacional Alemão e Europeu.

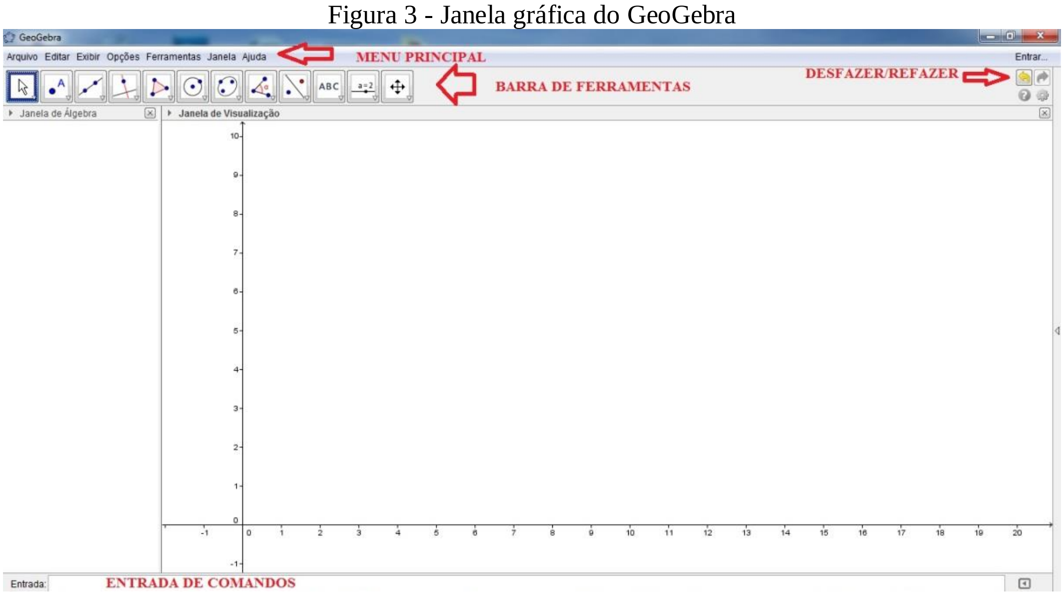
O GeoGebra é um aplicativo gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, combinando a Geometria, a Álgebra, tabelas, gráficos, Estatística e Cálculo em um único sistema. Além disso, os gráficos, Álgebra e tabelas construídos estão interconectados e possuem características dinâmicas; sua interface é amigável com vários recursos sofisticados; pode-se reproduzir as construções em páginas WEB, e está disponível em vários idiomas.

O GeoGebra pode ser adquirido gratuitamente a partir da Internet. No site <http://www.geogebra.org/cms/> encontra-se o link para download, com a última atualização, versão 5.0. Qualquer usuário pode fazer a instalação individual do programa de forma fácil e rápida, desde que seja para fins não comerciais. Além disso, é possível baixar também o manual do GeoGebra, acessando o site <www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Esse aplicativo também possui extensões para Google Chrome, Windows, Mac OS X App Store, Ubuntu, openSUSE e JavaApplet. Aliado a isso temos que:

> o GeoGebra está rapidamente ganhando popularidade no ensino e aprendizagem da matemática em todo o mundo. Atualmente, o GeoGebra é traduzido para 58 idiomas, utilizado em 190 países e baixado por aproximadamente 300.000 usuários em cada mês. Esta utilização crescente obrigou o estabelecimento do Internacional GeoGebra Institute (GII), que serve como uma organização virtual para apoiar GeoGebra locais iniciativas e institutos (NASCIMENTO, 2012, p. 128).

A Interface deste aplicativo é composta de uma janela gráfica (ver Figura 3) que se divide em uma janela de Álgebra, uma janela de visualização, menu principal, barra de ferramentas e um campo de entrada de comandos:

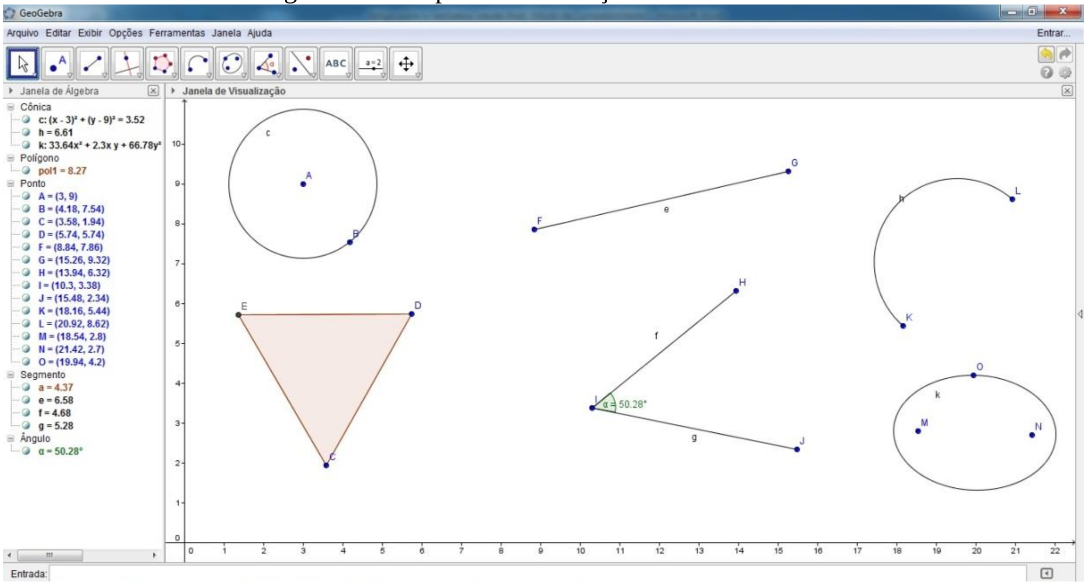
Figura 3 - Janela gráfica do GeoGebra



Fonte: Nossa autoria

A janela de visualização possui um sistema de eixos cartesianos no qual o usuário poderá fazer construções geométricas com o mouse e, simultaneamente a isso, as coordenadas e as equações correspondentes são mostradas na janela de Álgebra (ver Figura 4).

Figura 4 - Exemplos de construções no GeoGebra



Fonte: Nossa autoria

Dessa forma, todas as representações de um mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

Na janela de visualização podemos realizar construções geométricas utilizando as ferramentas disponíveis na Barra de ferramentas. Cada objeto criado na janela de visualização tem também sua representação na janela de Álgebra. Na janela de Álgebra, os objetos matemáticos são organizados em suas classes: objetos livres e objetos dependentes. Isto é, se criarmos um novo objeto, sem que para tal tenhamos utilizado qualquer objeto já existente, ele é classificado como *objeto livre*. Se, pelo contrário, nosso novo objeto tenha sido criado com algum recurso de objetos já existentes, ele é classificado como *objeto dependente*.

O campo de entrada de comandos é usado para escrever coordenadas, equações, comandos e funções, e estes são mostrados na janela de visualização e na janela algébrica imediatamente após pressionar a tecla *Enter*.

Araújo e Nóbriga (2010) nos recomendam que mesmo que o GeoGebra forneça condições que possibilitem a elaboração de situações que favoreçam a construção de conhecimentos pelo aluno, o aplicativo, sozinho, não pode ensinar coisa alguma. Ou seja, para que aconteça aprendizagem efetiva com esse aplicativo é necessária a elaboração de situações de uso. Além disso, quando propomos atividades aos alunos, nesse aplicativo, sem uma finalidade específica, as mesmas não proporcionam conhecimento aos alunos, ou seja, para que haja aprendizagem é necessário que o aluno reflita durante a execução das atividades, buscando experimentá-las de diferentes maneiras, percebendo as propriedades, conjecturando e justificando:

> o papel do professor é de fundamental importância nesse processo. Ele precisa criar novos mecanismos para fazer com que os alunos reflitam e percebam o que de fato está por trás das construções que eles estão fazendo, além de auxiliá-los nas justificativas das construções (ARAÚJO e NÓBRIGA, 2010, p. XI).

Nessa perspectiva, Gravina e Santarosa (1998) nos afirma que a aprendizagem da Matemática, em especial da Geometria, dependerá de ações que caracterizem o *fazer matemático*, ou seja, os alunos poderão experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e, enfim, demonstrar. Dessa forma, o aluno deixará o seu papel passivo, como ocorria antes, o qual só recebia os conhecimentos transmitidos pelo professor, passando, agora, a ter o seu conhecimento construído a partir de investigações, explorações e finalizando com a escrita formal e organizada dos resultados obtidos. Para tanto, o trabalho com o GeoGebra, a ser realizado tanto pelo professor quanto pelo aluno, podem ser feito de duas maneiras:

> a) os alunos constroem os desenhos de objetos ou configurações, quando o objetivo é o domínio de determinados conceitos através da construção;
> b) recebem desenhos prontos, projetados pelo professor, sendo o objetivo a descoberta de invariantes através da experimentação e, dependendo do nível de escolaridade dos alunos, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente (GRAVINA, 1996, p. 7).

Gravina (1996) nos afirma que nesse novo cenário o professor interage com os alunos como questionador e mediador, procurando situá-los, sempre que necessário, nas atividades propostas, porém deixando sempre para os alunos o ajuste das conjecturas. Já os alunos, suas atitudes frente a esse novo processo de aprender, dizem respeito à experimentação, criação de estratégias, construção de conjecturas, argumentação e dedução das propriedades matemáticas impostas às construções. A autora ainda argumenta que a partir desses experimentos dinâmicos as regularidades e invariantes vão surgindo e pela essência do pensamento matemático surgirá nos alunos à busca de uma demonstração que independa de experiências concretas.

Nesse sentido, de acordo com Bennet (2004), o uso do GeoGebra poderá auxiliar no processo de transformação daquilo que é abstrato para o concreto (visível), uma vez que o ambiente de Geometria Dinâmica irá encorajar os alunos a descobrirem novas representações e refletirem mais de perto a forma como o ensino da Matemática é construído, isto é, o aluno irá perceber como um matemático, inicialmente, visualiza e analisa um determinado problema, fazendo conjecturas antes de realizar provas e demonstrações.

Com o dinamismo do GeoGebra, os alunos podem compreender muitos conceitos em Matemática, pois este dinamismo permite a movimentação de construções iniciais e a visualização do que acontece com os objetos que dependem dessas construções sem a perda dos vínculos geométricos. Dessa forma, o GeoGebra irá estimular o caráter investigativo das tarefas, permitindo que os alunos levantem hipóteses, criem conjecturas e verifiquem se essas são ou não verdadeiras.

Pertile, Pierozan e Lieban (2012) nos afirmam que quando adequadamente utilizamos o GeoGebra, ele pode contribuir para o ensino de vários conteúdos matemáticos. Porém, cabe ao professor escolhê-los, levando em consideração o seu planejamento previsto, seja pelo conteúdo a ser abordado, pelo tempo reservado para a atividade, pelo domínio (do aplicativo ou do conteúdo) da turma ou por qualquer outro fator que venha a interferir direta ou indiretamente na condução da proposta. Além disso, o professor, diante dessa nova perspectiva e proposta, deve:

> assumir um papel de parceiro, conduzindo atividades que visem à exploração e a descoberta e favoreçam a criatividade e o envolvimento do aluno com o assunto em questão. Assim, em uma prática em que o sujeito participa e percebe os resultados de suas ações, e mais, faz uso desta interação para o desenvolvimento do conhecimento, entende-se haver uma aprendizagem sólida e consistente (PERTILE, PIEROZAN e LIEBAN, 2012, p. 479).

Para esses autores é preciso respeitar o ritmo de aprendizagem de cada aluno, já que cada um possui um tempo diferente de assimilação. Eles ainda afirmam que o docente deve decidir o momento e a abordagem adequados na utilização do GeoGebra como um recurso auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que essa escolha reflete o seu conhecimento do conteúdo, que deve ser pensado, analisado e aperfeiçoado continuamente. Desse modo, Pertile, Pierozan e Lieban (2012, p. 483) afirmam que “não basta que o professor queira utilizar as tecnologias no ensino da matemática, é necessário que ele esteja capacitado e que seus objetivos didáticos estejam relacionados com o *software* a ser utilizado para que seu uso em sala de aula não se torne em vão”.

Nesse sentido, esse aplicativo, assim como outros recursos, pode ser usado em benefício da educação quando as atividades e metas forem bem definidas. O professor, portanto, não precisa, nem deve ignorar, suas demais concepções metodológicas e nem deve temer ser substituído por esses recursos, basta reflexão, capacitação e disponibilidade ao novo.

Quando trabalhamos com as provas e demonstrações utilizando o GeoGebra, estas aparecem como alternativa para o desenvolvimento de conjecturas, argumentações, construção do raciocínio hipotético-dedutivo e articulações entre os níveis de raciocínio geométrico. Ou seja, a utilização do aplicativo GeoGebra exerce uma especial importância na questão da visualização, uma vez que a visualização e a identificação do objeto geométrico são caracterizados como um passo preparatório para o entendimento da formalização do conceito, isto é, para o processo de uma prova.

Desta forma, ao se trabalhar com o aplicativo GeoGebra, o aluno é levado a perceber a importância da prova e a exercer as suas mais variadas funções. Como De Villiers (2001) nos afirma, as provas e demonstrações são uma parte indispensável do conhecimento matemático e seu valor está muito além da mera verificação de resultados. Nesse sentido, as provas e demonstrações têm muitas outras funções, como, por exemplo, a explicação (proporcionar compreensão sobre o porquê é que é verdade), a descoberta (descoberta ou a invenção de novos resultados), a comunicação (a negociação do significado), o desafio intelectual (a realização ou satisfação pessoal por se ter construído uma demonstração) e a sistematização (a organização de vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas). (DE VILLIERS, 2001).

À vista disso, quando o aluno trabalha com o aplicativo GeoGebra, ele pode verificar facilmente as propriedades existentes naquela figura construída e ao se fazer novas movimentações, ele ampliará seu leque de conceitos. Porém, o aluno pode também, mesmo convencido da veracidade das construções, descobrir demonstrações dedutivas, não porque ele tenha a necessidade de aumentar a sua certeza, mas para explicar por que elas são verdadeiras e se ele é capaz de demonstrá-las.

Nesse sentido, o aplicativo GeoGebra permite que o aluno descubra instantaneamente se uma conjectura está certa ou errada, uma vez que se esta estiver errada, isso é imediatamente óbvio quando se manipula as construções na janela de visualização de forma dinâmica. Já se estiver certa, as construções permanecem consistentes, seja qual for a forma de mexer na figura.

Dessa forma, observamos, assim como Hofstadter (1997, p. 10 apud DE VILLIERS, 2001, p. 6), que esses trabalhos no GeoGebra não são demonstrações, uma vez que as demonstrações são ingredientes críticos do conhecimento matemático, porém, concordamos também com este autor, que não somos um dos que acreditam que a certeza *só* se adquire com a demonstração.

De Villiers (2001), ao manipular um software de Geometria Dinâmica, observou que as investigações feitas nesses aplicativos dinâmicos podem também auxiliar a construção de uma eventual demonstração, uma vez que esses aplicativos permitem generalizar um resultado a partir da identificação de suas propriedades fundamentais por meio do dinamismo. Por conta disso, de acordo com o autor, a função de verificação de uma prova e uma demonstração pode e deve ser desenvolvida por meio de um aplicativo de geometria dinâmica, já que este dá possibilidade aos alunos de atingirem uma compreensão mais desenvolvida sobre o valor e a natureza da demonstração dedutiva.

Para De Villiers (2001), ao invés de colocarmos em foco a função de verificação de uma prova e uma demonstração em geometria dinâmica, deveríamos utilizar inicialmente a função mais fundamental de explicação e descoberta para introduzir a demonstração como uma atividade significativa para os alunos. Para este autor, isto requer que os alunos sejam iniciados bem cedo à arte de formular problemas e que lhes tenham sido proporcionadas oportunidades suficientes para explorar, conjecturar, refutar, reformular, explicar, etc.

Portanto, nós acreditamos que o trabalho realizado interligando as provas e demonstrações e suas verificações no GeoGebra fazem com que os alunos construam aquilo que está sendo pedido, tendo como processos os de experimentar, interpretar, visualizar, induzir, abstrair, generalizar e, por fim, demonstrar. Ou seja, quando levamos em consideração o grau de maturidade dos alunos e seus conhecimentos prévios, percebemos e podemos aceitar àquelas verificações feitas no GeoGebra como um tipo de prova e demonstração, uma vez que, naquele momento, o aluno está sendo capaz de construir, questionar, argumentar e conjecturar seu próprio conhecimento.

CAPÍTULO 3

TIPO DE PESQUISA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esse capítulo está dividido em cinco seções. A primeira traz algumas colocações sobre o trabalho colaborativo e o Projeto OBEDUC/CAPES. A segunda reflete sobre o local e sujeitos da pesquisa, a terceira discute o tipo de pesquisa e instrumentos, a quarta o desenvolver da coleta dos dados e, por fim, a última traz algumas colocações referentes à análise dos dados.

3.1 O PROJETO OBEDUC/CAPES E O TRABALHO COLABORATIVO

Trazemos alguns apontamentos de Peixoto e Carvalho (2007) e Ibiapina (2008) referentes à cooperação, colaboração, trabalho colaborativo e pesquisa colaborativa. Porém, quanto ao Projeto OBEDUC, preferimos seguir e optar pelas colocações propostas por Ibiapina (2008) quanto à pesquisa colaborativa, uma vez que nosso olhar para colaboração tem o mesmo viés que o dela.

Peixoto e Carvalho (2007) nos afirmam que o principal elemento de diferença entre trabalho cooperativo e colaborativo está no grau de autonomia de cada participante e o controle que eles exercem sobre sua ação no grupo. Ou seja, optarmos por cooperação e colaboração irá depender da maturidade dos participantes, de sua autonomia e de suas competências quanto ao tema que será trabalhado ou proposto.

Para Peixoto e Carvalho (2007) se optarmos pelo trabalho colaborativo teremos a realização de uma determinada tarefa e o desenvolvimento da autonomia e da capacidade de trabalhar em grupo que são os mesmos objetivos da abordagem cooperativa. Porém, *a diferença é que a colaboração dá mais liberdade aos integrantes do grupo.* Ou seja, a colaboração é mais adequada a um tipo de relação desenvolvida em uma lista de discussão, com o objetivo de trocar informações e ideias e para que haja um desenvolvimento de discussões nesse grupo de trabalho.

Segundo Ibiapina (2008), no âmbito da pesquisa colaborativa, *os professores trabalham em interação com o pesquisador*, construindo teorias sobre as suas práticas profissionais e interpretam com os demais colegas suas compreensões a respeito da questão de investigação proposta pelo pesquisador, não existindo, assim, hierarquia entre os participantes. Ou seja, na pesquisa colaborativa, os partícipes são considerados como coprodutores da pesquisa e, nesse processo:

> a colaboração é produzida por intermédio das interações estabelecidas entre as múltiplas competências de cada um dos partícipes, os professores, com o potencial de análise das práticas pedagógicas; e o pesquisador, com o potencial de formador e organizador das etapas formais da pesquisa. A interação entre esses potenciais representa a qualidade da colaboração, quando menor as relações de opressão e poder, maior o potencial colaborativo (IBIAPINA, 2008, p. 20).

Nesse sentido, a pesquisa colaborativa, segundo Ibiapina (2008), proporciona condições para que os professores reflitam sobre sua prática e sobre seus valores e crenças, fazendo-os questionar os aspectos da prática profissional que mais os preocupam. Dessa forma, pesquisar colaborativamente considera tanto o lado e o ponto de vista da academia (pesquisador) quanto o lado e o ponto de vista do professor. Além disso, para a autora, pesquisar colaborativamente significa envolver tanto os pesquisadores quanto os professores em projetos comuns que busquem o benefício da escola e o desenvolvimento profissional do docente:

> a pesquisa colaborativa é prática que se volta para a resolução dos problemas sociais, especialmente aqueles vivenciados na escola, contribuindo com a disseminação de atitudes que motivam a co-produção de conhecimentos voltados para a mudança da cultura escolar e para o desenvolvimento profissional dos professores. Em síntese, essa é uma prática alternativa de indagar a realidade educativa em que investigadores e educadores trabalham conjuntamente na implementação de mudanças e na análise de problemas, compartilhando a responsabilidade na tomada de decisões e na realização das tarefas de investigação (IBIAPINA, 2008, p. 23).

Além disso, Ibiapina (2008) nos afirma que colaborar não significa cooperar nem tampouco participar, mas significa oportunidade igual e negociação de responsabilidades, em que todos os participantes têm voz e vez em todos os momentos da pesquisa. Nesse sentido, os participantes tem voz para expressar suas ideias, interpretar e descrever práticas e teorias, abordando suas compreensões, concordâncias e discordâncias em relação aos discursos dos outros partícipes. Dessa forma:

> colaborar significa tomada de decisões democráticas, ação comum e comunicação entre investigadores e agentes sociais que levem à construção de um acordo quanto às suas percepções e princípios. Nessa perspectiva, a colaboração se efetiva a partir da interação entre pares com diferentes níveis de competência, isto é, colaboração significa a ajuda que um par mais experiente, no caso o pesquisador, dá a um outro menos experiente no momento de realização de determinada atividade, no caso a pesquisa, é também ação formativa desenvolvida conjuntamente que faz o desenvolvimento pessoal e profissional de professores (IBIAPINA, 2008, p. 34).

Nesse sentido, em meio a essas colocações de Ibiapina (2008), temos a certeza que nosso trabalho versa em um trabalho colaborativo, uma vez que todos têm voz e vez dentro do Projeto OBEDUC/CAPES, como também temos pesquisadores, professores da educação básica e graduandos trabalhando juntos. Sabendo que não há hierarquia e que todos trabalham juntos para o desenvolvimento da pesquisa, compreendemos que o trabalho colaborativo satisfaz as necessidades de formação dos professores e as necessidades investigativas dos pesquisadores, uma vez que envolve os participantes em processos de reflexão sobre suas práticas, proporcionando a partilha de experiências e ideias e mobilizam a ampliação do nível de aprendizagem docente.

À vista disso, adotamos essas colocações de Ibiapina (2008) para nosso Projeto OBEDUC/CAPES, já mencionado anteriormente, assim como adotamos a seguinte definição de pesquisa colaborativa proposta pela autora, uma vez que aborda as ideias principais que pretendíamos alcançar com o cunho colaborativo desse projeto, unindo professores universitários, mestrandos, professores da educação básica e graduandos:

> [...] pesquisa colaborativa é, no âmbito da educação, atividade de co-produção de saberes, de formação, reflexão e desenvolvimento profissional, realizada interativamente por pesquisadores e professores com o objetivo de transformar determinada realidade educativa. Compreendo ainda que a pesquisa colaborativa envolve empreendimento complexo que leva tempo para ser apreendido, já que sua execução envolve opção por ações formativas que possam auxiliar o professor a valorizar o pensamento do outro e a construir ambiente de discussão, de autonomia e de respeito mútuo. Assim, os processos de aprendizagem construídos colaborativamente oferecem potencial de auxílio tanto para a concretização do pensamento teórico quanto das práticas emancipatórias, já que fortalece a prática docente, abrindo caminhos para o desenvolvimento pessoal e profissional tanto dos pesquisadores quanto dos professores (IBIAPINA, 2008, p. 31).

O Projeto, intitulado de *Trabalho colaborativo com professores que ensinam Matemática na Educação Básica em escolas públicas das regiões Nordeste e Centro-Oeste*, que está dentro do Programa Observatório da Educação (OBEDUC), foi inicialmente pensado pelas docentes doutoras Patrícia Sandalo Pereira, Abigail Fregni Lins e Mercedes Betta Quintano de Carvalho Pereira dos Santos, cada qual exercendo seu trabalho em instituições diferentes, a saber, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e Universidade Federal de Alagoas (UFAL), respectivamente. O referido Projeto foi aprovado pela CAPES sem necessidade de alterações na proposta e de aprovação plena do orçamento, o qual podemos dizer que foi fruto de muito trabalho e dedicação das docentes.

O Projeto Observatório da Educação OBEDUC/CAPES foi proposto com dois diferenciais. O primeiro que este seja realizado em rede, ou seja, três instituições trabalham a distância nos seus respectivos núcleos buscando executar suas atividades e a partir dos eventos mesclam suas opiniões e propostas. O segundo é o trabalho colaborativo desenvolvido por cada núcleo e que se encadeia por todo o projeto em rede, buscando melhorias para a Educação Matemática.

Dessa maneira, por o Projeto ser em rede, temos três núcleos de atuação de cada pesquisadora. O núcleo da UFMS, coordenado pela docente Patrícia Sandalo Pereira, a qual também é a coordenadora geral do Projeto, composto por 4 mestrandos, 7 professores da educação básica e 4 graduandos. O núcleo UEPB, coordenado pela docente Abigail Lins é composto por 5 mestrandos, 7 professores da educação básica e 8 graduandos. E o núcleo UFAL, coordenado pela docente Mercedes Carvalho, composto por 1 doutoranda, 3 professoras da educação básica e 3 graduandas, totalizando em 46 membros.

Além disso, esse Projeto possui duração de 3 (três) anos, tendo iniciado em Março de 2013 com finalização em Fevereiro de 2016. No núcleo UEPB, dividimos nosso trabalho em quatro fases. Na primeira fase, realizamos reuniões gerais e de equipes, estudos, leituras, debates, discussões e ocorreu o I Seminário OBEDUC em Maceió, Alagoas. Na segunda fase, foram realizadas reuniões gerais e de equipe, leituras, debates, discussões, planejamento de uma proposta didática e ocorreu o II Seminário OBEDUC em Campina Grande, Paraíba. Na terceira fase, ocorreram reuniões gerais e de equipe, finalização e aplicação de uma proposta didática em escolas e agendamento do III Seminário OBEDUC realizado em Campo Grande, Mato Grosso do Sul. Na quarta e última fase, serão realizadas reuniões, leituras, discussões, análises e escritas do trabalho realizado e dos resultados alcançados.

O núcleo UEPB conta com 20 membros organizados em 4 equipes, sendo elas iniciadas pelas propostas de dissertação dos 4 membros/mestrandos do núcleo. Cada equipe é formada por um mestrando, dois professores da educação básica e dois graduandos. As equipes foram nomeadas de Robótica na Educação Matemática; Provas e Demonstrações Matemáticas; Deficiência Visual e Materiais Manipuláveis na Educação Matemática; e, Argumentação e Calculadoras na Educação Matemática.

Fazemos parte da Equipe *Provas e Demonstrações Matemáticas*, na qual estudamos vários artigos e livros referentes à utilização das provas e demonstrações no ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica; à aplicação dos aplicativos nas aulas de Matemática, em especial o GeoGebra; e o desenvolvimento de um trabalho colaborativo entre equipes de pesquisadores, professores e alunos das universidades.

Nosso núcleo da UEPB iniciou o trabalho com todos em agosto de 2013 e foi decidido realizar as reuniões às segundas feiras, com duração de duas horas. De início, as reuniões foram gerais, isto é, com os 20 integrantes do núcleo UEPB, nas quais discutíamos os eventos que iríamos participar; realizamos leituras sobre trabalho e pesquisa colaborativos; realizávamos relatos de cada equipe com o intuito de sabermos o que cada grupo estava elaborando e fazendo; organizávamos eventos; e tivemos orientação de como proceder nas reuniões de equipe e nas nossas propostas de pesquisa.

Decorrido algum tempo, após todos saberem o que iriam fazer e já estando cientes de como deveria ser feito o trabalho colaborativo, foram realizadas as divisões das 4 equipes, propondo uma reunião geral e 3 reuniões de equipe por mês, na qual cada equipe iria sentir o tempo necessário para o trabalho e estudo.

Dessa maneira, as reuniões de nossa equipe ocorreram todas segundas feiras, com duração de duas horas. Na nossa primeira reunião de equipe discutimos o que cada membro queria trabalhar e a proposta de pesquisa de cada um, objetivando fazer um enlace dentro do nosso trabalho colaborativo. Além disso, como já mencionado, nossas leituras estavam em torno do trabalho colaborativo, das TIC e das provas e demonstrações matemáticas.

No segundo semestre de 2014, com o desenvolver das leituras e atividades, percebemos que estávamos necessitando de mais tempo para trabalhar em equipe. Dessa forma, continuamos a nos reunir todas segundas feiras, porém com duração de quatro horas. Ainda nesse segundo semestre de 2014 começamos a montar o esqueleto da nossa proposta didática e continuamos a ler e discutir sobre provas e demonstrações matemáticas.

No ano de 2015, as reuniões em equipe ocorreram juntamente com a docente Abigail Lins, pois nossa equipe ainda estava um tanto perdida quanto à escolha dos assuntos, à escolha do referencial teórico e o fechamento de nossas pesquisas na equipe. Dessa forma, a docente nos motivou e recomendou ler mais algumas dissertações e artigos referentes às nossas dúvidas para que conseguíssemos alavancar a nossa proposta didática.

Após a nova fase de leitura, conseguimos fechar o nosso referencial teórico juntamente com os assuntos a serem abordados na proposta didática e as turmas que iríamos trabalhar. Além disso, decidimos os instrumentos de pesquisa que iríamos utilizar, as divisões e as questões da proposta didática e como seria a sua aplicação.

Portanto, o ano de 2015 foi bastante produtivo, pois conseguimos chegar a um senso comum dentro da equipe quanto ao referencial teórico adotado e aos assuntos da proposta didática. Além disso, elaboramos nossa proposta didática com o objetivo de levar o aluno a justificar, argumentar e provar as suas respostas.

3.1.1 Leituras comuns na Equipe

No ano de 2013 e 2014, elaboramos um cronograma de leituras dividindo-as em três momentos. No primeiro momento realizamos leituras e debates sobre provas, demonstrações e argumentações matemáticas. No segundo realizamos leituras e discussões sobre TIC, em especial o aplicativo GeoGebra. No terceiro momento realizamos leituras e debates sobre trabalho colaborativo. Vale salientar que nos propomos a ler os artigos ou livros, fazermos um resumo ou resenha do que percebemos neles e na equipe discutimos nossas visões sobre o que lemos, argumentando e concordando ou não com as ideias dos demais.

No que diz respeito ao primeiro momento do cronograma, dividimos as datas de debates dos artigos escolhidos como os mais importantes, inicialmente, para leitura, deixando livre a proposta de serem levados outros artigos para discussão, caso alguém sentisse necessidade. Isto posto, propomos os seguintes autores para leituras: Balacheff, Almouloud, Healy, Hanna e Nasser. Durante as leituras e os debates sentimos a necessidade de diferenciar a visão técnica da visão crítica das provas e demonstrações matemáticas, como também de diferenciar o raciocínio dedutivo e o indutivo.

Propomo-nos a analisar os PCN do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, com o intuito de verificarmos se constava como proposta o trabalho de provas, demonstrações ou argumentações no ensino e aprendizagem da Matemática. Propomo-nos também a ler algumas partes do livro de Morais Filho, pois sentimos a necessidade de diferenciarmos o que é teorema, corolário, definição, proposição, lema, etc.

Além disso, ao elaborarmos alguns questionários e de nossa inquietação em saber o poder argumentativo dos alunos referentes a alguns conteúdos matemáticos, sentimos a necessidade de ler alguns artigos e textos de Ramalho, Boavida, Monteiro e Santos, Tinoco e Silva, entre outros, que tratam sobre o trabalho da argumentação com alunos.

Referente ao segundo momento do cronograma, realizamos as leituras e os debates de algumas partes do livro de Lévy, observando a utilização das TIC na sociedade e na educação em geral. Além disso, lemos textos de Espinosa e Araújo, abordando a utilização das TIC na educação matemática, as dificuldades e a modificação do papel do professor frente a essas novas tecnologias. Propomo-nos também a ler algumas partes do livro de Araújo e Nóbriga, pois os autores trazem um roteiro de trabalhos a ser realizado com o GeoGebra para alguns conteúdos da Matemática.

Com relação ao terceiro momento do cronograma, nossa leitura sobre trabalho colaborativo diz respeito ao livro de Ibiapina, uma vez que o consideramos como norte para nosso trabalho em equipe e no Projeto OBEDUC/CAPES.

3.1.2 Elaboração de questionários para sondagens

Durante a fase de leituras e planejamento, começamos a desenhar a nossa proposta particular de pesquisa e o nosso foco principal está em torno dos alunos do Ensino Médio da Escola Estadual Carlota Barreira, localizada no município de Areia-PB. Antes de iniciarmos a construção da proposta didática da nossa equipe e com as leituras feitas em grupo e individual, sentimos a necessidade de pesquisar na referida escola o posicionamento e pensamento dos alunos e professores no que diz respeito ao trabalho com provas e demonstrações matemáticas, como também com as TIC no ensino de Matemática.

Dessa forma, elaboramos, inicialmente, um questionário para os professores de Matemática objetivando saber o que eles percebiam como barreiras para o entendimento da Matemática por parte de seus alunos, o que eles entendiam por provas e argumentação, seu uso no ensino e aprendizagem de Matemática e sua opinião sobre a utilização das TIC no ensino e aprendizagem da Matemática. Na Escola Carlota Barreira, na qual realizamos esta pesquisa, conseguimos que dois professores se dispusessem a responder o questionário.

Além do questionário para os professores, elaboramos um questionário para os alunos, tentando seguir o mesmo roteiro dos professores, para que com suas respostas pudéssemos fazer um comparativo entre os mesmos. Nesse sentido, objetivamos saber quais as dificuldades que esses alunos sentiam nos conteúdos matemáticos abordados na sala de aula, se eles foram incentivados ou sentiram necessidade de justificar, provar e demonstrar algo nos conteúdos matemáticos, a opinião deles sobre a utilização das TIC nas aulas de Matemática, e se eles conheciam algum teorema de Matemática. Na Escola Carlota Barreira, na qual realizamos esta pesquisa, conseguimos aplicar este questionário para uma turma de 3º Ano do Ensino Médio, composta por 21 alunos. Esses dois questionários foram analisados pela equipe, porém ainda não publicamos os resultados que percebemos.

Em uma de nossas reuniões de equipe, elencamos alguns assuntos matemáticos que consideramos importantes para o (re)trabalho com os alunos, principalmente do 3º ano de Ensino Médio, com o auxílio das provas e demonstrações matemáticas. Os assuntos foram: o valor do discriminante na equação do 2º grau; análise dos coeficientes da função quadrática; a diferença entre incógnita e variável; Teorema de Pitágoras; soma dos ângulos internos de um triângulo; Teorema do Ângulo Externo; casos especiais da função afim e seus coeficientes lineares e angulares; e, razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Em vista disso, escolhemos os dois primeiros assuntos mencionados acima com o intuito de analisar a maneira de argumentar e justificar um conteúdo já sabido e estudado pelos alunos. Com isso, elaboramos outro questionário, aplicado na mesma turma do 3º ano do Ensino Médio da Escola Carlota Barreira com o intuito de analisarmos se suas respostas referentes ao primeiro questionário seriam confirmadas ou não. Logo, o questionário continha seis questões que versavam sobre a discussão do valor do discriminante em algumas equações do 2º grau; a explicação do coeficiente a ser diferente de zero, da relação entre coeficiente a e concavidade da parábola, e da finalidade do coeficiente c; a explicação da relação entre zeros da função quadrática e a parábola; a explicação de quando a função quadrática atinge o valor máximo ou o valor mínimo; e a aplicação das respostas dadas nas questões anteriores nessa última questão específica de uma função quadrática.

Com relação a esse questionário aplicado a uma determinada turma do 3º Ano do Ensino Médio da Escola Carlota Barreira, o qual pretendíamos observar o poder argumentativo dos alunos referente a valor do discriminante e função quadrática, sua análise e discussão estão publicados nos Anais do I CONEDU, realizado na cidade de Campina Grande, em setembro de 2014. Sucintamente, com a aplicação do questionário e com os resultados obtidos, percebemos que mesmo que alguns alunos tentem argumentar ou justificar matematicamente suas respostas, eles ainda não são capazes de explicar, definir ou argumentar matematicamente os métodos que utilizaram para resolver situações que envolviam conhecimentos matemáticos referentes às funções quadráticas.

Em uma de nossas reuniões de equipe, nos propomos analisar o livro didático adotado na escola para a turma do 3º Ano do Ensino Médio, *Matemática: ciência e* *aplicações,* dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze Almeida, com o objetivo de verificarmos se os conteúdos que continham demonstrações em seus assuntos específicos. Nesse sentido, pensamos em escolher algumas definições dos assuntos que continham demonstrações e transformarmos em sentenças matemáticas do tipo *se...então...*. Desse modo, realizamos cinco transformações em sentenças matemáticas dentro do conteúdo *estudo de retas*, a saber, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, condição de alinhamento de três pontos, equação geral da reta e cálculo do coeficiente angular. Este trabalho foi realizado pela própria equipe e não foi publicada em nenhum evento, visto que foi um trabalho de modificações de escritas matemáticas.

Em uma de nossas reuniões de equipe, nos propomos a investigar o potencial argumentativo dos alunos de cinco turmas do 3º Ano do Ensino Médio de duas escolas estaduais da cidade de Areia-PB com relação ao conteúdo triângulos, uma vez que, por se tratar de um assunto que é lecionado a partir do 7º Ano do Ensino Fundamental e continua sendo abordado nas séries posteriores, estávamos pressupondo que os mesmos conhecessem os conceitos básicos desse conteúdo. Nesse sentido, o questionário continha sete questões que versavam sobre a definição de triângulo; a condição de existência de um triângulo; a classificação dos triângulos quanto aos lados; a sua classificação quanto aos ângulos; o valor da soma dos ângulos internos; teorema do ângulo externo; e a aplicação das respostas dadas nas questões anteriores nessa última questão específica de triângulos.

Com relação a esse questionário aplicado a cinco turmas do 3º Ano do Ensino Médio de duas escolas estaduais da cidade de Areia-PB, o qual pretendíamos observar o poder argumentativo dos alunos referente a triângulos, sua análise e discussão estão publicados nos Anais do VIII EPBEM, realizado na cidade de Campina Grande, em novembro de 2014. Sucintamente, chegamos à conclusão que os alunos não foram capazes de explicar, definir ou argumentar matematicamente os métodos utilizados para resolver situações que envolviam o assunto triângulo, como também grande parte dos alunos generalizou a definição de triângulo citando particularidades de um triângulo retângulo e empregavam os conceitos de modo aleatório, sem nenhuma preocupação com a utilização indevida dos elementos matemáticos.

3.2 LOCAL E SUJEITOS DA PESQUISA

O desenvolvimento da nossa pesquisa foi feito na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira, localizada na Praça Monsenhor Ruy Barreira Vieira, S/N, no centro do município de Areia-PB, com código do INEP 25064126, possuindo em 2011 a nota 3,1 no IDEB. A escolha dessa Escola está relacionada a dois participantes da nossa Equipe que estudaram e agora trabalham como professores de Matemática nesta Escola e que desejam contribuir de alguma forma com o crescimento dos alunos, como também é uma forma de agradecimento por todos esses anos de estudo e trabalho na Escola Estadual Carlota Barreira.

A referida Escola foi fundada com a iniciativa de um dos maiores benfeitores da cidade de Areia, o Monsenhor Ruy Barreira Vieira, também conhecido por Padre Ruy, que chegou ao município no ano de 1949. Este sacerdote chegou à Paróquia e nela tomou posse como vigário. Uma das suas preocupações iniciais foi os problemas sociais que a cidade de Areia enfrentava, especialmente a situação das pessoas com baixa renda. Dessa forma, ele se tornou uma pessoa singular, pois se dedicava a população mais carente e teve a iniciativa de oferecer educação a essa camada mais pobre do município (GUEDES, 2005).

Dessa forma, o Padre Ruy, em outubro de 1951, com muita dedicação e empenho, inaugurou a Escola Paroquial Nossa Senhora de Fátima, que era sede de alfabetização de alunos, além de ter aulas de catecismo, civismo e doação de todo material escolar. O trabalho cresceu tanto que foram fundadas mais três escolas. Com a grande procura dos pais à educação dos filhos, em 1956, Padre Ruy recuperou a antiga Casa de Caridade, na qual reuniu as quatro escolas construídas naquele lugar e deu-lhes o nome de *Escolas Reunidas Paroquiais Padre Ibiapina* (RIBEIRO, 1999).

Mesmo com todo esforço do Monsenhor, aquele espaço físico não era suficiente, uma vez que a procura aumentava, ano após ano. Foi então que o Padre Ruy teve a iniciativa de coordenar e fundar um colégio destinado ao ensino de jovens residentes no município de Areia e, então, no dia 26 de maio de 1968 é inaugurado o Grupo Escolar Carlota Barreira, cujo nome homenageia Dona Carlota Barreira Vieira, sua mãe (SANTOS, 2010).

Figura 5 - Fachada da Escola Estadual Carlota Barreira

Fonte: Nossa autoria

A Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira é amparada sob os seguintes Decretos: Decreto Lei nº 4.683, de 24 de novembro de 1968 e Decreto Lei nº 16.109, de 22 de fevereiro de 1994. Esta Escola destaca-se por sua estrutura física, além da localização em uma área privilegiada no município de Areia. Ela funciona nos turnos matutino, vespertino e noturno, contando com uma clientela de aproximadamente 771 alunos no ano letivo de 2015.

A Escola Estadual Carlota Barreira oferece ensino de Educação Básica, atendendo alunos desde o 1º Ano do Ensino Fundamental até o 3º Ano do Ensino Médio, com turmas distribuídas nos períodos matutino, vespertino e noturno, contendo o Ensino Fundamental, Ensino Médio e também atendendo a demanda que opta pela modalidade de Educação de Jovens e Adultos (EJA). Esta Escola também é contemplada com alguns programas do Governo Federal, com destaque para o Programa Mais Educação.

Atualmente a Escola possui um prédio amplo, dispondo de um espaço físico que permite o desenvolvimento de ações educativas diversas. Dessa forma, a Escola conta com uma área ampla, interna e externa, possibilitando o bem estar físico dos alunos. Ou seja, ela dispõe das seguintes repartições: 01 Diretoria; 01 Secretaria; 14 salas de aula; 01 Biblioteca; 01 Refeitório; 01 Sala de professores; 02 banheiros para professores; 01 Depósito para material de limpeza; 01 Cozinha; 01 Depósito para merenda; 01 almoxarifado; 13 banheiros para alunos; 01 Auditório; 01 Sala de videoconferência; 01 quadra de esporte sem cobertura; 01 capela; pátio coberto.

No que diz respeito ao corpo Técnico Administrativo, a Escola conta com um diretor e um diretor adjunto. O quadro de servidores desta Escola é composto por 64 membros, destes 38 fazem parte do corpo docente e 26 funcionários da carreira, assistência em educação, estando distribuídos em merendeiras, porteiros, vigias e servidores de limpeza. Estes funcionários possuem formação em nível fundamental e médio.

Em 2015, o corpo docente da Escola Estadual Carlota Barreira é formado por 18 professores efetivos e 20 professores substitutos. A totalidade de professores desta Escola tem nível superior, a qual a maioria possui Especialização e/ou Mestrado em sua área específica ou áreas afins, e dois estão cursando o Doutorado.

Com relação aos pais ou responsáveis pelos alunos, estes participam das reuniões e eventos promovidos pela Escola, mas uma boa parte não demonstra estar consciente da relevância escolar na vida do ser humano, uma vez que eles não participam efetivamente do processo de ensino-aprendizagem dos alunos e não acompanham cotidianamente as atividades escolares.

A maioria dos alunos advém de lares com renda familiar inferior a um salário mínimo, apresentando condições econômicas precárias, não podendo usufruir de momentos de lazer. Eles moram em conjuntos habitacionais sem muita infraestrutura, outros na zona rural em casas de taipa ou em casas de tijolos, mas falta à infraestrutura necessária. Estes que moram na zona rural dependem do transporte coletivo disponibilizado pela prefeitura de Areia. Em grande parte, são filhos de agricultores ou sem uma profissão definida, sobrevivendo de aposentadorias e dos projetos governamentais.

Nossa pesquisa foi realizada com 20 alunos do 2º Ano do Ensino Médio do turno da tarde da Escola Estadual Carlota Barreira. A aplicação da Proposta Didática foi realizada em duplas, dessa forma ficamos com 10 duplas de alunos deste ano de Ensino. A maioria dos alunos é da zona rural, ou seja, utiliza ônibus disponibilizado pela Prefeitura até a Escola.

A escolha desses alunos do Ensino Médio se deu pelo fato de já terem estudado os assuntos que estavam sendo contemplados na nossa Proposta Didática.

3.3 TIPO DE PESQUISA E INSTRUMENTOS

Segundo D'Ambrósio (2004), um indivíduo curioso ao se questionar o que é pesquisa, naturalmente, irá recorrer ao dicionário e então encontrará que "pesquisa é o conjunto de atividades que têm por finalidade a descoberta de novos conhecimentos no domínio científico, literário, artístico etc., é a investigação ou indagação minuciosa, é o exame de laboratório" (*Dicionário Houaiss*). À vista disso, D'Ambrósio afirma que esta definição pouco ajuda e então ele deverá recorrer a outras línguas e o sentido vago ainda continuará.

De acordo com Lüdke e André (1986, p. 1), "para se realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele". Ou seja, segundo Lüdke e André (1986), uma pesquisa é feita a partir do estudo de um problema, que ao mesmo tempo desperta o interesse e a inquietação do pesquisador e limita sua atividade de pesquisa a uma determinada porção do saber, a qual ele se compromete a construir naquele momento. Além disso:

> trata-se, assim, de uma ocasião privilegiada, reunindo o pensamento e a ação de uma pessoa, ou de um grupo, no esforço de elaborar o conhecimento de aspectos da realidade que deverão servir para a composição de soluções propostas aos seus problemas. Esse conhecimento é, portanto, fruto da curiosidade, da inquietação, da inteligência e da atividade investigativa dos indivíduos, a partir e em continuação do que já foi elaborado e sistematizado pelos que trabalharam o assunto anteriormente (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 2).

Nesse sentido, a partir das leituras realizadas na Equipe e individuais, nos mostramos inquietos quanto ao trabalho com provas e demonstrações matemáticas e as suas verificações no aplicativo GeoGebra. Com isso, buscamos investigar que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico de alunos do 2º Ano do Ensino Médio podem ocorrer a partir de uma proposta didática nos ambientes lápis e papel e GeoGebra.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, além do trabalho colaborativo, utilizamos para a nossa Proposta a pesquisa qualitativa. Nesse sentido, D'Ambrósio (2004) afirma que, atualmente, as pesquisas são, em linhas gerais, classificadas em duas grandes vertentes: a pesquisa quantitativa e a pesquisa qualitativa. Com relação à primeira vertente de pesquisa, ela lida com grande número de indivíduos, recorrendo aos métodos estatísticos para a análise de dados coletados de diversas maneiras. Nesse sentido, podemos também chamá-la de pesquisa estatística ou pesquisa positivista. Já a segunda vertente, a pesquisa qualitativa ou pesquisa naturalística, tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes. Ou seja, a pesquisa qualitativa depende da relação observador-observado e sua metodologia repousa sobre a interpretação e várias técnicas de análise de discurso.

Segundo Bogdan e Biklen (2003), a investigação em educação começou a se modificar quando foi publicada a primeira edição de *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e aos* Métodos, em 1982. O campo mais usado para a investigação era o da pesquisa quantitativa, que era dominado por questões de mensuração, definições operacionais, variáveis, teste de hipóteses e estatística. Este campo alargou-se para contemplar uma metodologia de investigação que destaca o uso da descrição, da indução, da teoria fundamentada e do estudo das percepções pessoais. Esta abordagem refere-se à pesquisa qualitativa.

Ainda sobre a definição de pesquisa qualitativa, Stake (2011) afirma que seu raciocínio se baseia principalmente na percepção e na compreensão humana. Ou seja, para este autor, o próprio pesquisador é um instrumento ao observar ações e contextos e ao desempenhar uma função subjetiva no estudo, uma vez que ele se utiliza da sua experiência pessoa em fazer interpretações. Sobre a essência da abordagem qualitativa, Stake (2011) afirma:

> não existe uma única forma de pensamento qualitativo, mas uma enorme coleção de formas: ele é interpretativo, baseado em experiências, situacional e humanístico. Cada pesquisador fará isso de maneira diferente, mas quase todos trabalharão muito na interpretação. Eles tentarão transformar parte da história em termos experienciais. Eles mostrarão a complexidade do histórico e tratarão os indivíduos como únicos, mesmo que de modos parecidos com outros indivíduos (STAKE, 2011, p. 41).

De acordo com Bogdan e Biklen (2003) a investigação qualitativa possui cinco características:

> 1 – Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
> 2 – A investigação qualitativa é descritiva;
> 3 – Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
> 4 – Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
> 5 – O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN e BIKLEN, 2003, pp. 47-51).

Quanto à primeira característica, sabemos que os investigadores se introduzem e despendem grandes quantidades de tempo em escolas, famílias, bairros e outros locais tentando elucidar questões educativas. Segundo Bogdan e Biklen (2003), os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto, ou seja, para esses investigadores divorciar o ato, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o significado. Além disso, para os investigadores qualitativos, o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre o local de estudo.

A segunda característica diz respeito aos dados que são recolhidos em forma de palavras ou imagens e não de números, ou seja, os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. De acordo com Bogdan e Biklen (2003), na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Ou seja, eles tentam analisar os dados em toda a sua riqueza e abordam o mundo de forma minuciosa, respeitando, tanto quanto possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos.

A terceira característica versa sobre a importância do processo da investigação, ou seja, os investigadores se interessam mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. Bogdan e Biklen (2003) afirmam que, enquanto as técnicas quantitativas conseguiram demonstrar, recorrendo a pré e pós testes, as estratégias qualitativas patentearam o modo como as expectativas se traduzem nas atividades, procedimentos e interações diárias.

A quarta característica diz respeito à análise dos dados de forma indutiva, isto é, os investigadores qualitativos não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados recolhidos vão sendo agrupados. Para um investigador qualitativo que planeja elaborar uma teoria sobre seu objeto de estudo, a direção dessa teoria só começa a se estabelecer após a recolha dos dados e com o passar de tempo com os sujeitos. Além disso, o investigador qualitativo planeja utilizar parte do estudo para perceber quais são as questões mais importantes, não presumindo que sabe o suficiente para reconhecer as questões antes de efetuar a investigação.

A última característica versa sobre a importância do significado na abordagem qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (2003), os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às duas vidas, ou seja, ao apreender as perspectivas dos participantes, a investigação qualitativa faz luz sobre a dinâmica interna das situações. Além disso, esses investigadores qualitativos fazem questão em se certificarem de que estão apreendendo as diferentes perspectivas adequadamente.

Nesse sentido, os investigadores qualitativos em educação:

> estão continuamente a questionar os sujeitos de investigação, com o objectivo de perceber 'aquilo que *eles* experimentam, o modo como *eles* interpretam as suas experiências e o modo como *eles* próprios estruturam o mundo social em que vivem' (Psathas, 1973). Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador. O processo de condução de investigação qualitativa reflecte uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dado estes não serem abordados por aqueles de uma forma neutra (BOGDAN e BIKLEN, 2003, p. 51).

Portanto, além do trabalho colaborativo desenvolvido pela equipe *Provas e Demonstrações na Educação Matemática*, escolhemos a pesquisa qualitativa para nossa Proposta, pois acreditamos que nosso trabalho se deu nessa perspectiva, confirmando assim as afirmações de D'Ambrósio (2004), Bogdan e Biklen (2003) e Stake (2011). Além disso, sobre as cinco características propostas por Bogdan e Biklen (2003), acreditamos que nosso trabalho esteve presente nas três primeiras, uma vez que participamos de todo o processo de coleta de dados estando presente no local de estudo dos alunos; os dados que recolhemos foram descritivos, ou seja, estes vieram em forma de palavras ou imagens e não de números; e, para nós, o processo de investigação, de coleta de dados foi mais interessante do que os resultados recolhidos.

Nossa pesquisa qualitativa se mostra como estudo de caso, o qual discutimos em detalhes na seção Sobre Análise dos dados. Utilizamos distintos instrumentos de pesquisa, descritos a seguir.

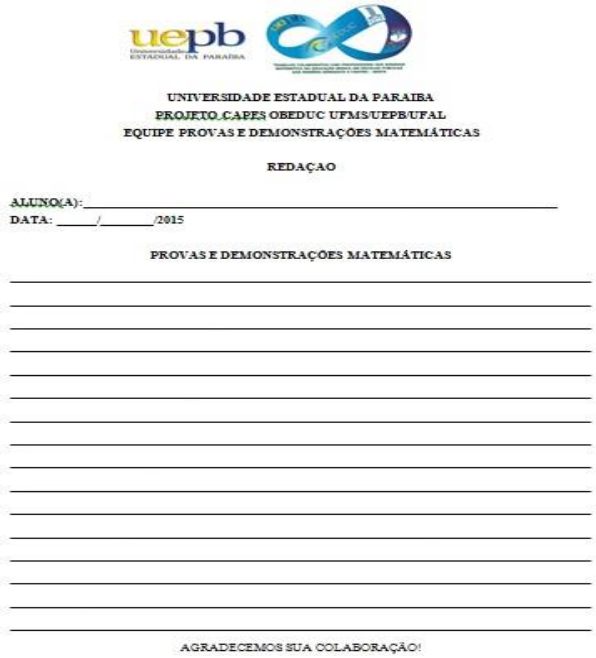
3.3.1 Redação sobre Provas e Demonstrações Matemáticas

Sobre esse tipo de instrumento, Bogdan e Biklen (2003) nos afirmam que os textos escritos pelos sujeitos, quando estão na esfera dos documentos pessoais, são documentos em que os sujeitos escreveram por si próprios. Bogdan e Biklen (2003, p. 177) também afirmam que "uma vantagem de solicitar composições é de que o investigador pode ter alguma interferência em dirigir o foco dos autores e por isso, conseguir que um certo número de pessoas escreva sobre um mesmo acontecimento ou tópico".

Dessa forma, o objetivo de escolhermos esse tipo de material é de que conseguiremos traçar um perfil do trio de alunos do 2º Ano do Ensino Médio sobre o que pensam ser provas e demonstrações matemáticas.

Nesse sentido, demos à eles uma folha composta por linhas e com o título *Provas e Demonstrações Matemáticas* (Figura 6) e pedimos para escreverem o que pensavam a respeito desse título, o que entendiam por provas e demonstrações matemáticas. Pretendíamos que eles estivessem livres para escreverem ou não escreverem o que sabiam a respeito desse tema.

Figura 6 - Modelo da redação para alunos


UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA
PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL
EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇAO

ALUNO(A): ______________________________
DATA: _____/______/2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

Fonte: Nossa autoria

3.3.2 Observação

A observação foi realizada durante a aplicação das atividades da Proposta Didática. De acordo com Stake (2011), muitos pesquisadores qualitativos preferem usar dados de observação, que são informações que podem ser vistas, ouvidas ou sentidas diretamente pelo próprio pesquisador, do que outros tipos.

Sobre este instrumento de pesquisa, Marconi e Lakatos (2008) afirmam que é uma técnica de coleta de dados utilizada para conseguir informações e que o pesquisador se utiliza de seus sentidos para a obtenção de determinados aspectos da realidade. Para Marconi e Lakatos (2008, p. 192), a observação "não consiste apenas em ver e ouvir, mas também em examinar fatos ou fenômenos que se desejam estudar".

Dessa forma, julgamos importante recorrer à observação, pois essa técnica nos ajuda a identificar e a obter provas a respeito de objetivos sobre os quais os indivíduos pesquisados não tem consciência, mas que orientam seu comportamento.

Dentro dos variados tipos de observação, optamos pela observação participante, a qual "consiste na participação real do pesquisador com a comunidade ou grupo. Ele se incorpora ao grupo, confunde-se com ele. Fica tão próximo quanto um membro do grupo que está estudando e participa das atividades normais deste" (MARCONI e LAKATOS, 2008, p. 196). Além disso, a observação participante é uma tentativa de colocar o observador e o observado do mesmo lado. Essa observação participante foi feita de forma artificial, ou seja, o observador integrou-se ao grupo com a finalidade de obter informações (MARCONI e LAKATOS, 2003).

3.3.3 Notas de campo

No decorrer das atividades, com o intuito de registrar as observações, foram utilizadas as notas de campo. Nelas registramos o envolvimento e as dificuldades das duplas e nossas observações e impressões com relação aos diálogos realizados pelas duplas e ao processo de resolução das atividades da Proposta Didática.

De acordo com Bogdan e Biklen (2003), nas notas de campo escreveremos a descrição das pessoas, objetos, lugares, acontecimentos, atividades e conversas. Além disso, registraremos ideias, estratégias, reflexões e palpites. Ou seja, as notas de campo são "relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiência e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (BOGDAN e BIKLEN, 2003, p. 150).

Portanto, tal escolha se deu, pois por meio das notas de campo seria possível termos uma descrição fidedigna das atividades, conversas, acontecimentos, problemas e dificuldades encontradas no decorrer da aplicação das atividades da Proposta Didática.

3.3.4 Imagens e gravações em áudio

Durante a aplicação da redação e da Proposta Didática, fotografamos a fachada da Escola e os alunos e fizemos algumas gravações de discussões de algumas duplas, as quais observamos que estavam mais preocupadas em resolver corretamente e as que mais discutiam e conversavam a respeito da resolução das questões.

De acordo com Bogdan e Biklen (2003, p. 41), "as fotografias obtidas podem proporcionar informação sobre o comportamento dos sujeitos, a sua interação e sua forma de apresentação em determinadas situações". Dessa forma, as fotografias são utilizadas como um meio de lembrar e estudar detalhes que poderiam ter sido esquecidos caso não estivesse uma câmera fotográfica por perto. Assim, as fotografias foram utilizadas com o intuito de registrar os momentos de escrita das redações e os momentos de discussões quanto às resoluções das atividades da proposta didática.

Quanto às gravações, Lüdke e André (1986, p. 37) afirmam que as gravações “tem a vantagem de registrar todas as expressões orais, imediatamente, deixando o entrevistador livre para prestar toda a sua atenção ao entrevistado”. Dessa forma, as gravações em áudio foram utilizadas no momento da realização das atividades no aplicativo GeoGebra. A opção em gravar tal momento se deu porque haveria mais possibilidade de conversação entre o trio de alunos, uma vez que a interação entre eles aumentaram para que conseguissem chegar a uma opinião conjunta quanto às respostas das atividades.

Optamos por não filmar a resolução da Proposta Didática porque os alunos poderiam ficar receosos na hora e não apresentar discussões ou interações entre as duplas. Dessa forma, achamos mais conveniente fazermos somente as fotografias e as gravações em áudio.

3.3.5 Proposta Didática

A Proposta Didática foi elaborada pelos cinco componentes da nossa Equipe e versa sobre três importantes assuntos da Geometria, os quais são *Teorema de Pitágoras*, *Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo* e *Teorema do Ângulo Externo*. Aplicamos essa Proposta a todos os alunos das turmas da tarde do Ensino Médio da Escola Carlota Barreira. Escolhemos alunos do Ensino Médio pressupondo que eles já detinham algum conhecimento quanto aos três assuntos abordados na Proposta Didática. Quanto aos assuntos, escolhemos porque julgamos serem conteúdos importantes dentro da Geometria e que são explorados em todos os níveis de escolaridade.

Essa Proposta (Apêndice E) contém 18 atividades, sendo estas divididas em quatro partes. A primeira parte contempla 8 atividades a respeito do Teorema de Pitágoras; a segunda, com 3 atividades sobre o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo; a terceira, consta com 2 atividades sobre o Teorema do Ângulo Externo; e a quarta, contempla 5 atividades a serem desenvolvidas no aplicativo GeoGebra com espaços para fazer as observações a respeito do Teorema de Pitágoras e do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo.

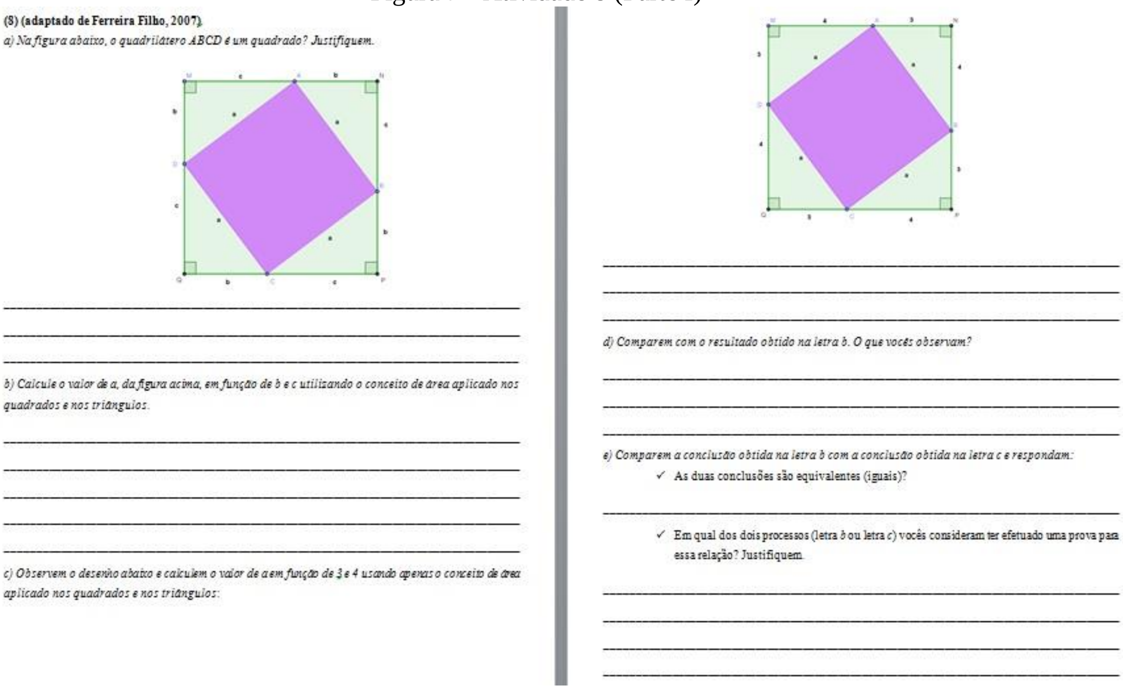
Para esta pesquisa foram utilizadas a Atividade 8 da Parte I, as Atividades 1 e 2 da Parte II e as cinco Atividades da Parte IV, todas referentes ao Teorema de Pitágoras e ao

Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Essas atividades fazem com que os alunos justifiquem e argumentem as suas respostas, a raciocinarem bastante e a refletir sobre as propriedades e conceitos inerentes ao passo a passo e às construções. Pretende-se com isso que os alunos percebam que não é necessário decorar esses teoremas e que são ferramentas utilizáveis na resolução de inúmeros problemas de Geometria.

Segue abaixo as questões e os seus objetivos:

3.3.5.1 Atividade 8 – Parte I

Figura 7 - Atividade 8 (Parte I)



(8) (adaptado de Ferreira Filho, 2007).

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem.

b) Calcule o valor de a, da figura acima, em função de b e c utilizando o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos.

c) Observem o desenho abaixo e calculem o valor de a em função de 3 e 4 usando apenas o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos:

d) Comparem com o resultado obtido na letra b. O que vocês observam?

e) Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c e respondam:

- ✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)?
- ✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

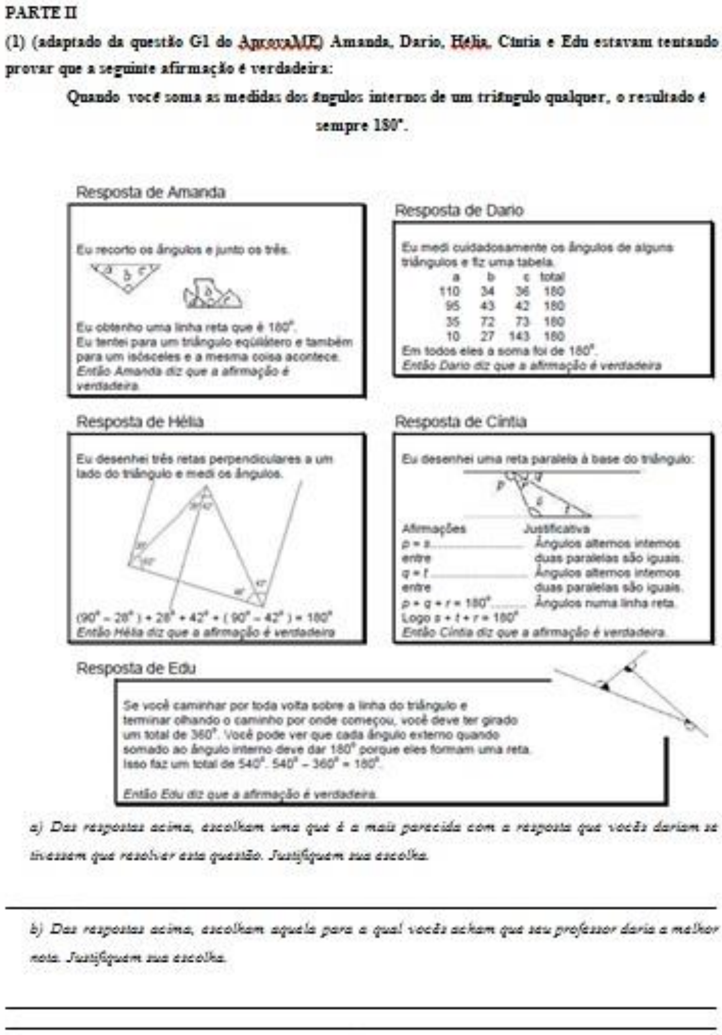
Fonte: Adaptado de Ferreira Filho (2007)

Objetivo: Conduzir o aluno a uma prova para o Teorema de Pitágoras, utilizando os conceitos de áreas de um quadrado e de um triângulo. Além disso, observar em qual nível do pensamento geométrico, segundo Parzysz (2006), os alunos se encontram.

Nesta atividade os alunos devem verificar se o quadrilátero a é um quadrado (a); chegar ao teorema de Pitágoras utilizando os conceitos de áreas de um quadrado e de um triângulo (b); resolver um caso particular desse teorema também utilizando os conceitos de áreas de um quadrado e de um triângulo (c); reconhecer que os resultados obtidos nas letas b e c são semelhantes, mas um é o caso geral e o outro particular (d); e, conhecer se o aluno sabe a diferença entre uma prova e uma simples verificação, como também saber se o aluno reconhecerá quando um argumento irá se constituir em uma prova (e).

3.3.5.2 Atividade 1 – Parte II

Figura 8 - Atividade 1 (Parte II)



PARTE II

(1) (adaptado da questão G1 do AprovaME) Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.

Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.

$(90° - 28°) + 28° + 42° + (90° - 42°) = 180°$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

Afirmações	Justificativa
$p = s$ entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$q = t$ entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180°$	Ângulos numa linha reta.

Logo $s + t + r = 180°$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

a) Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha.

b) Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifiquem sua escolha.

Fonte: adaptado do AprovaME

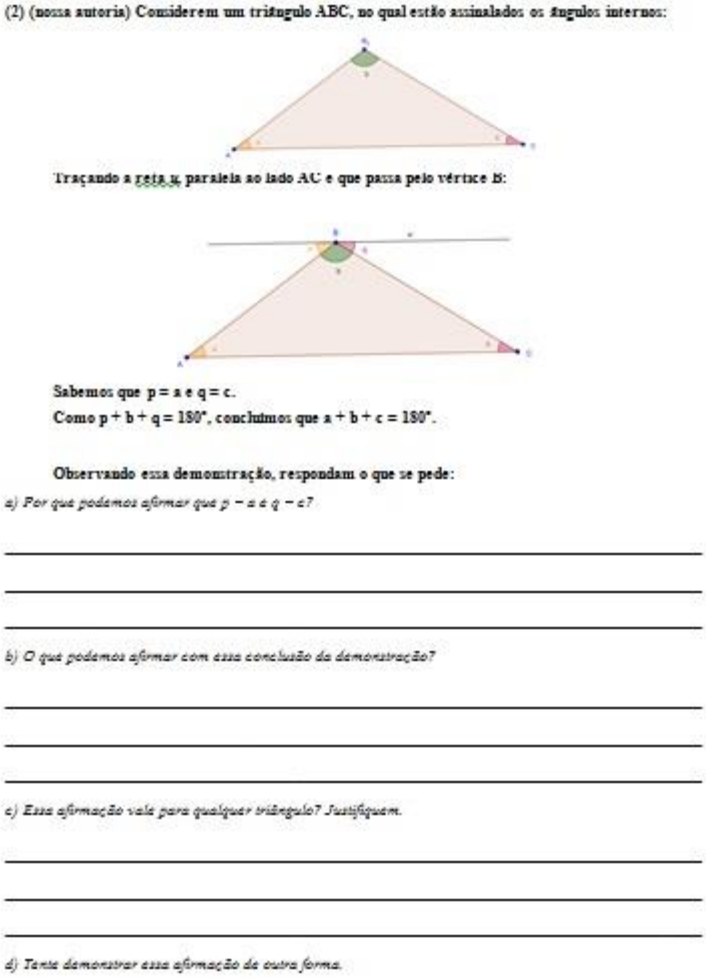
Objetivo: Escolher as respostas que eles (os alunos) dariam se tivessem que resolver a questão.

Nessa atividade, estamos buscando analisar, a partir das suas respostas e justificativas, qual tipo de prova, segundo Balacheff (2000), esses alunos utilizariam para resolver a questão.

Dessa forma, a resposta de Amanda diz respeito a uma experiência crucial (prova pragmática); a de Dário, um empirismo ingênuo (forma mais rudimentar de uma prova pragmática); a de Hélia, um empirismo ingênuo (prova pragmática); a de Cíntia, uma experiência mental (marca a evolução da prova pragmática para a prova intelectual); e a de Edu, um exemplo genérico (prova intelectual).

3.3.5.3 Atividade 2 – Parte II

Figura 9 - Atividade 2 (Parte II)



(2) (nossa autoria) Considerem um triângulo ABC, no qual estão assinalados os ângulos internos:

Traçando a reta u, paralela ao lado AC e que passa pelo vértice B:

Sabemos que p = a e q = c.
Como p + b + q = 180°, concluímos que a + b + c = 180°.

Observando essa demonstração, respondam o que se pede:

a) Por que podemos afirmar que p = a e q = c?

b) O que podemos afirmar com essa conclusão da demonstração?

c) Essa afirmação vale para qualquer triângulo? Justifiquem.

d) Tente demonstrar essa afirmação de outra forma.

Fonte: Nossa autoria

Objetivo: Fazer com que o aluno chegue a uma prova ou demonstração do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Além disso, analisar, diante das respostas deles, em qual nível de pensamento geométrico, segundo Parzysz (2006), eles se encontram e qual tipo de prova, segundo Balacheff (2000) e Nasser e Tinoco (2003), eles utilizam.

Nessa atividade os alunos devem se lembrar dos tipos de ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal (a); perceber que a conclusão da demonstração indica um importante teorema da Geometria (b); reconhecer que a demonstração apresentada na questão é um caso geral do teorema e que, assim, vale para qualquer triângulo (c); demonstrar de outra forma o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo (d).

3.3.5.4 Atividade 1 – Parte IV

Figura 10 - Atividade 1 (Parte IV)

Parte IV

(1) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-27567" e observem atentamente a figura. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Arrastem o seletor para a direita. O que aconteceu com a figura? Quais os movimentos observados pelas três divisões do triângulo?

b) Arrastem o próximo seletor para baixo. O que aconteceu com a figura? Qual o movimento realizado pelas três divisões do triângulo? O que vocês observaram após essa movimentação?

c) Marquem os três quadrados referentes a "comparar ângulos". O que vocês observaram? Como podem ser chamados os ângulos azuis, vermelhos e verdes? Por quê?

d) Qual propriedade está ligada a essa verificação? Como vocês encontraram essa propriedade e por quê?

Fonte: adaptado do Tube GeoGebra

Objetivo: Fazer o aluno justificar o passo a passo feito no GeoGebra e observar o nível do pensamento geométrico, segundo Parzysz (2006), dos alunos.

Nessa atividade os alunos devem reconhecer os tipos de transformações que surgem ao movimentar o primeiro seletor da construção do GeoGebra (a); reconhecer que tipo de transformação ocorreu com a movimentação do segundo seletor e observar as mudanças que ocorreram na figura (b); perceber, com a movimentação, que a nova figura diz respeito a duas retas paralelas e uma transversal, e reconhecer os tipos de ângulos formados nessa estrutura (c); reconhecer a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo e justificar corretamente por que podemos considerar válida (d).

3.3.5.5 Atividade 2 – Parte IV

Figura 11 - Atividade 2 (Parte IV)

(2) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-239787" e observem a figura. Há uma importante relação relacionada aos triângulos e seus ângulos internos. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Movimentem o vértice C do triângulo. O que acontece com o triângulo? E com seus ângulos internos?

b) Ao movimentar esse vértice C, qual a relação entre os triângulos encontrados e seus ângulos internos?

c) Agora movimentem o vértice B. O que acontece? Continua valendo essa relação para outros triângulos encontrados e seus ângulos internos?

d) Se movimentarmos o vértice A. O que acontece? Essa relação continua sendo válida?

e) Desse modo, o que podemos concluir com essa verificação? Justifiquem.

Fonte: adaptado do Tube GeoGebra

Objetivo: Fazer o aluno justificar as movimentações feitas no GeoGebra e observar o nível do pensamento geométrico dos alunos, segundo Parzysz (2006).

Nessa atividade os alunos devem reconhecer o que acontece com o triângulo e com seus ângulos internos ao movimentar o vértice C (a); reconhecer que a soma dos ângulos internos permanece a mesma, mesmo obtendo diferentes triângulos com diferentes ângulos internos (b); movimentar o vértice B, perceber que encontrará outros triângulos com diferentes ângulos internos e observar que a propriedade continua válida (c); movimentar o vértice A, perceber que encontrará outros triângulos com diferentes ângulos internos e observar que a propriedade continua válida (d); e, concluir, com essas verificações, que, para qualquer triângulo, a soma de seus ângulos internos é sempre 180º (e).

3.3.5.6 Atividade 3 – Parte IV

Figura 12 - Atividade 3 (Parte IV)

(3) (extraído do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-145257", observem a figura e respondam o que se pede.

____

____

____

____

____

Fonte: extraído do Tube GeoGebra

Objetivo: Fazer o aluno refletir sobre as movimentações feitas no GeoGebra e observar o nível do pensamento geométrico dos alunos, segundo Parzysz (2006).

A maior dificuldade que os alunos poderão enfrentar ao realizar as movimentações será a de arrastar os quadriláteros sem deformá-los, pois, ao arrastá-los, eles poderão deformar-se e assim perderão suas propriedades iniciais. Desse modo, se isso acontecer, os alunos deverão desfazer a operação e começá-la novamente.

Nessa atividade os alunos devem arrastar os quatro quadriláteros para o quadrado rosa e observar se é possível completá-lo totalmente (primeiro item); reconhecer que a área que está faltando no quadrado rosa é a área de um quadrado e perceber que se trato do quadrado vermelho, que ainda não foi arrastado (segundo item); perceber que o quadrado vermelho se encaixou na área que faltava do quadrado rosa (terceiro item); perceber que a soma das áreas do quadrado médio e do menor resultou na área do quadrado maior (quarto item).

3.3.5.7 Atividade 4 – Parte IV

Figura 13 - Atividade 4 (Parte IV)

(4) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-57095" e observem a figura. Sigam as instruções e respondam o que se pede:

a) Movimentem os seletores dos ângulos α e β. O que aconteceu ao movimentar o ângulo α? E o ângulo β? As duas figuras foram movimentadas para onde? Como elas ficaram nessas movimentações?

b) Surgiu um novo seletor. Movimentem o ângulo γ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

c) Surgiu um novo seletor. Movimente o ângulo δ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

d) Ao fazer todos esses movimentos, o que vocês observaram? A que conclusões vocês chegaram?

e) Existe alguma relação entre esses quadrados e os lados do triângulo retângulo? Se sim, qual?

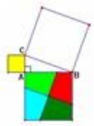
Fonte: adaptado do Tube GeoGebra

Objetivo: Fazer o aluno justificar as movimentações feitas no GeoGebra e observar o nível do pensamento geométrico dos alunos, segundo Parzysz (2006).

Nessa atividade os alunos devem reconhecer o tipo de transformação ocorrida ao movimentar os seletores dos ângulos α e β e observar o que aconteceu com a construção (a); reconhecer o tipo de transformação ocorrida ao movimentar o seletor do ângulo γ e observar o que aconteceu com a construção (b); reconhecer o tipo de transformação ocorrida ao movimentar o seletor do ângulo δ e observar o que aconteceu com a construção (c); observar o que aconteceu com a nova figura, após fazer todas essas movimentações (d); perceber que a relação existente entre os quadrados e os lados do triângulo retângulo diz respeito ao teorema de Pitágoras.

3.3.5.8 Atividade 5 – Parte IV

Figura 14 - Atividade 5 (Parte IV)



(5) (adaptado de Ferreira Filho, 2007).

Abram o arquivo *Montagem – Perigal* e observem, antes de fazer qualquer movimento, a imagem atenta e detalhadamente.

Na figura temos 5 peças coloridas, 4 dentro do quadrado médio e uma no quadrado menor. Arrastem cada uma das peças, encaixando-as dentro do quadrado maior.

Façam o que se pede:

a) O que vocês observaram? Relacionem as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que vocês concluíram?

b) Representem a medida da hipotenusa do triângulo retângulo por a, e por b e c as medidas de cada cateto. Relacionem as três medidas.

c) A verificação feita com esse arquivo é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

d) No GeoGebra, construam um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro", meçam os lados de seu triângulo e com uma calculadora verifiquem a relação percebida anteriormente. O que vocês concluíram?

e) A verificação feita no item d garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

Fonte: adaptado de Ferreira Filho (2007)

Objetivo: Perceber a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Além disso, observar o nível do pensamento geométrico, segundo Parzysz (2006), dos alunos e o tipo de prova, segundo Balacheff (2000) e Nasser e Tinoco (2003), que os alunos utilizam.

A maior dificuldade que os alunos poderão enfrentar ao realizar as movimentações será a de arrastar os quadriláteros sem deformá-los, pois ao arrastá-lo, eles poderão se deformar e assim perderão suas propriedades iniciais. Desse modo, se isso acontecer, os alunos deverão desfazer a operação e começá-la novamente.

Nessa atividade os alunos devem construir explicações sobre as suas observações (a); reconhecer, algebricamente, a relação existente entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído na hipotenusa (b); se questionar sobre a validade ou não da relação encontrada no item anterior para qualquer triângulo retângulo (c); fazer um novo processo de validação para a verificação do teorema de Pitágoras, a partir de uma construção própria no aplicativo GeoGebra (d); verificar se a construção feita no item anterior é uma generalização do teorema (e).

3.4 COLETA DOS DADOS

Segundo Marconi e Lakatos (2008, p. 167), a coleta dos dados é uma “etapa da pesquisa em que se inicia a aplicação dos instrumentos elaborados e das técnicas selecionadas, a fim de se efetuar a coleta dos dados previstos”. Desse modo, é na coleta dos dados que obtemos as informações necessárias e que será alvo de análise posteriormente.

Sendo assim, como explicitado anteriormente, a nossa pesquisa está inserida em um Projeto maior, OBEDUC, sendo o mesmo desenvolvido colaborativamente com mestrandos, professores da educação básica e graduandos. Como fruto dos estudos realizados pela equipe *Provas e Demonstrações Matemáticas* tivemos redação aplicada aos professores e alunos, questionários inicial e final aplicados aos professores e uma Proposta Didática dividida em quatro partes, com 18 atividades ao total.

Iniciamos a nossa coleta de dados em junho de 2015. Dividimos nosso trabalho na Escola em duas fases. A primeira fase foi realizada com quatro professores da Escola Estadual Carlota Barreira, dividida em dois momentos. Posteriormente, tivemos a segunda fase realizada com os alunos do Ensino Médio da referida Escola, dividida em três momentos.

A primeira fase realizada com os professores, no dia 03 de junho, foi desenvolvida em duas quartas feiras, iniciando às 13h e finalizando às 17h. No primeiro momento, conversamos com o diretor e com dois professores. Infelizmente as duas professoras não puderam estar presentes e dois integrantes da equipe ficaram responsáveis para realizar esse primeiro momento com elas em outro horário. Nesse primeiro momento, nos apresentamos, conversamos sobre o Projeto e a equipe, os professores e o diretor relataram sobre as suas vivências e, então, aplicamos a redação e o questionário inicial para os dois professores presentes nesse dia. A redação continha somente o título *Provas e Demonstrações Matemáticas*, na qual os professores escreveriam o que sabem a respeito desse tema e expressariam a sua opinião.

Já o questionário inicial foi dividido em duas partes. A primeira parte continha questões profissionais dos professores, como por exemplo, as séries que ele leciona na Escola, sua formação, há quanto tempo leciona na Escola, etc. A segunda parte diz respeito a questões relacionadas a provas e demonstrações matemáticas, as quais os professores opinariam sobre questionamentos relacionados ao seu uso na sala de aula, se sua formação contemplou esse tema, o currículo de Matemática, etc. Dessa forma, enquanto estes professores estavam respondendo o questionário, fomos conhecer a estrutura física da Escola e conversamos mais um pouco com o diretor sobre a mesma, o qual nos contou de forma sucinta a história da Escola e nos apresentou os laboratórios de Matemática e o de Informática, e a Biblioteca.

Ainda com relação aos professores, o segundo momento foi realizado, no dia 10 de junho, a leitura e discussão da nossa Proposta Didática e a aplicação do questionário final. Nesse segundo momento, contamos com a participação de três professores, ficando dessa forma dois integrantes da equipe encarregados de realizar esse segundo momento com a quarta professora em outro horário. Nossa ideia com a leitura e discussão da Proposta era fazer com que estes professores se envolvessem um pouco mais com nossa pesquisa e como eles conhecem mais a realidade dos alunos da Escola, estávamos abertos a críticas e sugestões para melhoramento da mesma.

Dessa forma, os professores nos propuseram algumas modificações nas questões, de forma a tornar o entendimento mais claro aos alunos. Além disso, conseguiram compreender qual seria o nosso trabalho relacionado a provas e demonstrações matemáticas, ficando assim satisfeitos com o trabalho. Já o questionário final, os professores iriam comentar sobre a Proposta Didática; se após a leitura e discussão da proposta, houve alguma modificação no que pensavam sobre provas e demonstrações matemáticas; se era possível fazer esse trabalho com os alunos; quais os desafios que encontraríamos com esse trabalho; etc.

O trabalho realizado com os professores será abordado por um dos integrantes da nossa equipe. Aqui, abordaremos sobre o trabalho realizado com uma turma de 2º Ano do Ensino Médio da Escola Estadual Carlota Barreira.

A segunda fase foi realizada com os alunos do Ensino Médio da Escola Carlota Barreira, compreendidos em três turmas do turno da tarde, isto é, uma turma de 1º Ano, uma de 2º Ano e uma de 3º Ano, totalizando 80 alunos. Essa segunda fase foi dividida em três momentos, desenvolvidos em três tardes, tendo início às 13h e finalizando às 17h.

No primeiro momento, realizado no dia 15 de junho, explicamos aos alunos o nosso intuito da pesquisa e pedimos a colaboração dos mesmos, para que a mesma fosse feita da melhor forma possível. Logo após, foi proposto que os alunos redigissem uma redação sobre *Provas e Demonstrações Matemáticas*, na qual os alunos estiveram livres para escreverem o que pensam e sabem a respeito desse tema. Além disso, fizemos uma pequena intervenção com as três turmas, na qual explicamos o que é um objeto matemático, a definição de Teorema e a explanação de uma demonstração, como também revisamos alguns conteúdos relacionados a triângulos, como definição, classificações quanto aos lados e ângulos, tipos de triângulos, tipos de ângulos, entre outros, que possivelmente iriam auxiliar a responder as atividades da Proposta. Vale salientar, que nesse momento da aula de revisão não trabalhamos com os três assuntos que norteiam a nossa Proposta Didática, visto que pretendíamos observar os conhecimentos que estes alunos tinham a respeito desses assuntos.

Ainda nesse primeiro momento, fizemos outra intervenção com a turma do 2º Ano do Ensino Médio, na qual apresentamos o aplicativo GeoGebra, explicando o que é o aplicativo, quem o desenvolveu, o layout do aplicativo, as opções de ferramentas presentes na barra de botões, etc. Além disso, realizamos algumas atividades utilizando as ferramentas disponíveis na barra de botões e uma construção referente à função afim, na qual observamos o que acontece com o gráfico da função ao movimentarmos os seletores a e b.

No segundo momento, realizado no dia 17 de junho, trabalhamos as Partes I e II da Proposta Didática, que diz respeito aos assuntos de Teorema de Pitágoras e Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um triângulo. Dessa forma, nesta tarde os alunos foram orientados a resolverem as onze primeiras atividades da Proposta. Após a aplicação da Proposta Didática, fomos verificar se os cinco arquivos do GeoGebra a serem utilizados no terceiro momento abriam nos computadores da Escola. Verificamos que os arquivos não abriam, pois se tratavam de construções realizadas no GeoGebra 4.0 e 4.2 e o GeoGebra instalado nos computadores da Escola é de uma versão anterior.

Dessa forma, fomos pensar e refletir outras possibilidades para que o trabalho com o aplicativo GeoGebra pudesse ser feito. Assim, no site do Tube GeoGebra tem a opção de baixar os arquivos off-line e, então, fizemos isso. Baixamos os cinco arquivos off-line para serem trabalhados no terceiro momento. Levamos também no nosso notebook, para que, caso ocorresse algo, tínhamos o nosso disponível.

No último momento, realizado no dia 19 de junho, trabalhamos as Partes III e IV da Proposta, que versam sobre o Teorema do Ângulo Externo e atividades a serem realizadas no GeoGebra. Esta Parte IV foi desenvolvida somente pela turma de 2º Ano do Ensino Médio da Escola Estadual Carlota Barreira. Dessa forma, estes alunos resolveram as sete últimas atividades da Proposta. Nesse dia, chegamos mais cedo à Escola e então fomos verificar se os arquivos off-line iriam funcionar e só deu certo em dois computadores, os que tinham internet. Como a maioria dos computadores não são conectados à internet, então nesses os arquivos não abriram. Dessa forma, ficamos com dois computadores da Escola mais o nosso notebook.

Nos dois primeiros momentos da segunda fase do nosso trabalho, contamos com a presença dos 20 alunos do 2º Ano do Ensino Médio da Escola, ficando com 10 duplas. Porém, no último momento tivemos um pequeno imprevisto, uma vez que as outras escolas estaduais do município de Areia-PB decretaram ponto facultativo e os ônibus disponibilizados pela Prefeitura não trabalharam. Dessa forma, como a maioria dos alunos é da zona rural e outros não quiseram ir, nesse terceiro momento, só contamos com a participação de 7 alunos do 2º Ano. Portanto, nesse dia tivemos duas duplas e um trio e deu bastante certo, pois a quantidade de computadores foi suficiente para o trabalho dos alunos.

Durante a aplicação das Partes I e II, segundo momento, notamos que a maioria dos alunos não conseguiu resolver as atividades e estava deixando às mesmas em branco ou respondendo que não sabiam. Como no terceiro momento só contamos com a participação de duas duplas e um trio e estes participaram de todos os momentos da segunda fase do nosso trabalho, então decidimos não trabalhar com as atividades dos outros 13 alunos, uma vez que estavam incompletas, pois só resolveram as Partes I e II.

Dessa forma, ao observamos as atividades completas dos 7 alunos presentes nos três momentos da segunda fase de nosso trabalho, decidimos analisar as oito atividades, mencionadas anteriormente, respondidas pelo trio, uma vez que foram as mais ricas em termos de tentativa de responder a todas as perguntas/atividades e, então, foi o trio escolhido a ser analisado.

3.5 SOBRE ANÁLISE DOS DADOS

Ao finalizar-se a fase da coleta de dados, inicia-se a análise propriamente dita. Para muitos pesquisadores é o momento em que estamos “namorando” os dados obtidos durante o processo de coleta. Assim, quando encerramos a coleta, temos todo o material bruto a ser organizado, onde colocaremos em ordem e separaremos de acordo com os instrumentos utilizados. O próximo passo será a leitura e releitura do material completo para selecionarmos os pontos relevantes e iniciarmos o processo de construção das categorias descritivas.

Para Lüdke e André (1986, p. 45), “analisar os dados qualitativos significa ‘trabalhar’ todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos de observação, as transcrições de entrevista, as análises de documentos e as demais informações possíveis”. Dessa forma, Bogdan e Biklen (2003) corroboram afirmando que a análise envolve o trabalho com os dados, onde iremos descobrir aspectos importantes, separando o que deve ser aprendido e decidindo o que será transmitido aos outros.

Com isso, a fase da análise de dados se inicia a partir da organização de todos os dados, onde o pesquisador, além de organizar esses dados, começa a refletir sobre seu objetivo e questão de pesquisa, podendo gerar novos questionamentos e possibilitando, futuramente, uma busca de novos dados mais específicos. Diante disso:

> a análise de dados consiste em examinar, categorizar, classificar em tabelas ou, do contrário, recombinar as evidências tendo em vista proposições iniciais de um estudo. Analisar as evidências de um estudo de caso é uma atividade particularmente difícil, pois as estratégias e as técnicas não foram muito bem definidas no passado. Ainda assim, cada pesquisador deve começar seu trabalho com uma estratégia analítica geral – estabelecendo prioridades do que deve ser analisado e por que (YIN, 2001, p. 131).

Dessa forma, como já destacamos anteriormente, nossa pesquisa é qualitativa e dentre as modalidades dessa pesquisa, o nosso estudo se enquadra em *estudo de caso*. Segundo Bogdan e Biklen (2003), o estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico. Dessa forma, julgamos nossa pesquisa como dentro dessa modalidade, uma vez que a mesma foi desenvolvida em uma turma do 2º Ano do Ensino Médio da Escola Estadual Carlota Barreira na cidade de Areia, Paraíba, com uma Proposta Didática explorando as provas e demonstrações matemáticas e suas verificações no aplicativo GeoGebra nos assuntos de Teorema de Pitágoras e Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo.

Além disso, Stake (2011, p. 37) afirma que “os estudos de caso são simplistas, pois observam apenas uma ou poucas salas de aula, mas podem analisar com mais cuidado a ênfase nos testes e a instrução”. Ou seja, mesmo que façamos nosso trabalho com uma ou poucas turmas, a nossa análise será maior e mais cuidadosa nas propostas das atividades aplicadas e nos momentos de discussões das duplas durante as resoluções das atividades.

Ainda com relação ao estudo de caso, Yin (2001) afirma que um estudo de caso é uma investigação empírica, na qual investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos. Além disso:

> a investigação de estudo de caso enfrenta uma situação tecnicamente única em que haverá muito mais variáveis de interesse do que pontos de dados, e, como resultado, baseia-se em várias fontes de evidências, com os dados precisando convergir em um formato de triângulo, e, como outro resultado, beneficia-se do desenvolvimento prévio de proposições teóricas para conduzir a coleta e a análise de dados (YIN, 2001, pp. 32-33).

Assim, o estudo de caso como estratégia de pesquisa compreende um método que abrange tudo, desde a lógica de planejamento incorporando abordagens específicas até a coleta e a análise de dados. Portanto, de acordo com Yin (2001), o estudo de caso não é nem uma tática para coleta de dados nem meramente uma característica de planejamento, mas sim uma estratégia de pesquisa abrangente.

Dessa forma, ao finalizarmos a coleta dos dados, temos os dados brutos, ou seja, temos as notas de campo, as atividades aplicadas, as redações, as entrevistas, as gravações em áudio ou em vídeo, e estes devem ser organizados a fim de que se definam as categorias para que se inicie a análise da pesquisa. Diante disso:

> é possível que o pesquisador utilize alguma forma de codificação, isto é, uma classificação dos dados de acordo com as categorias iniciais ou segundo conceitos emergentes. Nessa tarefa ele pode usar números, letras ou outras formas de anotações que permitam reunir, numa outra etapa, componentes similares (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 48).

Sendo assim, a primeira fase da análise é a construção de um conjunto de categorias descritivas, onde o referencial teórico, estudado anteriormente, irá fornecer a base inicial de conceitos, dos quais é feita a primeira classificação dos dados (CAVALCANTI, 2011). Porém, a forma de codificação varia muito, pois depende da preferência pessoal de cada pesquisador e do que ele irá precisar para responder a sua questão de pesquisa e o seu objetivo.

Com isso, Lüdke e André (1986) afirmam que a categorização, por si mesma, não esgota a análise, uma vez que o pesquisador precisará ir além da mera descrição, buscando realmente acrescentar algo à discussão já existente sobre o assunto estudado. Ou seja, para essas autoras, o pesquisador deverá fazer um esforço de abstração, tendo que ultrapassar os dados, buscando estabelecer conexões e relações que possibilitem a proposição de novas explicações e interpretações.

Diante disso, em nossa pesquisa utilizamos a técnica de triangulação para a organização e análise dos dados. Utilizamos tal técnica, pois a triangulação "pode nos dar mais confiança de que determinamos corretamente o significado ou pode nos dar mais confiança de que precisamos analisar as diferenças para enxergar significados múltiplos e importantes" (STAKE, 2011, p. 139). Além disso, porque a triangulação é um fundamento lógico disponível para se trabalhar com várias fontes de evidências (YIN, 2011).

A origem do conceito de triangulação não vem das Ciências Sociais e Humanas, mas sim das Ciências Militares. O conceito de triangulação foi utilizado na navegação e na topografia, onde é entendida como um método para fixar uma posição, isto é, a triangulação refere-se a um método para determinarmos a posição de um ponto C, através da observação de dois pontos, A e B (DUARTE, 2009).

Segundo Azevedo et al. (2013), atualmente, com as novas tecnologias de satélite, a triangulação é utilizada por militares para descobrir a exata localização de um telefone celular, um rádio-transmissor ou outro equipamento de comunicação do oponente e com os princípios básicos da Geometria, pode-se garantir que múltiplos pontos de vista irão contribuir para uma maior precisão. Dessa forma, "estando o pesquisador posicionado em um ponto de vista, ele precisará se posicionar em outros dois pontos de vista, **no mínimo**, a fim de ajustar a adequada 'distância e angulação' dos conceitos e se posicionar definitivamente após a análise das visadas" (AZEVEDO et al., 2013, p. 3 – **grifo nosso**).

Assim, a triangulação significa olhar para o mesmo fenômeno, ou questão de pesquisa, a partir de mais de uma fonte de dados, nas quais contêm informações advindas de diferentes ângulos que podem ser utilizadas para corroborar, elaborar ou iluminar o problema de pesquisa. Portanto:

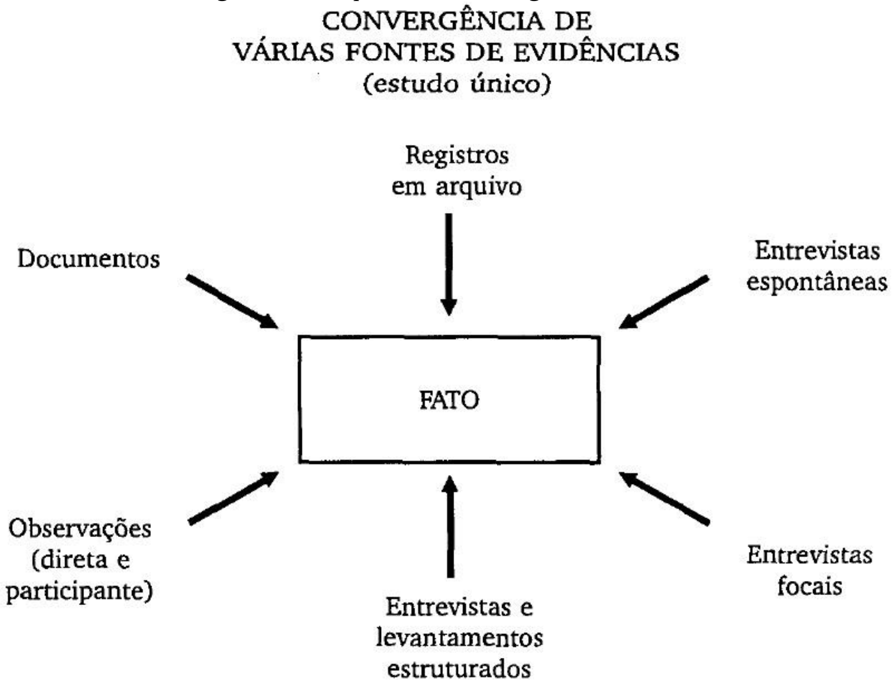
> o uso de várias fontes de evidências nos estudos de caso permite que o pesquisador dedique-se a uma ampla diversidade de questões históricas, comportamentais e de atitudes. A vantagem mais importante, no entanto, é o desenvolvimento de *linhas convergentes de investigação*, um processo de triangulação (...). Assim, qualquer descoberta ou conclusão em um estudo de caso provavelmente será muito mais convincente e acurada se se basear em várias fontes distintas de informação, obedecendo a um estudo corroborativo de pesquisa (YIN, 2001, p. 121).

Dessa forma, a triangulação ajuda a enriquecer o estudo de caso, uma vez que podemos organizar diversas linhas que convergem para o mesmo foco, fazendo assim, o estudo mais convincente e confiável. Yin (2001) aborda em seu texto quatro tipos de triangulação defendidas por Patton (1987): *de fontes de dados* (triangulação de dados); *entre avaliadores diferentes* (triangulação de pesquisadores); *de perspectivas sobre o* *mesmo conjunto de dados* (triangulação da teoria); *de métodos* (triangulação metodológica).

Segundo Azevedo et al. (2013), a *triangulação de dados* consiste na coleta de dados em diferentes períodos e de fontes distintas de modo a obter uma descrição mais rica e detalhada dos fenômenos. Já a *triangulação do investigador* diz respeito ao uso de pesquisadores diversos para estudar a mesma questão de pesquisa ou a mesma estrutura, com o intuito de que pesquisadores diferentes irão trazer perspectivas, reflexões e análises diferentes. A *triangulação teórica* refere-se à possibilidade do investigador recorrer a múltiplas teóricas para interpretar um mesmo conjunto de dados. Por fim, a *triangulação metodológica* diz respeito ao uso de múltiplos métodos para obter os dados mais completos e detalhados possíveis sobre o fenômeno.

Diante disso, em nossa pesquisa, focamos especificamente na triangulação de fontes de dados (triangulação de dados), uma vez que exploramos diferentes fontes a fim de obter uma descrição mais rica e detalhada do nosso objeto de estudo. Ou seja,

Figura 15 - Esquema de convergência de dados



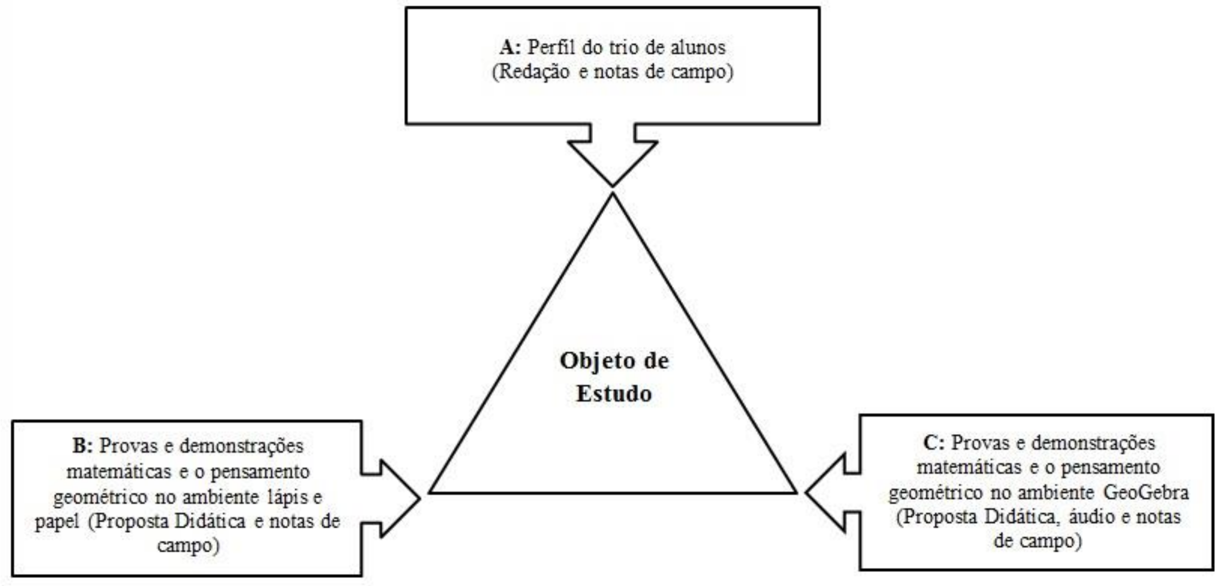
Fonte: Retirado de Yin (2001, p. 122)

O esquema apresentado acima mostra de maneira organizada como funciona a triangulação de dados e a convergência de dados realizada a partir dele, ou seja, todos os diferentes dados alimentam o objeto a ser estudado, de modo que não sejam vistos isoladamente, mas que, ao organizá-los, consigamos perceber as regularidades em diversas fontes, tornando assim um discurso convincente, confiável e justificado ao leitor.

Assim, com o auxílio da triangulação, o pesquisador poderá recorrer a diferentes fontes, enriquecendo seu estudo, fortalecendo e validando as suas ideias. Lüdke e André (1986) afirma que o pesquisador, ao recorrer à triangulação, poderá checar um dado obtido por meio de diferentes informantes, em situações variadas e em momentos diferentes. E esse aspecto nos reporta à fidedignidade, onde não se espera que os observadores cheguem as mesmas representações dos mesmos eventos, mas que haja alguma concordância, de forma que essa representação da realidade seja aceitável, mesmo que existam outras igualmente aceitáveis (LÜDKE e ANDRÉ, 1986).

Portanto, tomando como base a estrutura de convergência apresentada por Yin (2001) e a estrutura realizada por Lins (2003), referente à convergência de evidências para a triangulação de dados, adaptamos a mesma na presente pesquisa:

Figura 16 - Triangulação de Dados



Fonte: Estrutura adaptada de Lins (2003)

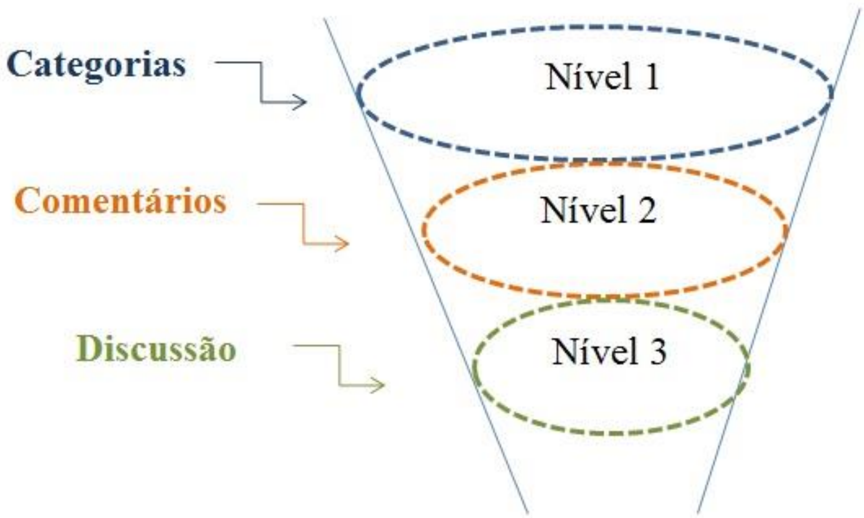
A análise foi desenvolvida com o objetivo de responder a pergunta que norteou a nossa pesquisa: *Que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico podem ocorrer a partir de uma proposta didática por alunos do 2º Ano do Ensino Médio?*

Conforme a Figura 16, o vértice A tem como objetivo traçar o perfil do trio pesquisado em relação às provas e demonstrações matemáticas. A coleta de dados aconteceu por meio de uma redação, na qual proporcionamos um espaço onde os alunos poderiam escrever livremente o que entendiam sobre esses assuntos. O vértice B objetiva analisar qual(is) tipo(s) de provas e demonstrações matemáticas os alunos conseguem desenvolver e qual(is) nível(is) do pensamento geométrico os mesmos se encontram ao trabalharem atividades no ambiente lápis e papel. Para isso, a coleta de dados aconteceu por meio da aplicação de uma Proposta Didática (Atividade 8 da Parte I e Atividades 1 e 2 da Parte II) e notas de campo. O vértice C visa analisar qual(is) tipo(s) de provas e demonstrações matemáticas os alunos conseguem desenvolver e qual(is) nível(is) do pensamento geométrico os mesmos se encontram ao trabalharem atividades no ambiente GeoGebra. Para isso, a coleta de dados se deu por meio de uma Proposta Didática (Atividades 1 a 5 da Parte IV), áudio e notas de campo. Para as análises dos vértices B e C utilizamos as discussões feitas por Balacheff (2000) e Nasser e Tinoco (2003) para os tipos de provas e demonstrações matemáticas e as discussões de Parzysz (2006) para os níveis do pensamento geométrico.

Ao finalizarmos cada vértice, realizamos comentários, nos quais analisamos cada ponto e, por fim, realizamos uma discussão final com o objetivo de um fechamento do estudo de caso.

Assim, a análise dos dados se deu em três níveis. O primeiro, partindo das categorias; o segundo nível, os comentários; e o terceiro nível de análise, a discussão do estudo de caso como um todo. Dessa forma, a estrutura dos níveis de análise é organizada em forma de funil e se baseia na proposta de Lins (2003):

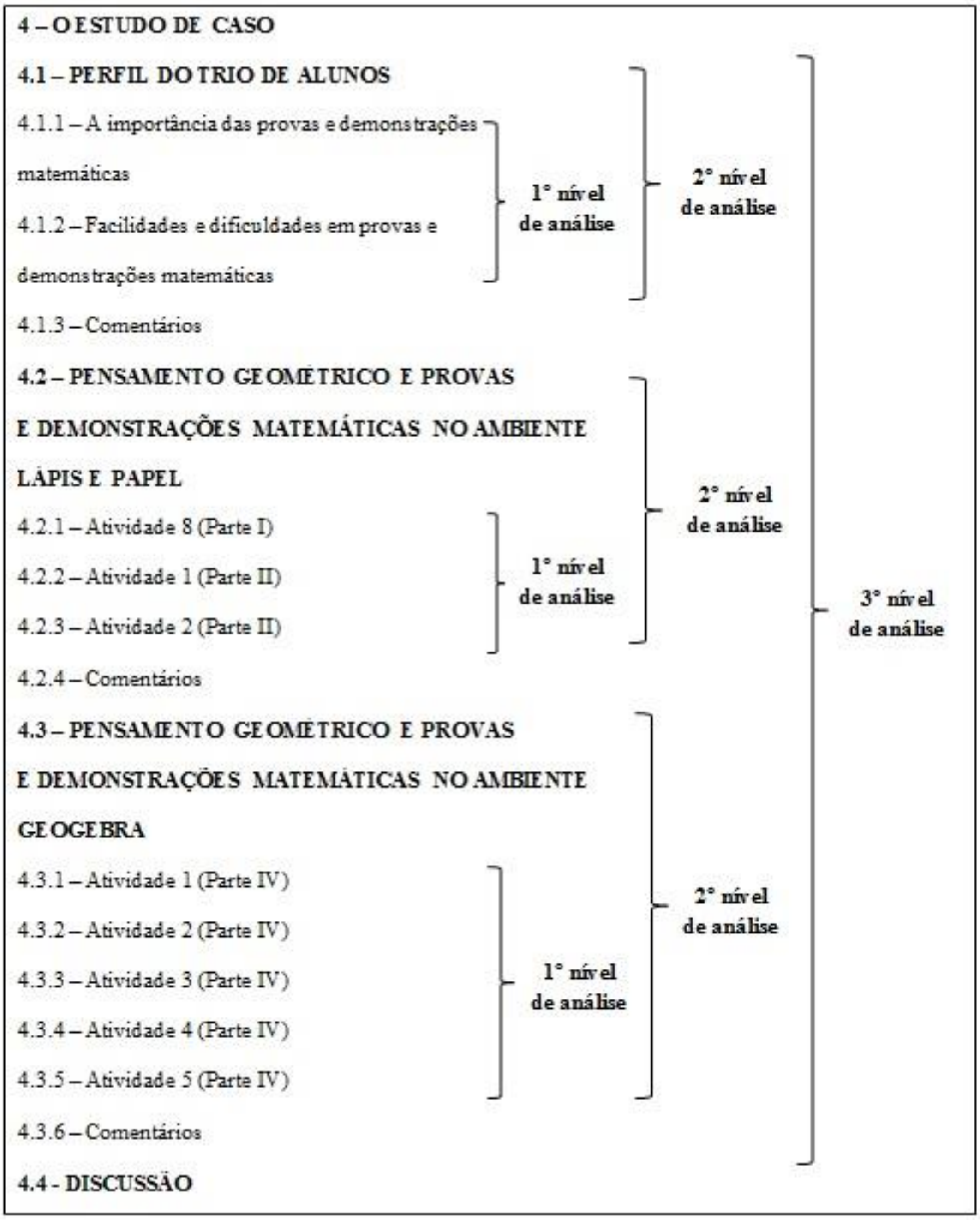
Figura 17 - Níveis de análise



Fonte: Estrutura adaptada de Lins (2003)

À vista disso, a partir das categorias expostas e objetivadas acima, criamos subcategorias, as quais estão expostas na Figura abaixo:

Figura 18 - Esboço das Categorias e Subcategorias



Fonte: Estrutura adaptada de Lins (2003)

Com isso, a Figura acima sintetiza o que fizemos nos três níveis de análise, onde o primeiro diz respeito às categorias; o segundo, os comentários; e o terceiro, a discussão do estudo de caso como um todo.

Portanto, a análise de dados esteve sempre relacionada ao nosso objetivo de pesquisa, o qual é o centro da triangulação, que trata de investigar que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível de pensamento geométrico de alunos do 2º Ano do Ensino Médio podem ocorrer a partir de uma Proposta Didática nos ambientes lápis e papel e GeoGebra. A partir disso, podemos apontar algumas contribuições e limitações da pesquisa, assim como um trabalho futuro. No próximo capítulo, apresentaremos o estudo de caso em si.

CAPÍTULO 4
ESTUDO DE CASO

Nesse capítulo descrevemos o Estudo de Caso realizado em nossa pesquisa, no qual está dividido em quatro seções, que dizem respeito às quatro grandes categorias e suas subcategorias. A primeira seção, *Perfil do trio de alunos*; a segunda, *Pensamento geométrico e provas e demonstrações matemáticas no ambiente lápis e papel;* e a terceira, *Pensamento geométrico e provas e demonstrações matemáticas no ambiente GeoGebra.* Para esta análise, escolhemos um trio de alunos do 2º ano do Ensino Médio, uma vez que suas atividades foram as mais ricas em termos de tentativas de responder a todas as atividades.

A primeira seção representa o vértice A do triângulo, primeira grande categoria. Nesta seção analisamos a redação sobre o tema *Provas e Demonstrações Matemáticas*, que foi aplicada no primeiro momento de nosso trabalho com os alunos, com a qual traçamos um perfil do trio de alunos em relação a este tema.

Em seguida, a segunda seção, constitui o vértice B do triângulo, segunda grande categoria. Nesta seção analisamos o pensamento geométrico e as provas e demonstrações matemáticas desse trio de alunos no ambiente lápis e papel. Para isso, utilizamos as atividades 8 (Parte I), 1 e 2 (Parte II) da Proposta Didática e as notas de campo escritas durante a aplicação da Proposta.

A terceira seção diz respeito ao vértice C do triângulo, terceira grande categoria. Nesta seção analisamos o pensamento geométrico e as provas e demonstrações matemáticas desse trio de alunos no ambiente GeoGebra. Para isso, utilizamos as atividades 1 a 5 (Parte IV) da Proposta Didática, os áudios gravados desse trio durante a realização das atividades e as notas de campo escritas no decorrer da aplicação da Proposta.

Finalizamos este capítulo com a quarta seção, a qual traz uma discussão do estudo de caso como um todo.

4.1 PERFIL DO TRIO DE ALUNOS

As pesquisas em andamento no Brasil nos mostram que as provas e demonstrações matemáticas ainda é um assunto pouco abordado nas aulas de Matemática da Educação Básica, uma vez que os professores de Matemática dão pouca importância a esta temática (ALMOULOUD, 2007 e NASSER e TINOCO, 2003). De acordo com Garbi (2010), o ensino da Matemática no Brasil foi de um extremo ao outro, isto é, anteriormente os professores demonstravam demais e, atualmente, já não se enfatiza o processo de demonstrar matematicamente. Com isso, temos os índices baixos em Matemática e pesquisas indicam que nossos alunos não dominam a Matemática (AGUILAR JR e NASSER, 2012). À vista dessa discussão, buscamos analisar o que o trio de alunos entende por provas e demonstrações matemáticas, por meio de uma redação aplicada ao mesmo, na qual estiveram livres para dissertar sobre esta temática. Com isso, construímos essa seção 4.1 com o objetivo de traçar um perfil do trio de alunos em relação às provas e demonstrações matemáticas, buscando elencar os pontos que mais nos chamaram a atenção nas suas escritas.

O trio de alunos é composto por Aluno A, Aluno B e Aluno C, do 2º ano do Ensino Médio, turno tarde, da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira, situada na cidade de Areia-PB. Salientamos que as redações na íntegra elaboradas pelos alunos do trio se encontram nos Apêndices B, C e D.

Dessa forma, essa seção diz respeito ao vértice A do triângulo que foi dividida em três subseções, três subcategorias. A primeira subseção está relacionada à escrita do Aluno A e seu entendimento com relação à importância das provas e demonstrações matemáticas; a segunda subseção está relacionada às escritas dos Alunos B e C e seus entendimentos com relação às facilidades e dificuldades em provas e demonstrações matemáticas; e na terceira, fazemos comentários acerca das discussões feitas nas subseções anteriores.

4.1.1 A importância das provas e demonstrações matemáticas

Percebemos que o Aluno A dissertou sobre a importância da Matemática nas nossas vidas, uma vez que "cabe a qualquer ser humano se envolver na matemática, pois até a pessoa mais humilde precisa de um cálculo ou outro nas diversas situações cotidianas" (Redação, Aluno A).

O Aluno A também afirmou que "quando penso no tema Provas e demonstrações matemáticas lembro de dor de cabeça, impaciência, além, da inteligência que é essencial no momento de resolver uma prova matemática" (Redação, Aluno A). Ou seja, o Aluno A considera provas matemáticas como as provas de Matemática que avaliam os conhecimentos estudados dos alunos e que o faz lembrar dor de cabeça e impaciência, além de afirmar que a inteligência é essencial para resolver as provas dessa disciplina.

Além disso, o Aluno A disserta que “uma demonstração matemática não está presente apenas na sala de aula, mas a partir que o ser humano cresce a Matemática, ou seja, dinheiro, poupança, economia crescem em sua vida” (Redação, Aluno A). Isto é, o Aluno A afirma que a demonstração matemática está presente na sala de aula, mas percebemos que ele não a conhece, uma vez que relaciona demonstração matemática com dinheiro, poupança e economia. Consequentemente, ele afirma que a demonstração matemática também está presente em nosso cotidiano, já que está relacionada aos gastos e economias de uma pessoa adulta.

Percebemos que o Aluno A não sabe os conceitos de provas e demonstrações matemáticas, uma vez que relaciona prova matemática com a avaliação feita bimestralmente para se obter uma nota e relaciona demonstração matemática com economia, dinheiro e poupança. O que vem confirmar com as discussões feitas anteriormente em que pesquisas mostram que nossos alunos não dominam a Matemática e que provas e demonstrações ainda é um assunto pouco abordado nas salas de aula de Matemática da Educação Básica (ALMOULOUD, 2007; NASSER e TINOCO, 2003; AGUILAR JR e NASSER, 2012).

4.1.2 Facilidades e dificuldades em provas e demonstrações matemáticas

Percebemos que o Aluno B considera as provas matemáticas muito difíceis e afirma que elas “servem como demonstração para analisar ou observar o grau de experiência de alguma pessoa. Que podem ser expostas para que pessoas utilizem como experiência de ensino” (Redação, Aluno B). Ou seja, o Aluno B entende prova matemática como uma demonstração e a considera como uma forma de avaliar a experiência de uma pessoa com relação à Matemática, podendo ser utilizada também como experiência de ensino.

Já o Aluno C afirma que “as provas de Matemática são boas só algumas questões que complicam muito, assim, não são as questões que complicam, é porque muito dos alunos não leem para compreender melhor a pergunta” (Redação, Aluno C). Isto é, o Aluno C considera as provas matemáticas como avaliação bimestral que vale uma nota. Um ponto interessante na escrita do Aluno C é que ele afirma que não são as questões que complicam, mas os alunos que não leem corretamente e, consequentemente, não conseguem compreender o que é pedido na questão. Esse ponto é bastante discutido entre os professores de Matemática, principalmente quando trabalhamos com questões contextualizadas, que requerem dos alunos certa atenção e leitura cuidadosa, para que eles possam compreender o que está sendo pedido na questão.

Além disso, o Aluno C afirma que "com as demonstrações nós alunos aprendemos mais e quando for fazer uma prova fica mais fácil" (Redação, Aluno C). Ou seja, na sua escrita, o Aluno C não afirma o que vem a ser demonstração para ele, mas percebemos que ele afirma que com o auxílio das demonstrações, os alunos aprendem mais e a prova ficará mais fácil. Tratando, dessa forma, prova como avaliação bimestral valendo nota.

Portanto, percebemos que os Alunos B e C consideram as provas matemáticas como avaliações bimestrais, nas quais os professores irão analisar os seus conhecimentos matemáticos.

4.1.3 Comentários

A partir das escritas do Aluno A percebemos que o mesmo afirma sobre a importância da Matemática para qualquer ser humano; liga o tema Provas e Demonstrações Matemáticas à dor de cabeça, impaciência e inteligência; e relaciona demonstração matemática com dinheiro, poupança e economia. Notamos também que este aluno trata as provas matemáticas como as avaliações que ocorrem bimestralmente valendo nota.

Com relação ao Aluno B percebemos que, em suas escritas, o mesmo afirma que as provas matemáticas são difíceis e que servem como demonstração para analisar o grau de experiência de uma pessoa, ou seja, assim como o Aluno A, este aluno trata as provas matemáticas como as avaliações que os professores de Matemática aplicam para verificar os conhecimentos matemáticos de seus alunos.

Já o Aluno C trata de um ponto bastante importante e discutido entre os professores de Matemática nas escolas. Este aluno afirma que as provas de Matemática são boas e só algumas questões que complicam, mas para ele não são as questões que complicam, e sim os alunos que não leem para compreender melhor a pergunta. Com relação a esta temática, Siqueira (2013) afirma que a dificuldade em interpretar textos básicos surge devido à falta de leitura e destaca que essa dificuldade em interpretar textos também pode interferir no raciocínio de outras matérias. Ou seja, para a autora, "às vezes, o aluno não consegue resolver uma questão de matemática por não saber interpretar o enunciado. Desta forma, ele acaba se tornando um analfabeto funcional: aquela pessoa que lê, mas não processa a informação e não reflete" (SIQUEIRA, 2013).

Dessa forma, percebemos que, assim como os Alunos A e B, o Aluno C também trata provas matemáticas como as avaliações que os professores de Matemática realizam bimestralmente para se obter nota dos alunos. Além disso, o Aluno C, mesmo sem sabermos qual seu entendimento por demonstração, afirma que com as demonstrações, os alunos aprenderão mais e então quando forem fazer uma prova ficará mais fácil. Confirmando, mais uma vez, seu entendimento de que prova matemática é avaliação.

À vista de toda essa discussão, trazemos nossas leituras feitas e discutidas anteriormente, nas quais percebemos que nossos alunos não dominam a Matemática, nem são incentivados a utilizar as provas e demonstrações matemáticas na sala de aula da Educação Básica, confirmando as discussões feitas por Almouloud (2007), Nasser e Tinoco (2003) e Aguilar Jr e Nasser (2012).

Como afirmamos anteriormente, para nossa pesquisa estamos considerando prova e demonstração com significados distintos, ou seja, tratamos a prova em um significado mais amplo, no qual pode ser entendida como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, que possivelmente não será aceita pelos matemáticos puros. Já a demonstração ou prova formal será considerada como um tipo de prova aceita pela comunidade dos matemáticos, a qual é baseada em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, devendo ser obtida por meio de um processo hipotético-dedutivo. Assim, com estas afirmações, notamos que os Alunos A, B e C não são incentivados a trabalhar com as provas e demonstrações matemáticas em sala de aula, uma vez que suas visões dizem respeito à avaliação bimestral da disciplina de Matemática.

Além disso, de acordo com Nasser e Tinoco (2003), a realidade hoje mostra que a maioria de nossos alunos não está aprendendo a pensar e raciocinar quando se estuda Matemática. Assim, podemos constatar que nossos alunos não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias e isso nós percebemos na aplicação na Redação na turma do 2º Ano do Ensino Médio, a qual a maioria dos alunos não se mostrou interessado em escrever a redação, como também estavam tendo dificuldades para expressar as suas ideias com relação a esta temática.

Afirmamos que, assim como os PCN recomendam, a capacidade ou habilidade de comprovação, argumentação e justificação é bastante importante para a formação do cidadão crítico e isso possibilita, na Matemática, um desenvolvimento de seu raciocínio e de sua capacidade expressiva. Dessa forma, acreditamos que se as provas e demonstrações matemáticas forem abordadas na sala de aula da Educação Básica e, quando abordadas, que estas tenham significado tanto para o professor quanto para o aluno, então teremos uma melhor e mais clara compreensão da Matemática e do pensamento matemático.

4.2 PENSAMENTO GEOMÉTRICO E PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO AMBIENTE LÁPIS E PAPEL

Para esta seção e a próxima estaremos considerando os níveis de pensamento geométrico propostos por Parzysz (2006), uma vez que o mesmo para fazer uma articulação entre os quatro níveis de pensamento geométrico tomou como base a natureza dos objetos de estudo da Geometria e o tipo de validação. Parzysz (2006) considera dois tipos de Geometria, a Não-Axiomática e a Axiomática. A Geometria Não-Axiomática é subdividida em duas outras: Geometria concreta (G0) e Geometria spatio-graphique (G1). A Geometria Axiomática se subdivide em duas outras: Geometria proto-axiomática (G2) e Geometria axiomática (G3).

Também utilizaremos os tipos de provas matemáticas e a demonstração para analisarmos as atividades do trio de alunos. Com isso, estaremos considerando as discussões feitas por Balacheff (2000), nas quais o autor considera quatro tipos de provas que se diferenciam pelo conhecimento mobilizado e pelo tipo de raciocínio. Estaremos considerando o empirismo ingênuo, a experiência crucial, o exemplo genérico e a experiência mental. Além desses tipos de provas, estaremos considerando as propostas por Nasser e Tinoco (2003): justificativa pragmática, recorrência a uma autoridade, exemplo crucial e justificativa gráfica.

Portanto, essa seção diz respeito ao vértice B do triângulo, segunda grande categoria, e estaremos analisando as atividades 8 (Parte I) e 1 e 2 (Parte II). Esta seção foi subdividida em quatro subseções, subcategorias: as três primeiras dizem respeito às atividades da Proposta Didática e que estaremos analisando as soluções das mesmas pelo trio de alunos, e na quarta, trazemos comentários referentes às discussões feitas nas subseções anteriores.

Salientamos que na Atividade 8 (Parte I) buscamos analisar o pensamento geométrico e as provas e demonstrações matemáticas do trio de alunos; na Atividade 1 (Parte II) analisamos as provas e demonstrações matemáticas do trio de alunos; e na Atividade 2 (Parte II) observamos o pensamento geométrico e as provas e demonstrações matemáticas do trio de alunos.

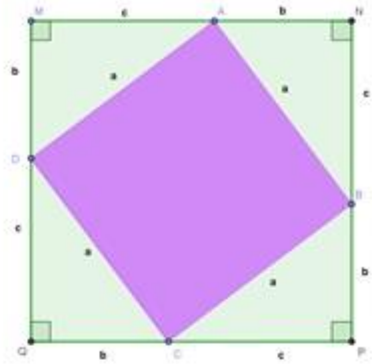
4.2.1 Atividade 8 (Parte I)

Figura 19 - Atividade 8 (Parte I) resolvida pelo trio de alunos

PARTE I

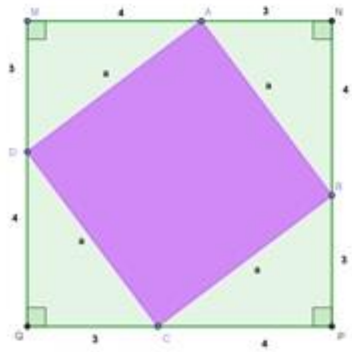
(8) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem.



b) Calcule o valor de a, da figura acima, em função de b e c utilizando o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos.

c) Observem o desenho abaixo e calculem o valor de a em função de 3 e 4 usando apenas o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos:



d) Comparem com o resultado obtido na letra b. O que vocês observam?

e) Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c e respondam:

- ✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)?
- ✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

Fonte: Proposta Didática

Resultados Esperados:

Que o trio de alunos consiga desenvolver uma prova para o Teorema de Pitágoras, utilizando os conceitos de áreas de um quadrado e de um triângulo. Assim:

- item *a*: O trio de alunos irá verificar se o quadrilátero de lado a é um quadrado. Para isso, os alunos deverão ter conhecimentos sobre a definição de um quadrado.

- item *b*: O trio de alunos será levado a compreender o teorema de Pitágoras, utilizando os conceitos de áreas de um quadrado e de um triângulo. Para isso, é preciso que eles se lembrem de produtos notáveis, cálculo de área (quadrado e triângulo), congruência de triângulos, potenciação e radiciação. Uma possível dificuldade do trio de alunos poderá surgir na percepção de que a área da figura pode ser expressa de duas formas diferentes.

- item *c*: Após fazer o caso geral do teorema de Pitágoras, o trio de alunos irá resolver um caso particular envolvendo esse teorema, utilizando apenas os conceitos de áreas de um quadrado e de um triângulo. Com este item, supõe-se que o trio de alunos já venha preparado do item anterior e consiga ver mais facilmente a relação pitagórica. Além disso, assim como no item anterior, é necessário que eles tenham conhecimento do conceito de área de triângulo e de quadrado, congruência de triângulos, potenciação e radiciação. Uma possível dificuldade do trio de alunos, assim como no item anterior, poderá surgir na percepção de que a área da figura pode ser expressa de duas formas diferentes.

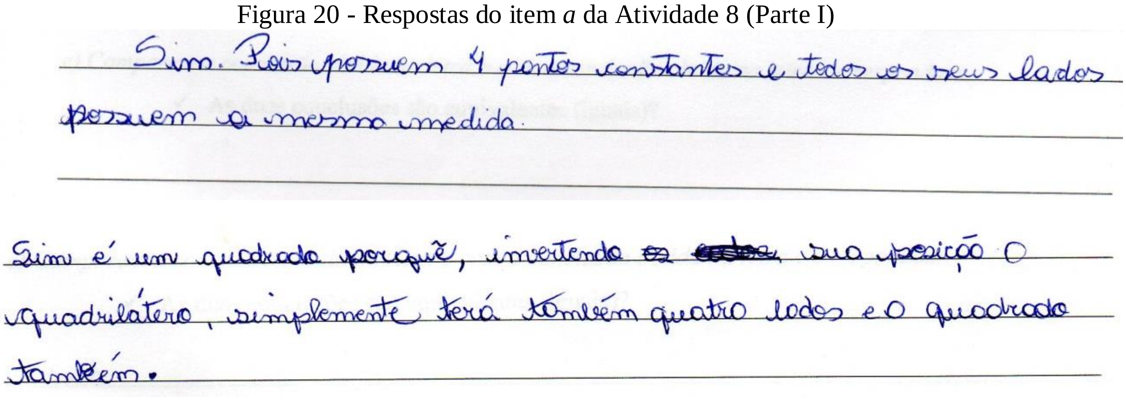
- item *d*: O trio de alunos deverá reconhecer que os resultados obtidos nos itens b e c são semelhantes, porém o item b é o caso geral e o item c, um caso particular.

- item *e*: O trio de alunos deverá conhecer as suas concepções sobre o que é uma prova e o que é uma simples verificação ou validação. Dessa forma, eles deverão reconhecer quando um argumento constitui-se em uma prova.

Resultados Obtidos:

No item *a*, a pergunta era: *Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifique*. Tendo como resposta do trio de alunos:

Figura 20 - Respostas do item *a* da Atividade 8 (Parte I)


Sim. Pois possuem 4 pontos constantes e todos os seus lados possuem a mesma medida.

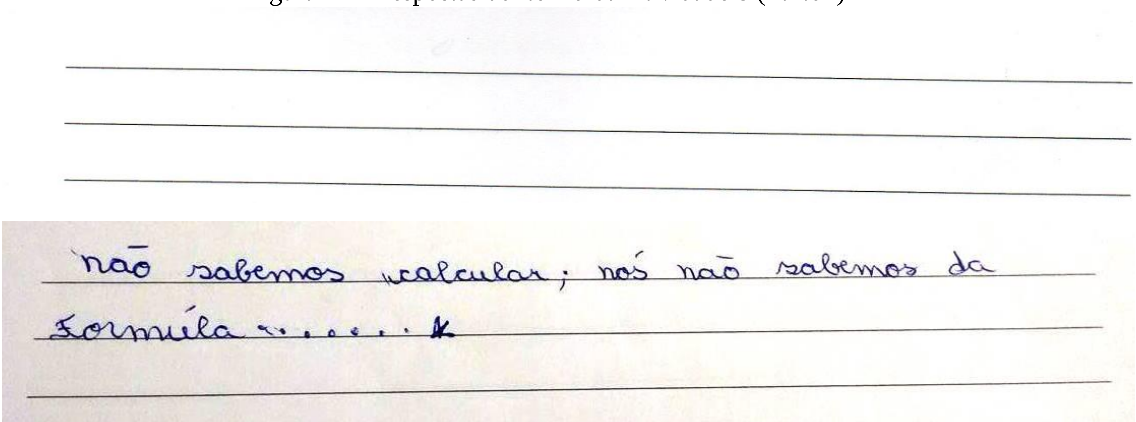
Sim é um quadrado porquê, invertendo sua posição o quadrilátero, simplemente terá também quatro lados e o quadrado também.

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Observamos que o trio de alunos utilizou a definição de um quadrado para justificar que o quadrilátero ABCD é um quadrado. Ou seja, como afirma Dolce e Pompeo (2005, p. 94), “um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui quatro *ângulos* congruentes e os quatro *lados* congruentes”. Dessa forma, consideramos correta as suas justificativas quanto ao quadrilátero ABCD ser mesmo um quadrado, uma vez que eles afirmam que, invertendo a sua posição, o quadrilátero tem todos os lados de mesma medida.

No item *b*, foi pedido: *Calcule o valor de a, da figura acima, em função de b e c utilizando o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos*. O trio de alunos respondeu:

Figura 21 - Respostas do item *b* da Atividade 8 (Parte I)

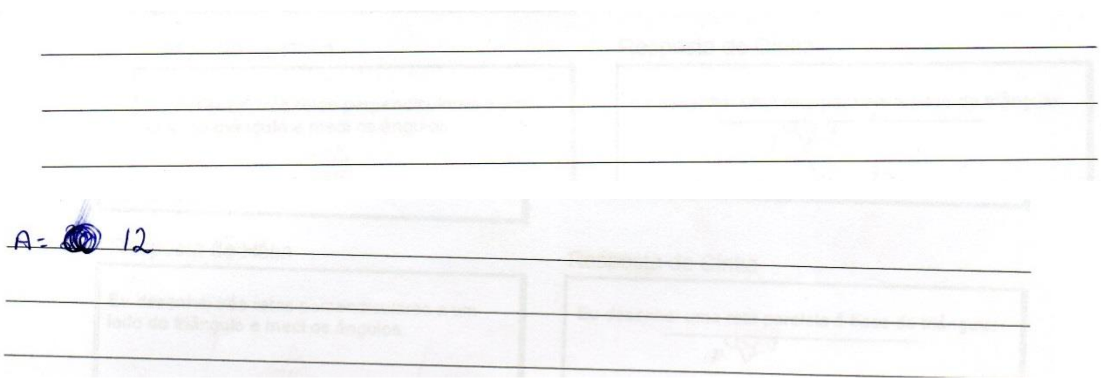


Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Os Alunos A e B deixaram a questão em branco, já o Aluno C afirmou que não sabe calcular ou não sabe a fórmula. Dessa forma, concluímos que o trio de alunos não se lembrou dos conceitos que seriam necessários para se resolver este item, que seriam: produtos notáveis, cálculo de área (quadrado e triângulo), congruência de triângulos, potenciação e radiciação. Além disso, como eles não responderam o item *b*, podemos afirmar que a dificuldade apresentada nos resultados esperados foi confirmada, uma vez que afirmamos que o trio de alunos poderia ter dificuldade na percepção de que a área da figura pode ser expressa de duas formas diferentes. Assim, como eles não responderam, percebemos que eles não conseguiram enxergar a área da figura de duas formas diferentes, como também não lembraram os conceitos necessários para resolver a atividade corretamente.

No item *c*, pedimos que: *Observem o desenho abaixo e calcule o valor de a em função de 3 e 4 usando apenas o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos*. Obtivemos como resposta:

Figura 22 - Respostas do item *c* da Atividade 8 (Parte I)

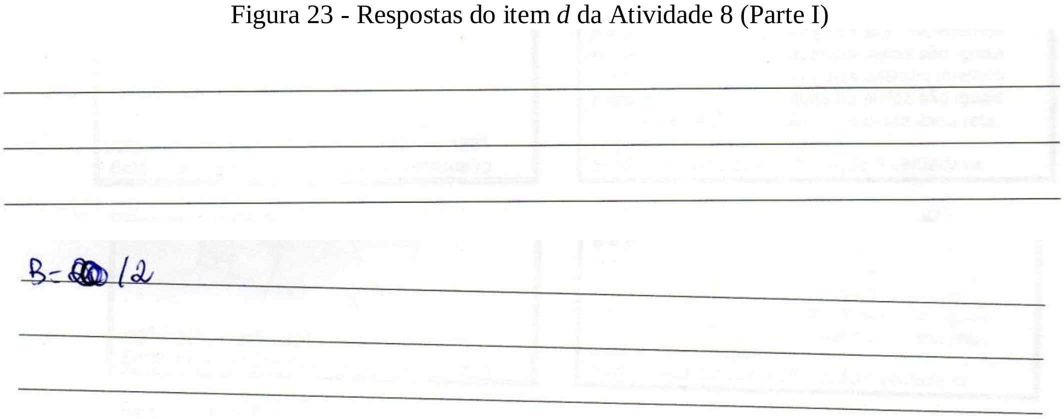


Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Os Alunos A e B deixaram o item *c* em branco e podemos afirmar a mesma coisa do item anterior, uma vez que eles precisariam dos mesmos conceitos do item *b* para resolver essa questão, como também não conseguiram enxergar que a área da figura pode ser expressa de duas formas diferentes. Já o Aluno C escreveu que $A = 12$ e percebemos que ele deve ter multiplicado a altura 4 e a base 3 do triângulo retângulo, o que está errado caso ele queira encontrar a área desse triângulo. Outra possibilidade para essa escrita do Aluno C é que ele não queria deixar a questão em branco e colocou essa resposta. Podemos concluir a mesma coisa do item anterior para o trio de alunos, o mesmo não lembrou dos conceitos necessários para se resolver a atividade e tiveram dificuldade em perceber que a área da figura pode ser expressa de duas formas diferentes.

No item *d*, pedíamos que: *Comparem com o resultado obtido na leta b. O que vocês observam?* A resposta do trio foi:

Figura 23 - Respostas do item *d* da Atividade 8 (Parte I)

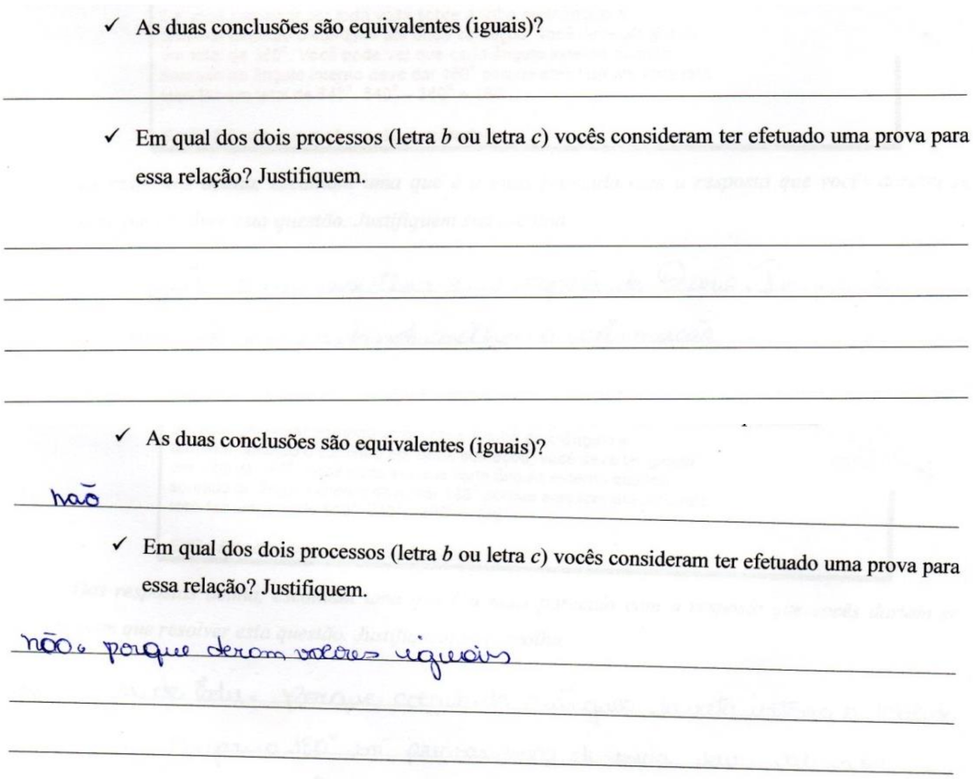


Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Assim como no item *c*, os Alunos A e B deixaram a questão em branco, uma vez que, como não responderam os item *b* e *c*, então não tinha como comparar os resultados encontrados. Já o Aluno C respondeu que $B = 12$ e também concluímos o mesmo que o item anterior, o aluno multiplicou os número 4 e 3 presentes na altura e na base, respectivamente, do triângulo retângulo da figura, mas não respondeu o que foi pedido, uma vez que deixou o item *b* em branco, pois afirmou que não sabia calcular e não sabia da fórmula. Assim, como os alunos não resolveram o caso geral e o caso particular para o Teorema de Pitágoras, então eles não conseguiram reconhecer que são semelhantes.

E por fim, no item *e* as perguntas foram: C*omparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c e respondam: - as duas conclusões são equivalentes (iguais)? – em qual dos dois processos (letra b ou letra c) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.* Foi dado como respostas:

Figura 24 - Respostas do item *e* da Atividade 8 (Parte I)


✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)?

✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)?

não

✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

não. porque deram valores iguais

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Para responder esse item era necessário que o trio de alunos tivesse respondido os itens *b* e *c*. Dessa forma, os Alunos A e B deixaram em branco, uma vez que não resolveram os itens necessários para responder o que estava pedindo no item *e*. Já o Aluno C, com as respostas dadas nos itens *c* e *d*, respondeu erroneamente, uma vez que era preciso ter respondido os itens *b* e *c*. Quanto ao segundo ponto, percebemos que o Aluno C não leu corretamente o que estava sendo pedido, já que sua resposta não está coerente com o que foi perguntado, uma vez que estávamos pedindo para ele dizer qual das duas conclusões, do item *b* ou *c*, constituía uma prova do Teorema de Pitágoras. Dessa forma, percebemos que o trio de alunos não sabe a diferença entre prova e uma simples verificação ou validação e isso pode ser confirmado por meio de suas escritas na redação que foi aplicada, uma vez que estes alunos afirmaram que provas matemáticas são as provas bimestrais aplicadas pelo professor de Matemática, com o intuito de avaliar o conhecimento do aluno. Além disso, percebemos que os alunos não conseguiram reconhecer quando um argumento constitui-se em uma prova, já que não resolver os itens *b*, *c* e *d*.

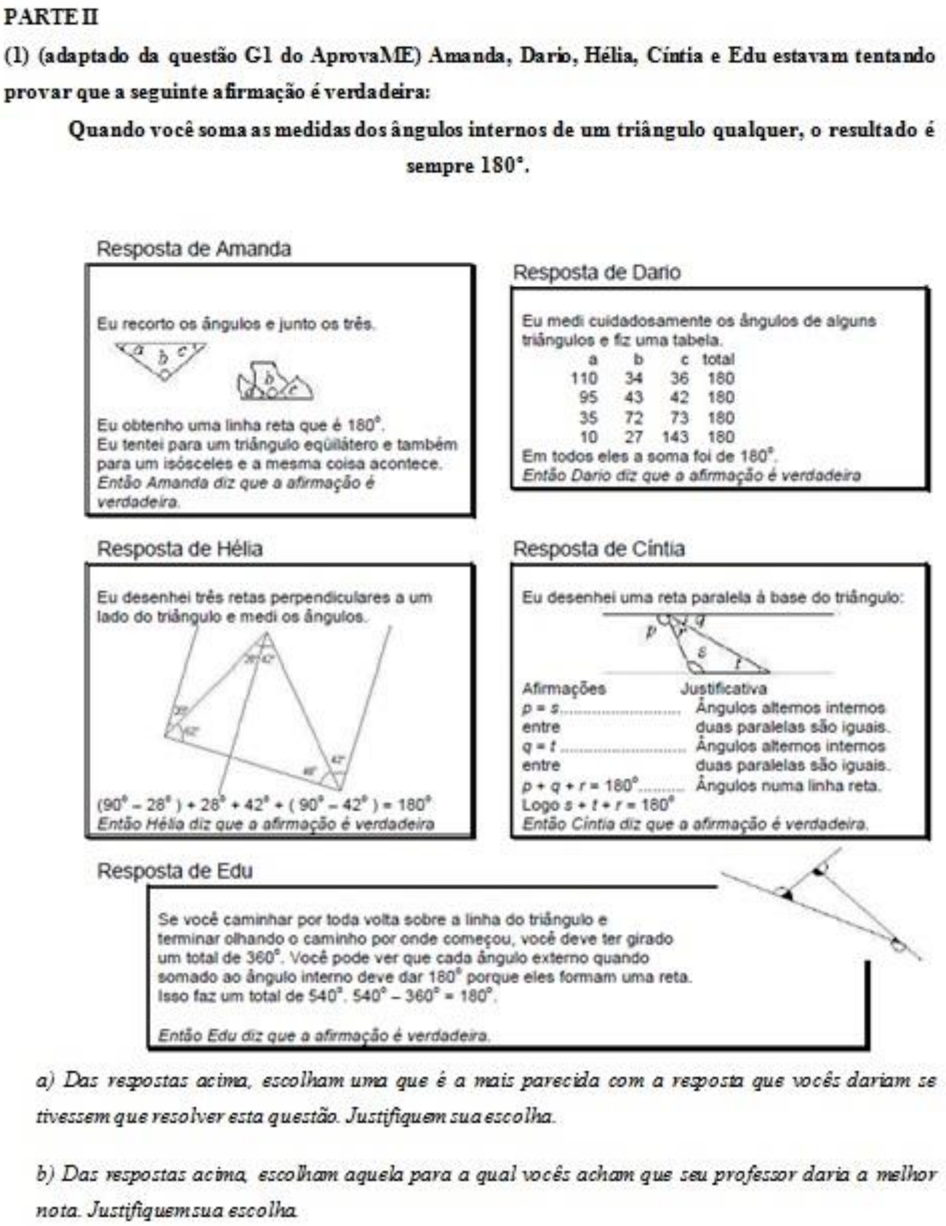
À vista disso, podemos afirmar que o trio de alunos conseguiu resolver a Atividade 8 (Parte I) de acordo com os conhecimentos que detinham sobre os conceitos necessários para se resolver essa atividade, porém não atingiram o objetivo esperado para a atividade, uma vez que eles não conseguiram desenvolver uma prova para o Teorema de Pitágoras. Em especial, notamos que o trio de alunos respondeu corretamente o item *a*, uma vez que se lembravam da definição de um quadrado e a utilizaram para justificar a resposta. Quanto aos itens *b* e *c*, os alunos não lembravam os conceitos de produtos notáveis, cálculo de área (quadrado e triângulo), congruência de triângulos, potenciação e radiciação, como também tiveram dificuldade em perceber que a área do quadrilátero MNPQ pode ser vista de duas formas diferentes. Como não resolveram esses itens, então os itens *d* e *e* ou foram deixados em branco, ou foram respondidos erroneamente. Quanto ao item *e*, notamos que o trio de alunos não possuem concepções sobre o que é uma prova e o que é uma simples verificação/validação.

Com relação ao pensamento geométrico dos alunos, percebemos que os mesmos só conseguiram lembrar a definição de um quadrado para se resolver o item *a* e, consequentemente, estes alunos se encontram no nível G0 (Geometria concreta), segundo Parzysz (2006), uma vez que suas observações e constatações surgiram por meio das características físicas da figura. Dessa forma, a validação foi baseada somente na percepção. Quanto às provas e demonstrações matemáticas, infelizmente, não pudemos afirmar que tipo eles utilizaram, uma vez que os itens *b* e *c*, necessários para esta afirmação, foram deixados em branco pelo trio de alunos.

Salientamos que não estamos obedecendo à formalidade e ao rigor matemático quando analisamos as resoluções das Atividades pelo trio de alunos, já que estamos considerando o seu conhecimento matemático e o seu grau de maturidade, como Hanna (1990) propõe.

4.2.2 Atividade 1 (Parte II)

Figura 25 - Atividade 1 (Parte II) resolvida pelo trio de alunos



PARTE II

(1) (adaptado da questão G1 do AprovaME) Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.

Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.

$(90° - 28°) + 28° + 42° + (90° - 42°) = 180°$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela á base do triângulo:

Afirmações — Justificativa
$p = s$ .... Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$ .... Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180°$ .... Ângulos numa linha reta.
Logo $s + t + r = 180°$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

a) Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha.

b) Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifiquemsua escolha.

Fonte: Proposta Didática

Resultados Esperados:

Que o trio de alunos escolha as respostas que eles dariam se tivessem que resolver a questão, ou seja, eles deverão escolher uma das tentativas de provas propostas por

Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu, caso tivessem que também provar se a afirmação é verdadeira.

Dessa forma:

- Prova de Amanda: é uma resposta do tipo Experiência Crucial (Prova Pragmática);

- Prova de Dario: é uma resposta do tipo Empirismo Ingênuo (forma mais rudimentar de uma Prova Pragmática);

- Prova de Hélia: é uma resposta do tipo Empirismo Ingênuo (Prova Pragmática);

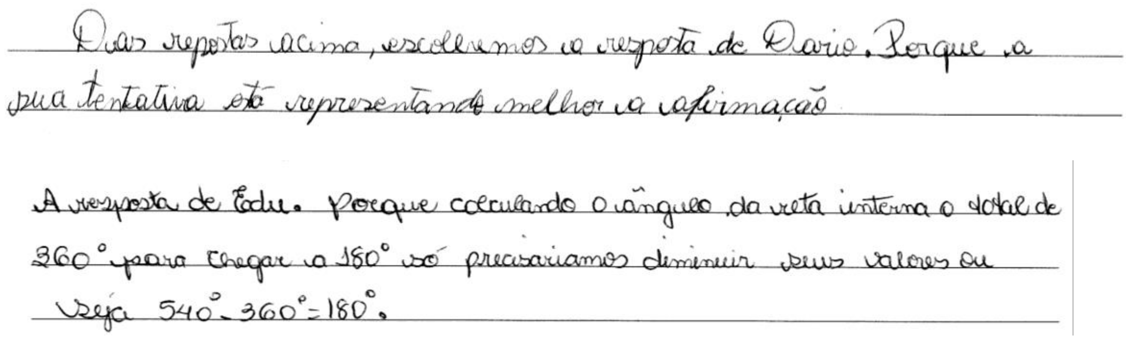
- Prova de Cíntia: é uma resposta do tipo Experiência Mental (Prova Intelectual);

- Prova de Edu: é uma resposta do tipo Exemplo Genérico (transita entre a Prova Pragmática e a Intelectual).

Resultados Obtidos:

No item *a*, foi pedido que: *Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha*. O trio de alunos respondeu:

Figura 26 - Respostas do item *a* da Atividade 1 (Parte II)


Das respostas acima, escolhemos a resposta de Dario. Porque a sua tentativa está representando melhor a afirmação

A resposta de Edu. Porque calculando o ângulo da reta interna o total de 360° para chegar a 180° só precisariamos diminuir seus valores ou seja 540°-360°=180°.

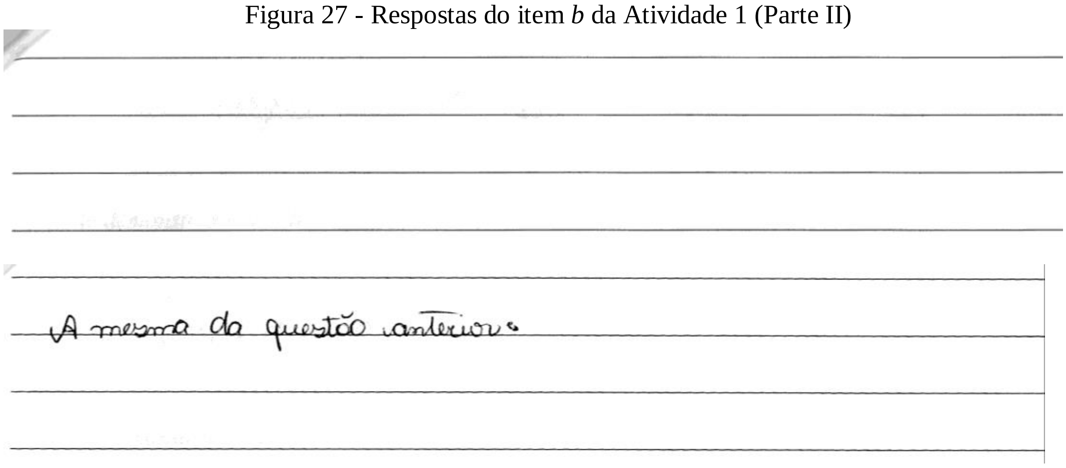
Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Os Alunos A e B escolheram a resposta de Dario, uma vez que, para eles, a tentativa de Dario está representando melhor a afirmação. Para responder essa questão, Dario utilizou quatro exemplos de medidas de ângulos internos de triângulos diferentes e percebeu que, em todos, dá sempre 180º. Assim, ele afirma que, para qualquer triângulo, a soma de seus ângulos internos sempre dá 180º. Dessa forma, o tipo de prova que os Alunos A e B iriam utilizar para resolver esse item seria o tipo *Empirismo Ingênuo*, que na prova de Dario, é a forma mais rudimentar de uma Prova Pragmática, de acordo com Balacheff (2000). Para Nasser e Tinoco (2003), esta prova de Dario diz respeito à *justificativa pragmática*, uma vez que ele atesta a validade de uma afirmativa com base em alguns casos particulares.

Já o Aluno C escolhe a resposta de Edu, porque, para ele, ao calcular o ângulo da reta interna, o total dá 360º e para chegar a 180º é só diminuir os seus valores. Para responder essa questão, Edu se utiliza de argumentos baseados em propriedades gerais. Assim, ele busca a generalização da confirmação de que, para qualquer triângulo, a soma de seus ângulos internos será sempre 180º, porém essa generalização ainda é baseada em exemplos, mas ele procura justificar com a teoria geométrica. Assim, o tipo de prova que o Aluno C iria utilizar para resolver esse item seria o tipo *Exemplo Genérico*, que está dentro da Prova Intelectual, proposto por Balacheff (2000).

E por fim, no item *b*, pedimos que: *Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifiquem sua escolha*. Obtivemos as seguintes respostas:

Figura 27 - Respostas do item *b* da Atividade 1 (Parte II)



Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

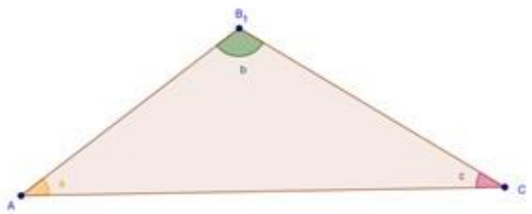
Os Alunos A e B deixaram o item *b* em branco. Dessa forma, não podemos afirmar que tipo de prova o professor deles daria a melhor nota. Já o Aluno C afirmou que seria a mesma do item anterior, ou seja, o professor dele daria a melhor nota para a resposta de Edu. Dessa forma, para o Aluno C, o seu professor de Matemática daria a melhor nota para o tipo de prova *Exemplo Genérico* (Balacheff, 2000), uma vez que Edu utiliza argumentos baseados em propriedades gerais para afirmar que, para qualquer triângulo, a soma de seus ângulos internos é sempre 180º.

Portanto, percebemos que as escolhas para responder essa questão estão situadas, para os Alunos A e B, na forma mais rudimentar de uma Prova Pragmática, o Empirismo Ingênuo, ou seja, se eles tivessem que provar que, para qualquer triângulo, a soma de seus ângulos internos é sempre 180º, eles utilizariam casos particulares e concluiriam que vale para qualquer triângulo. Já para o Aluno C, estaria situada no Exemplo Genérico, o qual transita entre a Prova Pragmática e a Intelectual, uma vez que o aluno iria se utilizar de propriedades gerais para generalizar a afirmação, porém essa generalização ainda é baseada em exemplos.

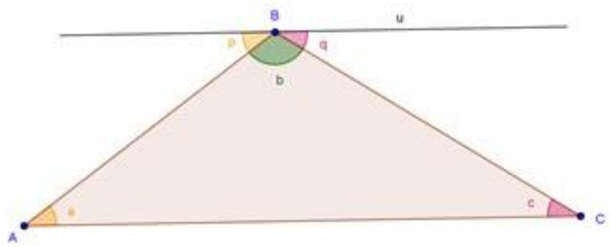
4.2.3 Atividade 2 (Parte II)

Figura 28 - Atividade 2 (Parte II) resolvida pelo trio de alunos

(2) (nossa autoria) Considerem um triângulo ABC, no qual estão assinalados os ângulos internos:



Traçando a reta *u*, paralela ao lado AC e que passa pelo vértice B:



Sabemos que p = a e q = c.

Como p + b + q = 180°, concluímos que a + b + c = 180°.

Observando essa demonstração, respondam o que se pede:

a) Por que podemos afirmar que p = a e q = c?

b) O que podemos afirmar com essa conclusão da demonstração?

c) Essa afirmação vale para qualquer triângulo? Justifiquem.

d) Tente demonstrar essa afirmação de outra forma.

Fonte: Proposta Didática

Resultados Esperados:

Que o trio de alunos consiga chegar a uma prova ou demonstração do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Assim:

- item *a*: O trio de alunos irá explicar por qual motivo os ângulos p e a, e q e c são congruentes. Para isso, os alunos deverão ter conhecimento dos tipos de ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal.

- item *b*: O trio de alunos deverá concluir que a demonstração apresentada na questão diz respeito a um importante teorema da Geometria. Para isso, eles deverão concluir que a soma dos ângulos a, b e c (ângulos internos do triângulo apresentado na questão) é igual a 180º.

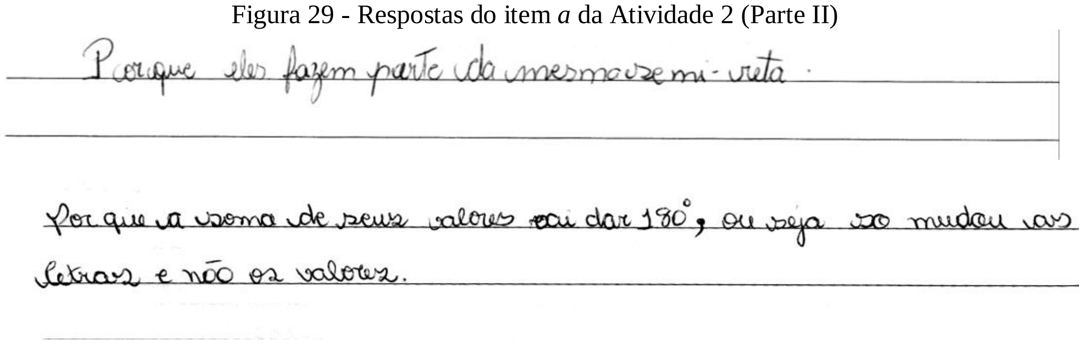
- item *c*: O trio de alunos deverá reconhecer que a demonstração apresentada na questão é um exemplo de caso geral do teorema. Dessa forma, eles poderão afirmar que vale para qualquer triângulo. Para isso, eles deverão conhecer as suas concepções sobre o que é uma prova e o que é uma simples verificação ou validação.

- item *d*: O trio de alunos deverá demonstrar de outra forma o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo. Aqui, eles ficarão livres para provar da forma que quiserem e que achar correto.

Resultados Obtidos:

No item *a* perguntamos: *Por que podemos afirmar que p = a e q = c?* O trio de alunos respondeu:

Figura 29 - Respostas do item *a* da Atividade 2 (Parte II)



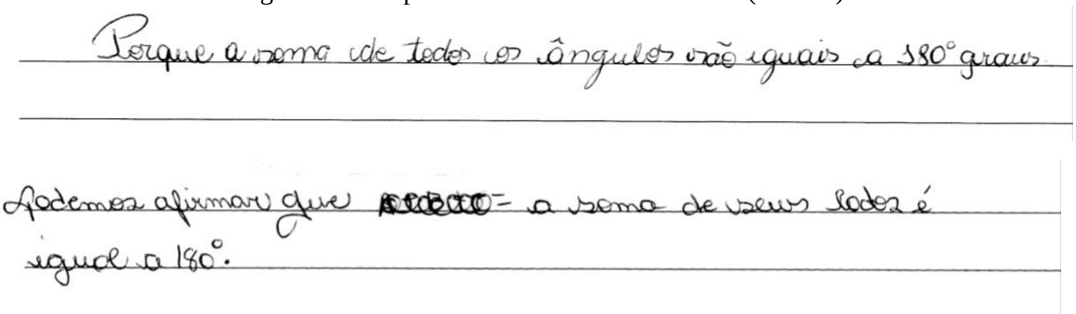
Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Os Alunos A e B afirmam que p e a e q e c são, respectivamente, congruentes porque fazem parte da mesma semirreta. Com isso, afirmamos que a sua resposta está em partes correta, uma vez que esses ângulos p e a e q e c, respectivamente, fazem parte da mesma semirreta, mas, pela definição de ângulos alternos internos, esses ângulos estão em lados diferentes da transversal e na parte interna das paralelas. À vista disso, concluímos que esses alunos não se lembraram dos tipos de ângulos presentes em duas paralelas cortadas por uma transversal.

Já o Aluno C afirmou que a soma de seus valores var dá 180º, pois o que muda são as letras e não os valores. Ou seja, ele não se utilizou da definição de ângulos alternos internos para justificar que esses ângulos são congruentes, ele apenas afirmou o que já deixado claro na demonstração.

No item *b*, foi pedido que: *O que podemos afirmar com essa conclusão da demonstração?* Obtivemos como resposta:

Figura 30 - Respostas do item *b* da Atividade 2 (Parte II)


Porque a soma de todos os ângulos são iguais a 180° graus.

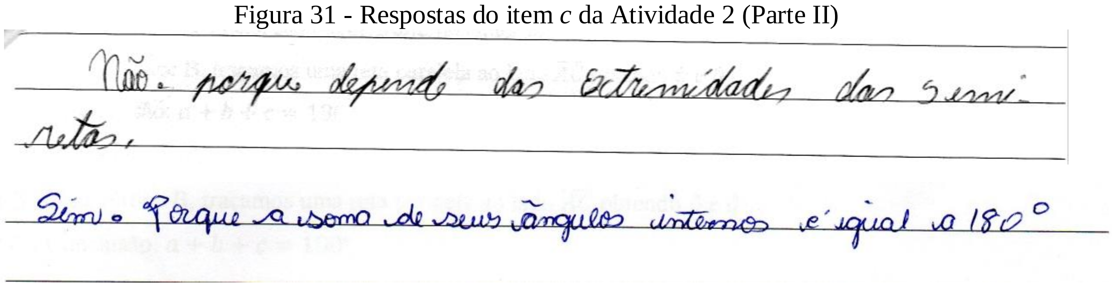
Podemos afirmar que = a soma de seus lados é igual a 180°.

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

O trio de alunos compreendeu corretamente a demonstração e conseguiram afirmar que a soma de todos os ângulos do triângulo é igual a 180º. Porém, só não afirmam que diz respeito aos ângulos internos do triângulo.

No item *c* perguntamos: *Essa afirmação vale para qualquer triângulo? Justifiquem*. O trio de alunos respondeu:

Figura 31 - Respostas do item *c* da Atividade 2 (Parte II)


Não. porque depende das Extremidades das semi-retas.

Sim. Porque a soma de seus ângulos internos é igual a 180°

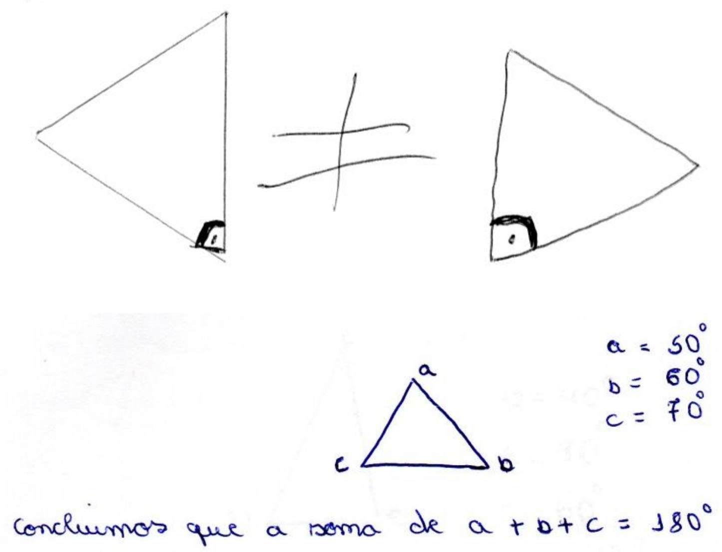
Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Os Alunos A e B afirmam que não vale para qualquer triângulo, porque depende das extremidades das semirretas. Dessa forma, percebemos que eles não conseguiram visualizar que a demonstração apresentada na atividade se trata de um caso geral e que pode ser classificada como Experiência Mental, segundo Balacheff (2000), já que na Atividade 1 há a resposta de Cíntia para a prova desta afirmação e os alunos nem interligaram ou perceberam esse fato. Com isso, afirmamos que a resposta desses alunos está incorreta, pois, com a demonstração, podemos afirmar que vale para qualquer triângulo e não está relacionado às extremidades das semirretas.

Já o Aluno C afirmou que vale, pois a soma de seus ângulos internos é igual a 180º. Dessa forma, percebemos que ele conseguiu compreender corretamente a demonstração e que podemos sim concluir que vale para qualquer triângulo. Com isso, afirmamos que sua resposta está correta.

E por fim, no item *d*, pedimos que: *Tente demonstrar essa afirmação de outra forma.* Obtivemos as seguintes respostas:

Figura 32 - Respostas do item *d* da Atividade 2 (Parte II)



Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Os Alunos A e B desenham dois triângulos e afirmam que são diferentes, porém não indicaram seus ângulos internos nem suas medidas. Assim, não podemos afirmar que essa tentativa seja uma prova ou demonstração válida, já que eles não concluíram que a soma de seus ângulos internos é 180º.

Já o Aluno C utilizou de um caso particular, construindo um triângulo com seus ângulos internos, e apresenta que a soma desses três ângulos é igual a 180º. Portanto, podemos afirmar que a sua prova está relacionado ao tipo Empirismo ingênuo, segundo Balacheff (2000), uma vez que este aluno utiliza um caso particular para conjecturar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Já de acordo com Nasser e Tinoco (2003), o Aluno C se utilizou de uma Justificativa gráfica, já que ele apresentou que o resultado é válido por meio de uma figura.

À vista disso, podemos afirmar que somente o Aluno C conseguiu chegar ao objetivo que pretendíamos na Atividade 2 (Parte II), uma vez que ele conseguiu chegar a uma prova do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Afirmamos também que consideramos a resposta do Aluno C uma prova, pois, como mencionamos anteriormente, tratamos prova em um significado mais amplo, no qual pode ser entendida como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, que possivelmente não será aceita pelos matemáticos puros (GRINKRAUT, 2009). Para tanto, as justificativas encontradas nas produções desse trio de alunos estão sendo aceitas dentro do contexto escolar dos mesmos, em termos do raciocínio envolvido, mesmo sabendo que muitas vezes estes não consigam atingir a formalização necessária.

Quanto ao item *a*, o trio de alunos não lembrou os tipos de ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal, respondendo assim de forma incompleta ou incorreta. Quanto ao item *b*, o trio de alunos respondeu de forma correta, pois conseguiu visualizar que a conclusão da demonstração está relacionada ao fato de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180º, porém não deixam explícitos que se tratam dos ângulos internos de um triângulo. Quanto ao item *c*, somente o Aluno C respondeu corretamente, uma vez que conseguiu perceber que, por meio da demonstração apresentada nesse item, para qualquer triângulo a soma de seus ângulos internos é igual a 180º. E, por fim, quanto ao item *d*, somente o Aluno C conseguiu fazer uma prova para o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, mesmo não tendo generalizado.

Com relação ao pensamento geométrico dos alunos, percebemos que os mesmos se encontram nos dois níveis da Geometria não axiomática, de acordo com Parzysz (2006): a Geometria Concreta (G0) e a Geometria Spatio-Graphique (G1), uma vez que esses alunos se utilizam de desenhos para justificar suas afirmações, nos quais utilizaram suas observações e constatações para justificar as características físicas da figura. Dessa forma, a validação utilizada nesses níveis e por estes alunos foi baseada somente na percepção. Quanto às provas e demonstrações matemáticas, concluímos que o Aluno C se utiliza do tipo Empirismo Ingênuo, de acordo com Balacheff (2000), uma vez que utiliza um caso particular para provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, não chegando à generalização. E, de acordo com Nasser e Tinoco (2003), o aluno utiliza a Justificativa Gráfica, pois este mostra por meio de uma figura que a afirmação é válida.

4.2.4 Comentários

Com os resultados obtidos com as Atividades 8 (Parte I), 1 e 2 (Parte II), ambas realizadas no ambiente lápis e papel, chegamos à conclusão que o trio de alunos se utiliza de observações e constatações para justificar as características físicas das figuras presentes nas atividades, e, para isso, a validação feita por eles está baseada somente na percepção. Dessa forma, esses conhecimentos apresentados pelo trio de alunos se enquadram nos dois níveis da Geometria não axiomática, de acordo com Parzysz (2006): a Geometria Concreta (G0) e a Geometria Spatio-Graphique (G1).

Esses dois níveis podem ser observados no desenvolver dessas atividades da Proposta, uma vez que à medida que foi sendo requisitados conhecimentos mais apurados desses alunos, eles tiveram dificuldades em desenvolver as suas ideias e justificativas. Isso foi percebido nos itens *b* e *c* da Atividade 8 (Parte I), nos quais os alunos não lembravam os conceitos de produtos notáveis, cálculo de área (quadrado e triângulo), congruência de triângulos, potenciação e radiciação, e por isso deixou esses itens em branco, como também tiveram dificuldade em perceber que a área do quadrilátero MNPQ pode ser vista de duas formas diferentes. Além disso, o nível G1 foi percebido unicamente na Atividade 2 (Parte II), na qual os alunos utilizaram um caso particular para provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, e para isso, utilizaram um desenho com as medidas dos três ângulos e assim confirmaram a relação.

Quanto às provas e demonstrações matemáticas, concluímos que, em sua maioria, se enquadra no tipo Empirismo Ingênuo, defendido por Balacheff (2000), uma vez que o trio de alunos se utiliza de casos particulares para conjecturar uma afirmação. Isso foi percebido nas Atividades 1 e 2 da Parte II, pois os alunos elegem ou redigem provas relacionadas a esse tipo de prova. Quanto à Atividade 1, o trio de alunos conseguiu atingir o objetivo para a mesma, uma vez que gostaríamos que eles escolhessem respostas que eles próprios dariam caso tivessem que resolver a questão, e isso eles fizeram a contento. Já a Atividade 2, somente o Aluno C conseguiu atingir o objetivo da mesma, uma vez que ele utilizou a Justificativa Gráfica (Nasser e Tinoco, 2003) para verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

Outro aspecto detectado foi o pouco conhecimento do trio de alunos em utilizar a Álgebra para resolver problemas geométricos. Os alunos não conseguiram algebrizar as áreas de um triângulo e de um quadrado para provar o Teorema de Pitágoras, o que confirma as ideias defendidas por Lorenzato (1995 apud BERTOLUCI, 2003), o qual afirma que uma das causas para o abandono da Geometria no Brasil é que seu ensino passou a ser algebrizado, depois do Movimento da Matemática Moderna. Ou seja, os alunos são motivados a *decorar* fórmulas para atividades mecânicas e quando encontra atividades que o motivem a refletir, justificar e provar as suas ideias, esses alunos não conseguem aplicar às fórmulas ou conceitos aprendidos, pois não condizem às atividades que eles costumam responder.

Portanto, percebemos que o trio de alunos possui um conhecimento superficial do Teorema de Pitágoras e do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, como também seu conhecimento matemático se encontra de forma fragmentada e mecânica, o que dificulta a exploração deste conhecimento para resolver atividades fora do contexto da sala de aula.

4.3 PENSAMENTO GEOMÉTRICO E PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO AMBIENTE GEOGEBRA

Como já foi mencionado anteriormente, o GeoGebra é um aplicativo de Geometria Dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, combinando a Geometria, a Álgebra, tabelas, gráficos, Estatística e Cálculo em um único sistema. É um aplicativo de Geometria Dinâmica, pois ele permite que os objetos sejam movidos mantendo-se todos os vínculos estabelecidos inicialmente na construção, ou seja, quando os alunos arrastam as figuras geométricas com o cursor, as mesmas não perdem as propriedades geométricas relacionadas a ela, fazendo com que eles compreendam melhor os conteúdos da Geometria envolvidos nas figuras construídas, como também possibilita a conjectura e a validação de teoremas desta área da Matemática.

Dessa forma, essa função de *arrastar* as construções possibilita que os alunos tenham novas maneiras de raciocinar, operar e até mesmo de conceber a Geometria. Ou seja, nesses ambientes temos múltiplas construções possíveis para um mesmo objeto geométrico e assim os alunos passam a compreender que, a partir de certos fatos declarados (hipóteses), outros destes decorrem – os fatos estáveis implícitos (a tese do teorema), então passíveis de explicação (Janzen, 2011). Assim, esta compreensão é fundamental para a construção de uma demonstração e podem levar o aluno a construir o *fazer matemático*, isto é, os alunos poderão experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e, enfim, demonstrar.

Assim como De Villiers (2001) afirma, nós acreditamos que o trabalho com o aplicativo GeoGebra pode auxiliar na construção de uma eventual demonstração, pois esse aplicativo permite generalizar um resultado a partir da identificação de suas propriedades fundamentais por meio do dinamismo, uma vez que o aluno é levado a verificar instantaneamente se uma determinada conjectura está correta ou não.

À vista disso, para esta seção estaremos considerando os níveis de pensamento geométrico propostos por Parzysz (2006), uma vez que o mesmo, para fazer uma articulação entre os quatro níveis de pensamento geométrico, tomou como base a natureza dos objetos de estudo da Geometria e o tipo de validação. Parzysz (2006) considera dois tipos de Geometria, a Não-Axiomática e a Axiomática. A Geometria Não-Axiomática é subdividida em duas outras: Geometria concreta (G0) e Geometria spatio-graphique (G1). A Geometria Axiomática se subdivide em duas outras: Geometria proto-axiomática (G2) e Geometria axiomática (G3).

Portanto, essa seção diz respeito ao vértice C do triângulo e estaremos analisando todas as Atividades da Parte IV. Esta seção foi subdividida em seis subseções: as cinco primeiras dizem respeito às atividades da Proposta Didática e que estaremos analisando as soluções das mesmas pelo trio de alunos no aplicativo GeoGebra, e na sexta, trazemos comentários referentes às discussões feitas nas subseções anteriores.

Para esse trabalho no GeoGebra, foi disponibilizado os materiais (construções já prontas) para que os alunos fizessem as movimentações pedidas e observassem o que estava ocorrendo em cada passo a passo. Dessa forma, além de fazerem todas as movimentações no aplicativo, era necessário que o trio anotasse, com o auxílio do lápis e papel, as suas observações, reflexões e justificativas quanto às movimentações realizadas nas construções e ao que estava sendo questionado na Parte IV da Proposta Didática.

Salientamos que nas Atividades de 1 a 4, buscaremos analisar o pensamento geométrico do trio de alunos, uma vez que esses alunos terão os materiais prontos para que possam movimentar as construções e serão levados a refletir, justificar e argumentar as movimentações que eles mesmos estejam fazendo; e na Atividade 5, observamos o pensamento geométrico e as provas e demonstrações matemáticas do trio de alunos, já que, além de realizarem as movimentações do material, será preciso que esses alunos conjecturem o Teorema e façam uma prova do mesmo.

Além disso, salientamos que as Atividades 1 e 2 dizem respeito à verificação do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo e as Atividades 3, 4 e 5 dizem respeito à verificação do Teorema de Pitágoras.

4.3.1 Atividade 1 (Parte IV)

Figura 33 - Atividade 1 (Parte IV) resolvida pelo trio de alunos

Parte IV

(1) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-27567" e observem atentamente a figura. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Arrastem o seletor para a direita. O que aconteceu com a figura? Quais os movimentos observados pelas três divisões do triângulo?

b) Arrastem o próximo seletor para baixo. O que aconteceu com a figura? Qual o movimento realizado pelas três divisões do triângulo? O que vocês observaram após essa movimentação?

c) Marquem os três quadrados referentes a "comparar ângulos". O que vocês observaram? Como podem ser chamados os ângulos azuis, vermelhos e verdes? Por quê?

d) Qual propriedade está ligada a essa verificação? Como vocês encontraram essa propriedade e por quê?

Fonte: Proposta Didática

Resultados Esperados:

Que o trio de alunos justifique o passo a passo feito durante as movimentações no GeoGebra e percebam os conceitos geométricos inerentes à essas movimentações. Assim:

- item *a*: O trio de alunos deverá reconhecer os tipos de simetria e transformações que surgem ao movimentar o primeiro seletor da construção do GeoGebra. Para isso, esses alunos deverão lembrar a diferença entre rotação, translação e reflexão e optar pela transformação correta da figura.

- item *b*: O trio de alunos irá reconhecer que tipo de transformação ocorreu com a movimentação do segundo seletor e observar as mudanças que ocorreram na figura. Para isso, esses alunos deverão optar por uma das transformações (reflexão, translação ou rotação) e anotar o que ocorreu com a figura com essa transformação e com as movimentações.

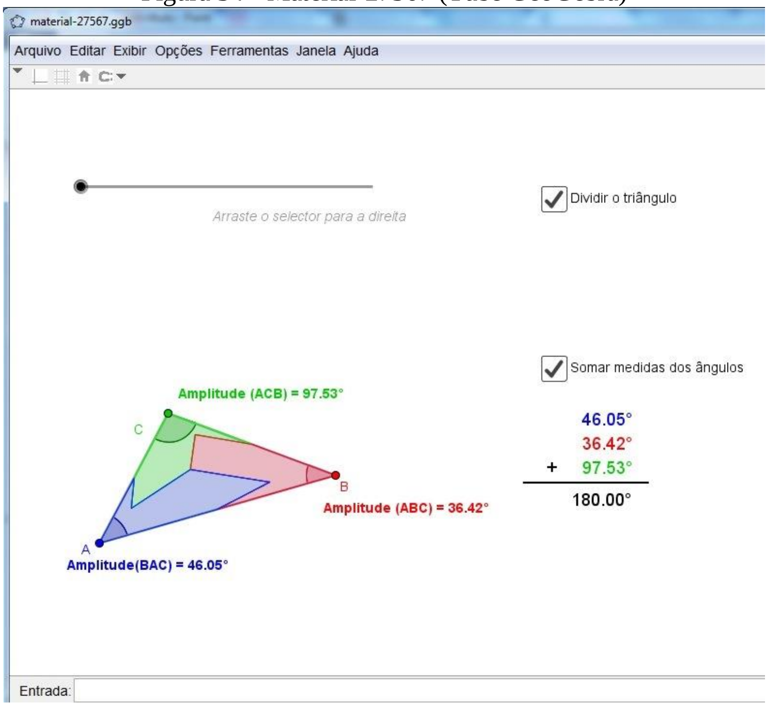
- item *c*: O trio de alunos deverá perceber, com a movimentação, que a nova figura formada diz respeito a duas retas paralelas e uma transversal, como também deverá reconhecer os tipos de ângulos formados por retas paralelas e uma transversal. Para isso, é preciso que esses alunos se lembrem dos tipos de ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal, optando pelos tipos coerentes ao apresentado na construção.

- item *d*: O trio de alunos deverão reconhecer a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo e justificar corretamente por que podemos considerar válida.

Resultados Obtidos:

Para responder à Atividade 1 foi disponibilizado o “material-27567” ao trio de alunos. Esse material encontra-se disponível no link <http://ggbtu.be/m27567>, do TubeGeoGebra e foi construído por Paulo Correia, de Portugal, em 15 de Janeiro de 2013, na versão 4.2 do GeoGebra:

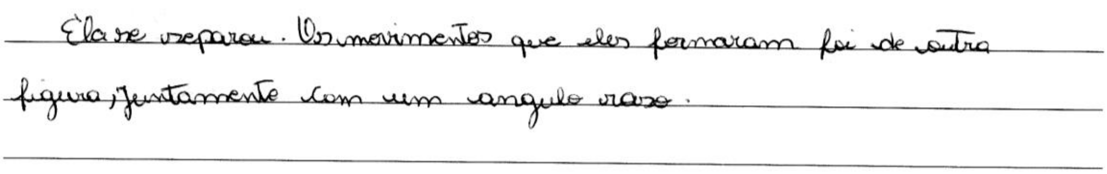
Figura 34 - Material-27567 (Tube GeoGebra)



Fonte: GeoGebra

Com relação aos itens pedidos na Atividade 1, no item *a*, a pergunta foi: *Arrastem o seletor para a direita. O que aconteceu com a figura? Quais os movimentos observações pelas divisões do triângulo?* Tendo como resposta do trio de alunos:

Figura 35 - Resposta do item *a* da Atividade 1 (Parte IV)

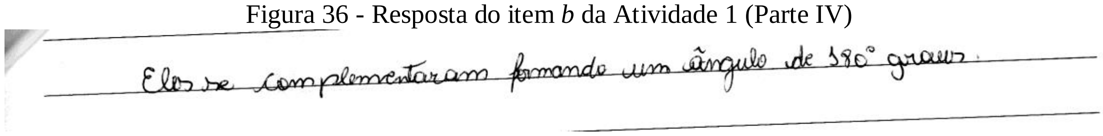


Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

No que se refere à primeira pergunta, o trio de alunos afirma que ela se separou. Quanto à segunda, os alunos afirmam que, com os movimentos, formou-se outra figura, juntamente com um ângulo raso. Dessa forma, o que os alunos observaram foi justamente o que aconteceu, porém o que pretendíamos com a pergunta, eles não observaram. O objetivo deste item era que eles observassem que, com a movimentação do seletor para a direita, ocorreu uma rotação do ângulo verde e uma translação dos ângulos azul e vermelho, formando assim, uma nova figura composta de um ângulo raso (180º).

No item *b*, foi pedido que: *Arrastem o próximo seletor para baixo. O que aconteceu com a figura? Qual o movimento realizado pelas três divisões do triângulo? O que vocês observaram após essa movimentação?* O trio de alunos respondeu:

Figura 36 - Resposta do item *b* da Atividade 1 (Parte IV)

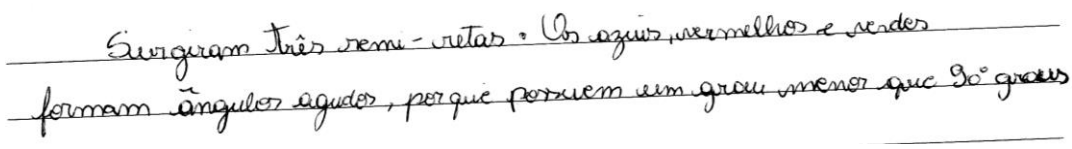

Eles se complementaram formando um ângulo de 180° graus.

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Foram perguntadas três coisas ao trio de alunos e o mesmo respondeu somente a última pergunta, o qual afirmou que eles se complementaram formando um ângulo de 180º. Que, de certa forma, está correta, pois foi assim que eles observaram. Mas gostaríamos que eles tivessem observado e refletido mais sobre as movimentações. O objetivo deste item era que eles observassem que, com a movimentação do seletor para baixo, as três divisões (os ângulos) juntas se movimentaram, houve uma translação das divisões até o vértice C do triângulo e, com isso, pode-se perceber, implicitamente, que temos uma reta paralela ao segmento AB do triângulo e duas transversais que se cruzam no vértice C do triângulo.

No item *c*, pedimos que: *Marquem os três quadrados referentes a "comparar ângulos". O que vocês observaram? Como podem ser chamados os ângulos azuis, vermelhos e verdes? Por quê?* Obtivemos como resposta:

Figura 37 - Resposta do item *c* da Atividade 1 (Parte IV)

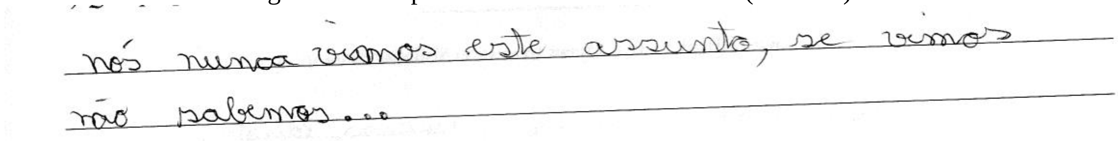

Surgiram três semi-retas. Os azuis, vermelhos e verdes formam ângulos agudos, porque possuem um grau menor que 90° graus.

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Quanto à primeira pergunta, o trio de alunos respondeu que surgiram três semirretas. Quanto à segunda e terceira, que os ângulos azuis, vermelhos e verdes formam ângulos agudos, porque possuem um grau menor que 90º. Percebemos que as suas observações estão corretas, porém não conseguiram aguçar mais as suas observações e reflexões. O objetivo desse item era que eles observassem que, após a marcação dos três quadrados, estaria mais nítido as duas retas paralelas e a transversal, uma vez que surgiram as três semirretas; como também, que observassem que os ângulos azuis e vermelhos são correspondentes e, por isso, são congruentes, e os ângulos verdes são opostos pelo vértice, sendo também congruentes.

Por fim, no item *d*, a pergunta era: *Qual propriedade está ligada a essa verificação? Como vocês encontraram essa propriedade e por quê?* A resposta do trio de alunos foi:

Figura 38 - Resposta do item *d* da Atividade 1 (Parte IV)



Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

A resposta dada pelo trio de alunos diz respeito à primeira pergunta, uma vez que eles não conseguiram perceber qual a propriedade estava associada àquela verificação. Para esses alunos, eles nunca viram e se viram, eles não sabem o assunto. O objetivo desse item era que esses alunos observassem que a propriedades diz respeito à soma dos ângulos internos de um triângulo e que, com a observação feita no item anterior, perceberiam que, como a junção dos ângulos ocorrida no item *a*, os ângulos internos do triângulo sendo congruentes a esses, a soma deles também é igual a 180º.

Dessa forma, percebemos que as suas respostas não estão erradas, apenas incompletas, uma vez que eles conseguiram visualizar corretamente o que estava acontecendo ao selecionar os seletores. Porém, pretendíamos que eles tivessem aguçado mais as suas observações e os seus raciocínios, conseguindo perceber a propriedade inerente à verificação. Assim, afirmamos que o trio de alunos não conseguiu perceber os conceitos geométricos presentes na verificação, como também não conseguiram chegar ao objetivo pretendido na Atividade.

À vista disso, podemos afirmar que o trio de alunos se encontra no nível G0 (Geometria concreta), segundo Parzysz (2006), já que eles se utilizaram de observações e constatações para justificar as características físicas da figura. Dessa forma, a validação utilizada nesse nível e por estes alunos foi baseada somente na percepção, uma vez que esses alunos não conseguiram perceber os conceitos geométricos presentes na verificação.

4.3.2 Atividade 2 (Parte IV)

Figura 39 - Atividade 2 (Parte IV) resolvida pelo trio de alunos

(2) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-239787" e observem a figura.
Há uma importante relação relacionada aos triângulos e seus ângulos internos. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Movimentem o vértice C do triângulo. O que acontece com o triângulo? E com seus ângulos internos?

b) Ao movimentar esse vértice C, qual a relação entre os triângulos encontrados e seus ângulos internos?

c) Agora movimentem o vértice B. O que acontece? Continua valendo essa relação para outros triângulos encontrados e seus ângulos internos?

d) Se movimentarmos o vértice A. O que acontece? Essa relação continua sendo válida?

e) Desse modo, o que podemos concluir com essa verificação? Justifiquem.

Fonte: Proposta Didática

Resultados Esperados:

Que o trio de alunos consiga justificar as movimentações feitas no GeoGebra e perceba que a relação continua sendo válida para qualquer movimentação. Assim:

- item *a*: O trio de alunos deverá reconhecer o que acontece com o triângulo e com seus ângulos internos ao movimentar seu vértice C.

- item *b*: O trio de alunos deverá perceber a relação existente entre os triângulos encontrados e seus ângulos internos. Para isso, eles deverão observar que a soma dos ângulos internos permanece a mesma, mesmo obtendo diferentes triângulos com diferentes ângulos internos.

- item *c*: O trio de alunos deverá movimentar o vértice B, perceber que encontrará outros triângulos com ângulos internos diferentes e observar que a relação continua válida.

- item *d*: O trio de alunos deverá movimentar o vértice A, perceber que encontrará outros triângulos com ângulos internos diferentes e observar que a relação continua válida.

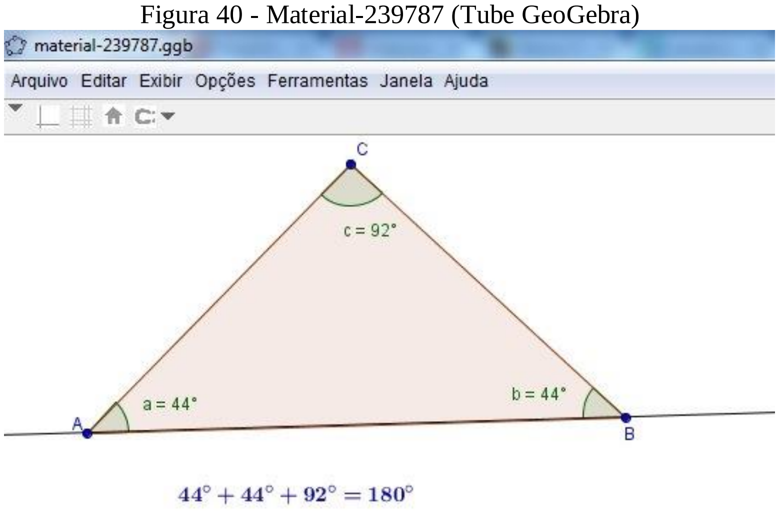
- item *e*: O trio de alunos deverá concluir que a soma dos ângulos internos é sempre 180º para qualquer triângulo, uma vez que, a partir das várias movimentações, encontramos vários tipos de triângulos.

Resultados Obtidos:

Para responder à Atividade 2 foi disponibilizado o "material-239787" ao trio de alunos. Esse material encontra-se disponível no link <http://ggbtu.be/m239787>, do

TubeGeoGebra e foi construído por Marco, de Porto Alegre, em 31 de Outubro de 2014, na versão 4.4 do GeoGebra:

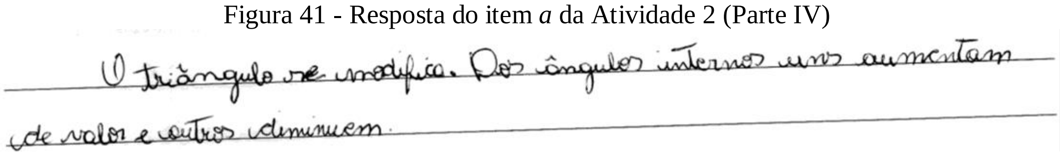
Figura 40 - Material-239787 (Tube GeoGebra)



Fonte: GeoGebra

Com relação aos itens pedidos na Atividade 2, no item *a*, a pergunta foi: *Movimentem o vértice C do triângulo. O que acontece com o triângulo? E com seus ângulos internos?* A resposta do trio foi:

Figura 41 - Resposta do item *a* da Atividade 2 (Parte IV)

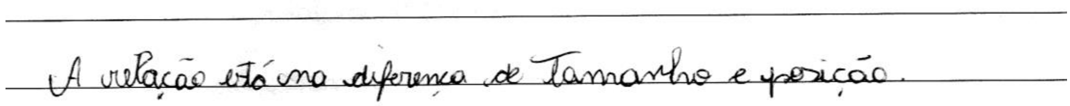


Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Para o item *a*, era esperado apenas que eles observassem o que acontecia ao movimentar o vértice C. Dessa forma, a resposta do trio de alunos está correta, uma vez que ao movimentaram esse vértice, o triângulo iria se modificar e já os ângulos internos, uns aumentariam de valor e outros diminuiriam.

No item *b*, foi perguntado: *Ao movimentar esse vértice C, qual a relação entre os triângulos encontrados e seus ângulos internos?* O trio de alunos respondeu:

Figura 42 - Resposta do item *b* da Atividade 2 (Parte IV)



Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Aqui os alunos não conseguiram visualizar além da percepção, uma vez que sua resposta afirma que a relação está na diferença de tamanho e posição. O que não era isso que pretendíamos com o item, já que, ao movimentar o vértice C, eles iriam encontrar vários tipos de triângulos com ângulos internos diferentes, porém a relação iria permanecer a mesma, pois esta relação diz respeito à soma dos ângulos internos dos triângulos encontrados. Mesmo tendo a soma dos ângulos internos dos triângulos indicada na Janela de visualização do GeoGebra, o trio de alunos não conseguiu atingir o objetivo esperado para o item.

No item *c*, a pergunta foi: *Agora movimentem o vértice B. O que acontece? Continua valendo essa relação para outros triângulos encontrados e seus ângulos internos?* Obtivemos como resposta:

Figura 43 - Resposta do item *c* da Atividade 2 (Parte IV)

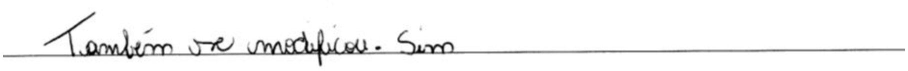

Ele se modificou. Sim,

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Da mesma forma que no item *a*, o trio de alunos afirmou que, ao movimentar o vértice B, o triângulo se modificou. Quanto à segunda pergunta, como no item *b* eles afirmaram que a relação está na diferença de tamanho e posição, então foi isso que eles também perceberam nesse item. Dessa forma, não está errado, mas pretendíamos que eles tivessem observado que a soma dos ângulos internos permanece válida para essas movimentações.

No item *d*, foi pedido que: *Se movimentarmos o vértice A. O que acontece? Essa relação continua sendo válida?* A resposta do trio de alunos foi:

Figura 44 - Resposta do item *d* da Atividade 2 (Parte IV)

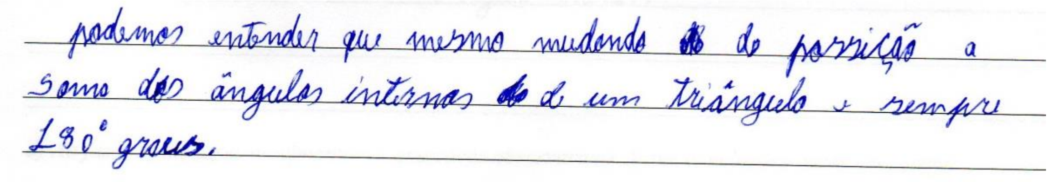

Também se modificou. Sim

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Assim como no item anterior, era esperado que eles tivessem percebido que a soma dos ângulos internos dos triângulos encontrados continua válida. Obtivemos como resposta a mesma do item anterior. Dessa forma, não consideramos errada, apenas faltou mais reflexão e uma observação mais detalhada das movimentações, dos ângulos e dos valores das somas desses ângulos apresentados na Janela de visualização por parte desse trio de alunos.

E por fim, no item *e*, a pergunta foi: *Desse modo, o que podemos concluir com essa verificação? Justifiquem.* Foi dado como resposta:

Figura 45 - Resposta do item *e* da Atividade 2 (Parte IV)


podemos entender que mesmo mudando de possição a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° graus.

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Dessa forma, o trio de alunos conseguiu perceber, mesmo não tendo apresentado a relação nos itens anteriores, que, mesmo mudando a posição e movimentando os vértices dos triângulos, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180º. E, desse modo, eles podem afirmar que vale, uma vez que foram encontrados diferentes tipos de triângulos com diferentes ângulos internos. Assim, o trio de alunos conseguiu atingir o objetivo esperado no item *e*, como também em toda a Atividade 2, uma vez que conseguiram visualizar a relação presente no material.

Em todos os momentos da aplicação da nossa Proposta Didática, esse trio de alunos sempre estava dialogando, discutindo, argumentando e expondo as suas ideias. Durante o desenvolver dessa Atividade 2, o Aluno A afirmou que a soma de todos os ângulos é sempre igual a 180º e, como no item *e*, pedia para justificar, ela mesma afirmou que é igual porque é. Assim, com essa argumentação, percebemos que eles não são levados a justificar suas ideias, a refletir sobre os argumentos que estão usando e a relacionar tudo que escreveram e observaram nos itens anteriores para que pudessem explicar o porquê disso acontecer.

À vista disso, podemos afirmar que o trio de alunos se encontra no nível G0 (Geometria concreta), segundo Parzysz (2006), já que eles se utilizaram de observações e constatações para justificar as características físicas da figura. Dessa forma, a validação utilizada nesse nível e por estes alunos foi baseada somente na percepção.

4.3.3 Atividade 3 (Parte IV)

Figura 46 - Atividade 3 (Parte IV) resolvida pelo trio de alunos

(3) (extraído do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-145257", observem a figura e respondam o que se pede.

Fonte: Proposta Didática

Resultados Esperados:

Que o trio de alunos reflita sobre as movimentações feitas no GeoGebra e consiga perceber qual a relação inerente à esta construção.

Para essa Atividade, a maior dificuldade que o trio de alunos poderá enfrentar será a de arrastar os quadriláteros sem deformá-los, pois ao arrastá-los, eles poderão deformar-se e assim perderão suas propriedades iniciais. Desse modo, se isso acontecer, os alunos deverão desfazer a operação e começa-la novamente. Assim:

- Primeiro item: O trio de alunos deverá arrastar os quatro quadriláteros para o quadrado rosa e observar se é possível completa-lo totalmente.

- Segundo item: O trio de alunos deverá reconhecer que a área que está faltando no quadrado rosa é a área de um quadrado e perceber que se trata do quadrado vermelho, que ainda não foi arrastado.

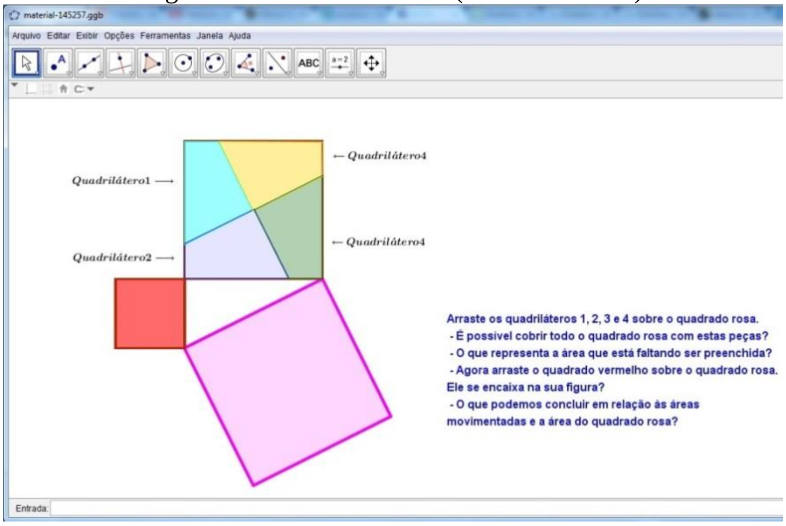
- Terceiro item: O trio de alunos deverá perceber que o quadrado vermelho se encaixou na área que faltava do quadrado rosa.

- Quarto item: O trio de alunos deverá perceber que a soma das áreas dos quadrados médio e menor resultou na área do quadrado maior. Dessa forma, nesse item os alunos poderão observar que se trata da verificação do Teorema de Pitágoras.

Resultados Obtidos:

Para responder à Atividade 3 foi disponibilizado o "material-145257" ao trio de alunos. Esse material encontra-se disponível no link <http://ggbtu.be/m145257>, do TubeGeoGebra e foi construído por Ana Claudia C. Martins, de Neves Paulista, em 19 de Agosto de 2014, na versão 4.4 do GeoGebra:

Figura 47 - Material-145257 (Tube GeoGebra)



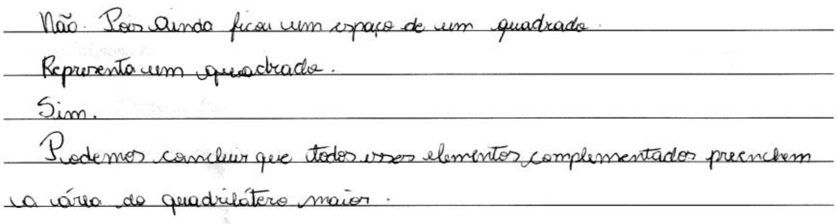
Fonte: GeoGebra

Durante o desenvolver dessa Atividade, percebemos que a dificuldade que indicamos que o trio de alunos poderia enfrentar, foi encontrada e resolvida a contento. No início eles não estavam conseguindo encaixar os quatro quadriláteros no quadrado rosa, uma vez que na hora de arrastar eles estão deformando-os, consequentemente, não seria possível os seus encaixes.

Assim, durante a nossa observação, notamos uma discussão dos mesmos quanto a isso, uma vez que eles estavam dizendo que não estavam encaixando e nos perguntaram se dava certo e nós respondemos que sim. Portanto, eles desfizeram os movimentos feitos e começaram novamente, com o cuidado de não deformar novamente.

Nessa Atividade, as perguntas já estavam presentes no próprio material. Então, na Proposta Didática só disponibilizamos o espaço para escrita das respostas dos quatro itens. Assim, apresentamos abaixo a resposta do trio de alunos e comentaremos cada item em separado:

Figura 48 - Resposta da Atividade 3 (Parte IV)


Não. Pois ainda ficou um espaço de um quadrado.
Representa um quadrado.
Sim.
Podemos concluir que todos esses elementos complementados preenchem a área do quadrilátero maior.

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Quanto ao primeiro item, a pergunta foi: *É possível cobrir todo o quadrado rosa com estas peças?* Tivemos como resposta o que nós pretendíamos que eles respondessem, ou seja, o trio de alunos conseguiu perceber que não é possível cobrir o quadrado rosa e, ainda observaram que o espaço que falta é de um quadrado. Durante as movimentações dos quatro quadriláteros, os Alunos A e B estavam dizendo que não iria dar certo, porém o Aluno C conseguiu agrupá-los de forma correta no quadrado rosa e, então, o Aluno A ficou surpreso por ter dado certo e achou até bonito.

No segundo item, foi perguntado: *O que representa a área que está faltando ser preenchida?* Como o trio de alunos percebeu no item anterior que o espaço dizia respeito a um quadrado, então esses alunos conseguiram responder corretamente a pergunta e durante as movimentações, eles estavam perceberem e argumentarem corretamente que se tratava de um quadrado.

No terceiro item, pedíamos que: *Agora arraste o quadrado vermelho sobre o quadrado rosa. Ele se encaixa na sua figura?* O trio de alunos já estava percebendo que área que estava faltando dizia respeito à de um quadrado e como só faltava o quadrado vermelho a ser arrastado, então eles responderam corretamente, uma vez que o quadrado vermelho realmente se encaixa na área que estava faltando ser preenchida.

E por fim, no quarto item, a pergunta foi: *O que podemos concluir em relação as áreas movimentadas e a área do quadrado rosa?* O trio de alunos concluiu que todos esses elementos complementados preenchem a área do quadrilátero maior. O que não está errado, uma vez que pretendíamos que eles observassem isso. Porém, esperávamos que, quanto a escrita, eles tivessem observado que a soma das áreas dos quadriláteros menor e médio resulta na área do quadrado maior (rosa).

Antes da escrita desse quarto item, durante as discussões do trio, o Aluno A afirmou de uma forma diferente do que está escrito. Esse aluno afirmou que todas essas figuras juntas formam/preenchem a área do quadrado maior. A sua resposta atinge o objetivo deste item, uma vez que as figuras juntas dá ideia de soma, porém, nas palavras dos três alunos, não há referência à área das figuras.

Dessa forma, o objetivo da Atividade 3 era que o trio de alunos percebesse a relação inerente à atividade, que diz respeito à verificação do Teorema de Pitágoras, porém isso não foi atingido. Em contrapartida, esses alunos conseguiram atingir os objetivos de cada item e suas observações foram mais aguçadas durante as movimentações.

Portanto, podemos afirmar que o trio de alunos se encontra no nível G0 (Geometria concreta), segundo Parzysz (2006), já que eles se utilizaram de observações e constatações para justificar as características físicas da figura. Dessa forma, a validação utilizada nesse nível e por estes alunos foi baseada somente na percepção, uma vez que esses alunos não conseguiram perceber os conceitos geométricos presentes na verificação.

4.3.4 Atividade 4 (Parte IV)

Figura 49 - Atividade 4 (Parte IV) resolvida pelo trio de alunos

(4) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-57095" e observem a figura. Sigam instruções e respondam o que se pede:

a) Movimentem os seletores dos ângulos α e β. O que aconteceu ao movimentar o ângulo α? E o ângulo
As duas figuras foram movimentadas para onde? Como elas ficaram nessas movimentações?

b) Surgiu um novo seletor. Movimentem o ângulo γ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

c) Surgiu um novo seletor. Movimente o ângulo δ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

d) Ao fazer todos esses movimentos, o que vocês observaram? A que conclusões vocês chegaram?

e) Existe alguma relação entre esses quadrados e os lados do triângulo retângulo? Se sim, qual?

Fonte: Proposta Didática

Resultados Esperados:

Que o trio de alunos justifique as movimentações feitas no GeoGebra, perceba os conceitos geométricos presentes nessas movimentações e conclua que a relação inerente à essa construção diz respeito ao Teorema de Pitágoras. Assim:

- item *a*: O trio de alunos deverá reconhecer o tipo de transformação ocorrida ao movimentar os seletores dos ângulos α e β e observar o que aconteceu com a construção, após as movimentações desses dois seletores.

- item *b*: O trio de alunos deverá reconhecer o tipo de transformação ocorrida ao movimentar o seletor do ângulo γ e observar o que aconteceu com a construção, após a movimentação desse seletor.

- item *c*: O trio de alunos deverá reconhecer o tipo de transformação ocorrida ao movimentar o seletor do ângulo δ e observar o que aconteceu com a construção, após a movimentação desse seletor.

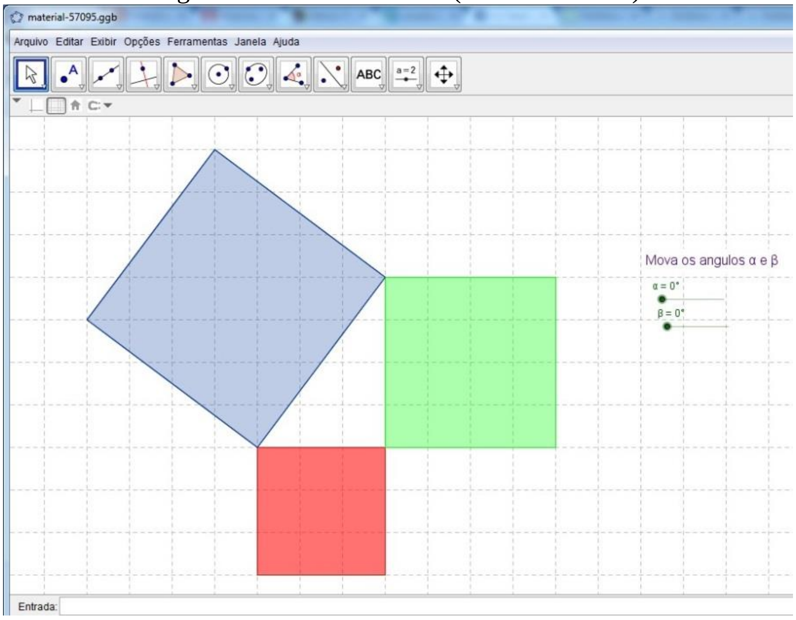
- item *d*: O trio de alunos deverá observar o que aconteceu com a nova figura, após fazer todas essas movimentações. Para isso, eles deverão perceber que os quadrados vermelho e verde se encaixaram no quadrado azul.

- item *e*: O trio de alunos deverá perceber que a relação existente entre os quadrados e os lados do triângulo retângulo diz respeito ao Teorema de Pitágoras. Para isso, eles deverão observar que o quadrado azul está sobre o lado maior do triângulo retângulo (hipotenusa) e que os quadrados verde e vermelho estão sobre os catetos. Dessa forma, percebendo essa ligação, deverão escrever a definição desse teorema, de acordo com seu entendimento.

Resultados Obtidos:

Para responder à Atividade 4 foi disponibilizado o "material-57095" ao trio de alunos. Esse material encontra-se disponível no link <http://ggbtu.be/m57095>, do TubeGeoGebra. Não há nome para quem elaborou, apenas o nome de usuário (user5315). O material foi disponibilizado em 10 de Novembro de 2013, na versão 4.2 do GeoGebra:

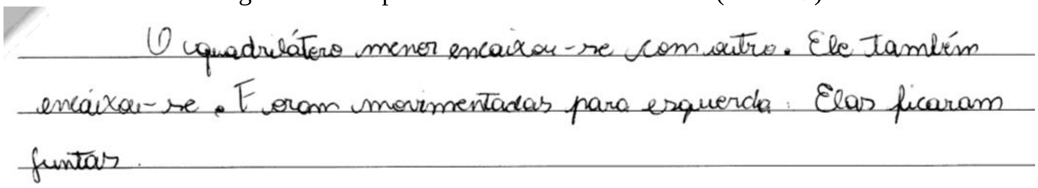
Figura 50 - Material-57095 (Tube GeoGebra)



Fonte: GeoGebra

Com relação aos itens pedidos na Atividade 4, no item *a*, a pergunta foi: *Movimentem os seletores dos ângulos* α *e* β*. O que aconteceu ao movimentar o ângulo* α*? E o ângulo* β*? As duas figuras foram movimentadas para onde? Como elas ficaram nessas movimentações?* A resposta do trio foi:

Figura 51 - Resposta do item *a* da Atividade 4 (Parte IV)

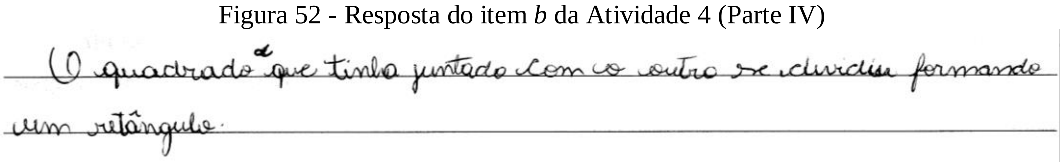

O quadrilátero menor encaixou-se com outro. Ele também encaixou-se. Foram movimentadas para esquerda. Elas ficaram juntas.

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Dessa forma, o trio de alunos conseguiu visualizar as movimentações, porém não aguçaram mais a sua percepção, uma vez que gostaríamos que esses alunos tivessem percebido que tipo de movimentação ocorreu com os quadrados vermelho e verde ao arrastarmos os seletores dos ângulos α e β, respectivamente. Ou seja, o objetivo deste item era que o trio de alunos tivesse observado que houve uma rotação para a esquerda dos dois quadrados, vermelho e verde. Porém, no que diz respeito as suas respostas, as mesmas estão coerentes, uma vez que os quadrados vermelho e verde se encaixaram com outro (quadrado azul), eles foram movimentados para a esquerda e eles ficaram juntos. Quanto à última pergunta, pretendíamos que esses alunos tivessem utilizado a palavra “intersecção” dos quadrados vermelho e verde. Consideramos as suas respostas válidas, já que visualizaram os movimentos corretamente.

No item *b*, foi pedido que: *Surgiu um novo seletor. Movimentem o ângulo* γ. *O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?* A resposta foi:

Figura 52 - Resposta do item *b* da Atividade 4 (Parte IV)

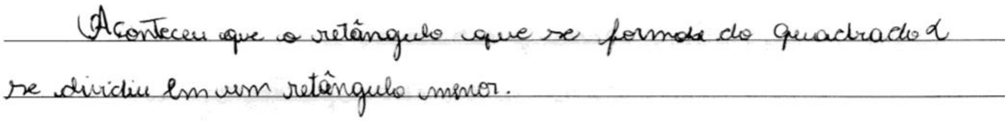

O quadrado α que tinha juntado com o outro se dividiu formando um retângulo.

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Notamos que o uso do *tinha juntado com o outro* tem o significado de intersecção, uma vez que eles estão usando as suas linguagens e os seus entendimentos. Dessa forma, ao observar o que aconteceu ao movimentar o ângulo γ, os alunos perceberam corretamente que o quadrado vermelho, que eles estão chamando de α , pois está relacionado ao seletor desse ângulo, que tinha juntado com o outro (quadrado verde), se dividiu formando um retângulo. As suas observações estão corretas, porém gostaríamos, da mesma forma que no item anterior, que eles tivessem observado um pouco mais dos conceitos geométricos presentes nessas movimentações. Ou seja, a intersecção dos quadrados vermelho e verde, um retângulo, foi rotacionada para a esquerda e se encaixou na parte de cima do quadrado vermelho. Com isso, gerou-se novamente outra intersecção com o quadrado verde.

No item *c*, pedíamos que: *Surgiu um novo seletor. Movimente o ângulo* δ. *O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?* Obtivemos como resposta:

Figura 53 - Resposta do item *c* da Atividade 4 (Parte IV)


Aconteceu que o retângulo que se formou do quadrado α
se dividiu em um retângulo menor.

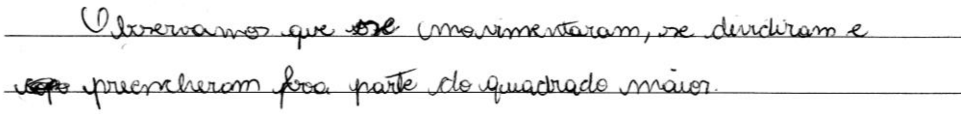
Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Assim como no item anterior, os alunos conseguem perceber corretamente o que acontece ao arrastar os seletores dos ângulos, porém em suas respostas os mesmos não se utilizam dos conceitos matemáticos para justificar/explicar as movimentações. Para o trio de alunos, ao movimentarem o ângulo δ, o retângulo que se formou do quadrado α se dividiu em um retângulo menor. Pretendíamos que esses alunos tivessem percebido e anotado um pouco a mais das suas visualizações, ou seja, o novo retângulo gerado pela interseção dos quadrados vermelho e verde foi rotacionada para a esquerda e se encaixou no espaço restante, em cima do quadrado verde.

Durante esses passos realizados nos itens anteriores, os alunos ficaram argumentando e conversando bastante sobre as movimentações e o que está surgindo de novo. Uma das coisas que nos chamou atenção foi a fala do Aluno A quando estavam arrastando os seletores dos ângulos, o mesmo afirmou que “olha... tá tudo complementando... uma coisa complementando a outra.” Assim, ele percebeu que as movimentações estavam complementando o quadrado maior (azul).

No item *d*, a pergunta foi: *Ao fazer todos esses movimentos, o que vocês observaram? A que conclusões vocês chegaram?* A resposta do trio de alunos foi:

Figura 54 - Resposta do item *d* da Atividade 4 (Parte IV)

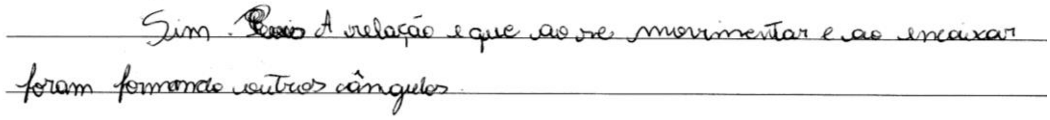

Observamos que ~~se~~ movimentaram, se dividiram e
~~se~~ preencheram boa parte do quadrado maior.

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Nesse item, nós afirmamos para eles que poderiam escrever somente uma vez, pois as duas perguntas são semelhantes. Dessa forma, o trio de alunos observou que os quadrados vermelho e verde se movimentaram, se dividiram e preencheram boa parte do quadrado maior. Com essa resposta, percebemos que esses alunos visualizaram corretamente e atingiram o objetivo esperando nesse item, uma vez que ao fazer as movimentações dos quatro ângulos, esses dois quadrados foram se movimentando, as suas intersecções foram se dividindo, porém tudo isso preencheu completamente todo o quadrado azul e não boa parte. Ou seja, o trio de alunos não conseguiu visualizar que o quadrado azul foi totalmente preenchido pelos quadrados vermelho e verde.

E por fim, no item *e*, foi perguntado: *Existe alguma relação entre esses quadrados e os lados do triângulo retângulo? Se sim, qual?* O trio de alunos respondeu:

Figura 55 - Resposta do item *e* da Atividade 4 (Parte IV)


Sim. A relação e que ao se movimentar e ao encaixar
foram formando outros ângulos

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Para responder esse item, o trio de alunos dialogou bastante, uma vez que os alunos B e C estavam afirmando que não havia relação, enquanto que o Aluno A afirmou que tinha relação, pois tudo se encaixou e, para ele, havia alguma relação. Dessa forma, entraram em um consenso e afirmaram que havia uma relação e essa relação percebida por eles é que, ao movimentar e ao encaixar os quadrados, foram formando outros ângulos. O que não está errado, mas a relação pedida no item é entre os quadrados e os lados do triângulo retângulo, ou seja, essa verificação diz respeito ao Teorema de Pitágoras e, para essa Atividade, poderíamos afirmar que o quadrado azul está na hipotenusa e os verde e vermelho estão nos catetos. Assim, a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos equivale à área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

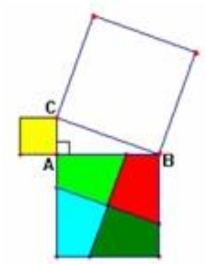
À vista disso, o trio de alunos não conseguiu atingir o objetivo esperado na Atividade, uma vez que gostaríamos que eles tivessem relacionado os quadrados com os lados do triângulo, chegando assim à definição do Teorema de Pitágoras. Porém, esses alunos conseguiram visualizar corretamente o que aconteceu ao movimentar os seletores dos quatro ângulos, todavia nas suas escritas percebemos que eles anotaram somente os movimentos e não fizeram ligação alguma com os conceitos de rotação, intersecção, hipotenusa, catetos e áreas dos quadrados. Não conseguindo, dessa forma, concluir corretamente a relação presente nesta Atividade.

Portanto, podemos afirmar que o trio de alunos se encontra no nível G0 (Geometria concreta), segundo Parzysz (2006), já que eles se utilizaram de observações e constatações para justificar as características físicas da figura. Dessa forma, a validação utilizada nesse nível e por estes alunos foi baseada somente na percepção, uma vez que esses alunos não conseguiram perceber os conceitos geométricos presentes na verificação.

4.3.5 Atividade 5 (Parte IV)

Figura 56 - Atividade 5 (Parte IV) resolvida pelo trio de alunos

(5) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)



Abram o arquivo *Montagem – Perigal* e observem, antes de fazer qualquer movimento, a imagem atenta e detalhadamente.

Na figura temos 5 peças coloridas, 4 dentro do quadrado médio e uma no quadrado menor. Arrastem cada uma das peças, encaixando-as dentro do quadrado maior.

Façam o que se pede:

a) O que vocês observaram? Relacionem as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que vocês concluíram?

b) Representem a medida da hipotenusa do triângulo retângulo por a, e por b e c as medidas de cada cateto. Relacionem as três medidas.

c) A verificação feita com esse arquivo é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

d) No GeoGebra, construam um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro", meçam os lados de seu triângulo e com uma calculadora verifiquem a relação percebida anteriormente. O que vocês concluíram?

e) A verificação feita no item d garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

Fonte: Proposta Didática

Resultados Esperados:

Que o trio de alunos justifique as movimentações feitas no GeoGebra e perceba a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

Para esta atividade, a maior dificuldade que estes alunos poderão enfrentar será a de arrastar os quadriláteros sem deformá-los, pois ao arrastá-los, eles poderão deformar-se e assim perderão suas propriedades iniciais. Desse modo, se isso acontecer, esses alunos deverão desfazer a operação e começa-la novamente. Assim:

- item *a*: O trio de alunos será desafiado a construir explicações sobre as suas observações. Para isso, eles deverão observar o que aconteceu com a construção ao movimentar as peças dos quadrados médio e menor para o quadrado maior. Além disso, deverão escrever, em linguagem comum, a relação que foi percebida entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído na hipotenusa.

- item *b*: O trio de alunos deverá reconhecer, algebricamente, a relação existente entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído na hipotenusa. Para isso, os alunos deverão ter conhecimentos sobre a área de um quadrado. Dessa forma, os alunos deverão fazer a mudança na sua escrita, isto é, deverão escrever algebricamente a relação que conseguiram identificar no item anterior. Na escrita algébrica, eles deverão utilizar as letras a, b e c como as respectivas medidas da hipotenusa e dos dois catetos e deverão escrever a relação na forma $a^2 = b^2 + c^2$.

- item *c*: O trio de alunos será instigado a levantar suas dúvidas sobre a validade ou não da relação encontrada no item anterior para qualquer triângulo retângulo. Para isso, esses alunos deverão afirmar se a relação encontrada no item *b* vale para qualquer triângulo retângulo. Então, começarão a fazer conjecturas e sentirão a necessidade de investigar a validade dessa relação em outros casos particulares de triângulos.

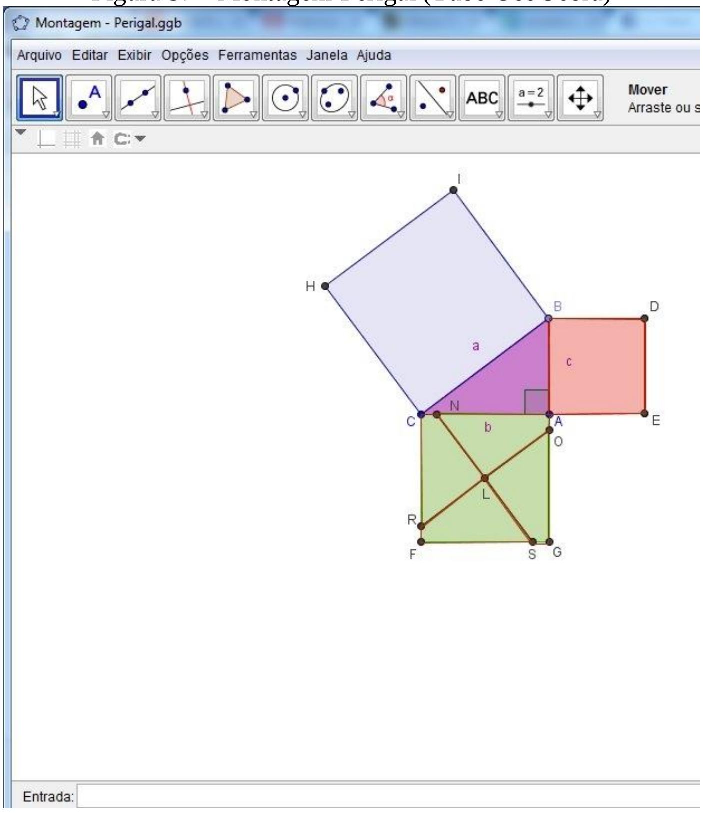
- item *d*: O trio de alunos será motivado a um novo processo de validação para verificar o teorema de Pitágoras, a partir de uma construção própria no aplicativo GeoGebra. Para isso, os alunos deverão ter conhecimentos sobre as propriedades de um triângulo retângulo e o manuseio de algumas ferramentas do aplicativo GeoGebra. Desse modo, os alunos deverão construir um triângulo retângulo qualquer, observando as suas propriedades. Deverão medir seus lados e observar se a relação encontrada no item *b* é válida para sua construção.

- item *e*: O trio de alunos deverá conhecer as suas concepções sobre o que é uma prova, uma demonstração e uma simples verificação ou validação. Dessa forma, os alunos deverão garantir, após a verificação feita no item *d*, se a relação encontrada no item *b* vale para qualquer triângulo. Nesse caso, como os alunos não estão habituados a trabalhar com demonstração, então eles poderão afirmar que vale sim para qualquer triângulo retângulo.

Resultados Obtidos:

Para responder à Atividade 5 foi disponibilizado o “material-689765”, o qual denominamos de “Montagem-Perigal”, ao trio de alunos. Esse material encontra-se disponível no link <http://ggbtu.be/m689765>, do TubeGeoGebra e foi construído por Rafael, de Uberlândia, em 16 de Fevereiro de 2015, na versão 4.4 do GeoGebra:

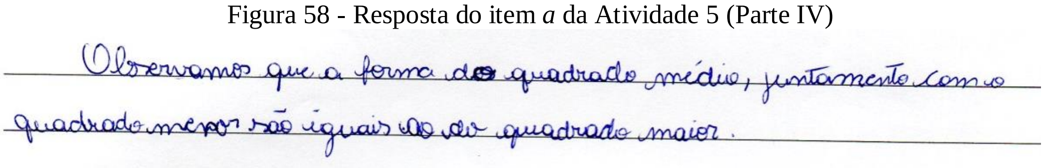
Figura 57 - Montagem-Perigal (Tube GeoGebra)



Fonte: GeoGebra

Na Proposta Didática, nessa Atividade 5, foi pedido para que os alunos abrissem o arquivo e observassem a construção. Logo após, foi mencionado que na figura havia 5 peças, 4 no quadrado médio e uma no quadrado menor. Dessa forma, foi pedido que o trio de alunos arrastasse cada uma das peças e encaixasse dentro do quadrado maior. Assim, após fazer essas movimentações, no item *a*, a pergunta foi: *O que vocês observaram? Relacionem as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que vocês concluíram?* A resposta do trio foi:

Figura 58 - Resposta do item *a* da Atividade 5 (Parte IV)

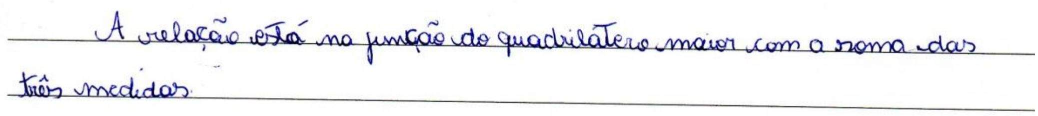

Observamos que a forma do quadrado médio, juntamente com o quadrado menor são iguais ao do quadrado maior.

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

O trio de alunos movimentou corretamente as 5 peças para o quadrado maior e observou que a forma do quadrado médio juntamente com o menor são iguais ao do quadrado maior, respondendo, assim, a primeira pergunta corretamente. No entanto, o restante do item *a*, esses alunos não responderam e não conseguiram visualizar as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Assim, como não perceberam essa relação, consequentemente, responderão erroneamente os próximos itens.

No item *b*, foi pedido que: *Representem a medida da hipotenusa do triângulo retângulo por a, e por b e c as medidas de cada cateto. Relacionem as três medidas.* Obtivemos como resposta:

Figura 59 - Resposta do item *b* da Atividade 5 (Parte IV)


A relação está na junção do quadrilátero maior com a soma das três medidas

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Antes de comentarmos a resposta do trio de alunos para o item *b*, iremos expor uma dificuldade desses alunos encontrada nesse item da Atividade. Pensávamos que a dificuldade estaria em arrastar as 5 peças para o quadrado maior sem deformá-las, porém como isso aconteceu na Atividade 3, aqui eles tiveram mais facilidade e cuidado. Assim, a dificuldade encontrada pelos alunos foi saber o que era hipotenusa e, consequentemente, os catetos do triângulo retângulo. Isso foi observado na discussão entre eles e que acabaram nos chamando para tirar a dúvida:

> Pesquisadora: (...) Pergunte o que vocês não sabem.
> Aluno C: é assim... (risos)
> Aluno A: a gente não sabemos o que é cateto e o que é hipotenusa.
> Pesquisadora: olhe no triângulo retângulo. Tem três lados né? Qual é a hipotenusa?
> Aluno C: a hipotenusa é esse aqui oh... eu acho que é a leta b. ou não.
> Pesquisadora: Por que?
> Aluno C: não sei.
> (...)
> Pesquisadora: (...) Minha gente já tá aqui oh... as medidas já estão aqui oh... (...) as medidas já estão aí... representar por *a* a hipotenusa, aonde é que tá o *a*?
> Aluno B: aqui oh...
> Pesquisadora: não.
> Aluno C: não. Aqui...
> Pesquisadora: não... é diferente. Esse A maiúsculo é o vértice, certo?
> Aluno C: certo.
> (...)
> Pesquisadora: essas letrinhas pequenas são segmentos. Então... se esse *a* aqui tá pequeno tá falando de que?

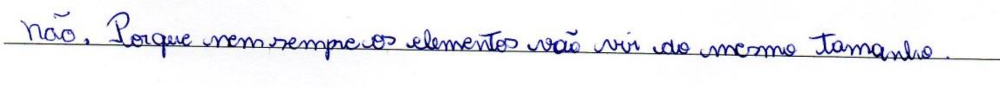
> Aluno B: de segmento.
> Pesquisadora: de segmento. Aonde é que tá esse *a* pequeno lá?
> Aluno B: aqui no caderno...
> Pesquisadora: tá aqui... que aqui é o que? (...) é um lado do triângulo né?
> Aluno C: é.
> Pesquisadora: então e... então esse lado é o que?
> Aluno C: a hipotenusa.
> Pesquisadora: a hipotenusa... por que é a hipotenusa? Vocês não sabem nem uma... assim...
> Aluno B: não.
> Pesquisadora: diferenciar a hipotenusa dos catetos?
> Aluno A: não.
> Aluno C: eu não sei não.
> Pesquisadora: olhando aqui... já que você sabe que esse lado *a* aqui é a hipotenusa. Qual a diferen... os outros dois consequentemente são os...
> Aluno B: catetos...
> Pesquisadora: os catetos, certo? *b* e *c*. Qual a diferença entre a hipotenusa e os dois catetos? (silêncio) olhando bem assim... sem saber de medida, sem saber de nada...
> Aluno B: sei não o que é não.
> Aluno C: acho que os lados deles são mais menores.
> Aluno B: mais o que homi?
> Aluno C: dos catetos...
> Pesquisadora: são menores...
> Aluno C: é.
> Pesquisadora: ou seja, a hipotenusa...
> Aluno B: é a soma de dois lados... todos os lados...
> Pesquisadora: tenha calma.
> Aluno A: ele é muito acelerado.
> Pesquisadora: ou seja, a hipotenusa... o, o... a medida da hipotenusa é o que?
> Aluno C: tem ...
> Aluno B: a soma dos dois lados...
> Pesquisadora: não... é a maior.
> Aluno C: é a maior. (risos)
> Pesquisadora: isso. Então o lado da... a hipotenusa é o maior lado do triângulo... ou a outra definição... é oposta ao vértice A ou ao ângulo de 90º.

À vista disso, percebemos que os alunos não sabiam o que era hipotenusa e catetos, como também não sabia diferenciá-los. Mesmo tendo no item *b* a resposta para isso, uma vez que já informava que era pra chamar a hipotenusa de a, e os catetos de b e c, e na construção já estão dispostos nos locais corretos, esses alunos tiveram essa dificuldade e não estavam conseguindo responder o que estava sendo pedido. Assim, após essa conversa, o trio de alunos achou mais fácil a primeira definição que dissemos a eles, de que a hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo.

Quanto à resposta, o trio de alunos afirmou que a relação está na junção do quadrilátero maior com a soma das três medidas, ou seja, o que foi apresentado pelo Aluno B durante a conversa, uma vez que ele falou que a soma dos dois menores resulta no maior. Tendo relacionado erroneamente, uma vez que se trata da soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos que é equivalente à área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Como essa relação não foi percebida no item *a*, então não atingiram o objetivo proposto para o item *b*, uma vez que aqui eles iriam escrever algebricamente ($a^2 = b^2 + c^2$) o que tinha escrito com as suas palavras no item anterior.

No item *c*, foi perguntado: *A verificação feita com esse arquivo é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.* O trio de alunos respondeu:

Figura 60 - Resposta do item *c* da Atividade 5 (Parte IV)



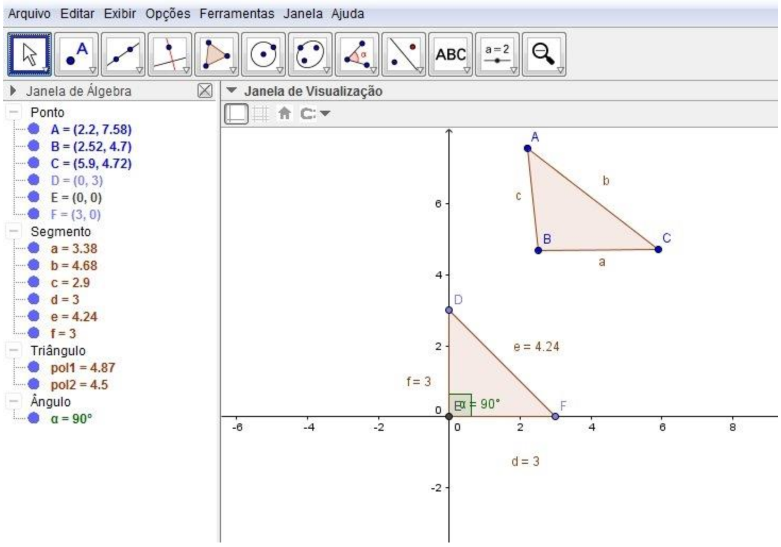
Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Nesse item, pretendíamos que os alunos conjecturassem e sentissem a necessidade de investigar a validade dessa relação em outros casos particulares de triângulos. Para isso, estávamos esperando três tipos de respostas: não, pois as peças podem apresentar falhas mesmo que muito pequenas, na sua construção, o que poderiam levar a conclusões falsas; sim, pois em todas as peças se encaixaram e a relação foi confirmada; sim, pois já sabíamos que essa relação é verdadeira.

À vista disso, o trio de alunos respondeu que essa verificação não é confiável e que não dá certeza de que a relação é sempre válida em qualquer triângulo, porque nem sempre os elementos vão vir do mesmo tamanho. Dessa forma, podemos comparar a resposta desses alunos com a primeira resposta que esperávamos, já que está bem parecida e eles estão afirmando sobre os tamanhos das peças que compõem os quadrados médio e menor.

No item *d*, pedíamos que: *No GeoGebra, construam um triângulo retângulo abc qualquer. Com a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro", meçam os lados de seu triângulo e com uma calculadora verifiquem a relação percebida anteriormente. O que vocês concluíram?* Primeiro, apresentaremos a construção do triângulo no GeoGebra e depois, apresentaremos a resposta ao questionamento no lápis e papel. Assim, o trio de alunos fez a seguinte construção:

Figura 61 - Construção do triângulo no GeoGebra pelo trio de alunos

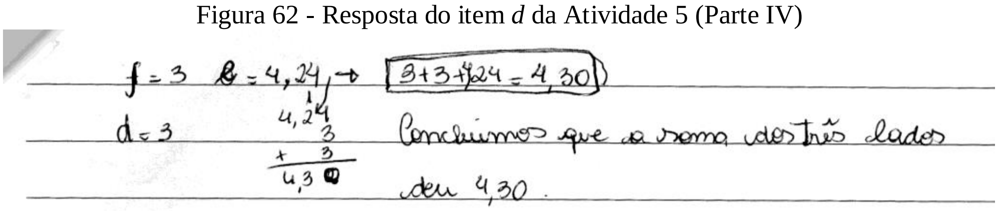


Fonte: GeoGebra

Durante a realização desse item da Atividade 5, o trio de alunos não sabia construir um triângulo no aplicativo GeoGebra e afirmaram que não sabiam e que nunca tinham participado disso. Um sinal de que esses alunos não trabalham com esse aplicativo e que a intervenção feita em alguns minutos foi pouca para que pudessem realizar essa atividade a contento. Então, para construírem esses dois triângulos, eles chamaram outro aluno da turma e o mesmo os ajudou a construir.

Por meio do Protocolo de Construção, disponível no GeoGebra e encontra-se no menu Exibir ou apertando as teclas Ctrl+Shift+L, percebemos que o trio de alunos construiu primeiro um triângulo qualquer, utilizando três pontos e a ferramenta polígono. O outro aluno que foi os ajudar, disse que tinha que ser um triângulo retângulo, então eles utilizaram os eixos X e Y para formar o triângulo retângulo, e fizeram os mesmos passos anteriores, criaram três pontos, utilizaram a ferramenta polígono, depois a ferramenta segmento de reta e geraram 3 segmentos, utilizaram a ferramenta ângulo e encontraram o de 90º, e, finalmente, com a ferramenta pedida no item *d* geraram as medidas dos três segmentos. Com isso, o trio de alunos respondeu:

Figura 62 - Resposta do item *d* da Atividade 5 (Parte IV)

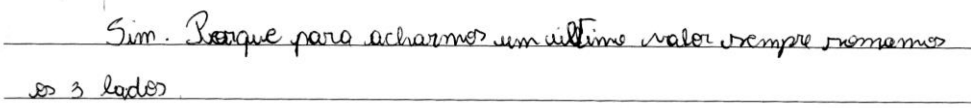


Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Dessa forma, como o trio de alunos afirmou que a relação era a soma dos três lados, então a resposta dada para esse item foi a soma dos três lados do triângulo que eles construíram. Assim, os alunos responderam errado e não conseguiram perceber a relação presente na verificação do material. Esses alunos não foram além do que estava sendo percebido naquele material e não conseguiram encontrar os conceitos geométricos corretos presentes nesse material. Para esse item, nosso objetivo era que esses alunos verificassem que a relação (Teorema de Pitágoras) também é válida para esse caso particular construído por eles no aplicativo.

E por fim, no item *e*, foi perguntando: *A verificação feita no item d garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.* Obtivemos a resposta:

Figura 63 - Resposta do item *e* da Atividade 5 (Parte IV)


Sim. Porque para acharmos um último valor sempre somamos os 3 lados.

Fonte: Proposta Didática resolvida pelo trio de alunos

Para esse item, pretendíamos verificar se o aluno iria generalizar a relação apenas a partir da verificação de um caso particular e, consequentemente, estávamos esperando dois tipos de resposta: sim, pois é válida para qualquer triângulo retângulo; não, pois este é mais um caso particular. À vista disso, o trio de alunos afirmou que a verificação da relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo, porque para eles acharem o último valor sempre somamos os três lados. Ou seja, esses alunos estavam utilizando a relação errada e, por isso, a sua resposta é válida para a relação proposta por eles, uma vez que o trio de alunos afirmou que a relação era a soma dos três lados do triângulo.

Dessa forma, o objetivo pretendido com a Atividade 5 não foi alcançado, uma vez que eles não conseguiram perceber a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa, como também não observaram esses conceitos geométricos presentes na verificação. Além disso, tiveram dificuldades em saber o que é hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo, como também não sabiam construir um triângulo retângulo no aplicativo GeoGebra.

Com relação ao pensamento geométrico dos alunos, percebemos que os mesmos se encontram nos dois níveis da Geometria não axiomática, de acordo com Parzysz (2006): a Geometria Concreta (G0) e a Geometria Spatio-Graphique (G1), uma vez que esses alunos se utilizam de desenhos para justificar suas afirmações, nos quais utilizaram suas observações e constatações para justificar as características físicas da figura. Dessa forma, a validação utilizada nesses níveis e por estes alunos foi baseada somente na percepção.

No que diz respeito aos tipos de provas utilizados pelo trio de alunos, mesmo tendo compreendido a relação errada, os mesmos utilizam, segundo Nasser e Tinoco (2003), a Justificativa Gráfica, na construção do triângulo retângulo no aplicativo GeoGebra, e a Justificativa Pragmática, na elaboração da conclusão da relação encontrada nesse caso particular. Já com relação às ideias de Balacheff (2000), o trio de alunos utilizou o Empirismo Ingênuo, uma vez que esses alunos atestam a validade da relação por meio de observações de um caso particular.

4.3.6 Comentários

Com os resultados obtidos com as Atividades 1 a 5 (Parte IV), ambas realizadas no ambiente GeoGebra, com o auxílio do lápis e papel para anotar o que observaram com as movimentações das construções, chegamos à conclusão que o trio de alunos se utiliza de observações e constatações para justificar as características físicas das construções presentes nas atividades, e, para isso, a validação feita por eles está baseada somente na percepção. Dessa forma, esses conhecimentos apresentados pelo trio de alunos se enquadram nos dois níveis da Geometria não axiomática, de acordo com Parzysz (2006): a Geometria Concreta (G0) e a Geometria Spatio-Graphique (G1), uma vez que à medida que foi sendo requisitados conhecimentos mais apurados desses alunos, eles tiveram dificuldades em desenvolver as suas ideias e justificativas.

Esses níveis foram percebidos nas Atividades 1, 3, 4 e 5, as quais nós esperávamos que esses alunos percebessem os conceitos geométricos presentes nas movimentações e nas construções, não conseguindo, por isso, alcançar os objetivos propostos para estas atividades. O nível G1 foi percebido unicamente na Atividade 5, na qual os alunos tiveram que construir um triângulo retângulo, realizar as medidas de seus lados e aplicar a relação encontrada por eles. Vale salientar que em nenhuma dessas quatro atividades os alunos conseguiram visualizar que se tratavam das verificações do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um triângulo, para a Atividade 1, e do Teorema de Pitágoras, para as Atividades 3, 4 e 5.

No que diz respeito à Atividade 2, esses alunos também se encontram no nível Geometria Concreta(G0), porém aqui eles conseguiram perceber a relação presente na verificação, a qual eles confirmaram que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180º. Dessa forma, o trio de alunos conseguiu atingir o objetivo pretendido com a Atividade 2, uma vez que esperávamos que os mesmos visualizassem a relação presente no material.

Quanto às provas e demonstrações matemáticas, concluímos que, na Atividade 5, os alunos utilizaram a do tipo Empirismo Ingênuo, defendido por Balacheff (2000), uma vez que o trio de alunos se utiliza de um caso particular para conjecturar uma afirmação. Como também utilizaram a Justificativa Gráfica, para construir um triângulo retângulo, e a partir daí deduzir que a relação, mesmo errada, valia para qualquer triângulo retângulo, utilizando a Justificativa Pragmática (NASSER e TINOCO, 2003).

Com relação ao trabalho no aplicativo GeoGebra, podemos afirmar que o trio de alunos não está familiarizado com esse aplicativo e nunca trabalharam nem ouviram falar do mesmo, já que quando fizemos a intervenção e o trabalho com esse aplicativo, todos os alunos não conheciam nem tinham informação sobre o mesmo. Dessa forma, o trabalho poderia ter sido melhor, se os alunos soubessem trabalhar no GeoGebra, uma vez que esses alunos não conseguiram construir um triângulo retângulo para resolver o item *d* da Atividade 5 e tiveram que pedir ajuda a outro aluno que já tinha finalizado a sua atividade. Além disso, somente na Atividade 2 os alunos conseguiram visualizar a relação presente na verificação, enquanto que nas outras eles não conseguiram visualizar as relações e os conceitos geométricos presentes nos materiais.

Mesmo não tendo atingido os objetivos da maioria das Atividades, o Aluno A afirmou que o trabalho com o aplicativo GeoGebra foi melhor do que o trabalho realizado em sala de aula. Acreditamos que isso pode ser confirmado nas ideias de Janzen (2011), uma vez que para que o aluno tenha uma boa compreensão da Matemática, é necessário que ele tenha representações mentais ricas de conceitos e que contenham vários aspectos deles. Para que isso ocorra, uma possível abordagem no ensino é usar diversas representações de objetos desde o início, interligando uma a outra. Para Janzen (2011), os ambientes computacionais são uma ferramenta útil para tal, uma vez que nesses ambientes aparece também o processo de visualização, o que não ocorre no ambiente lápis e papel, e assim, o aluno poderá olhar cada parte detalhadamente, buscando configurações e relações que possam ser exploradas. E isso foi o que ocorreu por parte desse trio de alunos, uma vez que eles utilizaram bastante a sua visualização para confirmar as suas ideias e justificativas.

Percebemos também que os conhecimentos geométricos desses alunos estão bem abaixo do esperado para alunos que se encontram no 2º Ano do Ensino Médio, o que vai de encontro ao que o PCN do Ensino Médio espera, uma vez que esse documento destaca que a Matemática nessa última fase da Educação Básica tem um valor formativo, ajudando o aluno a estruturar seu pensamento e raciocínio dedutivo. Dessa forma, é extremamente importante que o aluno perceba que as definições e demonstrações têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. E isso nós não conseguimos perceber por parte dos alunos, já que suas reflexões, justificativas e observações foram bem superficiais, não conseguindo perceber os conceitos geométricos nas construções e movimentações.

Outro aspecto detectado foi o pouco conhecimento do trio de alunos em utilizar a Álgebra para resolver problemas geométricos, como o que aconteceu na Atividade 5. Os alunos não conseguiram relacionar as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Confirmando as ideias defendidas por Lorenzato (1995 apud BERTOLUCI, 2003), o qual afirma que uma das causas para o abandono da Geometria no Brasil é que seu ensino passou a ser algebrizado, depois do Movimento da Matemática Moderna. Ou seja, os alunos são motivados a "decorar" as fórmulas para atividades mecânicas e quando encontra atividades que o motivem a refletir, justificar e provar as suas ideias, esses alunos não conseguem aplicar às fórmulas ou conceitos aprendidos, pois não condizem às atividades que eles costumam responder.

Portanto, percebemos que o trio de alunos possui um conhecimento superficial do Teorema de Pitágoras e do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, como também seu conhecimento matemático se encontra de forma fragmentada e mecânica, o que dificulta a exploração destes conhecimentos para resolver atividades fora do contexto da sala de aula. Acreditamos também, assim como afirma Janzen (2011), que esses alunos não foram incentivados a trabalhar com representações mentais ricas de conceitos, uma vez que quando propomos essa Proposta Didática, com atividades diferenciadas das que eles são acostumados a resolver, esses alunos não conseguiram resolver. Ou seja, esses alunos estão limitados a usar uma única representação dos conceitos que estiveram presentes na nossa Proposta Didática e, por isso, falharam em resolver atividades que os instigassem a refletir, justificar, argumentar, provar e demonstrar.

4.4 DISCUSSÃO

Esta pesquisa buscou investigar que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível de pensamento geométrico de alunos do 2º Ano do Ensino Médio podem ocorrer a partir de uma Proposta Didática nos ambientes lápis e papel e GeoGebra. Para isso, realizamos um trabalho em uma escola pública da cidade de Areia-PB com vinte alunos do 2º Ano do Ensino Médio, os quais se dividiram em duplas e um trio, porém, analisamos o trabalho desenvolvido pelo trio de alunos, uma vez que foram ricos na tentativa de responder a todas as perguntas/atividades.

Esta seção apresenta a discussão sobre os comentários apresentados nas seções que constituem a triangulação dos dados, baseada em três vértices, A, B e C. A seção *Perfil do trio de alunos*, vértice A, objetivou traçar um perfil do trio de alunos em relação ao tema Provas e Demonstrações Matemáticas. Deixamos esses alunos livres para relatar o que pensavam e entendiam desse tema.

As seções *Pensamento geométrico e provas e demonstrações matemáticas no ambiente lápis e papel*, vértice B, e *Pensamento geométrico e provas e demonstrações matemáticas no ambiente GeoGebra*, vértice C, objetivou analisar o pensamento geométrico e as provas e demonstrações matemáticas desse trio de alunos nos ambientes lápis e papel e GeoGebra, respectivamente. Para estas análises, nos ancoramos nos níveis do pensamento geométrico propostos por Parzysz (2006) e nos tipos de provas propostos por Balacheff (2000) e Nasser e Tinoco (2003).

Diante dos dados apresentados nas três seções, podemos afirmar que o trabalho com as provas e demonstrações deve ser realizado desde as séries iniciais, e para isso, é necessário que o professor, primeiramente, tenha um bom conhecimento matemático e saiba adaptar as provas e demonstrações aos conhecimentos dos alunos, tomando como base os tipos de provas propostos por Balacheff (2000) e Nasser e Tinoco (2003), levando em consideração o grau de maturidade deles e os conhecimentos prévios que esses alunos possuem da Matemática.

Os dados apresentados na primeira seção apontam que o trio de alunos quase não trabalha com os variados tipos de prova e demonstração na sala de aula e nem ouviram falar das mesmas, uma vez que considera as provas como as avaliações aplicadas bimestralmente pelos professores de Matemática com o intuito de verificar os conhecimentos matemáticos dos alunos. Além disso, o Aluno C afirmou que as provas de

Matemática são boas e só algumas questões que complicam, mas, para ele, não são as questões que complicam, e sim os alunos que não leem para compreender melhor a pergunta. Dessa forma, percebemos que em muitas perguntas das Atividades, o trio de alunos não conseguiu interpretar corretamente o que estava sendo pedido, deixando algumas em branco ou afirmando que não se lembravam do assunto. Ocorrendo, assim, o que o Aluno C afirmou em sua escrita da redação.

Assim, percebemos que, além deles não terem conseguido interpretar corretamente as perguntas, esses alunos não lembraram os conceitos presentes nas Atividades, os quais dizem respeito aos produtos notáveis, cálculo de áreas (quadrado e triângulo), congruência de triângulos, potenciação, radiciação, translação, rotação e intersecção, como também tiveram dificuldade em perceber que a área do quadrilátero MNPQ pode ser vista de duas formas diferentes.

À vista disso, percebemos que esses alunos não dominam a Matemática, muito menos são incentivados a utilizar as provas e demonstrações matemáticas na sala de aula da Educação Básica, confirmando as discussões feitas por Almouloud (2007), Nasser e Tinoco (2003) e Aguilar Jr e Nasser (2012). Além disso, de acordo com Nasser e Tinoco (2003), a realidade hoje mostra que a maioria de nossos alunos não está aprendendo a pensar e raciocinar quando se estuda Matemática. Sendo assim, constatamos que esses alunos não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias e isso foi confirmado durante as aplicações da Redação e da Proposta Didática, as quais a maioria dos alunos não se mostrou interessado em escrever a redação e resolver as Atividades, como também estavam tendo dificuldades para expressar as suas ideias com relação a esta temática e aos conceitos presentes na Proposta.

Toda essa discussão vem ao encontro com os vários objetivos a serem alcançados pelos alunos propostos pelos PCN do Ensino Fundamental. Esses PCN afirmam que a resolução de situações problemas, validando estratégias e resultados, desenvolvem formas de raciocínio e processos, como intuição, dedução, analogia, estimativa, e utilizam conceitos e procedimentos, bem como instrumentos tecnológicos que levam a construção da cidadania por parte dos alunos. Além disso, os alunos irão aprender a comunicar-se matematicamente, isto é, eles irão descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relação entre ela e as diferentes representações matemáticas. O que não foi percebido por esses alunos do Ensino Médio, uma vez que esses objetivos já deveriam estar bem consolidados nos mesmos, já que eles se encontram no 2º ano do Ensino Médio. Dessa forma, afirmamos que esses alunos não estão passando por esses processos, nem tampouco conseguem se comunicar matematicamente.

Se formos observar o que os PCN do Ensino Médio afirmam sobre a Geometria, notamos que esses documentos trazem a afirmação de que ela é essencial para a descrição, representação, medida e dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. Além disso, afirmam que ao utilizar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução. O que nos leva a acreditar que esse trabalho não vem sendo feito de forma satisfatória, uma vez que esses alunos ao se defrontar com as Atividades da nossa Proposta Didática não conseguiram visualizar e perceber os conceitos presentes nas mesmas.

Assim, confirmamos que esse trio de alunos não conseguiu utilizar a Álgebra para resolver problemas geométricos. Isso foi percebido na maioria das Atividades, nas quais esses alunos não conseguiram algebrizar as áreas de um triângulo e de um quadrado para provar o Teorema de Pitágoras, o que confirma as ideias defendidas por Lorenzato (1995 apud BERTOLUCI, 2003), o qual afirma que uma das causas para o abandono da Geometria no Brasil é que seu ensino passou a ser algebrizado, depois do Movimento da Matemática Moderna. Isto é, os alunos são motivados a "decorar" as fórmulas para atividades mecânicas e quando encontra atividades que os motivem a refletir, justificar e provar as suas ideias, esses alunos não conseguem aplicar às fórmulas ou conceitos aprendidos, pois não condizem às atividades que eles costumam responder.

Toda essa discussão nos leva a confirmar as ideias de Nasser e Tinoco (2003) quanto à realidade dos nossos alunos ao estudar a Matemática. Esse trio de alunos é somente uma amostra da situação alarmante em que se encontra o ensino e aprendizagem da Matemática nas escolas brasileiras, tanto pública quanto privada, uma vez que constatamos, por meio de suas redações e Atividades da Proposta, que esses alunos não estão aprendendo a pensar e raciocinar quando estudam diversos conteúdos da Matemática, em especial aos que foram analisados em nossa pesquisa, o Teorema de Pitágoras e o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo.

Assim, todos esses problemas apresentados podem estar relacionados ao currículo da Escola Básica, de nível fundamental e médio, o qual não se evidencia no projeto pedagógico das escolas públicas uma disciplina específica sobre Geometria, como afirma Nascimento (2012). Ou seja, verificamos que a disciplina Matemática está delineada de forma generalista, onde a Geometria se constitui apenas como uma unidade de estudo e, dessa forma, um único professor tem que abranger a Geometria e a Álgebra, o que dificulta ainda mais o interesse e a motivação para a realização de experiências no campo da Geometria, quer por parte dos alunos ou dos professores.

Nas segunda e terceira seções buscamos analisar que nível de pensamento geométrico o trio de alunos se encontra e tipo de provas e demonstrações matemáticas esses alunos utilizam para resolver atividades que o motivem a pensar, refletir, justificar, provar e demonstrar. Quanto ao nível no pensamento geométrico, na maioria das Atividades da Proposta Didática, esses alunos se enquadram nos dois níveis da Geometria não axiomática, segundo Parzysz (2006): a Geometria Concreta (G0) e a Geometria Spatio-Graphique (G1), uma vez que o trio de alunos se utilizou de observações e constatações para justificar as características físicas das construções presentes nas atividades, e, para isso, a validação feita por eles foi baseada somente na percepção. Além disso, confirmamos que os mesmos se enquadram nesses dois níveis, já que à medida que foi sendo requisitados conhecimentos mais apurados desses alunos, eles tiveram dificuldades em desenvolver as suas ideias, justificativas e não perceberam os conceitos e propriedades presentes na maior parte das Atividades.

No que diz respeito às provas e demonstrações matemáticas, voltamos a afirmar que, em nossa pesquisa, consideramos prova e demonstração com significados distintos, ou seja, tratamos a prova em um significado mais amplo, no qual pode ser entendida como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, que possivelmente não será aceita pelos matemáticos puros. Já a demonstração ou prova formal será considerada como um tipo de prova aceita pela comunidade dos matemáticos, a qual é baseada em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, devendo ser obtida por meio de um processo hipotético-dedutivo. Assim, com estas afirmações, notamos que o trio de alunos não é incentivado a trabalhar com as provas e demonstrações matemáticas em sala de aula, uma vez que suas visões dizem respeito à avaliação bimestral da disciplina de Matemática.

Consequentemente, as poucas provas que esses alunos realizaram nas Atividades 1 e 2 (Parte II), e 5 (Parte IV) se enquadram em três tipos de provas: o Empirismo Ingênuo, defendido por Balacheff (2000), o qual esses alunos utilizaram casos particulares para conjecturar uma afirmação; a Justificativa Gráfica (Nasser e Tinoco, 2003), a qual o trio de alunos construiu um triângulo com as medidas de seus ângulos internos e observou que a soma deles é igual a 180º; e a Justificativa Pragmática (Nasser e Tinoco, 2003), a qual esses alunos, além de construir um triângulo no aplicativo GeoGebra, utilizaram um caso particular para verificar que a relação encontrada na Atividade 5 vale para qualquer triângulo retângulo.

Por considerarmos aceitáveis as respostas desses alunos quando pedimos para tentar demonstrar o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um triângulo e para buscar, implicitamente, a fórmula do Teorema de Pitágoras, estamos seguindo a linha de raciocínio de Aguilar Jr e Nasser (2012), os quais afirmam que para que o trabalho com as provas e demonstrações matemáticas seja feito de forma correta nas salas de aula da Educação Básica, é preciso que os professores busquem desenvolver este raciocínio com seus alunos, compreendendo e aceitando os diversos níveis de argumentação e justificação que seus alunos possam vir a apresentar para provar um determinado resultado e isto está ligado à ideia de *prova ingênua* de Hanna (1990), a qual afirma que uma argumentação aceitável pode ter diversos níveis de rigor, dependendo da idade e do ano de escolaridade do aluno que a apresenta.

Assim, defendemos a ideia de que é necessário que o professor perceba que o desenvolvimento cognitivo dos alunos sobre as provas são apresentadas em formas potencialmente compreensíveis por eles, ou seja, cada aluno apresentará uma justificativa ou uma prova para determinada afirmação de acordo com o seu desenvolvimento cognitivo. Dessa forma, não se deve restringir que a forma válida de uma prova seja somente a formal, uma vez que o grau de conhecimento varia de aluno para aluno e, por isso, se faz tão importante todos esses tipos de provas, uma vez que nos auxiliará no trabalho efetivo das provas e demonstrações em sala de aula.

Com relação ao trabalho no aplicativo GeoGebra, afirmamos que o trio de alunos não está familiarizado com o mesmo e nunca trabalharam nem ouviram falar do mesmo, uma vez que quando fizemos a intervenção e o trabalho com esse aplicativo, todos os alunos não conheciam nem tinham informação sobre o mesmo. Dessa forma, o trabalho poderia ter sido melhor, se os alunos soubessem trabalhar no GeoGebra, uma vez que esses alunos não conseguiram construir um triângulo retângulo para resolver o item *d* da Atividade 5 e tiveram que pedir ajuda a outro aluno que já tinha finalizado a sua atividade.

Quanto à função arrastar disponível nesse aplicativo de Geometria Dinâmica, acreditamos que supriu todas as necessidades dos alunos, uma vez que os mesmos conseguiram visualizar corretamente todas as movimentações ocorridas nas construções, porém não perceberam os conceitos geométricos presentes em cada movimentação. Dessa forma, suas visualizações ficaram somente na percepção e em que tipo de movimento ocorreu ao mover um determinado seletor ou construção.

Dessa forma, acreditamos que isso se deve ao fato de os alunos não serem motivados a trabalhar com representações mentais ricas de conceitos, como afirma Janzen (2011), uma vez que as atividades presentes na nossa Proposta Didática são diferentes das que eles são acostumados a resolver, já que seus conhecimentos matemáticos se encontram de forma fragmentada e mecânica, dificultando assim a exploração destes conhecimentos em atividades que estão fora do seu contexto escolar. Ou seja, esses alunos estão limitados a usar uma única representação dos conceitos que estiveram presentes na nossa Proposta Didática e, por isso, falharam em resolver atividades que os instigassem a refletir, justificar, argumentar, provar e demonstrar.

Portanto, chegamos à conclusão que existe um conhecimento superficial do Teorema de Pitágoras e do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, em que esses conteúdos são memorizados e não compreendidos pelo trio de alunos. Confirmando assim, a forma mecânica que esses assuntos são trabalhados em sala de aula, não permitindo o aluno enxergar além do que é ensinado pelo professor. Corroborando com as ideias defendidas por Nasser e Tinoco (2003), as quais afirmam que esta falta de criatividade nas aulas de Matemática impossibilita os alunos a raciocinar matematicamente.

Aliados a isso, percebemos que o trabalho com o aplicativo GeoGebra também não favoreceu ao trio de alunos a verificação, reflexão, conjectura, justificativa e prova matemática, uma vez que seus conhecimentos estão fragmentados e mecânicos, não conseguindo desenvolver e aguçar o seu raciocínio matemático. Corroborando com as ideias defendidas por Nasser e Tinoco (2003), as quais afirmam que, hoje em dia, nossos alunos não conseguem ver ligação significativa entre o conteúdo estudado na escola com a sua vida, então eles apenas repetem os modelos dados pelo professor ou aplica fórmulas, sem nenhum questionamento ou pensamento de o porquê a resposta ser aquela.

À vista de toda essa discussão, acreditamos que é importante e necessário trabalhar com as provas e demonstrações em sala de aula com o aluno, pois quanto mais cedo começarmos a fazer esse trabalho, de acordo com sua faixa etária e seus conhecimentos matemáticos, mais fácil será de formá-lo um cidadão crítico e capaz de defender suas ideias e argumentos, não só matematicamente, mas também socialmente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objetivo quando da realização dessa pesquisa foi o de investigar que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível de pensamento geométrico de alunos do 2º ano do Ensino Médio podem ocorrer a partir de uma Proposta Didática nos ambientes lápis e papel e GeoGebra. Assim, tomamos como ponto de partida a seguinte questão *Que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico podem ocorrer a partir de uma proposta didática por alunos do 2º Ano do Ensino Médio?*

Para isso, utilizamos como referenciais teóricos Parzysz (2006) para analisar em qual(is) nível(is) do pensamento geométrico o trio de alunos se enquadra, Balacheff (2000), Nasser e Tinoco (2003) para discutir que tipos de provas esses alunos utilizaram para resolver as atividades propostas.

Para responder a pergunta norteadora e atingir o objetivo de nossa pesquisa, utilizamos como instrumentos redação sobre Provas e Demonstrações Matemáticas, observação participante, notas de campo, imagens e gravações em áudio, e a Proposta Didática.

Como já exposto, a presente pesquisa está inserida em um Projeto maior, em rede, CAPES/OBEDUC/UFMS/UEPB/UFAL, mais especificamente inserida na equipe Provas e Demonstrações Matemáticas. Essa equipe foi formada por um professor doutor, um mestrando, dois professores da Educação Básica e dois graduandos. Nossos estudos foram debruçados em leituras de pesquisas realizadas nacional e internacionalmente de autores como Hanna, Balacheff, De Villiers, Almouloud, Nasser, Aguilar Jr e Nasser, Araújo e Nóbriga, Morais Filho, entre outros. Nossas leituras foram feitas com o objetivo de provocar discussões, reflexões e proporcionar condições para o desenvolvimento de uma proposta didática aplicada na escola onde a pesquisa foi realizada. Nesse sentido, nossos encontros foram norteados pelas ideias de Ibiapina (2008) quanto ao trabalho colaborativo, uma vez que buscamos criar um ambiente onde todos compartilhassem suas experiências, saberes e ideias, ou seja, não houve hierarquia entre os membros da equipe e todos se sentiram abertos a comunicar suas sugestões, dúvidas, experiências e reflexões sobre os textos, como também a propor novas leituras para discussões gerais.

Dessa maneira, a partir desses estudos referentes às provas e demonstrações matemáticas, bem como sobre as TIC e o GeoGebra, foi elaborada, colaborativamente, uma Proposta Didática contendo 18 questões sobre os assuntos Teorema de Pitágoras, Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um triângulo e Teorema do Ângulo Externo, na qual um recorte foi analisado neste estudo. Assim, analisamos a Atividade 8 (Parte I) sobre Teorema de Pitágoras, Atividade 1 e 2 (Parte II) sobre Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um triângulo e todas as Atividades da Parte IV, as quais foram trabalhadas no aplicativo GeoGebra, com duas questões sobre Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um triângulo e três questões sobre Teorema de Pitágoras, totalizando oito atividades analisadas.

A Proposta Didática foi aplicada em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, com 20 alunos divididos em duplas e um trio, na Escola Estadual Carlota Barreira, localizada na cidade de Areia-PB. Como recorte, analisamos as escritas das redações e as resoluções de oito atividades de um trio de alunos, uma vez que foram ricos na tentativa de responder a todas as perguntas/atividades.

Ressaltamos aqui que a Escola, por meio de sua direção, nos acolheu muito bem, permitiu que nossa equipe tivesse total liberdade para trabalhar as atividades e para usar as dependências da Escola, como salas de aulas, sala de professores, laboratório de informática, data show e material xerocopiado que foi utilizado pela equipe para o desenvolvimento da pesquisa. Tanto o diretor quanto os quatro professores de Matemática da Escola estiveram presentes nos momentos iniciais da nossa pesquisa, nos quais compartilharam suas experiências, seus anseios e vivências, como também responderam questionários iniciais e finais e nos deram dicas e apoiaram quanto às atividades da Proposta Didática. Salientamos também a colaboração dos outros professores que não colocaram obstáculos nos momentos em que precisávamos de suas aulas para aplicar a Proposta Didática. Assim, a pesquisa foi realizada de forma eficaz e a contento.

Anterior à realização desta pesquisa e do estudo de caso, acreditávamos que por ser um trio formado por alunos do 2º ano do Ensino Médio, as atividades iriam ser resolvidas corretamente, uma vez que todos os assuntos presentes na nossa Proposta já tinham sido estudados por eles e não iriam ter dificuldades. Porém, nos deparamos com alunos que não compreenderam os enunciados das atividades, com dificuldades em algebrizar, sem conseguir inferir os assuntos geométricos presentes nas movimentações das construções no GeoGebra, como também sem conhecer e saber manusear este aplicativo.

Por meio das redações e das atividades resolvidas pelo trio de alunos, concluímos que eles se enquadram nos dois níveis da Geometria não axiomática, segundo Parzysz (2006): a Geometria Concreta (G0) e a Geometria Spatio-Graphique (G1), uma vez que o trio de alunos se utilizou de observações e constatações para justificar as características físicas das construções presentes nas atividades, e, para isso, a validação feita por eles foi baseada somente na percepção. Além disso, confirmamos que os mesmos se enquadram nesses dois níveis, já que a medida que foi sendo requisitados conhecimentos mais apurados desses alunos, eles tiveram dificuldades em desenvolver suas ideias, justificativas e não perceberam os conceitos e propriedades presentes na maior parte das atividades.

Nesse sentido, os dados nos mostraram que esse trio de alunos não domina a Matemática, muito menos são incentivados a utilizar as provas e demonstrações matemáticas na sala de aula da Educação Básica, confirmando as discussões feitas por Almouloud (2007), Nasser e Tinoco (2003) e Aguilar Jr e Nasser (2012). Além disso, esses dados corroboram com as ideias defendidas por Nasser e Tinoco (2003), as quais afirmam que a realidade hoje mostra que a maioria de nossos alunos não está aprendendo a pensar e raciocinar quando se estuda Matemática.

Dessa forma, concluímos também que esse trio de alunos não conseguiu utilizar a Álgebra para resolver problemas geométricos. Isso foi percebido na maioria das atividades, nas quais esses alunos não conseguiram algebrizar as áreas de um triângulo e de um quadrado para provar o Teorema de Pitágoras, o que confirma as ideias defendidas por Lorenzato (1995 apud BERTOLUCI, 2003), que uma das causas para o abandono da Geometria no Brasil é que seu ensino passou a ser algebrizado, depois do Movimento da Matemática Moderna. Isto é, estamos ensinando nossos alunos a *decorar* fórmulas para atividades mecânicas e quando encontram atividades que os motivem a refletir, justificar e provar suas ideias, nossos alunos não conseguem aplicar fórmulas ou conceitos aprendidos, pois não condizem às atividades que eles costumam responder.

Como já mencionamos anteriormente, esse trio de alunos é somente uma amostra da situação alarmante em que se encontra o ensino e aprendizagem da Matemática nas escolas brasileiras, tanto pública quanto privada, uma vez que constatamos, por meio de suas redações e atividades da Proposta, que esses alunos não estão aprendendo a pensar e raciocinar quando estudam diversos conteúdos da Matemática, em especial o Teorema de Pitágoras e o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Além disso, concluímos que o trio de alunos possui um conhecimento superficial do Teorema de Pitágoras e do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, em que esses conteúdos são memorizados e não compreendidos por eles.

Para amenizar todos esses problemas e auxiliar os alunos na construção do seu raciocínio hipotético-dedutivo, acreditamos que ensinar bem a Geometria está além de problemas e teoremas, está ligada diretamente ao contexto histórico e cultural dessa disciplina e de suas aplicações, assim como afirma Nunes (2011). Ou seja, acreditamos que quando a Geometria é trabalhada dessa forma, a mesma possibilita o desenvolvimento da visualização, do pensamento crítico, da intuição, da perspectiva, da resolução de problemas, do raciocínio dedutivo, do argumento lógico e da prova. Se conseguirmos criar esse ambiente para os nossos alunos, estaremos confirmando o que os PCN nos recomendam, uma aula de Geometria que auxilie o aluno a desenvolver a sua capacidade/habilidade de comprovação, argumentação e justificação, com vistas à formação do cidadão crítico e que este aluno perceba a Matemática como um conhecimento que o possibilitará a desenvolver seu raciocínio e sua capacidade expressiva.

Como citado anteriormente, consideramos que provas e demonstrações não são palavras sinônimas. Para isso, tomamos a *prova* em um significado mais amplo, podendo ser entendida como um *discurso para estabelecer a validade de uma afirmação*, a qual possivelmente não será aceita por matemáticos puros. Ou seja, as justificativas encontradas nas produções do trio de alunos foram aceitas dentro do contexto escolar dos mesmos, em termos do raciocínio envolvido. Já a *demonstração* ou prova formal foi considerada como um *tipo de prova aceita pela comunidade dos matemáticos*, a qual é baseada em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, devendo ser obtida por meio de um processo hipotético-dedutivo.

À vista disso, assim como afirma Grinkraut (2009), acreditamos que a construção da prova no contexto escolar deve ser diferente daquela direcionada aos matemáticos na Academia, uma vez que na escola consiste em convencer alguém, ou a si mesmo, que determinada afirmação é verdadeira. Para isso, a qualidade dos argumentos necessários para tal convencimento, como também o nível de generalidade de uma prova é variável, já que um aluno pode se convencer da validade de um teorema apenas utilizando casos particulares.

Dessa forma, por meio das redações e das atividades resolvidas na Proposta Didática, concluímos que esses alunos não conhecem e nem são incentivados a utilizarem as provas e demonstrações matemáticas em sala de aula. Além disso, as poucas provas que esses alunos realizaram nas Atividades 1 e 2 (Parte II), e 5 (Parte IV) se enquadram em três tipos de provas: *Empirismo Ingênuo*, defendido por Balacheff (2000), o qual esses alunos utilizaram casos particulares para conjecturar uma afirmação; *Justificativa Gráfica* (Nasser e Tinoco, 2003), a qual o trio de alunos construiu um triângulo com as medidas de seus ângulos internos e observou que a soma deles é igual a 180º; e *Justificativa Pragmática* (Nasser e Tinoco, 2003), a qual esses alunos, além de construir um triângulo no aplicativo GeoGebra, utilizaram um caso particular para verificar que a relação encontrada na Atividade 5 vale para qualquer triângulo retângulo.

Como já mencionamos, existem trabalhos que discorrem sobre provas e demonstrações matemáticas e que defendem que a prova é característica essencial da Matemática, a qual produz uma nova compreensão matemática, possibilitando que o aluno produza novas ligações conceituais e novos métodos para resolver determinados problemas. Dessa forma, Balacheff (2004) afirma que a educação para a prova matemática não deve iniciar enfatizando a forma e sua construção, mas que devemos enfatizar o significado da mesma como atividade matemática, ou seja, aluno e professor deve ver a prova matemática como uma atividade que está intrinsicamente relacionada à própria Matemática e que não pode ser vista separada desta área de conhecimento.

Dessa forma, se nós, professores, conseguirmos perceber a importância das provas e demonstrações matemáticas para nossos alunos e os convencer de que com elas poderemos refletir, pensar, argumentar e justificar melhor, estaremos alcançando um dos objetivos do ensino e aprendizagem da Matemática defendido pelos PCN, um ambiente em que o aluno consegue se comunicar matematicamente, conseguindo descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas. Formando assim um cidadão crítico capaz de atuar e de lutar de forma digna por seus direitos, compreendendo seus deveres, na sociedade atual.

Quanto ao trabalho no aplicativo GeoGebra, concluímos que o trio de alunos não está familiarizado com o mesmo e nunca trabalhou nem ouviu falar do mesmo, uma vez que quando fizemos a intervenção e o trabalho com esse aplicativo todos os alunos não conheciam nem tinham informação sobre o mesmo. Dessa forma, o trabalho poderia ter sido melhor se os alunos soubessem trabalhar no GeoGebra, uma vez que esses alunos não conseguiram construir um triângulo retângulo e tiveram que pedir ajuda a outro aluno que já tinha finalizado a atividade.

A função arrastar, disponível nesse aplicativo de Geometria Dinâmica, foi utilizada de forma correta e conseguiu suprir todas as necessidades dos alunos, uma vez que os mesmos conseguiram visualizar corretamente todas as movimentações ocorridas nas construções, porém não perceberam os conceitos geométricos presentes em cada movimentação. Dessa forma, suas visualizações ficaram somente na percepção e em que tipo de movimento ocorreu ao mover um determinado seletor ou construção. Assim, concluímos que o trabalho com o aplicativo GeoGebra também não favoreceu ao trio de alunos a verificação, reflexão, conjectura, justificativa e prova matemática, uma vez que seus conhecimentos estão fragmentados e mecânicos, não conseguindo desenvolver e aguçar o seu raciocínio matemático.

Durante a fase de execução da nossa pesquisa, deparamo-nos com algumas limitações. Uma delas foi a dificuldade em elaborar uma proposta didática que englobasse o processo de justificar, provar e demonstrar com significado para os alunos. Dessa forma, demandamos muito tempo e discussão entre o processo de construção da proposta didática e sua aplicação. Quando fomos conhecer o Laboratório de Informática, ficamos muito satisfeitos, pois havia vários computadores disponíveis, porém são poucos que estão funcionando corretamente. Ainda com relação ao Laboratório, tivemos alguns problemas técnicos ao tentarmos levar os materiais prontos para trabalhar no aplicativo, uma vez que a versão do aplicativo disponível nos computadores Linux era 3.0 e os materiais estavam nas versões mais recentes.

Além disso, encontramos dificuldade durante a aplicação da Proposta Didática, uma vez que tínhamos inicialmente vinte alunos presentes na turma de 2º ano do Ensino Médio, e por conta de um ponto facultativo não foi disponibilizado ônibus para os alunos, já que a grande maioria é da zona rural. Com isso, no último momento da aplicação contamos com a presença de apenas sete alunos. Outra dificuldade encontrada está relacionada aos alunos nunca terem trabalhado com o aplicativo GeoGebra, o que gerou uma dificuldade para o trio de alunos, uma vez que eles não sabiam construir um triângulo retângulo nesse aplicativo.

Portanto, chegamos ao final desse trabalho com a certeza de que é preciso desmitificar as provas e demonstrações matemáticas, para que seu trabalho seja iniciado e implementado de forma correta nas aulas de Matemática da Educação Básica, respeitando o grau de maturidade e os conhecimentos matemáticos dos alunos. Além disso, concluímos que mesmo tendo o aplicativo GeoGebra disponível nos computadores da

Escola, os professores e alunos pouco o utilizam, deixando assim o Laboratório sem ser utilizado e os alunos sem serem incentivados a trabalhar com várias representações mentais de conceitos matemáticos, o que pode vir a ocorrer com um trabalho bem planejado e executado com esse aplicativo de Geometria Dinâmica.

Dessa forma, acreditamos que para que esse trabalho seja iniciado nas escolas é preciso que os professores conheçam e estudem o que é uma prova e demonstração, seus tipos e funções, suas potencialidades e como elas podem auxiliar no raciocínio hipotético-dedutivo dos alunos, como também as possibilidades e funcionalidades do aplicativo GeoGebra para as verificações dos teoremas da Matemática, auxiliando aos alunos nesse processo de justificar, argumentar, conjecturar, provar e demonstrar. Portanto, apontamos como trabalho futuro a investigação sobre o trabalho com as provas e demonstrações matemáticas e o aplicativo GeoGebra por parte de professores da Educação Básica, proporcionando um ambiente colaborativo de estudos, criando propostas didáticas que motivem os alunos ao *fazer matemático*, e buscando desmitificar a visão de que a Matemática é somente uma forma mecânica, onde os professores ensinam as fórmulas e os alunos aplicam-nas em atividades que não os motivam a questionar, refletir e argumentar as suas respostas e ideias.

À vista de toda essa discussão, acreditamos que quando os alunos conhecem e já trabalham com o aplicativo GeoGebra, esses são levados a possuírem novas maneiras de raciocinar e operar e até mesmo de conceber a Geometria, ao utilizarem a função arrastar desse aplicativo de Geometria Dinâmica. Acreditamos, assim como afirma Janzen (2011), que nesses ambientes os alunos têm múltiplas construções possíveis para um mesmo objeto geométrico e isso os possibilita a compreender que a partir de certos fatos declarados (hipóteses), outros destes decorrem – os fatos estáveis implícitos (a tese do teorema), então passíveis de explicação. Tendo compreensão disso, os alunos já estarão no caminho para a construção de uma demonstração.

Assim, quando trabalhamos com as provas e demonstrações utilizando o GeoGebra, estas aparecem como alternativa para o desenvolvimento de conjecturas, argumentações, construção do raciocínio hipotético-dedutivo e articulações entre os níveis de raciocínio geométrico. Ou seja, a utilização do aplicativo GeoGebra exerce uma especial importância na questão da visualização, uma vez que a visualização e a identificação do objeto geométrico são caracterizados como um passo preparatório para o entendimento da formalização do conceito, isto é, para o processo de uma prova.

Portanto, acreditamos que, assim como os PCN recomendam, a capacidade ou habilidade de comprovação, argumentação e justificação é bastante importante para a formação do cidadão crítico, e isso possibilita, na Matemática, um desenvolvimento de seu raciocínio e de sua capacidade expressiva. Dessa forma, acreditamos que se as provas e demonstrações matemáticas forem abordadas na sala de aula da Educação Básica e, quando abordadas, que estas tenham significado tanto para o professor quanto para o aluno, então teremos uma melhor e mais clara compreensão da Matemática e do pensamento matemático.

REFERÊNCIAS

AGUILAR JUNIOR, C. A. **Postura de Docentes quanto aos tipos de Argumentação e Prova Matemática apresentados por alunos do Ensino Fundamental.** 144f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.

AGUILAR JR, C. A.; NASSER, L. Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental. In: **Vidya**, v. 32, n. 2, p. 133-147, jul./dez. 2012 – Santa Maria. Disponível em <http://sites.unifra.br/Portals/35/2012/09.pdf>. Acesso em 20 jul. 2014.

ALMOULOUD, S. A. Prova e demonstração em Matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: **Portal do GT 19 da ANPEd** (Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação). 30ª reunião. Caxambú – MG. 2007. p. 1-18. Disponível em <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf>. Acesso em 08 jul. 2014.

ALMOULOUD, S. A.; REGNIER, J. C.; FUSCO, C. A. S. Resolver problemas envolvendo prova e demonstração: uma dificuldade para professores de ensino básico. In: **Anais ICMES 2009**, Curitiba, 9-11 Dezembro, 2009. Disponível em < https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00506497/document >. Acesso em 15 abr 2015.

ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. In: **Educação matemática em revista**, Recife, ano 11, n. 17, p. 61-70, 2005. Disponível em < http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_27/tendencias.pdf > Acesso em 20 abr 2015.

ARAÚJO, L.C.L.; NÓBRIGA, J.C.C. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. São Paulo: Exato, 2010.

AZEVEDO, C. E. F.; OLIVEIRA, L. G.; GONZALEZ, L. R. K.; ABDALLA, M. M. A Estratégia de Triangulação: Objetivos, Possibilidades, Limitações e Proximidades com o Pragmatismo. In: **Anais do IV Encontro de Ensino e Pesquisa em Administração e Contabilidade**, Brasília/ DF, 3 a 5 de novembro de 2013. p. 1-16. Disponível em < http://www.anpad.org.br/diversos/trabalhos/EnEPQ/enepq_2013/2013_EnEPQ5.pdf >. Acesso em 10 set 2015.

BALACHEFF, N**. Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.

BALACHEFF, N. **A epistemologia do pesquisador:** a prova como impasse na pesquisa educacional. Tradução Chang Kuo Rodrigues. 2004. Disponível em <www.pucsp.br/pensamentomatematico/resumo_balacheff_chang.doc>. Acesso em 16 jan. 2014.

Bennett, D. (2004). **Exploring Geometry with The Geometer's Sketchpad**. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

BERTOLUCI, E. A. **ENSINANDO E APRENDENDO GEOMETRIA:** uma experiência com o software Cabri-Géomètre II na 5ª série do Ensino Fundamental. 233f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2003.

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução a teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio** – Vol. 2 - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília, MEC, 2006. 135p.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ensino Médio – Parte 1 – Bases Legais, Brasília, MEC, 2000. 109p.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ensino Médio – Parte 3 – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília, MEC, 2000. 58p.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental – Matemática, Brasília, MEC, 1998. 148p.

_______. Câmara dos Deputados. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**: nº 9.394 (1996). 6ª Ed. Brasília: 2011.

_______. Constituição. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF: Senado, 1988.

CARVALHO, J. P. Avaliação e perspectivas na área de ensino de Matemática no Brasil. **Em Aberto**, Brasília, ano 14, n. 62, abr./jun. 1994.

CASTRO, C. M. O secundário: esquecido em um desvão do ensino? Brasília: **INEP**, 1997. 25 p. (Série Documental. Textos para discussão). Disponível em <www.fisica.ufmg.br/~menfis/programa/serdoc02.doc>. Acesso em 15 jul 2014.
CAVALCANTI; V. S. **Composição de Paródias**: Um Recurso Didático Para Compreensão Sobre Conceitos de Circunferência. 2011. 163f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2011.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio (2004). In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica: 2006.

DIAS, M. S. S. **Um Estudo da Demonstração no Contexto da Licenciatura em Matemática**: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico. 2009. 214f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

DUARTE, T. A possibilidade da investigação a 3: reflexões sobre triangulação (metodológica). In: **Cies e-workingpaper.** Centro de Investigação e Estudos de

Sociologia. 2009. Disponível em <http:// www.cies.iscte.pt/destaques/documents/CIES-WP60_Duarte_003.pdf>. Acesso em 08 set 2015.

FERREIRA FILHO, J. L. **Um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o Teorema de Pitágoras**. 189f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FIORENTINI, D. Capítulo 2. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica: 2006.

FUSCO, C. A. S.; SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. A. O comportamento de um professor do ensino básico frente a uma situação de demonstração em Matemática. In: **Anais do IX ENEM** (Encontro Nacional de Educação Matemática). Belo Horizonte, 2007. Disponível em <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC02139429842T.rtf>. Acesso em 09 dez. 2013.

GARBI, G. G. C. Q. D. **Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, p. 1-13, Belo Horizonte, nov. 1996. Disponível em <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/EDUCACAO_E_TECNOLOGIA/GEODINAMICA.PDF>. Acesso em 20 jul. 2014.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: **Anais do IV Congresso RIBIE**. Brasília, 1998. Disponível em <http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/aprendizagem_mat.pdf>. Acesso em 20 jul. 2014.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 277f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRINKRAUT, M. L. **Formação de professores envolvendo a Prova Matemática:** Um olhar sobre o Desenvolvimento Profissional. 349f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

GUEDES, M. A. C. **Monsenhor Ruy Vieira -60 anos de sacerdócio e cidadania**. João Pessoa: Imagem e ideias, 2005.

HANNA, G. Some Pedagogical Aspects of Proof. In: **Interchange.** The Ontario Institute for Studies in Education, Ontario, Canadá. v. 21, n.1, p. 6-13, Mar. 1990.

_________. Challenges to the impact of proof. In: **For the learning of mathematics**, 1995, n. 15. P. 42-49.

IBIAPINA, I. M. L. M. **Pesquisa colaborativa:** investigação, formação e produção de conhecimentos. 1ª Ed. Brasília: Líber Livro Editora, 2008.

JAHN, A. P.; HEALY, L.; PITTA COELHO, S. Concepções de professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. In: **Portal do GT 19 da ANPEd** (Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação). 30ª reunião. Caxambú – MG. 2007. p. 1-21. Disponível em <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/concepcoes.pdf>. Acesso em 24 jan. 2014.

JANZEN, E. A. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de Geometria Dinâmica.** 194f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

KOHN, K.; MORAES, C. H. O impacto das novas tecnologias na sociedade: conceitos e características da Sociedade da Informação e da Sociedade Digital. In: **Anais do XXX Congresso Brasileiro de Ciências da Computação**. Santos. 2007. p. 1-13. Disponível em <http://www.intercom.org.br/papers/nacionais/2007/resumos/R1533-1.pdf>. Acesso em 17 jul. 2014.

KRAWCZYK, N. O ensino médio no Brasil. São Paulo: Ação Educativa, 2008. (**Em questão, 6**). 48p.

LÉVY, P. **Cibercultura**. Tradução Carlos Irineu da Costa. 3ª Ed. São Paulo: Editora 34, 1999.

LINS, A. F. **Towards an Anti-Essentialist View of Technology in Mathematics Education**. Tese (Doutorado (PhD)), University of Bristol, 2003.

LORENZATO, S. (2006). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: E P U, 1986.

LUIS, S. R. **Concepção de uma sequência de ensino para o estudo da semelhança:** do empírico ao dedutivo. 289f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

MARCONI, A, M, & LAKATOS, E, M. **Fundamentos de metodologia científica**. 6ª ed. 4ª reimpressão. São Paulo: Atlas, 2008.

MIORIM, M. A; MIGUEL, A; FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. In: **Revista Zetetiké**. Ano I – nº 1/1993. P. 19-40. Disponíveis em: <http://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2612> (Primeira parte: 19-27) e <http://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2625> (Segunda parte: 28-40). Acesso em 10 jul. 2014.

MORAIS FILHO, D. C. **Um Convite à Matemática**. 3ª Ed. Campina Grande: Fábrica de Ensino, 2010.

NASCIMENTO, E. G. A. Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de Geometria: reflexão da prática na escola. In: **Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra**. Uruguay, 2012. pp. 125-132.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. **Argumentação e provas no ensino de Matemática**. 2ª Ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

NUNES, D. L. A. **O significado matemática na Geometria do 7º ano com recurso ao GeoGebra:** uma perspectiva semiótica. Faro, 2011. Dissertação (Mestrado em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências) – Universidade do Algarve.

PARZYSZ, B. La géometrie dans l´enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s´agit-il ? In: **Quaderni di Ricerca in Didattica**. n. 17. 2006. Italia: Universidade de Palermo.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. In: **Revista Zetetiké**. Ano I – no 1/1993. pp. 7-18. Disponível em: <http://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2611/2353>. Acesso em: 10 jul 2014.

PEIXOTO, J.; CARVALHO, R. M. A. Os desafios de um trabalho colaborativo. In: **Revista Educativa**, Goiânia, v. 10, n. 2, p. 191-210, jul./dez. 2007.

PERTILE, D.; PIEROZAN, A. L.; LIEBAN, D. E. Resolvendo problemas geométricos com o software GeoGebra, valorizando a interatividade no processo de ensino-aprendizagem. In: **Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra**. Uruguay, 2012. pp. 476-484.

PETLA, R. J. **GeoGebra – possibilidades para o ensino de Matemática**. 45f. Unidade Didática (Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE) – Universidade Federal do Paraná, União da Vitória, 2008.

PIRES, C. M. C. Educação Matemática e sua Influência no Processo de Organização e Desenvolvimento Curricular no Brasil. In: **Bolema**, Rio Claro (SP), ano 21, n. 29, 2008, pp. 13 a 42.

PONTE, J. P. Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios? In: **Revista Iberoamericana de Educación**, n. 024, set./dez. 2000, pp. 63-90. Madrid, Espanha.

REIS, H.G.P.; LINS, A.F. O uso do GeoGebra no auxílio à aprendizagem dos conceitos de Grandezas e Medidas Geométricas. In: **Anais do VI EPEBEM** (Encontro Paraibano de Educação Matemática), Monteiro, 2010, pp. 1-9.

RIBEIRO, D. A. **Monsenhor Ruy Vieira: a saga de um grande vulto**. João Pessoa: UNIPÊ, 1999.

SANTOS, E. B**. Importância da educação ambiental e PCN`s no processo de formação educacional dos alunos das séries fundamentais da Escola Estadual de**

Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira- Areia-PB. Monografia. Universidade Estadual da Paraíba. Guarabira, 2010.

SIQUEIRA, A. C. T. **Dificuldade com a interpretação de texto pode atrapalhar o desempenho dos estudantes**. ECaderno.com. Pré Universitário. Juiz de Fora, 13 de agosto de 2013. Disponível em < http://www.ecaderno.com/pre-universitario/dificuldade-com-a-interpretacao-de-texto-pode-atrapalhar-o-desempenho-dos-estudantes >. Acesso em 10 nov 2015.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa**: estudando como as coisas funcionam. Porto Alegre: Penso, 2011.

VILLIERS, M. D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. In: **Revista Educação e Matemática**. nº 62. Março/Abril de 2001. p. 31-36. Tradução de Eduardo Veloso. Disponível em < http://ml.apm.pt/apm/revista/educ63/Para-este-numero.pdf>. Acesso em 10 de mar 2015.

YIN, R. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 3. ed. Tradução de Daniel Grassi. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ZULATTO, R.B.A.; PENTEADO, M.G. Professores de Matemática que utilizam tecnologia informática em sua atividade docente. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n° 49, pp. 31-44, 2006.

APÊNDICES

APÊNDICE A – FOLHA PARA REDAÇÃO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÃO

ALUNO(A):____

DATA: ______/________/2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

APÊNDICE B – REDAÇÃO ALUNO A

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÂO

ALUNO(A): ______________ **- SÉRIE:** 2° ano B

DATA: 15 / de junho /2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Cabe a qualquer ver humano se envolver na matemática, pois até a pessoa mais humilde precisa de um cálculo ou outro nas diversas situações cotidianos. Quando penso no Tema Provas e demonstrações matemáticas lembro de dor de cabeça, impaciência, além, da inteligência que e essencial no momento de resolver uma prova matemático. Uma demonstração matemática não está presente apenas na salo de aula mas a partir que o ser humano cresce a matemática, ou seja, dinheiro, poupança, economia crescem em sua vida.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

APÊNDICE C – REDAÇÃO ALUNO B

uepb Universidade ESTADUAL DA PARAÍBA

OBEDUC

TRABALHO COLABORATIVO COM PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA EM ESCOLAS PÚBLICAS DAS REGIÕES NORDESTE E CENTRO - OESTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÂO

ALUNO(A):__ ________ **- SÉRIE:** 2º "B"

DATA: 15 / 06 /2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

no minha opinião devem ser provas matematicas
muito dificeis, que servem como Demostração
para analizar ou Observa o grau De experiencia
de alguma pessoa. que podem ser expostas para
que pessoas utilizem como experiencia ~~propria~~.
de ensino.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

APÊNDICE D – REDAÇÃO ALUNO C

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA
PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL
EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÂO

ALUNO(A): ______________________ **- SÉRIE:** 2º Ano "B"

DATA: 15 / 06 /2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

As provas de matemática são boas só algumas questões que complicam muito, assim, não são as questões complicam é por que muito dos alunos não leem para compreender melhor a pergunta.

Com as demostrações nós alunos aprendemos mais e e quando for fazer uma prova fica mais fácil.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

APÊNDICE E – PROPOSTA DIDÁTICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

PROPOSTA DIDÁTICA

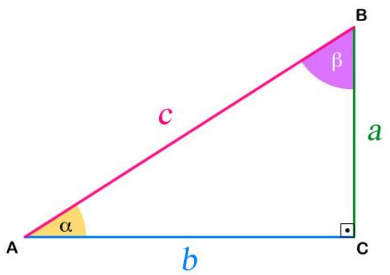
DESAFIANDO NOSSO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Dupla: ____ **Série:** ________

____ **Data:** ____/____/____

PARTE I

(1) (nossa autoria) Observem o triângulo ABC retângulo em C. Com base em suas observações, determinem e justifiquem:



a) Como identificar um triângulo retângulo?

b) os catetos:

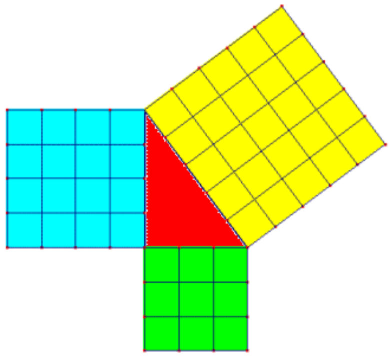
c) a hipotenusa:

d) o ângulo reto (90°)

e) os ângulos agudos

(2) (nossa autoria) De acordo com Eves (2004) e Boyer (2010), os povos antigos, acerca de 3000 anos, como egípcios e babilônicos, sabiam que o triângulo de lados 3, 4 e 5 era retângulo, mas de acordo com Lima (2006), esses povos não tinham a necessidade de demonstrar esta afirmação.

Na Figura abaixo temos um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento:



Foram construídos quadrados com os lados desse triângulo. Esses quadrados foram divididos em quadrados menores, como vocês podem observar na Figura. Respondam:

a) Quantos quadradinhos tem o quadrado maior?

b) Qual é o número de quadradinhos do quadrado intermediário?

c) Qual a quantidade de quadradinhos em que o quadrado menor foi dividido?

d) De acordo com as respostas dos itens a, b e c, vocês conseguem observar alguma relação entre o quadrado maior e os outros menores?

(3) (extraído de Bastian, 2000) No quadro abaixo, a medida de cada cateto e da hipotenusa são lados dos quadrados A, B e C respectivamente. Com base nesta informação, calculem as áreas A, B e C:

			Áreas dos Quadrados		
Cateto a	**Cateto b**	**Hipotenusa c**	**Área A**	**Área B**	**Área C**
3	**4**	**5**			
6	**8**	**10**			
5	**12**	**13**			

9	**12**	**15**			

a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

b) Será que a conclusão descrita acima, no item (a), vale para qualquer triângulo? Experimentem usá-la em um triângulo de lados 4, 7 e 8. O que vocês observaram?

(4) (extraído de Bastian, 2000)

a) Desenhem e recortem um triângulo retângulo qualquer. Agora desenhem e recortem mais sete triângulos idênticos ao primeiro, identificando seus referidos lados como a, b e c.

b) Agora desenhem e recortem um:

- ✓ Quadrado de tamanho igual ao lado *a* (pinte de vermelho)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *b* (pinte de amarelo)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *c* (pinte de verde)

c) como se fosse um quebra cabeças montem:

- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e o quadrado vermelho
- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e os quadrados amarelo e verde
- ✓ Se retirarmos das duas figuras montadas os quatro triângulos, o que podemos dizer sobre as áreas restantes de cada figura?
- ✓ Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?

(5) (extraído de Bastian, 2000)

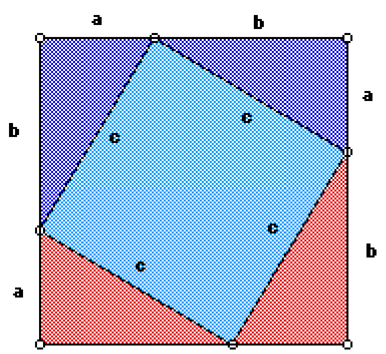


Figura 1

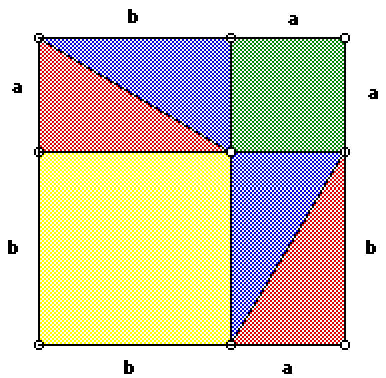


Figura 2

a) Descrevam algebricamente a área do quadradão (Figura 1) em função do quadrado contido nele e dos quatros triângulos retângulos.

b) Façam o mesmo na Figura 2.

c) Que relação existe entre as áreas dos quadradões das Figuras 1 e 2? Deduzam a relação entre a, b e c.

(6) (nossa autoria) Um teorema é uma afirmação matemática que deve ser rigorosamente demonstrada. Sendo assim, para que o Teorema de Pitágoras seja válido é necessário demonstrá-lo. Podemos escrever o Teorema de Pitágoras na forma implicativa: ***Se o triângulo é retângulo então a área do quadrado que tem como lado a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos catetos são os lados.***

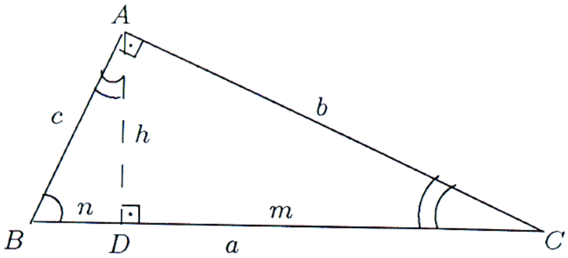
No Teorema escrito na forma implicativa, identifiquem:

a) Hipótese

b) Tese

(7) (adaptado de Lima, 2006)

No triângulo ABC, retângulo em A, a altura AD (perpendicular a BC) relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos (BÂD $=\hat{C}$, complemento de $\hat{B}$, CÂD $=\hat{B}$, complemento de $\hat{C}$). Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total:

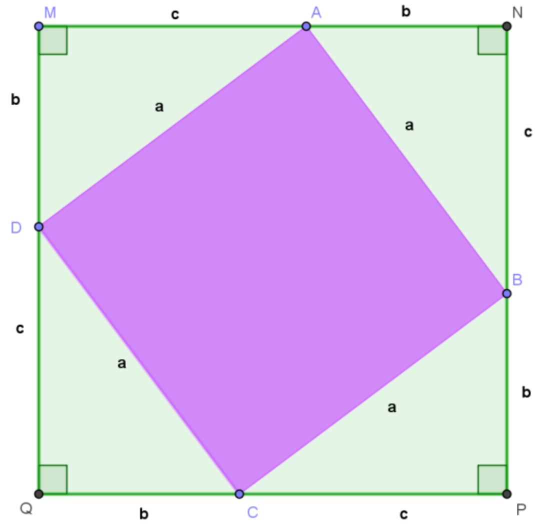


$$\frac{c}{a}=\frac{n}{c}\ e\ \frac{b}{a}=\frac{m}{b}$$

Usando as informações acima, tentem demonstrar o Teorema de Pitágoras.

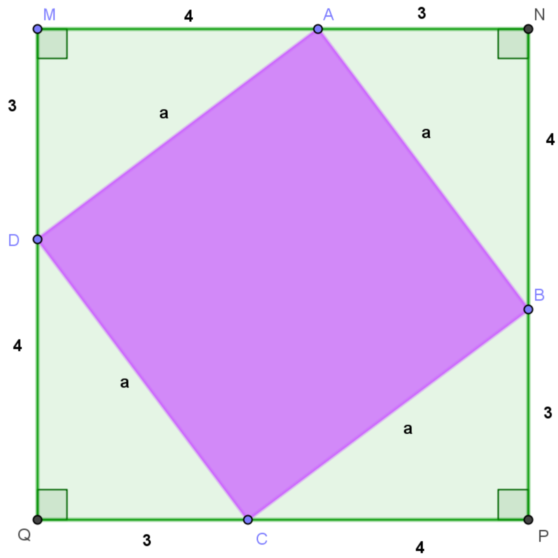
(8) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem.



b) Calcule o valor de a, da figura acima, em função de b e c utilizando o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos.

c) Observem o desenho abaixo e calculem o valor de a em função de 3 e 4 usando apenas o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos:



d) Comparem com o resultado obtido na letra b. O que vocês observam?

e) Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c e respondam:

- ✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)?

- ✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

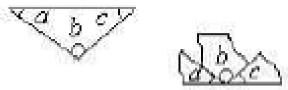
PARTE II

(1) (adaptado da questão G1 do AprovaME) Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

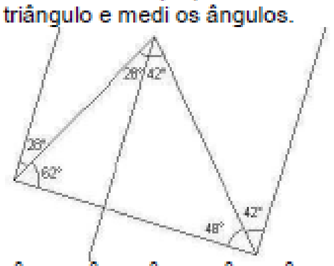
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

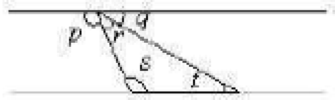
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90^\circ - 28^\circ) + 28^\circ + 42^\circ + (90^\circ - 42^\circ) = 180^\circ$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

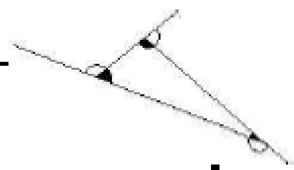
Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações — Justificativa
$p = s$.......................... Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$........................... Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180^\circ$.......... Ângulos numa linha reta.
Logo $s + t + r = 180^\circ$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu



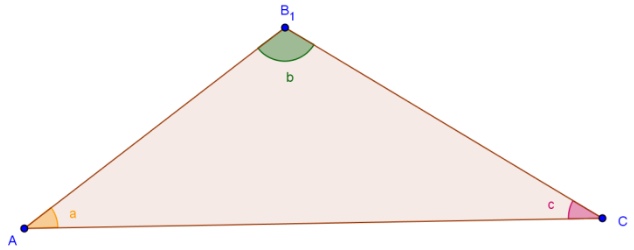
Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

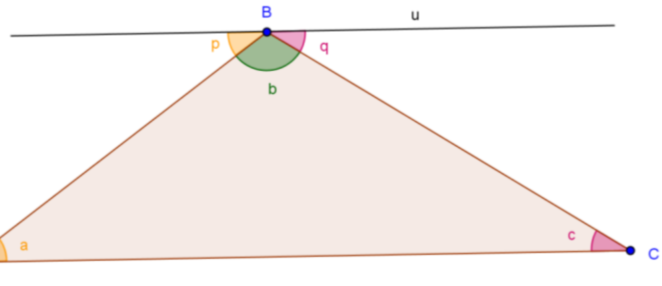
a) Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha.

b) Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifiquem sua escolha.

(2) (nossa autoria) Considerem um triângulo ABC, no qual estão assinalados os ângulos internos:



Traçando a reta *u*, paralela ao lado AC e que passa pelo vértice B:



Sabemos que p = a e q = c.

Como p + b + q = 180º, concluímos que a + b + c = 180º.

Observando essa demonstração, respondam o que se pede:

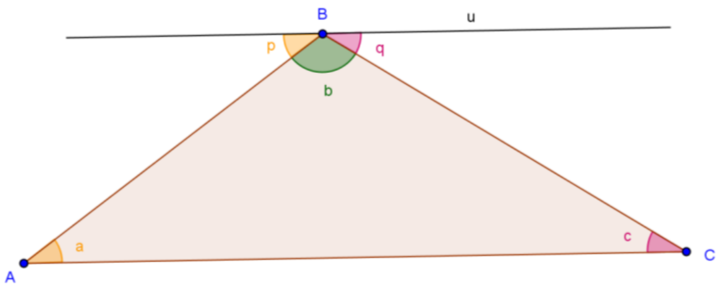
a) Por que podemos afirmar que p = a e q = c?

b) O que podemos afirmar com essa conclusão da demonstração?

c) Essa afirmação vale para qualquer triângulo? Justifiquem.

d) Tente demonstrar essa afirmação de outra forma.

(3) (nossa autoria) Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que “em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°”:



a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$*?*

b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

( ) $p + b + q = 180°$

( ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

( ) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

( ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

( ) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

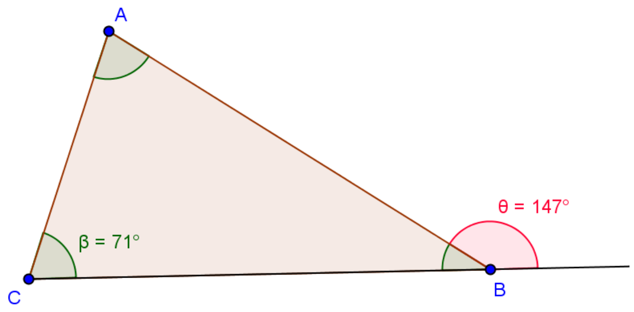
d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

PARTE III

(1) (nossa autoria) Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

a) Na Geometria Euclidiana usamos com certa frequência o teorema do ângulo externo para cálculos de ângulos. Descrevam o que vocês conhecem sobre este teorema.

b) Dado o triângulo ABC, determinem as medidas dos ângulos internos que faltam.

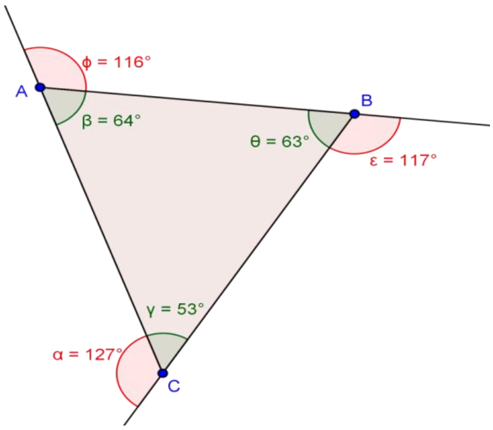


c) Observem que $\theta > B\hat{A}C$ assim como também $\theta > A\hat{C}B$. Será que esta relação vale para todo triângulo? Justifiquem.

d) Se tomarmos ABC como sendo um triângulo retângulo, essas relações ainda valeriam? Justifiquem.

(2) (nossa autoria) Nas alternativas I, II, III, marquem qual delas vocês descreveriam como demonstração do teorema do ângulo externo, descrito na Questão 1. Ao final, justifiquem sua escolha.

I ( ) Dado um triângulo qualquer ABC e sejam $\beta = 64^o$, $\theta = 63^o$ e $Y = 53^o$,as medidas dos ângulos. Como descrito na figura abaixo:



Observem:

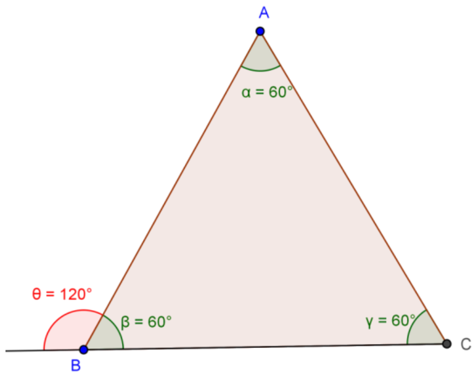
Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{BC}$ formaremos o ângulo α, onde $\alpha = 127^o$.

Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{CA}$ formaremos o ângulo Φ, onde $\Phi = 116^o$.

Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{AB}$ formaremos o ângulo ε, onde $\varepsilon = 117^o$.

Note que, $\alpha > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, assim como $\beta > A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, assim como também $\theta > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, como queríamos demonstrar.

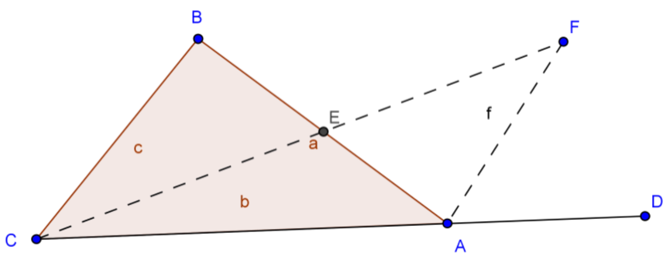
II ( ) Tomemos o triângulo equilátero ABC descrito na figura abaixo:



Como se trata de um triângulo equilátero, sabemos que o ângulo $B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C = 60°$*. Ao prologarmos a semirreta* $\overrightarrow{BC}$ *formaremos o ângulo* θ*, que mede 120º, além disso, note que,* $\theta = 120° > 60° = B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C$*. Logo fica demonstrado o teorema.*

III ( ) Seja ABC um triângulo. Na semirreta $\overrightarrow{CA}$*, marque um ponto D tal que o ponto A esteja entre os pontos C e D, como indicado na figura abaixo:*

Queremos provar que o ângulo $B\hat{A}D > \hat{B}$ *e* $B\hat{A}D > \hat{C}$*. Vamos primeiro provar que o ângulo* $B\hat{A}D > \hat{B}$*. Para isto consideremos o ponto médio E do segmento* $\overline{AB}$*.*



Na semirreta $\overrightarrow{CE}$ *marque um ponto F tal que, o segmento* $\overline{CE} = \overline{EF}$*. Trace* $\overline{AF}$*. Compare os triângulos CEB e FAE. Como* $\overline{BE} = \overline{AE}$ *(já que E é ponto médio de AB),* $\overline{CE} = \overline{EF}$ *(por construção) e* $B\hat{E}C = A\hat{E}F$ *(por serem opostos pelo vértice), segue-se que o ângulo* $B\hat{E}C = A\hat{E}F$*. Consequentemente* $\hat{B} = E\hat{A}F$*, como a semirreta* $\overrightarrow{AF}$ *divide o ângulo* $B\hat{A}D$*, então* $E\hat{A}F < B\hat{A}D$*, portanto* $\hat{B} < B\hat{A}D$*. Analogamente provamos que* $B\hat{A}D > C$*. Assim fica demonstrado o teorema.*

Justifiquem a escolha:

Parte IV

(1) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo “material-27567” e observem atentamente a figura. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Arrastem o seletor para a direita. O que aconteceu com a figura? Quais os movimentos observados pelas três divisões do triângulo?

b) Arrastem o próximo seletor para baixo. O que aconteceu com a figura? Qual o movimento realizado pelas três divisões do triângulo? O que vocês observaram após essa movimentação?

c) Marquem os três quadrados referentes a “comparar ângulos”. O que vocês observaram? Como podem ser chamados os ângulos azuis, vermelhos e verdes? Por quê?

d) Qual propriedade está ligada a essa verificação? Como vocês encontraram essa propriedade e por quê?

(2) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo “material-239787” e observem a figura.

Há uma importante relação relacionada aos triângulos e seus ângulos internos. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Movimentem o vértice C do triângulo. O que acontece com o triângulo? E com seus ângulos internos?

b) Ao movimentar esse vértice C, qual a relação entre os triângulos encontrados e seus ângulos internos?

c) Agora movimentem o vértice B. O que acontece? Continua valendo essa relação para outros triângulos encontrados e seus ângulos internos?

d) Se movimentarmos o vértice A. O que acontece? Essa relação continua sendo válida?

e) Desse modo, o que podemos concluir com essa verificação? Justifiquem.

(3) (extraído do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-145257", observem a figura e respondam o que se pede.

(4) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-57095" e observem a figura. Sigam as instruções e respondam o que se pede:

a) Movimentem os seletores dos ângulos α e β. O que aconteceu ao movimentar o ângulo α? E o ângulo β? As duas figuras foram movimentadas para onde? Como elas ficaram nessas movimentações?

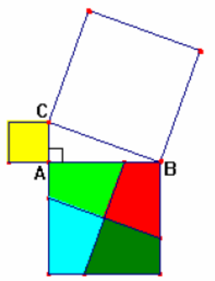
b) Surgiu um novo seletor. Movimentem o ângulo γ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

c) Surgiu um novo seletor. Movimente o ângulo δ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

d) Ao fazer todos esses movimentos, o que vocês observaram? A que conclusões vocês chegaram?

e) Existe alguma relação entre esses quadrados e os lados do triângulo retângulo? Se sim, qual?

(5) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)



Abram o arquivo *Montagem – Perigal* e observem, antes de fazer qualquer movimento, a imagem atenta e detalhadamente.

Na figura temos 5 peças coloridas, 4 dentro do quadrado médio e uma no quadrado menor. Arrastem cada uma das peças, encaixando-as dentro do quadrado maior.

Façam o que se pede:

a) O que vocês observaram? Relacionem as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que vocês concluíram?

b) Representem a medida da hipotenusa do triângulo retângulo por a, e por b e c as medidas de cada cateto. Relacionem as três medidas.

c) A verificação feita com esse arquivo é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

d) No GeoGebra, construam um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro", meçam os lados de seu triângulo e com uma calculadora verifiquem a relação percebida anteriormente. O que vocês concluíram?

e) A verificação feita no item d garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!