UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GILBERTO BESERRA DA SILVA FILHO

GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM CONCRETA

CAMPINA GRANDE - PB

2015

GILBERTO BESERRA DA SILVA FILHO

GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM CONCRETA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), em cumprimento às exigências para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida

CAMPINA GRANDE – PB

2015

S586g Silva Filho, Gilberto Beserra da.
Geometria espacial no ensino médio [manuscrito] : uma abordagem completa / Gilberto Beserra da Silva Filho. - 2015.
175 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.
"Orientação: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, Departamento de Matemática".

1. Ensino de geometria. 2. Geometria espacial. 3. Modelo Van Hiele. 4. Interação social. I. Título.

21. ed. CDD 516.06

GILBERTO BESERRA DA SILVA FILHO

GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM CONCRETA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), em cumprimento às exigências para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

APROVADO EM 04/12/2015

Banca Examinadora

Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida (UEPB)

John A. Fossa

Prof. Dr. John Andrew Fossa (UEPB)

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos (UFPE)

"Eu tentei 99 vezes e falhei, mas na centésima tentativa eu consegui, nunca desista de seus objetivos mesmo que esses pareçam impossíveis, a próxima tentativa pode ser a vitoriosa".

Albert Einstein

Este trabalho eu dedico a todos que acreditaram e confiaram em mim, sempre me estimulando em busca de novos horizontes e conquistas, especialmente a minha esposa Auricélia e aos meus filhos Giovanna e Álvaro.

AGRADECIMENTOS

O desejo de conquistar novos horizontes foram as fortalezas, diante das dificuldades que encontramos, para buscar essa conquista acadêmica. Após pouco mais de dois anos de ações, planejamentos, oportunidades e conhecimentos que me deixou gratificado. Dessa forma, seria impossível caminhar sozinho, por isso venho agradecer a todos que contribuíram e estiveram sempre ao meu lado. Uma gratidão imensa àquele que é detentor de toda sabedoria e que nos concede todas as conquistas – o nosso bondoso DEUS. A ele agradeço toda sustentação e orientação para um caminhar repleto de realizações.

Meus agradecimentos a todos aqueles que me auxiliaram durante essa caminhada. Meus pais, que sempre foram a base de tudo e para tudo, dando sempre oportunidades e exigindo desempenho para que pudesse desempenhar meu papel de forma adequada. Meus irmãos, meus sobrinhos e toda minha família, que sempre esteve, mesmo ausente, ao meu lado, torcendo, apoiando, pedindo as graças de Deus para que iluminassem minha mente para desenvolver um bom trabalho. Agradeço de forma especial a minha esposa Auricélia, que sempre deu força, incentivo e foi muito compreensiva nos momentos de dedicação ao curso, ficando ausente em alguns momentos importantes, e aos meus maravilhados filhos, Giovanna e Álvaro, que são minha inspiração e a razão pela qual anseio crescimento profissional e intelectual, para, da mesma forma, conduzi-los na vida acadêmica, se assim meu bom Deus permitir.

Minha imensa gratidão à Universidade Estadual da Paraíba e aos Professores do Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, que acreditaram no meu potencial e, de forma muito significativa contribuíram e foram responsáveis pela conquista desse título. Em especial, o ilustre professor José Joelson Pimentel, meu competente orientador, pelos seus ensinamentos, paciência, compreensão, responsabilidade e dedicação apresentados no decorrer das orientações para realização desse trabalho, acima de tudo por ter confiado e aceitado como orientando, e por fim, por todos os trabalhos desenvolvidos juntos, proporcionando a troca de conhecimentos e aprendizagem. Agradeço também aos também ilustres professores que participaram da banca de qualificação, professores John Andrew Fossa e Marcelo Câmara dos Santos, que apresentaram grandes contribuições para o aperfeiçoamento e conclusão desse trabalho. Muito obrigado pela oportunidade e pelos ensinamentos.

Da mesma forma agradeço à escola e aos alunos que participaram da pesquisa, contribuindo diretamente, sem eles não teria êxito.

Agradeço aos colegas de trabalho da EREM Aires Gama que sempre contribuíram, apoiaram e estiveram ao meu lado, através de pequenos gestos demonstram seus valores, que para mim foi importantíssimo durante toda caminhada, em especial à professora Goreth, que ao longo do curso produzimos diversos trabalhos que foram apresentados em congressos. Não posso esquecer os colegas queridos do mestrado que conquistaram meu carinho, admiração e reconhecimento com suas atitudes, gestos e palavras. Em especial, Edivam e André, que se tornaram queridos amigos. Tivemos a oportunidade de produzir trabalhos acadêmicos e dividir experiências exitosas durante esses dois anos de convivência, dessa forma fomos tratados pelos demais colegas como “os três mosqueteiros”. Obrigado por tudo!

Enfim, externo todos os meus sentimentos de gratidão às pessoas que foram colocadas, por Deus, no meu caminho, dando oportunidade de conhecê-las e dividir momentos importantes em nossas vidas. Todos ficarão gravados na mente pelo muito que acrescentaram em mais uma conquista pessoal e profissional e que Deus me conceda discernimento e oportunidade de dividir meus conhecimentos.

RESUMO

SILVAFILHO, Gilberto Beserra da. Geometria espacial no Ensino Médio: uma abordagem concreta. 2015. 175f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB. Campina Grande. 2015.

Nosso trabalho de pesquisa aborda o campo da geometria, com o objetivo de investigar como uma sequência de atividades pode contribuir para o avanço de nível segundo o modelo van Hiele partindo de objetos concretos do cotidiano e de materiais manipuláveis relacionando-os com os conceitos e propriedades de sólidos geométricos. Para tanto, realizamos uma pesquisa de caráter qualitativo, numa turma de 3º Ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Flores – PE. Utilizamos como método, a realização de uma sequência de atividades, utilizando materiais manipuláveis, o modelo van Hiele e aspectos da interação social, tendo em vista a relevância do ensino e aprendizagem da geometria. Observamos que, entre as principais repercussões desse trabalho, destacamos as relações interpessoais, o trabalho em grupo e o avanço sobre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Essa pesquisa foi desenvolvida em cinco etapas, as quatro primeiras com a turma trabalhando em equipe na realização das atividades propostas, e a última individualmente, na resolução de um questionário para verificarmos se houve avanço de níveis, baseado na teoria de van Hiele. Os dados foram recolhidos por meio da observação de áudios, filmagens, registros da comunicação oral e escrita. Baseamo-nos nos estudos de van Hiele, sobretudo nas fases de aprendizagem, que nos nortearam na elaboração da sequência de atividades. Preocupados com uma metodologia adequada para contribuir de forma mais eficaz para compreensão do problema, fizemos uma análise de algumas ferramentas de ensino, entre elas o Laboratório de Ensino de Geometria e duas tendências metodológicas de ensino de Matemática, dando ênfase àquelas que achamos mais adequadas para utilizar no ensino de geometria espacial. Nossa proposta foi oferecer respostas objetivas para soluções pertinentes na nossa pesquisa e demonstrar que é possível envolver os alunos durante o processo, de forma prazerosa e que eles possam construir seu conhecimento com significado. Os resultados demonstram uma certa fragilidade que há por parte do aluno quanto ao conhecimento de geometria. Por outro lado, evidencia a potencialidade que há na realização do trabalho a partir da interação social, sendo assim concluímos que a sequência de atividades, atrelada à forma como foi vivenciada pelos alunos, contribui de forma significativa para que haja o avanço no desenvolvimento do pensamento geométrico baseado no modelo van Hiele.

Palavras-chave: Ensino de geometria. Ensino Médio. Modelo Van Hiele. Interação social.

ABSTRACT

SILVAFILHO, Gilberto Beserra da. Spatial Geometry in high-school: a concrete approach. 2015. 175f. Master’s Thesis – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB. Campina Grande. 2015.

Our research work covers the field of geometry in order to investigate how a sequence of activities can contribute to the level advancements under the Van Hiele’s model, starting from concrete everyday life objects and manipulable materials, relating them with the concepts and properties of geometric solids. To this end, we conducted a qualitative research in a senior year of a state High School in the city of *Flores - PE*. As our method, a series of activities were apllied, using manipulable materials, the van Hiele model and aspects of the social interaction, in view of the relevance of teaching and learning geometry. It was observed that, among the main implications of this research, the interpersonal relationships, group work and progress on development levels of geometric thinking can be emphasized. This research was conducted in five stages; the first four with the class working in groups, carrying out the presented activities; and the last one was carried out individually, with the students solving a questionnaire to verify whether there has been level progress, based on the van Hiele theory. The data were acquired through analysis of recorded audios, films, oral and written communication records. We rely on van Hiele’s studies, especially on his levels of learning, which guided the elaboration of the activities sequence. Concerned about an appropriate methodology to more effectively contribute to understanding of the problem, we analyzed some teaching tools, including the *Laboratório de Ensino de Geometria* and two methodological tendencies of the mathematical teaching, emphasizing those that we considered more suitable for use in spatial geometry teaching. Our goal was to provide objective answers to pertinent solutions in our research and show that it is possible to engage students in the process, in a pleasant way and that they can build their knowledge with meaning. The results show a certain fragility that exists in the student regarding the knowledge of geometry. On the other hand, the results also show the existence of a potentiality for realization of the work through social interaction; therefore, we conclude that the sequence of activities, tied to the way they were experienced by the students, presents itself as a significant contribution so there is advancement in the development of geometrical thinking, based on the van Hiele model.

Keywords: Geometry teaching. High School, Van Hiele Model. Social interaction.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SIGLAS

CIEAEM – Commission Internationale pour L'Etude et L'Amélioration de L'Enseignement des Mathématiques

DCNE – Diretrizes do Conselho Nacional de Educação

EM – Educação Matemática

GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática

IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada

LD – Livro Didático

LDBEN – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MMM – Movimento da Matemática Moderna

OCEM – Orientações Curriculares do Ensino Médio

OEA – Organização dos Estados Americanos

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PCN+ – Parâmetros Curriculares Nacionais – para o Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

PP – Professor Pesquisador

PPP – Projeto Político Pedagógico

PUC/SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

UNESCO – Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

ZDP – Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

A educação é o grande motor do desenvolvimento pessoal. É através dela que a filha de um camponês se torna médica, que o filho de um mineiro pode chegar a chefe de mina, que o filho de trabalhadores rurais pode chegar a presidente de uma grande nação.

Nelson Mandela

INTRODUÇÃO

Ao longo de quase treze anos como professor da disciplina de Matemática no Ensino Fundamental e Médio, nove destes lecionando na Escola Pública Estadual onde foi realizada a pesquisa, deparei-me com diversas dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem, em geral de matemática e, especificamente, de geometria. Entre outros obstáculos, a metodologia utilizada pelos professores da educação básica a cada dia nos faz refletir bastante sobre tais dificuldades.

Durante toda caminhada como aluno do Ensino Fundamental desenvolvi certa habilidade com os conteúdos de Matemática, e, ao ingressar no Ensino Médio, acreditava possuir uma predisposição para aprender com facilidade as ciências exatas. Com isso, surgiu o interesse e ingressei no curso de Licenciatura em Matemática, concluída em 2006. Observava com certa admiração meus professores, principalmente aqueles que lecionavam disciplinas de exatas. Imaginava que a Matemática era fantástica pelo fato de poucos conseguirem entender e manipular todos aqueles números, mesmo sem significado e sem conexões com fatos do cotidiano.

Tive a oportunidade de ingressar paralelamente nas redes estaduais de Educação dos Estados da Paraíba e de Pernambuco, através de concurso público. Com o passar do tempo, como professor do Ensino Fundamental e Médio, diante de várias formações promovidas pelas redes de ensino, nas quais exerço a função de professor efetivo, surgiram algumas inquietações e indagações. Pouco se falava na importância da Matemática para o convívio social e para formação de cidadãos conscientes, capazes de interagir com as mudanças do mundo contemporâneo. Como a Matemática, especificamente a geometria, contribui para o crescimento cognitivo dos alunos?

Comecei a fazer reflexões, procurando entender os reais motivos dos alunos do Ensino Fundamental e, principalmente, dos recém-ingressos no Ensino Médio, não gostarem muito, ou mesmo quase nada, da Matemática que é ensinada, especificamente quando se tratava do ensino de geometria.

A geometria muitas vezes é pouco abordada no Ensino Fundamental, isso pelo fato de professores não terem recebido a formação adequada para sentirem segurança quando a ensinam. Soares (2009, p. 11) argumenta que “esses professores preferem ensinar outros campos, como números e operações, e lecionar apenas algumas ‘pinceladas’ de geometria no final do ano letivo”. Com isso os alunos chegam ao Ensino Médio com uma deficiência enorme com relação aos conteúdos de geometria do Ensino Fundamental.

Algumas pesquisas, como de Pavanello (1993), Lorezato (1995), Miorim (2004) e Fonseca *et al.* (2011), mostram o abandono do ensino de geometria, até meados da década de 2000, devido a vários fatores, que serão abordados na fundamentação teórica. Com isso, percebe-se que tal abandono não se dava apenas na formação inicial, nem tampouco somente nos Ensinos Fundamental e Médio, mas ocorre também nos cursos do antigo Magistério (curso Normal) e Licenciatura em Matemática.

Assim, ocorreram e também provocaram prejuízos no que diz respeito ao ensino de geometria, desfavorecendo uma visão crítica e reflexiva de mundo, assim como a percepção das figuras geométricas na natureza, nas artes e, principalmente, no cotidiano dos alunos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), é necessário que o aluno tenha um olhar crítico e reflexivo sobre o valor da geometria em diversas situações diárias, ou seja, perceba seus traços e conceitos nas artes, na natureza e em formas diversas encontradas nas construções civis, nos produtos fabricados e suas embalagens, que são realizadas pelo homem.

É com esse intuito que procuramos proporcionar aos alunos, envolvidos na pesquisa, a construção do conhecimento geométrico, por meio de uma sequência de atividades, da mediação, da interação entre alunos, da interação entre professor e alunos, materiais didáticos manipuláveis utilizados na sala de aula e, principalmente, relacionando-os com a aplicabilidade no cotidiano.

Diante da situação que foi diagnosticada, durante o levantamento bibliográfico, sobre o ensino de geometria, como também pela experiência do pesquisador na escola em que leciona, realizou-se um teste diagnóstico para observar em qual nível de desenvolvimento geométrico estavam os alunos, baseado no modelo van Hiele. A partir daí houve um planejamento em que foi elaborada uma sequência de atividades que contribuíram para que o aluno desenvolvesse seu pensamento cognitivo relacionado à geometria.

Esta sequência de atividades foi elaborada baseada em Nasser & Sant'anna (2010), com suas propostas de trabalho do Projeto Fundão da UFRJ, e no livro *Ressignificando a geometria plana no EM segundo a teoria de Van Hiele* de Oliveira & Gazire (2012), que apresentaram um trabalho de pesquisa sobre as dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem de geometria tridimensional no Ensino Médio. As atividades estão ligadas entre si por diversas etapas, com o intuito de averiguar se o aluno avança no nível de pensamento geométrico ao longo das atividades, através de discussões, mediações, interações, verificando também a sequência de fases de ensino realizadas nas atividades propostas.

A sequência de atividades buscou auxiliar e subsidiar o aluno para desenvolver o pensamento geométrico a partir de situações didáticas adequadas, materiais manipuláveis do cotidiano e de trabalhos em equipe mediados pelo professor, como proposto pela teoria de aprendizagem vygotskyniana.

Foi analisado o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola onde foi realizada a pesquisa, no qual observamos que os conteúdos relacionados à geometria espacial são baseados na proposta curricular de Matemática para o Ensino Médio e estão conformes aos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco. Também de acordo com esta proposta, foi escolhido o livro didático *Matemática Ciência e Aplicações*, do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), para ser utilizado de 2015 a 2017. A partir dessa análise, fizemos um recorte dos conteúdos a serem abordados na sequência de atividades propostas nessa pesquisa, envolvendo: planificações de sólidos, poliedros e suas propriedades, corpos redondos e suas propriedades e a relação de Euler para poliedros convexos.

Como podemos relacionar a geometria com fenômenos e elementos da natureza e, muitas vezes, utilizamos conhecimentos básicos para resolver algumas situações do dia a dia, procuramos nessa pesquisa responder à pergunta que norteia nosso trabalho: *Em que medida uma sequência de atividades, partindo de objetos concretos, pode contribuir para compreensão de conceitos e propriedades da geometria espacial no Ensino Médio?*

Tendo em vista a importância da geometria e do desenvolvimento do pensamento geométrico, inclusive por sua aplicabilidade diária em diversas áreas do conhecimento, em se tratando de conhecimento da geometria espacial no Ensino Médio, a pesquisa tem por objetivo *investigar como uma sequência de atividades pode contribuir para o avanço de nível segundo o modelo van Hiele partindo de objetos concretos do cotidiano e de materiais manipuláveis relacionando-os com os conceitos e propriedades de sólidos geométricos*. Foi dessa forma que se realizou, durante as atividades propostas, reflexões pertinentes para a construção do conhecimento relacionado à geometria espacial, esperando poder contribuir para as teorias abordadas no campo da Educação Matemática. Para atingir esse objetivo geral, a partir do referencial teórico, nós pretendemos refletir sobre algumas relações entre objetos do cotidiano e a geometria espacial, a partir de materiais manipuláveis. Além disso, vamos explorar conceitos e propriedades da geometria espacial, relacionada a objetos concretos do cotidiano e materiais manipuláveis, em uma prática no laboratório de ensino de geometria. Para concluir, vamos verificar se a metodologia utilizada, a partir da mediação por meio dos processos interativos em sala de aula, contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Em diversas situações os conteúdos de Matemática ainda são apresentados de forma fragmentada, sem conexões com o cotidiano nem com outras disciplinas, interferindo diretamente no processo de aprendizagem. O aluno deve saber o porquê da aprendizagem de tais conteúdos e não simplesmente ser apresentado aos mecanismos, procedimentos e regras. Essa ineficiência da escola de não estimular o aluno para que crie, relacione ideias, descubra e tenha autonomia de pensamento, é uma das principais razões da escolha do tema, uma vez que a Matemática é tão rica, presente no cotidiano, podendo ser apresentada ao aluno de maneira simples e de forma prazerosa.

Desde cedo deduzíamos que a escola era o lugar mais seguro e importante para transformar as pessoas em cidadãos mais autônomos, foi no ambiente escolar que veio a inspiração para seguir a profissão de docente. A imagem ideal do professor estava ligada fortemente ao prazer e dedicação de como passava os conteúdos, às atitudes docentes e à simplicidade com que se relacionava com seus alunos. Observávamos as atitudes, as linguagens e os procedimentos metodológicos utilizados pelo professor para, posteriormente, repeti-los aos alunos do melhor modo possível. Hoje, com certa experiência, tanto como aluno quanto como docente, vemos a linguagem, o ambiente, os materiais utilizados como fundamentais recursos para o professor interagir com os alunos e trazer a Matemática para o meio. Os conteúdos necessitam ser repassados por meio de uma linguagem e de uma metodologia adequadas para que sejam efetivamente aprendidos. Os conteúdos de Matemática, quando desenvolvidos apenas de forma expositiva e acompanhados de uma linguagem excessivamente técnica, formal, descontextualizada, pela qual o professor apresenta a fórmula e diz como deve ser feito, são inacessíveis ao aluno.

Abordamos em nossa pesquisa algumas tendências metodológicas de ensino, como modelagem matemática e investigação matemática utilizando as tecnologias. Utilizamos também, como ferramentas metodológicas, materiais concretos que podem ser utilizados no Laboratório de Ensino de Geometria, com o objetivo de buscarmos uma melhor metodologia para abordar os conteúdos matemáticos em sala de aula, como ocorre normalmente no trabalho docente nas escolas em geral. Um trabalho que está de acordo com o que realmente é uma sala de aula, configurando-se assim em um verdadeiro laboratório de ensino de Matemática.

As pesquisas que abordam tendências metodológicas de ensino, na sua maioria, fazem um estudo mais aprofundado apenas de uma, porém, sugerimos aqui fazer um levantamento de duas que podem contribuir para o ensino de Matemática, especificamente, de geometria espacial no Ensino Médio. O professor, por melhor que seja em uma determinada tendência metodológica, utiliza atividades diversificadas em suas aulas, dificilmente utiliza apenas uma tendência ou uma única ferramenta para abordar os conteúdos de forma mais dinâmica.

Percebemos que a geometria espacial pode ser trabalhada com materiais concretos, relacionando-a com a realidade do aluno, portanto não entendemos porque os alunos têm tanta dificuldade em aprender geometria, uma vez que estamos rodeados de elementos geométricos e utilizamos conhecimentos básicos de geometria diariamente. Esse foi o principal motivo para escolhermos o tema: *Geometria espacial no Ensino Médio: uma abordagem concreta*. O termo "concreta" permite várias acepções: uma denotativa, que realmente nos leva à compreensão do uso do material concreto para o seu ensino, o que inclui as relações ao cotidiano; outra que é metafórica, que também nos remete à apresentação de uma nova possibilidade para o ensino de geometria para o Ensino Médio.

Sendo assim, elaboramos uma sequência de atividades para ser aplicada em uma turma de 28 alunos do 3º ano do Ensino Médio, semi-integral, com o propósito de ensinar de forma mais interessante a geometria espacial, seus elementos, suas características, partindo de objetos do cotidiano, relacionando-os com sólidos geométricos. Para apresentação, organizamos essa Dissertação em cinco capítulos.

No primeiro capítulo tratamos do ensino de Matemática no Brasil, consequentemente do ensino de geometria, pois isso é importante para compreendermos como que essa pesquisa se contextualiza historicamente. Citamos três acontecimentos importantes que influenciaram diretamente esse processo: a) a Reforma Francisco Campos, realizada na década de 1930 através de vários decretos que modificaram a forma como estava sendo conduzido o ensino público brasileiro, estabelecendo a modernização nacional do ensino secundário; b) a Reforma Capanema, instituída em 1934, reestruturando o ensino secundário; c) o Movimento da Matemática Moderna (MMM), ocorrido em diversos países, tendo atingido o Brasil no início da década de 1970, com o intuito de popularizar o ensino de Matemática.

Ainda no primeiro capítulo falamos dos livros didáticos durante o MMM, que provocou os autores e editoras, da época, para que reformulassem seus livros de acordo com os novos conteúdos e as novas tendências de ensino.

Continuamos com um levantamento sobre o ensino de geometria no MMM, quando seus conteúdos eram ministrados de maneira mecanizada, fazendo o aluno resolver questões enormes, provocando um distanciamento entre o aluno e a disciplina. Com a mudança no currículo, houve um desequilíbrio entre álgebra e geometria, causando alguns problemas. Aquela abordagem da geometria clássica euclidiana foi substituída por uma mais rigorosa e atualizada. Foi um dos motivos que, para Pavanello (1993), provocaram o abandono no ensino de geometria no Brasil.

Para concluir o primeiro capítulo, fizemos uma análise dos documentos que regulam o Ensino Médio brasileiro e observamos que a reformulação desse ensino foi estabelecida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) e regulamentada pelas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), para atender às necessidades da educação brasileira e responder aos desafios lançados pela industrialização. A partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) o Ensino Médio aumentou bastante para atender a demanda social e deixou de ser apenas preparatório para o ensino superior ou profissionalizante, passando a promover o complemento da educação básica.

No segundo capítulo discutimos como se deu o ensino de geometria a partir da década de 1990, com fundamentos em Pavanello (1993), Fonseca *et al* (2011), Rêgo, Rêgo & Vieira (2012), Santos & Nacarato (2014), Lorenzato (1995), entre outros. Observou-se que ainda há uma dificuldade enorme quanto à metodologia utilizada nesse processo de ensino de forma a refletir positiva e diretamente na aprendizagem dos alunos. Segundo Pirola (2000), uma das consequências é a deficiência encontrada na formação dos professores de Matemática no curso de Magistério ou no de Licenciatura em Matemática, como também que a ênfase do Ensino Médio na atualidade está centrada no ensino da álgebra.

Para refletir sobre formas de amenizar esta situação, seguimos na nossa pesquisa as orientações dos PCN, ou seja, começando o ensino de geometria pela espacial, relacionando-a a objetos do cotidiano. Rêgo, Rêgo & Vieira (2012), indicam que professores insistem no ensino por meio de aula expositiva, utilizando linguagem formal, deixando de envolver o aluno em atividades práticas com materiais manipuláveis.

Preocupados com uma metodologia adequada para contribuir de forma mais eficaz para a aprendizagem do aluno, observamos as possíveis contribuições dos materiais manipuláveis, produzidos para o Laboratório de Ensino de Geometria como ferramentas de ensino.

Fizemos uma análise das atuais tendências metodológicas de ensino de Matemática, dando ênfase àquelas que achamos mais adequadas para utilizar no ensino de geometria espacial: Investigação Matemática e uso de tecnologias e Modelagem Matemática no ensino de geometria.

No terceiro capítulo discutimos a teoria de van Hiele em dois pontos teóricos fundamentais: a) a hierarquia dos cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, definido em etapas e por graus de complexidade; b) as fases de aprendizado, que são as ações didáticas propostas pela metodologia do ensino para analisar a passagem de um nível para o outro. Discutimos também os aspectos da teoria vygotskyniana na perspectiva histórico-social, a internalização dos conhecimentos e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), relacionando-os com as atividades propostas e mediadas pelo pesquisador.

No quarto capítulo apresentamos os aspectos metodológicos, o contexto da pesquisa, os participantes envolvidos na pesquisa e a metodologia que utilizamos para compreender a investigação. Apresentamos também uma descrição da sequência de atividades que foram realizadas por meio de intervenções na sala de aula, com o intuito de analisar as observações feitas no decorrer dessas atividades.

A primeira atividade realizada foi o teste diagnóstico, com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios dos alunos do 3º ano do Ensino Médio em relação à geometria espacial, verificando em qual nível de pensamento geométrico eles estavam. A partir daí, planejamos e produzimos materiais adequados para realização de uma sequência de quatro atividades, propostas para oportunizar aos alunos o avanço nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.

As atividades planejadas foram realizadas com o objetivo de verificar o avanço de níveis pelos alunos, conforme o modelo van Hiele. Para verificar se realmente os alunos conseguiram demonstrar avanço sobre os níveis, propomos a eles um teste prognóstico, sintetizando e socializando os conhecimentos, composto por seis questões, a fim de comparar com o desempenho no teste diagnóstico.

Apresentamos no quinto capítulo a descrição dos acontecimentos e o desempenho dos alunos durante a realização das atividades. Para análise, destacamos cinco categorias que contribuíram de forma efetiva para conclusão da pesquisa. Destacamos a importância da relação interpessoal, dando ênfase à teoria de Vygotsky para identificar o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A nossa proposta envolvia oferecer respostas objetivas para soluções pertinentes da pesquisa e demonstrar que é possível envolver os alunos durante o processo de forma prazerosa, para que eles possam construir seu conhecimento com significado, desenvolvendo seu pensamento geométrico.

Pretendia-se, a partir das intervenções, no quinto capítulo, organizar, comparar e analisar os dados de forma que pudesse alcançar o objetivo geral e responder de forma coerente à questão que norteia o trabalho de pesquisa de característica de investigação qualitativa.

Eu escrevo para nada e para ninguém. Se alguém me ler será por conta própria e auto-risco. Eu não faço literatura: eu apenas vivo ao correr do tempo. O resultado fatal de eu viver é o ato de escrever.

Clarice Lispector

PRIMEIRO CAPÍTULO

AS MUDANÇAS NO ENSINO DE GEOMETRIA

Apresentamos neste capítulo alguns elementos da história do ensino da Matemática no Brasil, em particular da geometria, para justificar nosso tema diante desse contexto geral. Achamos relevante fazer um apanhado na história para melhor entender algumas dificuldades encontradas nos processos de ensino e aprendizagem de geometria ao longo do tempo.

Houve algumas modificações e reformulação da Educação Básica no Brasil, interferindo diretamente no ensino de Matemática e, consequentemente, no ensino de geometria. As principais foram as Reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema, com o objetivo de popularizar o ensino, e, em seguida, o Movimento da Matemática Moderna (MMM), que influenciou na mudança do currículo e na forma como eram ministradas as aulas de Matemática. Nesse período, com a implantação da Matemática Moderna, houve alguns problemas e consequências para a geometria, aquela abordagem euclidiana foi substituída por uma mais rigorosa e atualizada.

Na década de 1990 veio a Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional, em seguida o Conselho Nacional de Educação e os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, através de uma nova reformulação, a fim de atender uma necessidade de atualizar a educação básica brasileira e responder os desafios de uma sociedade contemporânea. A partir daí o Ensino Médio passou a ser visto como necessário e suficiente para o ingresso dos alunos no Ensino Superior, como também para o acesso ao mercado de trabalho. As competências e habilidades devem ser desenvolvidas pelas disciplinas no Ensino Médio para que o aluno possa resolver diversas situações do dia a dia.

As Orientações Curriculares Nacionais contribuíram para o planejamento e realização da sequência de atividades desenvolvida na nossa pesquisa. Dando ênfase e significados aos conteúdos de geometria espacial, para que os alunos tenham interesse e prazer em construir seu conhecimento, pautado no desenvolvimento do pensamento geométrico.

1.1. O ensino de geometria no Brasil desde o início do século XX

O homem, ao longo do tempo, observando a natureza, conseguiu extrair várias considerações importantes sobre geometria, ao observar árvores, sementes, o sol, a lua, entre outras coisas. "Inúmeras circunstâncias da vida, até mesmo do homem mais primitivo, levavam certo montante de descobertas geométricas subconscientes" (EVES, 1992, p. 4). Tais observações foram importantes para que o homem fosse capaz de sintetizar alguns conceitos, teoremas e regras desenvolvidos em um longo caminho e durante muito tempo.

A geometria ensinada na escola básica é a geometria euclidiana, composta da geometria plana e espacial. Em alguns cursos de nível superior são ensinadas geometrias não euclidianas. Segundo Moraco (2006, p. 23).

> De acordo com Van Hiele, pesquisador que formulou uma teoria sobre o pensamento geométrico, o trabalho com as geometrias não-euclidianas desenvolve o mais elevado tipo de pensamento, denominado de rigor, o que não seria atingido com a escolaridade básica.

Hoje se percebe uma grande dificuldade no desenvolvimento do pensamento geométrico nos alunos do Ensino Fundamental e, consequentemente, do Ensino Médio.

Várias pesquisas realizadas em relação ao abandono do ensino de geometria mostram que esse fato não ocorre apenas no Brasil. Pavanello (1993) percebe a grande preocupação dos professores brasileiros de Matemática, em especial os educadores matemáticos, o que é mais evidente nas escolas públicas.

Em 11 de Agosto de 1971 foi promulgada a Lei 9692, pelo então presidente Emílio Garrastazu Médici, que deu muita liberdade às escolas quanto aos programas das disciplinas que eram ministradas. Com isso os professores tiveram mais liberdade para deixar de lado o ensino de geometria. Aqueles que ainda assim insistiam em lecionar esse conteúdo o faziam de forma muito superficial, ministrando apenas no final do ano letivo.

Lorenzato (1995, p. 3 - 4) destaca alguns fatores que fazem com que os professores de Matemática não ensinem conteúdos de geometria, dentre eles dois são mais evidentes: o primeiro "é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas"; o segundo fator da omissão geométrica deve-se "à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos”.

A inquietação do abandono do ensino de geometria, que é um problema mundial, é, para Pavanello (1993, p. 7), um problema de ordem educacional.

> O estudo da geometria não foi considerado, durante séculos, como indispensável à formação intelectual dos indivíduos e ao desenvolvimento da capacidade de hábitos de raciocínio? Privar os indivíduos deste assunto não acarretaria prejuízos à sua formação? A ausência de um trabalho com a geometria não prejudicaria uma visão integrada da Matemática?

Essa discussão traz algumas divergências entre os profissionais de Matemática. Os matemáticos acreditam que deveriam dar mais ênfase a outros ramos, já os educadores matemáticos defendem que a geometria é muito importante para o desenvolvimento cognitivo dos alunos e que deve ser trabalhada paralelamente junto a outros eixos da Matemática, como álgebra e aritmética, haja vista que atualmente há várias pesquisas sobre geometria como também muitos eventos, congressos, simpósio, colóquios que dão destaque para o tema.

Uma das grandes questões é saber o que de fato ensinar em geometria e como ensinar determinado conteúdo, de forma que possa garantir a aprendizagem do aluno e que ele possa atingir o maior nível de pensamento geométrico possível.

Segundo Pavanello (1993), pesquisas realizadas em todo mundo mostram que o abandono não se deu pelo fato do desenvolvimento da Matemática, tornando assim o seu ensino desnecessário ou mesmo que não contribuiria de forma significativa para a formação do aluno.

Faz-se necessário fazer um levantamento do desenvolvimento do ensino de Matemática, em particular de geometria, no Brasil, a partir das modificações ocorridas na economia, na sociedade e na política, influenciadas pelas novas ideias pedagógicas, sobre a educação brasileira, de países mais desenvolvidos como a França e os Estados Unidos.

1.1.1. As Reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema

Após a Revolução de 1930, no governo provisório de Getúlio Vargas, foi criado o Ministério da Educação e Saúde Pública, a partir do Decreto nº 19.402, de 14 de novembro de 1930. Francisco Campos, seu primeiro titular, tomou posse no dia 18 de novembro do mesmo ano. No início de 1931implementou uma reforma educacional através de alguns decretos, entre eles destacamos o decreto nº 21.241, de 14 de abril de1932, que consolida as disposições sobre a organização do Ensino Secundário (MORAES, 1992).

O seu ministério estabeleceu, em nível nacional, a modernização do Ensino Secundário com uma série de medidas, entre elas: o aumento no número de anos para o curso, a seriação do currículo, frequência obrigatória dos alunos às aulas, imposição de um detalhado sistema de avaliação e a reestruturação do sistema de inspeção federal. Com as medidas, tinha-se o intuito de formar estudantes secundaristas de acordo com a exigência da sociedade disciplinar e capitalista que estava em plena mudança nos anos de 1930. A Reforma Francisco Campos, desta forma, marca uma inflexão significativa na história do Ensino Secundário brasileiro, pois ela rompe com estruturas seculares nesse nível de escolarização (DALLABRIDA, 2008, p. 185).

> A chamada Reforma Francisco Campos constituiu-se na primeira iniciativa de organização nacional da educação brasileira. Através de seu conjunto de decretos ficaram sistematizados diferentes graus e etapas de ensino, dentre eles, o Ensino Secundário. Nível intermediário entre o antigo Primário e o Ensino Superior, tal grau, hoje, compreenderia a escolaridade de 5ª série do Ensino Fundamental até 3º do Ensino Médio (VALENTE, 2004, p. 2).

Segundo Dallabrida (2008), o Ensino Secundário, nível de escolarização entre o Curso Primário e o Ensino Superior, a partir da Reforma Francisco Campos passou a ter duração de sete anos, divididos entre o Fundamental e o Complementar. O Fundamental era dividido em cinco anos, comuns a todos os estudantes secundaristas, e as disciplinas eram de acordo com a seriação. Matemática, Português, História da civilização, Geografia e Desenho eram comuns a todas as séries desse ciclo.

Marques (2005), em sua dissertação de Mestrado em Educação Matemática pela PUC/SP, ressalta que:

> [...] essa é a primeira vez que uma grade curricular brasileira apresenta a nomenclatura “Matemática” para representar o que anteriormente era definido como: aritmética, álgebra e geometria. A partir da Reforma Campos, haverá apenas uma cadeira: a de professor de Matemática. Podemos dizer que a legislação vem ratificar um dos ideais de Euclides Roxo[1], já implantado no Pedro II, de unificar os ramos da Matemática (p. 25-26).

[1]Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II, propôs à Congregação do Colégio, em 1927, uma mudança radical no ensino da Matemática, baseando-se na reforma realizada por Felix Klein na Alemanha, onde o ponto principal seria em acabar com a Matemática ensinada em partes distintas e separadas (aritmética, álgebra e geometria), ensinando-as conjuntamente sob o nome de Matemática.

Ainda segundo Dallabrida (2008), a segunda fase do Ensino Secundário, o ciclo Complementar, era dividido em dois anos e era propedêutica para os candidatos à matrícula em determinados institutos de Ensino Superior que apresentavam três opções: o Curso Jurídico; Ciências Médicas: Medicina, Farmácia e Odontologia; ou Engenharia: Engenharia e Arquitetura.

As disciplinas eram divididas de acordo com o curso pretendido pelo estudante após o ciclo Complementar. Verificou-se que a disciplina de Matemática não fazia parte do currículo dos candidatos à Faculdade de Direito. Na Faculdade de Ciências Médicas, Matemática fazia parte do currículo apenas no primeiro ano e, na de Engenharia, nos dois anos.

> Com o aumento do número de anos do Ensino Secundário e a sua divisão em dois ciclos, foi conferida ao Ensino Secundário uma estrutura mais complexa que proporcionava encaminhamentos mais específicos aos cursos superiores (DALLABRIDA, 2008, p. 186-187).

Com o aumento de tempo para cursar o Ensino Secundário, a educação básica se tornou mais elitista ainda, uma vez que o Brasil na época vivia da agricultura e as pessoas da classe baixa não tinham condições de passar tanto tempo nas escolas para formação básica, contrapondo com os estudos práticos que formavam as pessoas apenas para o mercado de trabalho.

A presença dos alunos na escola se tornou praticamente obrigatória. O aluno cuja frequência não atingia três quartos da totalidade das aulas da respectiva série não podia prestar exame no fim do ano. Os alunos eram inquiridos por atividades, trabalhos práticos, provas para obtenção de notas, que valiam de zero a dez. Com isso os alunos eram submetidos a quatro provas parciais que serviam para computar a média final. Aos alunos que não conseguiam alcançar as notas estipuladas para prosseguir na série, ao final do período letivo era dada outra oportunidade, quando seriam submetidos a provas finais.

> Esse sistema de avaliação permanente é diametralmente oposto ao regime de cursos preparatórios e de exames parcelados, pois, neste último sistema de ensino, o aluno apenas realizava um único exame terminal em cada disciplina (DALLABRIDA, 2008, p. 187).

Segundo Moraes (1992), a Reforma Francisco Campos padronizou a cultura escolar do Ensino Secundário brasileiro, estabelecendo procedimentos didático-pedagógicos para todas as escolas secundaristas que foram chamadas de ginásios. Tal Reforma mostrou o estilo particular de Francisco Campos, tudo regulamentado e controlado pelo Governo Federal.

> As reformas empreendidas por Francisco Campos durante sua gestão no novo ministério efetivamente forneceram uma estrutura orgânica ao Ensino Secundário, Comercial e Superior. Pela primeira vez na história da educação brasileira, uma reforma se aplicava a vários níveis de ensino e objetivava alcançar o País como um todo (MORAES, 1992, p. 293).

Com isso, as escolas secundaristas ficaram equiparadas ao Colégio Pedro II[2], mediante a inspeção federal, possibilitou também às escolas particulares a se submeterem à inspeção, consolidando no País o que Francisco Campos tinha estabelecido para o Estado de Minas Gerais, quando foi secretário de educação no Estado.

Segundo Valente (2011), uma das principais ações do ministério comandado por Francisco Campos tratou da elaboração de um currículo nacional de ensino. Vários estudos mostram que Euclides Roxo, praticamente sozinho, elaborou uma proposta de fusão das disciplinas Aritmética, Álgebra e Geometria, com vistas à constituição de uma única disciplina denominada de Matemática.

Ainda de acordo com Valente (2004), muitas foram as insatisfações quanta à nova Matemática, tanto de professores do próprio Colégio Pedro II, quanto de professores de Aritmética, de Álgebra e de Geometria de outros estabelecimentos de ensino, contrários à criação da disciplina Matemática, nos moldes idealizados por Roxo.

É possível observar que o atual Ensino Médio tem como precursor os cursos complementares criados pela Reforma Francisco Campos. Os dois anos dos cursos complementares tiveram muita autonomia em relação aos anos que os antecederam, pois os cinco anos do curso Fundamental não constituíram uma continuidade nas séries iniciais do curso Secundário.

Ainda no governo de Getúlio Vargas, em 26 de Julho de 1934, Gustavo Capanema foi nomeado como Ministro da Educação e Saúde Pública com o objetivo de reorganizar a pasta.

De acordo com Romanelli (1986), começam as reformas em alguns ramos de ensino pelo então Ministro Gustavo Capanema, algumas ainda realizadas no Estado Novo[3], que receberam o nome de Leis Orgânicas do Ensino, abrangendo todos os ramos do Primário e do Médio, complementadas por outras decretadas entre os anos 1942 e 1946.

---

[2]O Colégio Pedro II é uma tradicional instituição de ensino público federal, localizada no estado do Rio de Janeiro, no Brasil. É o terceiro mais antigo dentre os colégios em atividade no país, depois do Ginásio Pernambucano e do Atheneu Norte-Riograndense. É nomeado em homenagem ao imperador do Brasil D. Pedro II.

[3]Estado Novo é o nome do regime político brasileiro fundado por Getúlio Vargas em 10 de novembro de 1937, que durou até 29 de outubro de 1945, que é caracterizado pela centralização do poder, nacionalismo, anticomunismo e por seu autoritarismo.

De acordo com o Decreto Lei nº 4.244, de 9 de abril de 1942, a reestruturação do Ensino Secundário teve como finalidades: formar, em prosseguimento da obra educativa do Ensino Primário, a personalidade integral dos adolescentes; acentuar e elevar, na formação espiritual, a consciência patriótica e a consciência humanística; e dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial.

Contudo, o Ensino Secundário passou a ser ministrado da seguinte forma:

> - Art. 2º. O Ensino Secundário será ministrado em dois ciclos. O primeiro compreenderá um só curso: o Curso Ginasial. O segundo compreenderá dois cursos paralelos: o Curso Clássico e o Curso Científico.
> - Art. 3º. O Curso Ginasial, que terá a duração de quatro anos, destinar-se-á a dar aos adolescentes os elementos fundamentais do Ensino Secundário.
> - Art. 4º. O Curso Clássico e o Curso Científico, cada qual com a duração de três anos, terão por objetivo consolidar a educação ministrada no Curso Ginasial e bem assim desenvolvê-la e aprofundá-la. No Curso Clássico, concorrerá para a formação intelectual, além de um maior conhecimento de Filosofia, um acentuado estudo das letras antigas; no Curso Científico, essa formação será marcada por um estudo maior de ciências (BRASIL, s.d).

No 1º ciclo, denominado Ginásio, as disciplinas Português, Latim, Francês, Matemática, Desenho e Canto Orfeônico eram comuns às quatro séries.

O 2º ciclo, com três séries, era subdividido em Clássico e Científico. O Clássico, com cinco disciplinas concentradas no ensino de línguas, tinha como foco a formação na área humanista, mesmo assim a disciplina Matemática estava presente em todas as séries. O Científico se destacava pela forte presença das disciplinas Física, Química e Matemática.

Com essa nova configuração, o Curso Secundário permanecia com duração de sete anos, em vez de cinco anos para Curso Fundamental e dois anos para Curso Complementar. Agora era composto por quatro anos para o Ginásio e três anos para o Curso Clássico ou Científico (MARQUES, 2005).

> Utilizando a nomenclatura de modo mais preciso será necessário dizer que a partir do que ficou conhecido como Reforma Francisco Campos, o Ensino Secundário no Brasil estrutura-se em dois ciclos: um Curso Fundamental, de cinco anos; um Curso Complementar, de dois anos. Posteriormente, nos anos 1940, com a chamada Reforma Gustavo Capanema, mantém-se o Secundário com sete anos e uma nova distribuição de seus dois ciclos: o primeiro denominado Ginásio, de quatro anos; o segundo transformado em Colégio, com dois ramos (Clássico e Científico), dado em três anos letivos (VALENTE, 2011, p. 647).

Em termos de duração, até hoje a formatação do Ensino Básico está de acordo com a proposta feita na Reforma Gustavo Capanema, porém com outra nomenclatura: Ensino Fundamental, dividido em duas etapas, Fundamental I em cinco anos e Fundamental II em quatro anos, referentes ao Ginásio; e o Ensino Médio, em três anos, referentes ao Colégio (Clássico e Científico).

> Era indisfarçável, como se vê, o caráter de cultura geral e humanística dos currículos, mesmo no curso chamado Cientifico. Além disso, sobressaíam, nos dois níveis, uma preocupação excessivamente enciclopédica e ausência de distinção substancial entre os dois cursos: o Clássico e o Científico. Finalmente, o currículo não era diversificado, nem sequer quanto aos níveis, sendo praticamente as mesmas as disciplinas em quase todas as séries.
> Esse ensino não diversificado só tinha, na verdade, um objetivo: preparar para o ingresso no Ensino Superior. Em função disso, só podia existir como educação de classe. Continuava, pois, constituindo-se no ramo nobre do ensino, aquele realmente voltado para a formação das "individualidades condutoras" (ROMANELLI, 1986, p. 158).

O programa de Matemática da Reforma Francisco Campos utilizado foi o mesmo do Colégio Pedro II, onde Euclides Roxo era professor e diretor. Diferentemente dos programas de Matemática do curso Ginasial da Reforma Gustavo Capanema, os quais foram elaborados por uma comissão presidida pelo próprio Ministro. Dentre os membros da comissão estava Euclides Roxo, que implementou ideias que não tiveram boas receptividades. Com isso, Euclides Roxo muda a proposta para o programa de Matemática do novo Curso Ginasial, desta forma apresenta um desmembramento do ensino simultâneo de Aritmética, Álgebra e Geometria (MARQUES, 2005).

> Percebemos que aquela estrutura que visava a fusão paulatina dos três ramos desapareceu, emergindo uma configuração, que de certa forma, respeitava algumas das orientações metodológicas da Reforma Campos, como o início do ensino da geometria de maneira informal e intuitiva (MARQUES, 2005, p. 45).

Com a geometria e aritmética prática nos dois primeiros anos, a Matemática no Curso Secundário mostrava-se menos abstrata e essencialmente mais concreta. Nos dois anos seguintes, mostrava-se bem mais dedutiva.

Mencionando Bicudo[4], Valente (2011, p. 649) argumenta que “o curso fundamental iniciado a partir de 1931, somente em 1936 foi definido os programas dos cursos

---

[4]J. C. BICUDO.*O ensino secundário no Brasil e sua atual legislação – de 1931 a 1941 inclusive*. 1942.

complementares, os quais foram assinados pelo ministro Gustavo Capanema em 17 de março de 1936”.

Os programas dos cursos complementares definem temas de conteúdos matemáticos para serem ensinados nas três modalidades. Esses blocos de conteúdos matemáticos deram origem a livros didáticos com o objetivo de atender à legislação e dar suporte ao ensino nos cursos complementares. Com isso os livros didáticos eram elaborados sob duas modalidades para dar subsídios aos cursos complementares. São exemplos dessa produção: *Lições de Matemática: para o curso complementar de Engenhari*a, de Carvalho; *Pontes de Matemática: segundo os programas dos cursos complementares*, de Lima; *Lições de Matemática: para médicos e químicos*, de Serrão (VALENTE, 2011).

> As obras didáticas de Matemática utilizadas nos cursos complementares constituem material raro, pois tiveram vida curta. Elas serviram apenas na vigência da Reforma Francisco Campos. Com a nova organização do ensino, vinda da Reforma Gustavo Capanema, a partir de 1942, as obras não mais servem aos novos cursos criados (Ginásio e Colégio) (VALENTE, 2011, p. 651).

As mudanças na estrutura do Ensino Básico observadas nas duas reformas ocorreram de forma planejada, com o objetivo de popularizar o ensino e dá acesso a todos. Quanto à mudança no currículo de Matemática, esta se deu pela importância do ensino de geometria relacionado a outros eixos, possibilitando uma melhor compreensão.

1.1.2. O Movimento da Matemática Moderna no Brasil

Segundo Valente (2008), *Movimento da Matemática Moderna* (MMM) é a expressão utilizada no âmbito dos estudos sobre o ensino da Matemática que caracteriza um período em que se elaboram novas referências para o ensino da disciplina. As preocupações em torno do ensino de Matemática vinham aumentando bem antes do século XX. Muitos países da Europa e também países desenvolvidos, como Estados Unidos da América, começaram a perceber a necessidade de uma reforma no ensino de Matemática, com o propósito de modificar os currículos. Havia provocações em meio aos professores de Matemática, o que fez surgir algumas indagações, como a de Soares (2001), “para que ensinar e como ensinar Matemática?” Com isso, provocaram-se muitas discussões em torno dos temas a serem agendados para a sala de aula:

> O problema do ensino da Matemática na universidade e nas escolas de nível secundário é questão que, desde o final do século XIX, já vinha sendo discutida por Felix Klein (1849 - 1925). Klein tinha profundo interesse por questões pedagógicas além de ser um brilhante matemático. Segundo Euclides Roxo (1937) um dos motivos que levaram Klein a preocupar-se com a metodologia e com os programas de Matemática do Ensino Secundário foi já ter também observado uma verdadeira descontinuidade entre os estudos feitos no ginásio e o das escolas superiores. A proposta de Klein era a de modernizar o ensino da Matemática dando maior ênfase à análise, à geometria, à física e aos conceitos de grupo e de transformação (Nevanlina, 1978). Klein, segundo Roxo (1937), foi o primeiro a defender, em 1893, a necessidade de unificação do ensino da Matemática, coisa que os defensores da Matemática Moderna também propuseram com a teoria dos conjuntos (SOARES, 2001, p. 45-46).

Segundo Valente (2008) e Soares (2001), dentre as primeiras ações de reformulação do ensino da Matemática está a criação, em 1950, da CIEAEM – Commission Internationale pour L'Etude et L'Amélioration de L'Enseignement des Mathématiques. Por iniciativa do matemático, pedagogo e filósofo da Universidade de Londres, Caleb Gattegno, foram reunidos alguns matemáticos e o psicólogo Jean Piaget, com a intenção de estudar o estado presente, na época, e as possibilidades de melhorar a qualidade do ensino e a aprendizagem da Matemática.

Pavanello (1993) destaca que o Brasil, por ser um país agrícola no início do século XX e ter uma grande parte da população analfabeta, proporcionou um ensino de Matemática basicamente utilitária em que prevalecia o estudo de técnicas operatórias em aritmética, e o ensino de geometria praticamente não existia. Havia apenas um estudo da geometria métrica, cálculo de áreas e volumes.

Quando falamos no nosso trabalho do Movimento da Matemática Moderna (MMM), estamos nos referindo a uma série de movimentos ocorridos em diversos países a fim de melhorar o ensino de Matemática. Houve muita especulação quanto a esse Movimento, pois nem todos concordavam com ele:

> A ampla veiculação da palavra "moderna" não deixou de ser motivo de discordância. O que é moderno é oposto ao que é velho, antigo, ultrapassado. Assim, a Matemática Moderna era associada ao novo, atual, avançado. Para os opositores do Movimento, usar tal expressão e defender a introdução de assuntos descobertos nos séculos XVII e XIX no Ensino Secundário, era desprezar toda a Matemática desenvolvida até então, o que era visto como um absurdo. Por outro lado os defensores da reforma diziam não querer descartar a Matemática velha, mas sim renová-la aplicando a ela novos métodos de ensino (SOARES, 2001, p. 2).

Autores como D'Ambrósio (1987) observam uma falha nas propostas, pois os professores não praticavam na sala de aula o que defendiam na teoria. Vitti (1998) e Burigo (1989) produziram também trabalhos sobre o MMM. Burigo, ao contrário de D'Ambrósio, mostra que o MMM foi e tem sido um importante passo dado por professores e educadores brasileiros para melhoria do ensino de Matemática.

O MMM chegou ao Brasil na esperança de popularizar o conhecimento matemático, que até então era para minoria. Soares (2002) e Pavanello (1999) argumentam que as primeiras manifestações realizadas foram os Congressos Nacionais de Ensino de Matemática, no que diz respeito à forma de como estão sendo ensinados os conteúdos matemáticos, discutindo o rompimento com as práticas vigentes.

À época, tornou-se preocupante a forma como estavam sendo ministrados os conteúdos matemáticos, propondo-se uma modernização desse ensino. Essas manifestações em relação ao então Ensino Secundário, segundo Miorim (1998, p. 43), se deram porque “a Matemática ministrada nesse nível estava em descompasso com as exigências impostas pelo novo contexto sócio-político-econômico, com o desenvolvimento da Matemática e das ciências ocorrido nos últimos séculos e com a estudada na universidade".

Aqueles que foram adeptos do MMM perceberam nos trabalhos de Bourbaki[5] e de psicólogos e educadores, como Piaget, um guia para a Matemática e uma forma que garantisse mudanças no currículo e na metodologia do ensino de Matemática.

> Os primeiros trabalhos publicados pelo grupo Bourbaki datam das décadas de 30 e 40 e tiveram grande influência no Movimento da Matemática Moderna. A intenção e ambição do grupo Bourbaki era a de reescrever toda a Matemática usando o método axiomático. Até a década de 70 o grupo já havia publicado mais de 30 livros (SOARES, 2001, p. 47).

De acordo com Brito, Cruz & Ferreira (2006), não é possível determinar o momento exato em que o MMM foi inserido nas escolas brasileiras. O ensino de álgebra moderna nas universidades, a partir de 1945, a criação do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e a Conferência Internacional sobre Educação Matemática em Bogotá, na Colômbia, em 1961, realizada com o apoio da OEA e da UNESCO, influenciaram e contribuíram para as mudanças do ensino de Matemática.

---

[5]Grupo Bourbaki, nome de um grupo de matemáticos (entre eles Dieudonné, Cartan, Chevalley, Weil), formado em meados dos anos 30, na França, que, em livros e artigos, defendiam uma evolução – e uma revolução – interna na Matemática a partir do desenvolvimento e estudo da noção de estrutura. No entender desse Grupo, deve-se conceber a Matemática a partir de sua unidade, do método axiomático e do conceito de estrutura (VALENTE, 2008, p. 607).

Outro fato importante para a divulgação dos ideais do MMM entre professores foi o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), que promoveu cursos de Matemática Moderna para professores do Ensino Secundário, com o objetivo de superar as dificuldades apontadas neste nível de ensino, dificuldades essas observadas nos Congressos Nacionais de Ensino de Matemática.

Ao observar a nova proposta curricular, é possível dizer que era executada na íntegra, sendo assim o moderno programa não estabelece uma concepção de uma nova matemática, mas a antiga com uma linguagem moderna.

1.1.3. A geometria no Movimento da Matemática Moderna

Com a Matemática Moderna introduzida no Ensino Secundário houve muitas mudanças no currículo para o ensino da Matemática. Tais mudanças ocasionaram uma adoção de novos conteúdos, que tiveram seus reflexos sentidos apenas um pouco depois quando o MMM passou por suas primeiras avaliações, em meados da década de 70. Esses reflexos foram bastante notados principalmente quando foram observados os alunos criados nesse perfil.

Segundo Soares (2001), antes de 1950 o ensino de Matemática ocupava-se com os cálculos aritméticos, com as identidades trigonométricas, com os problemas de enunciados grandes e complicados, com demonstrações de teoremas de geometria e com a resolução de problemas específicos, sem utilidade prática alguma.

Os conteúdos de Matemática, entre eles geometria, eram repassados de forma tão desgastante que obrigava aos alunos lidar com expressões matemáticas enormes que não contribuíam para desenvolver o raciocínio, apenas manipulavam números. Alguns conteúdos não estavam presentes no Ensino Secundário, apenas no universitário. Com isso, podemos dizer que havia, entre os conteúdos que eram chamados *as matemáticas* (Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria), certo equilíbrio, porém esse método clássico não era suficiente para dar condições de aprendizagem diante das exigências do mundo contemporâneo.

> O MMM em sua origem apresentava como proposta a instrução de novos conceitos no currículo de Matemática, que foram incluídas inicialmente no Ensino Secundário e posteriormente no Ensino Primário.
> [...] O emprego da teoria de conjuntos viria não somente incorporar-se ao currículo como mais um tópico a ser estudado como também faria a ligação entre todos os assuntos da Matemática. A proposta era que a teoria dos conjuntos servisse para possibilitar um ensino mais integrado de toda a Matemática, entrando tanto no estudo da álgebra quanto da geometria. A

> teoria dos conjuntos seria ainda a linguagem usada para garantir a precisão e o rigor necessário à Matemática (SOARES, 2001, p. 19).

Com o novo currículo houve várias mudanças no ensino de Matemática, contudo o novo enfoque reflete em diversos campos da Matemática, causando certo desequilíbrio entre a álgebra e a geometria. Com a geometria houve alguns problemas ao ser introduzida a Matemática Moderna no currículo. Aquela abordagem euclidiana clássica foi substituída por uma mais rigorosa e atualizada, evidenciando noções de figuras geométricas, fronteira, interior e exterior e, para reformular definições conhecidas, houve adesão a uma linguagem de conjuntos.

Segundo Pavanello (1993), o MMM foi um dos responsáveis pelo abandono do ensino de geometria na educação brasileira, devido ao fato de muitos professores não se encontrarem preparados para desenvolver as propostas sugeridas para o seu ensino, principalmente depois da promulgação da Lei 5.692, de 11 de agosto 1971, que estabeleceu a Lei de Diretrizes de Bases da Educação para a época.

> A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de Matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala e aula - talvez numa tentativa ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão (PAVANELLO, 1993, p. 7)

Segundo Soares (2001), mesmo antes do MMM no Brasil, o ensino de geometria já era um problema. Como propôs a nova Matemática de abordar os conteúdos relacionados com a prática, o ensino de geometria por meio do estudo das transformações lineares e espaços vetoriais não tiveram muito lugar na prática, sendo assim, a geometria ensinada continuou sendo a geometria euclidiana utilizando a linguagem dos conjuntos.

1.2. A reformulação do Ensino Médio no Brasil

De acordo com os PCN+ (BRASIL, 2002), a reformulação do Ensino Médio no Brasil foi estabelecida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) de 1996 e regulamentada em 1998 pelas Diretrizes do Conselho Nacional de Educação, para atender uma necessidade de atualização da educação brasileira e responder a desafios propostos pelo avanço das indústrias e o desenvolvimento econômico e social.

A Secretaria de Educação Básica, por intermédio do Departamento de Política do Ensino Médio, encaminha para os professores o documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio com a intenção de apresentar um conjunto de reflexões que alimente a sua prática docente.

> A proposta foi desenvolvida a partir da necessidade expressa em encontros e debates com os gestores das Secretarias Estaduais de Educação e aqueles que, nas universidades, vêm pesquisando e discutindo questões relativas ao ensino das diferentes disciplinas. A demanda era pela retomada da discussão dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, não só no sentido de aprofundar a compreensão sobre pontos que mereciam esclarecimentos, como também, de apontar e desenvolver indicativos que pudessem oferecer alternativas didático-pedagógicas para a organização do trabalho pedagógico, a fim de atender as necessidades e às expectativas das escolas e dos professores na estruturação do currículo para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 8).

Com a preocupação de atender à demanda atual, o Ensino Médio brasileiro aumentou exponencialmente, contudo foram necessárias muitas transformações em vista daquele de trinta anos atrás, quando o Ensino Médio era organizado em duas formações: pré-universitária e profissionalizante.

O Ensino Médio pré-universitário era caracterizado por uma estreita divisão de disciplinas, com isso tinha a ideia que o conhecimento das disciplinas desse curso era necessário e suficiente para prosseguir nos estudos, dessa forma o conhecimento específico de cada disciplina só era adquirido no nível Superior.

Enquanto o Ensino Profissionalizante era caracterizado pelo treinamento de atividades práticas, associado às disciplinas gerais, porém voltado para atividades de serviços demandados da época, com uma formação técnica, havendo um aprofundamento profissional em nível Médio.

A proposta do novo Ensino Médio deixa de ser apenas preparatório para o Ensino Superior ou Profissionalizante para promover o complemento da educação básica, independentemente da modalidade prepara o aluno para ser um cidadão capaz de seguir seus estudos em um curso superior ou mesmo ingressar no mercado de trabalho.

> As transformações de caráter econômico, social ou cultural que levaram à modificação dessa escola, no Brasil e no mundo, não tornaram o

> conhecimento humano menos disciplinar em qualquer das três áreas[6] em que o novo Ensino Médio foi organizado (BRASIL, 2002, p. 8).

A ideia é que haja uma articulação interdisciplinar entre essas áreas, garantindo uma interligação e sentido dos conhecimentos, e não seja necessário, como previa o antigo Ensino Médio, outra etapa de ensino para que essa articulação fosse efetivada.

> De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o Ensino Médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos (BRASIL, 2006, p. 69).

Dessa forma, para que os alunos estejam formados para a vida, é necessário mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa:

> - Saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir;
> - Enfrentar problemas de diferentes naturezas;
> - Participar socialmente, de forma prática e solidária;
> - Ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e,
> - Especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado (BRASIL, 2006, p. 9).

Uma formação com tal ambição exige métodos de aprendizado compatíveis, ou seja, condições efetivas para que os alunos possam:

> - Comunicar-se e argumentar;
> - Defrontar-se com problemas, compreendê-los e enfrentá-los;
> - Participar de um convívio social que lhes dê oportunidades de se realizarem como cidadãos;
> - Fazer escolhas e proposições;
> - Tomar gosto pelo conhecimento, aprender a aprender (BRASIL, 2006, p. 9)

Os professores precisam promover essa aprendizagem não como um complemento, sem essa interdisciplinaridade o conhecimento adquirido pelo aluno fica fragmentado e ineficaz.

[6] As três áreas, Ciências da Natureza e Matemática, Ciências Humanas, Linguagens e Códigos, organizam e interligam disciplinas, mas não as diluem nem as eliminam (BRASIL, 2006).

> Para isso, os professores precisam relacionar as nomenclaturas e os conceitos de que fazem uso com o uso feito nas demais disciplinas, construindo, com objetivos mais pedagógicos do que epistemológicos, uma cultura científica mais ampla. Isso implica, de certa forma, um conhecimento de cada uma das disciplinas também pelos professores das demais, pelo menos no nível do Ensino Médio, o que resulta em uma nova cultura escolar, mais verdadeira, pois se um conhecimento em Nível Médio de todas as disciplinas é o que se deseja para o aluno, seria pelo menos razoável promover esse conhecimento na escola em seu conjunto, especialmente entre os professores (BRASIL, 2002, p. 28).

Observa-se a necessidade de os professores terem uma boa formação, não só nas disciplinas específicas, mas de um modo geral, com vistas ao relacionamento entre as disciplinas, no intuito de promover uma formação mais adequada para os alunos do Ensino Médio. Observando a proposta e as recomendações dos PCN+ (BRASIL, 2002) e das OCN (BRASIL, 2006), para que o aluno seja capaz de sair dessa modalidade de ensino com estrutura de ingressar no mercado de trabalho ou mesmo numa universidade.

1.2.1. Os PCN+ e o ensino de geometria no Ensino Médio

A Matemática e outras disciplinas da área de exatas têm em comum a investigação da natureza e dos desenvolvimentos tecnológicos. As competências e habilidades que orientam o aprendizado no Ensino Médio, segundo os PCN+ (BRASIL, 2002), devem ser promovidas pelas disciplinas dessa área, que é mais do que uma reunião de especialidades.

Na sociedade contemporânea em que vivemos, o conhecimento matemático se faz necessário desde sua existência para resolver diversas situações do dia a dia, servindo também como auxílio no desenvolvimento de outras áreas, contribuindo para o crescimento do pensamento lógico e dedutivo do aluno.

> No Ensino Médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional (BRASIL, 2002, p. 108)

É necessário que nesse nível de ensino a Matemática seja, para o aluno, muito mais significativa, que vá bem além de uma disciplina instrumental e que esteja conectada com as demais áreas do conhecimento, para que sirva de investigação e de linguagem, facilitando sua aprendizagem.

Ensinar Matemática relacionada com o cotidiano e com outras áreas traz para o aluno o desenvolvimento de competências e habilidades que são necessárias para sua formação, para que possam interpretar e compreender diversas situações do convívio social, tendo condições de tomar decisões importantes e participar de forma mais efetiva do mundo globalizado em que vivemos.

Com isso, os conteúdos selecionados e a forma como são abordados em sala de aula contribuem para que essa formação possa garantir aos alunos o desenvolvimento dessas competências e habilidades. Como também dar ênfase ao currículo com conteúdos que tenham significados para os alunos, de forma que eles se tornem capazes de ir além de repetir procedimentos, manipular números e fórmulas, dando sentido para a sua utilização no cotidiano.

> Ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, os alunos, ao concluir o Ensino Médio, deveriam compreender e desenvolver as seguintes competências, que complementam o Ensino Fundamental:

> - Representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
> - Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
> - Contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico (BRASIL, 2002, p. 113).

A escola tem como objetivo promover esse desenvolvimento cognitivo nos alunos do Ensino Médio. Por isso, é necessária uma reflexão sobre essas competências, observar quais disciplinas e como será realizado o trabalho, de que forma poderemos alcançar nossos objetivos. É necessário compreender a proposta e aproximar ao máximo as ações. Nesse sentido, vamos mostrar as competências no âmbito da Matemática, destacando especificamente aquelas voltadas para a geometria, o que se espera do aluno em cada uma delas (BRASIL, 2002).

Na matriz de competências dos PCN+ (2002), há indicação de vários blocos que abordam a geometria. Além de objetivos relativos à geometria analítica, geometria métrica e geometria plana, nós destacamos os seguintes que estão relacionados à geometria espacial:

> - Investigação e compreensão: estratégias para enfrentamento de situações-problemas: Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas.
> - [...] Investigação e compreensão: interações, relações e funções; invariantes e transformações: reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema, por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre, os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura.
> - [...] Investigação e compreensão: modelos explicativos e representativos: Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações; por exemplo, optar entre modelos algébricos ou geométricos para obter determinadas medições de sólidos.
> - [...] Contextualização sociocultural: ciência e tecnologia na história: Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em momentos históricos diferentes (BRASIL, 2002, p. 114-119).

Para que os alunos consigam desenvolver com distinção as competências almejadas pelo PCNEM, os conteúdos matemáticos foram sistematizados em eixos ou temas estruturadores que devem ser desenvolvidos simultaneamente nos anos do Ensino Médio.

1. Álgebra: números e funções
2. Geometria e medidas
3. Análise de dados

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, observamos que os conteúdos devem ser escolhidos de forma cuidadosa e criteriosa para que possam proporcionar ao aluno um fazer matemático por meio de um processo investigativo. Esses conteúdos básicos foram divididos em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e Probabilidade, buscando frequentemente uma articulação entre eles (BRASIL, 2006).

Dentre os conteúdos de Matemática (números, álgebra, medidas, geometria e noções de estatística e probabilidade), daremos mais ênfase à geometria que é nosso objeto de pesquisa. Os temas relacionados devem ter muita relevância, sua importância está no seu potencial, que permite ao aluno entender melhor o mundo e contribuir com as mudanças que virão.

De acordo com os PCN+ (BRASIL, 2002, p. 119), um exemplo disso pode ser visto na geometria.

> A abordagem tradicional, que se restringe à métrica do cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos, não é suficiente para explicar a estrutura de moléculas e cristais em forma de cubos e outros sólidos, nem tampouco justifica a predominância de paralelepípedos e retângulos nas construções arquitetônicas ou a predileção dos artistas pelas linhas paralelas e perpendiculares nas pinturas e esculturas. Ensinar geometria no Ensino Médio deve possibilitar que essas questões aflorem e possam ser discutidas e analisadas pelos alunos.

A geometria no Ensino Médio trata de figuras geométricas bi e tridimensionais, representações por desenhos, planificações, modelos e objetos do cotidiano, desenvolvendo, assim, suas propriedades que estão associadas a medidas e formas. Para o desenvolvimento desse tema, são propostas quatro unidades temáticas: geometria plana, espacial, métrica e analítica.

> As propriedades de que a geometria trata são de dois tipos: associadas à posição relativa das formas e associadas às medidas. Isso dá origem a duas maneiras diferentes de pensar em geometria, a primeira delas marcada pela identificação de propriedades relativas a paralelismo, perpendicularismo, intersecção e composição de diferentes formas e a segunda, que tem como foco quantificar comprimentos, áreas e volumes (BRASIL, 2002, p. 123).

No ensino de geometria, uma das dificuldades está relacionada à representação ou visualização de suas propriedades com o cotidiano, com o mundo real, dificultando a compreensão e construção de modelos para solucionar algumas situações de Matemática como também de outras disciplinas. Essa é uma das competências que deve ser desenvolvida nos alunos, que está diretamente relacionada ao tema geometria. Para isso é preciso que os alunos falem sobre Matemática e que possam produzir suas linguagens e textos relacionados com a geometria.

A proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio ressalta que, para o aluno desenvolver o raciocínio geométrico completo, o ensino de geometria deve contemplar outros estudos, como: posições relativas de objetos geométricos; relação entre figuras espaciais planas e entre sólidos geométricos; propriedades e semelhanças entre figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações, tais como desenho, planificações e construções.

O que vemos nas escolas são práticas envolvendo lista de exercícios e procedimentos, em que os alunos memorizam um conjunto de postulados e demonstrações sem ter nenhum sentido e significado. Nesse modelo, os alunos não têm a oportunidade de ver a ciência Matemática como uma ferramenta importante para seu desenvolvimento cognitivo e dedutivo. Não havendo uma contextualização voltada para a realidade do aluno, de forma que o provoque para raciocinar dentro de um contexto em que vive, haverá sempre uma dificuldade em aproximar o aluno do conhecimento matemático.

> A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de "ilustrar" o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola (BRASIL, 2006, p. 83).

Os alunos quando ingressam no Ensino Médio deveriam trazer consigo uma grande estrutura de conhecimento geométrico do Ensino Fundamental, de forma a alcançar um aprofundamento dessas ideias com experiências e demonstrações, para que possam conseguir fazer abstrações e perceber que a geometria é muito importante para o seu desenvolvimento cognitivo. No Ensino Médio as atividades propostas deverão proporcionar solidificação dos conceitos aprendidos anteriormente, como área, perímetro e volume. Pressupõe-se que o aluno nessa etapa apresente condições necessárias para a compreensão de demonstrações.

> O estudo da geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes (BRASIL, 2006, p. 75).

De acordo com as propostas dos PCN+ (BRASIL, 2002), é fácil perceber que este eixo estruturador pode desenvolver no aluno todas as habilidades relativas a medidas e grandezas, contribuindo também para construção do conhecimento matemático e principalmente na visão sistematizada da geometria com diferentes linguagens, aqueles que deveriam ser aprendidos no Ensino Fundamental, e com a geometria clássica euclidiana.

De acordo com as OCEM (BRASIL, 2006), o Princípio de Cavalieri deve ser tomado como ponto de partida para o estudo de volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera), permitindo ao aluno compreender o significado das fórmulas. Ao trabalhar com áreas de superfícies de sólidos, se faz necessário recuperar procedimentos para medida de área de alguns polígonos, de forma que facilite a compreensão das superfícies de prismas, pirâmides e cilindros, estabelecendo facilmente suas planificações.

A geometria analítica tem origem em uma ideia muito simples, introduzida por Descartes no século XVII, quando foi criado o sistema de coordenadas cartesianas que identifica o ponto do plano (x, y). Caracterizando-se como: a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra); b) o estudo dos pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria). É importante trabalhar bem isso na sala de aula para que os alunos tenham condições de diferenciar tais conceitos (BRASIL, 2006).

É importante que o aluno, quando tiver entendido o significado de uma equação, seja apresentado a sua forma geométrica, ao significado de seus parâmetros, ao que acontece quando há modificações dos coeficientes em relação ao plano cartesiano. Quando duas equações são paralelas, perpendiculares ou coincidentes, os alunos têm que saber interpretar tanto algébrica como geometricamente, dando mais significado e sentido para a construção do conhecimento.

Os conteúdos e habilidades propostos para as unidades temáticas a serem desenvolvidas nesse tema, de acordo com os PCN+ são:

1. *Geometria Plana:* semelhança e congruência; representações de figuras.

- Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações problema;
- Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.;
- Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real;
- Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras;

- Fazer uso de escalas em representações planas (BRASIL, 2002, p. 125).

Por nossa experiência no ensino de Matemática, percebemos que esses conteúdos referentes à geometria plana estão muito mais presentes nas aulas de geometria, às vezes são os únicos que fazem parte do ensino. Enquanto outras partes da geometria são deixadas muitas vezes para serem ensinadas no final do ano letivo, quando houver tempo letivo.

2. *Geometria espacial:* elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

- Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções;
- Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos;
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade;
- Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados (BRASIL, 2002, p. 125).

Esses conteúdos são de grande importância para o desenvolvimento do pensamento geométrico e muitas vezes são deixados de lado pelos professores, não dando oportunidade aos alunos para aprendê-los. Quando são ministrados, quase sempre são utilizados desenhos em livros ou na lousa, dificultando assim a percepção da terceira dimensão.

3. *Geometria métrica:* áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.

- Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos;
- Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, os recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos;
- Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro (BRASIL, 2002, p. 125).

Esses conteúdos deveriam ser muito bem compreendidos pelos alunos pela sua aplicabilidade no cotidiano. Ao contrário da proposta, percebemos em diversas situações que os alunos não conseguem fazer uma simples medição.

4. *Geometria analítica:* representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.

- Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos;
- Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada através de diferentes instrumentos matemáticos, de acordo com suas características;
- Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa;
- Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles (BRASIL, 2002, p. 125).

Pelos conteúdos relacionados acima, observamos que, para uma boa compreensão da geometria analítica, faz-se necessário entender bem os conteúdos anteriores. Com isso, é possível perceber alguns motivos que dificultam a aprendizagem da geometria no Ensino Médio, em especial a espacial e a analítica.

A distribuição dos conteúdos nos anos do Ensino Médio tem como objetivo uma boa formação para os alunos. Os temas do primeiro ano devem conduzir os alunos para procedimentos básicos de interpretação e situações simples do cotidiano. No segundo ano começam as demonstrações acerca de mostrar que a disciplina é uma ciência e que é necessária uma mudança no significado, provocando o aluno a pensar nas suas características como fatos e fenômenos. E, por fim, no terceiro e último ano do Ensino Médio ampliam-se os aprendizados, os alunos devem ser capazes de observar e utilizar um grande número de informações e procedimentos de forma que percebam o que significa Matemática e como utilizar conhecimentos matemáticos para resolver situações do cotidiano. O Ensino Médio tem seus conteúdos organizados e distribuídos de acordo com suas séries e temas, com uma carga horária, normalmente, de quatro aulas semanais (BRASIL, 2002).

Quadro 1- Conteúdos propostos para o Ensino Médio

1ª Ano	2ª Ano	3ª Ano
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; sequências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 2. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 2. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
3. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	3. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 4. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
4. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	5. Estatística: análise de dados. 6. Contagem.	3. Probabilidade.

(BRASIL, 2002, p. 127-128)

Observando o quadro de distribuição de conteúdo para o Ensino Médio, percebe-se que a geometria está presente nos três anos do curso. No primeiro ano, traz a geometria plana; no segundo ano, a geometria espacial e métrica; no terceiro ano vem a geometria analítica, que muitos alunos conseguem visualizá-la mais como álgebra que mesmo como geometria.

Percebe-se que a distribuição de conteúdo segue uma sequência lógica de conhecimentos, ou seja, fica bastante difícil de um aluno compreender o conteúdo de um ano sem dominar o conteúdo básico do anterior. Pela proposta observada acima, o aluno que termina o Ensino Médio deveria demonstrar o desenvolvimento do pensamento geométrico no nível 3 (dedução), baseado no modelo van Hiele.

"Ninguém ama o que não conhece": este pensamento explica porque tantos alunos não gostam da Matemática. Se a eles não foi dado conhecer a Matemática, como podem vir a amá-la?

Lorenzato (2002).

SEGUNDO CAPÍTULO

O ENSINO DE GEOMETRIA VISTO EM OUTRAS PERSPECTIVAS

Neste capítulo está apresentado o referencial teórico baseado na geometria como um todo e, especificamente, na geometria espacial. Algumas causas e consequências do abandono do ensino de geometria, como também, a importância da Educação Matemática como disciplina que busca uma metodologia reformulada na tentativa de desenvolver, através de estudos, pesquisas e projetos, ferramentas e tendências metodológicas para aproximar o processo de ensino ao de aprendizagem da Matemática, dando ênfase à geometria no Ensino Médio.

A partir de pesquisas, os teóricos perceberam que os conceitos são construídos pelos alunos de acordo com as experiências vividas e pelos trabalhos dos mediadores, que são os professores, os próprios colegas, os materiais utilizados como ferramentas de ensino, entre outros.

Finalizamos o capítulo destacando algumas habilidades que podem ser desenvolvidas a partir do Laboratório de Ensino de Geometria (LEG) e duas tendências metodológicas de ensino que podem contribuir para o avanço do pensamento geométrico e para o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

2.1. Mudanças no ensino de geometria no Brasil

Com o surgimento da Educação Matemática no século XIX, os professores de Matemática procuravam tornar mais acessível o conhecimento dessa disciplina para os alunos, com isso buscavam uma renovação no método de ensino. Fiorentini e Lorenzato (2009) tomam por base o estudo de Kilpatrick (1992) que cita três fatos determinantes para o surgimento da Educação Matemática como campo profissional e científico.

> O primeiro é o atributo a preocupação dos próprios matemáticos e de professores de Matemática sobre a qualidade da divulgação/socialização das ideias matemáticas ás novas gerações.
> O segundo fato é atribuído à iniciativa das universidades europeias, no final do século XIX, em promover institucionalmente formação do professor secundário. Isso contribuiu para o surgimento de especialistas em ensino de Matemática.
> O terceiro fato diz respeito aos estudos experimentais realizados por psicólogos americanos e europeus, desde o início do século XX, sobre o modo como as crianças aprendiam a Matemática (FIORENTINI & LORENZATO, 2009, p. 6)

Aqui no Brasil a intensificação do movimento para fundação da Educação Matemática, enquanto campo profissional e científico, vai do início dos anos de 1970 aos primeiros anos da década de 1980. Isto culminou com a criação, no final do século XX, de uma comunidade de educadores matemáticos no Brasil, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). A partir daí foram criados dezenas de programas de pós-graduação *stricto sensu* que formam pesquisadores em Educação Matemática.

Segundo Fiorentini & Lorenzato (2009), a Educação Matemática é uma área de conhecimento das ciências sociais ou humanas, que estuda o ensino e a aprendizagem da Matemática.

> Educação Matemática caracteriza-se como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a Matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar (p. 5).

A Educação Matemática tornou-se ao longo do tempo uma área de estudos e pesquisas muito forte, incontestavelmente, na Educação e na Matemática, contextualizada em um campo de pesquisa com o objetivo de melhorar os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática em todos os níveis de ensino.

2.1.1. O atual ensino de geometria no Brasil

A Matemática é vista por muitos alunos como uma das disciplinas mais difíceis, por vezes criando uma barreira entre ela e o interesse pela sua aprendizagem. Dentre outros ramos da Matemática, está a geometria, a qual se preocupa com o estudo de formas e medidas de figuras planas e espaciais e suas propriedades, dentre outros objetos.

Segundo Pavanello (1993), é impossível datar exatamente quando começaram a se desenvolver os conhecimentos geométricos. A agricultura contribuiu de muitas maneiras para o desenvolvimento do conhecimento geométrico, de forma empírica, de geração a geração, entre povos que viviam na Mesopotâmia e no Egito. Já na construção civil, necessariamente, desde seu princípio houve uso de técnicas e conhecimentos da Matemática, principalmente de geometria, conceitos como áreas e volumes.

Andrade (2004), em sua dissertação, nos mostra que a geometria, que era considerada uma disciplina separada da Matemática, teve origem entre 600 e 300 a.C., firmando-se como um sistema organizado, que por muito tempo ficou conhecida apenas pelos elementos de Euclides. Fiorentini (1995) diz que a obra de Euclides[7]se caracteriza pela sistematização lógica do conhecimento matemático a partir de elementos fundamentais (definições, axiomas, postulados). Outros campos do conhecimento se apoderaram do conhecimento geométrico para resolver algumas situações, como, por exemplo: a Astronomia, que estuda o espaço sideral; a Geografia, no estudo do solo e dos mapas; e a História, ao identificar que os antigos utilizavam blocos para deixar gravadas diversas mensagens.

Um fato marcante e revolucionário ocorrido no desenvolvimento da geometria foi a descoberta das geometrias não euclidianas, a partir de investigações em torno do quinto postulado de Euclides (PAVANELLO, 1993).

Segundo Santos & Nacarato (2014), o ensino de geometria no Brasil passou por várias mudanças. Até 1960, ele baseava-se nos estudos de Euclides. Entre os anos 1970 e 1980 teve uma grande influência do Movimento da Matemática Moderna (MMM), que tinha ênfase na linguagem, dificultando assim a compreensão dos conceitos. Esse ensino era irrelevante para a formação intelectual do aluno, segundo alguns matemáticos, contribuindo de forma imprescindível para o abandono e a deficiência em seus conhecimentos.

Até meados da década de 1990, comparada a outros ramos da Matemática, a geometria foi um pouco desvalorizada. Professores, educadores e pesquisadores se deparavam bastante com a dificuldade de dar mais ênfase ao estudo da geometria, com isso os alunos chegavam ao Ensino Médio com um baixo nível de raciocínio geométrico. No Brasil a situação era bem pior. Lorenzato (1995), Peres (1991) e Pavanelo (1993), entre outros trabalhos de

[7] Estudioso da academia de Platão, que produziu uma extensa obra, tendo como sustentação os axiomas e o método dedutivo. Sua obra maior, *Os elementos*, representou a primeira axiomatização da história da Matemática.

pesquisadores brasileiros, confirmaram a realidade educacional no nosso país, constatando que a geometria estava ausente, ou quase ausente, da sala de aula.

Depois dos Parâmetros Curriculares Nacionais e do Programa Nacional do Livro Didático, autores de livros didáticos passaram a tratar o conteúdo de geometria com mais importância, todavia o ensino desse conteúdo ainda não contempla os objetivos propostos pelos PCN+, elaborados em 2002.

> Não acreditamos, porém, que esta esteja totalmente ausente das salas de aulas, visto que muitos de seus conteúdos têm sido cobrados nas avaliações externas (no âmbito federal, estadual ou municipal). No entanto não sabemos como tais conteúdos têm sido abordados e o quanto eles têm contribuído para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos (SANTOS & NACARATO, 2014, p. 10).

Concordamos com os autores, percebendo a mudança nos livros didáticos, nos currículos e em muitos trabalhos desenvolvidos no âmbito da Educação Matemática, que procuram tratar a geometria de uma forma adequada, buscando algumas tendências que facilitem seu ensino e, consequentemente, sua aprendizagem.

Rêgo, Rêgo & Vieira (2012) concordam que houve abandono de ensino de geometria no Brasil depois do MMM, ressaltando que:

> A ênfase dada aos aspectos algébricos da Matemática nas décadas de 1960 e 1970, com o MMM, provocou o abandono do campo geométrico em nossos programas escolares. Os conhecimentos desse campo hoje são reconhecidos como de inquestionável importância para a formação de nossos alunos, que consideremos os aspectos didáticos, históricos ou científicos (p. 10).

Dentre inúmeras causas para tal omissão, duas aparecem mais fortemente claras em sala de aula. Uma pesquisa de Lorenzato, realizada em 1993, que resultou na publicação do texto *Os por quês matemáticos dos alunos e as respostas dos professores*, mostra que muitos professores não detêm os conhecimentos necessários para realização de suas práticas pedagógicas, configurando assim a primeira causa.

> Considerando que o professor que não conhece geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la (LORENZATO, 1995, p. 3-4).

É importante observar que essa dificuldade do contato do professor com os conteúdos relacionados à geometria se dá na formação acadêmica e suas consequências aparecem quando eles lecionam no Ensino Fundamental e Médio.

> Nesse sentido, o pouco contato dos professores com o conteúdo geométrico propiciou que a sua prática também se tornasse deficitária, e isso vem, de certa forma, se arrastando até os dias atuais. Mesmo com mudanças no livro didático, o professor ainda se sente inseguro para ensinar geometria, o que evidencia que os dois lados do binômio aprender-ensinar estão intimamente interligados, ou seja, só temos condições de ensinar aquilo que conhecemos (SANTOS & NACARATO, 2014, p. 15)

A segunda causa é a importância que se dá ao livro didático, em razão de problemas como a má formação ou excessiva jornada de trabalho. Na maioria dos livros didáticos a geometria era apresentada por meio de definições, propriedades, fórmulas, nomes, dessa forma os alunos não conseguiam relacioná-la com o cotidiano, com isso não atribuíam significados para os conteúdos pelo simples fato de não ter sentido algum para construção do conhecimento. Isso quando a geometria não vinha apresentada no final do livro didático, com isso não havia tempo letivo para ser trabalhada com os alunos.

Segundo Lorenzato (1995, p.4), "a geometria é uma das mais belas páginas do livro dos saberes matemático e recebia uma grande contribuição dos livros didáticos para que fosse realmente deixada de lado na sala de aula".

Para Pirola (2000), o abandono da geometria também acontece na formação de professores, tanto no Ensino Médio como no Superior. O autor acima citado realizou um estudo de investigação no Curso de Magistério e de Licenciatura em Matemática no ano de 2000 e constatou que muitos alunos não tinham conhecimentos básicos sobre área, perímetro e volume. Alguns conseguiam resolver problemas envolvendo encontrar a área de um triângulo, porém não atribuíam sentido ou significado, apenas sabiam manipular números e realizar algumas operações.

> A ênfase do ensino de geometria está concentrada mais nos aspectos algébricos e aritméticos sendo que os conceitos geométricos ficam à mercê de sobra de tempo, pois a geometria só é ensinada se houver tempo no final do ano, caso contrário, a responsabilidade de ensiná-la ficará para o professor da série seguinte (PIROLA, 2000, p. 20)

Pavanello (1993) e Pirola (2000) observaram que a ênfase do Ensino Médio tem-se centrado na valorização da álgebra e, consequentemente, no abandono do ensino de geometria. Isso pode prejudicar a formação dos alunos, pois dificulta aos estudantes desenvolverem componentes básicos do pensamento geométrico, como a orientação espacial, a percepção, a representação *etc*.

> Quando passamos para o mundo tridimensional da geometria espacial passamos a enfrentar limitações de diversas ordens. Em primeiro lugar, pelo menos com a tecnologia atual, não dispomos de uma forma prática para representar com fidelidade objetos tridimensionais. Em geral recorremos a projeções bidimensionais de tais objetos (CARVALHO, 1999, p. 1).

Quando os alunos do Ensino Médio são inseridos no estudo da geometria espacial, espera-se que os estudantes já dominem os conceitos básicos da geometria plana, o que nem sempre é verdadeiro. Um modo de tentar amenizar os problemas causados pela transição da geometria plana para a espacial é inverter o processo. Ao invés de começar o estudo com a geometria plana, recomenda-se começar esse estudo pela geometria espacial, como preconizam os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Para que os alunos se apoderem dos conhecimentos de geometria, é necessário que o professor de Matemática aproxime, o máximo possível, o cotidiano do aluno com os conteúdos de geometria, com o intuito de possibilitar um espaço adequado para que o aluno possa desenvolver seu pensamento geométrico. Para isso, a metodologia, os recursos didáticos e os materiais manipuláveis poderão contribuir de forma significativa.

> Há fortes indicações de que insistir no ensino de geometria por meio da aula expositiva, utilizando a linguagem formal, sem envolver o aluno em atividades práticas, não permite que a maioria destes desenvolva conhecimentos que respondem às demandas de saberes matemáticos atuais – sejam formativas ou funcionais (RÊGO, RÊGO & VIEIRA, 2012. p. 6).

Segundo uma perspectiva vygostskyniana, a aprendizagem acontece antes do desenvolvimento, dependendo da prática pedagógica utilizada. Dessa forma, para proporcionar um avanço no desenvolvimento do pensamento geométrico, como por exemplo, os sólidos geométricos e as figuras que formam esses sólidos, as propriedades e conceitos envolvidos, estão diretamente ligados aos materiais e suas diversas maneiras de serem utilizados pelos professores, de forma que os alunos possam manipular desenhar e visualizar os objetos estudados no meio em que vivem.

> O desenho é um recurso didático importante; no entanto, no ensino de geometria espacial, o desafio é maior, pois muitos alunos possuem

> dificuldade para desenhar em perspectiva. Daí a importância de um trabalho simultâneo com a manipulação de objetos tridimensionais e a sua representação por desenhos, no plano bidimensional (SANTOS & NACARATO, 2014, p. 18).

Na construção do conhecimento científico, aquele adquirido a partir do ambiente escolar, é importante levar em consideração os conceitos espontâneos, do cotidiano, trazidos pelas crianças. Cabe à escola promover esse conhecimento, para isso o professor é o mediador para que as crianças sejam mobilizadas para realizar as tarefas planejadas por ele.

Para Rêgo, Rêgo & Vieira (2012), os conceitos são construídos pelo aluno de acordo com as experiências e trabalhos dos mediadores (professores, colegas, materiais instrucionais, entre outros), para que os alunos encontrem sentido e significado para os conteúdos de geometria estudados.

Para aprendizagem de geometria, há a necessidade de que o aluno siga uma série de procedimentos e conceitos associados a representações de figuras e sólidos geométricos, utilizando estratégias como o desenho, o domínio do método de medição, entre outras. Para isso, com o auxílio do professor, o aluno precisa desenvolver determinadas atitudes, como bons métodos de estudo, autoconfiança, conhecimento de seus limites, em busca da certeza de que é possível construir seu conhecimento para que tenha uma visão científica de mundo.

> A geometria, em particular, possibilita o desenvolvimento de atitudes positivas, pois permite que o aluno associe mais facilmente os seus conhecimentos à realidade, compreendendo-a melhor, ou que a represente em duas ou três dimensões, em uma linguagem formal e elaborada do ponto de vista científico (RÊGO, RÊGO & VIEIRA, 2012, p.8).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio referente a Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias (BRASIL, 2006) trouxeram contribuições importantes para que possamos, enquanto educadores, fazer com que os alunos desenvolvam essas atitudes e percebam a aplicabilidade das disciplinas no cotidiano, especificamente da Matemática. Muitas vezes, os professores ignoram as propostas curriculares oficiais, assim sua prática pedagógica, em geral, não se identifica com os currículos e orientações metodológicas de tais propostas. Pode ser que isso ocorra não porque tais professores estejam em desacordo com elas, mas porque não tiveram oportunidade de analisá-las ou até conhecê-las.

O professor, em geral, toma como referência para suas aulas um único livro didático, sem ter oportunidade de conhecer e analisar a proposta do autor, suas concepções de Matemática no ensino (FONSECA *et al*. 2011).

Fonseca *et al.* (2011) sugerem que o professor, antes de abordar os conteúdos de geometria, faça um levantamento para confrontar com outros documentos importantes que analisam geometria, como propostas curriculares, outros livros didáticos, materiais paradidáticos ou de apoio didático, publicações em periódicos especializados e trabalhos apresentados em congressos. Com isso, o professor, ao fazer esse confronto, tem condições de analisar, inclusive, as diversas tendências metodológicas de ensino, para assim utilizar as mais adequadas na sua prática pedagógica.

Ainda segundo Fonseca *et al.* (2011), se considerarmos que os conceitos geométricos são representações mentais e não fazem parte desse mundo sensível, o maior desafio do ensino de geometria é como passar da representação concreta para a representação mental.

Um dos propósitos da Educação Matemática é pesquisar e apresentar formas de ensino que se constituam em reflexões sobre o trabalho docente, o que resulta em ferramentas diversificadas e tendências de ensino que se baseiam em teorias norteadas por pesquisadores em busca de melhorar suas metodologias para que possam contribuir de forma mais efetiva para aprendizagem dos alunos em sala de aula.

2.2. Laboratório de Ensino de Geometria

Alguns educadores matemáticos ressaltam a importância de algumas ferramentas para facilitar a aprendizagem dos alunos. Entre outros, Lorenzato (2010), Rêgo & Rêgo (2010) e Rêgo, Rêgo & Vieira (2012) trazem como ênfase o Laboratório de Educação Matemática (LEM), com o objetivo de produzir nas instituições de Ensino Fundamental, Médio e Superior, sugestões de materiais concretos e manipuláveis que possam ser utilizados em sala de aula, facilitando e barateando a reprodução desses materiais que servem como ferramentas de ensino.

Lorenzato (2010) prioriza o LEM, pois, segundo ele, facilita e aprimora as práticas do ensino e da aprendizagem de Matemática, enfatizando que o LEM deve ser o centro da vida matemática na escola. Diante de algumas concepções diferenciadas em relação ao o que é um LEM, ele o define da seguinte forma:

> O LEM pode ser um espaço especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras e para auxiliar no equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento mas imprevistas na prática, em virtude dos questionamentos dos alunos durante as aulas. Nesse caso o professor pode precisar de diferentes materiais com fácil acesso. Enfim, o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar,

> planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto aos alunos como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender (p. 7).

Com relação ao LEM, Rêgo & Rêgo (2010), falam que as atividades realizadas são voltadas ao desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, com uma formação geral dos alunos, que os auxiliem em:

> I. Ampliar sua linguagem e promover a comunicação de ideias matemáticas;
> II. Adquirir estratégias de resolução de problemas e de planejamento de ações;
> III. Desenvolver sua capacidade de fazer estimativas e cálculos mentais;
> IV. Iniciar-se nos métodos de investigação científica e na notação matemática;
> V. Estimular sua concentração, perseverança, raciocínio e criatividade;
> VI. Promover a troca de ideias por meio de atividades em grupo;
> VII. Estimular sua compreensão de regras, sua percepção espacial, discriminação visual e a formação de conceitos (p. 43-44).

Observando a importância e os objetivos do uso do LEM, percebe-se que utilizando alguns materiais manipuláveis e de baixo custo é possível construir um Laboratório de Ensino de Geometria (LEG) para o desenvolvimento de atividades envolvendo essa área da Matemática.

Dentre tais conhecimentos matemáticos, em nossa pesquisa damos destaque àqueles que contribuem para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Em outro trabalho realizado, Rêgo, Rêgo & Vieira (2012) destacam algumas habilidades que o LEG pode desenvolver na aprendizagem dos alunos.

> Entre as habilidades que se espera desenvolver no Laboratório de Ensino de Geometria, destacamos a percepção espacial, a elaboração de um sistema de propriedades de figuras, o domínio de uma linguagem de representação gráfica das figuras e formas geométricas, além do estudo de medidas (leitura e elaborações de mapas, construção de maquetes a partir de mapas, composição e decomposição de figuras, relações de medida entre diferentes elementos de uma figura geométrica, relações de medidas entre figuras semelhantes, construção de modelos, entre outras) (p. 16).

Lorenzato (2010) observa que muitos desses laboratórios têm objetivos diversificados, uns com abrangência mais teórica e outros voltados para a prática. Kaleff (2010) diz que o objetivo central do LEG é o desenvolvimento de materiais e métodos para aprimorar as habilidades dos alunos do Ensino Fundamental e Médio. O LEG não tem como característica principal ser um repositório de materiais concretos manipulativos, mas um espaço que possa disponibilizar maneiras diversificadas de se representar figuras geométricas por meio de modelagem concreta.

Segundo Kaleff (2010), uma das vertentes teórico-metodológicas que fundamentam as ações do LEG se encontra no modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento em geometria, que abrange duas dimensões teóricas fundamentais: a primeira propõe uma sequência hierárquica de níveis de pensamento que visam o desenvolvimento cognitivo do aluno relacionado ao conhecimento geométrico. A segunda sugere fases de ensino bem determinadas, dando oportunidade do aluno potencialmente progredir ao longo dos níveis, como apresentamos com mais detalhes no próximo capítulo.

Observamos que Rêgo, Rêgo & Vieira (2012) dão destaque a um laboratório de ensino, especificamente de geometria, com objetivos de facilitar a organização das atividades para que o aluno possa construir conceitos geométricos. Para isso, sugerem uma lista de materiais básicos que poderão ser produzidos para compor esse acervo, indicados para os processos de ensino e aprendizagem de geometria plana e espacial e para o estudo de medidas e grandezas.

- Modelos de sólidos geométricos (em madeira ou cartão).
- Embalagens de diversas formas.
- Quebra-cabeças geométricos espaciais (ex: Soma cubo, Pirâmide de duas ou três peças) e planos (ex: Tangram, Ovogram, Falácias geométricas, Pentaminós).
- Material de desenho (régua, esquadros, transferidor, compasso).
- Instrumentos de medição (ex: fitas métricas, paquímetros, vasilhames milimetrados, balanças, termômetros).
- Geoplanos (ex: circulares, retangulares com malha quadriculada, malha triangular).
- Blocos cúbicos (em espuma, cartão ou outro material).
- Geoespaços.
- Espelhos (ex: simples, articulados, calidoscópios).
- Construções geométricas diversas (com canudos, arame, palitos, entre outros).
- Elementos da natureza (ex: sementes, folhas secas, conchas).
- Reproduções de pinturas (ex: Paul Klee, Volpi, Picasso, Kandinsky, Escher).
- Móbiles com figuras geométricas.
- Jogos envolvendo geometria (ex: Quatro, O Gato, Dominós, Trilhas; Teorema de Pitágoras).
- Problemoteca de Geometria (conjunto de cartões contendo problemas diversos envolvendo elementos de Geometria Plana e Espacial, desafios com palitos de fósforos, problemas sobre secções planas e espaciais etc.).
- Fitas de vídeo e softwares diversos (vídeos do acervo da TV Escola; softwares com Cabri Geometrie, Geogebra, Iigeo, Poli, Tabulae etc.

> – alguns gratuitos, disponíveis na internet, filmes, como por exemplo, Numbers) (p. 17- 18).

É importante salientar que a utilização desses materiais não garante a construção dos conceitos geométricos, a simples manipulação dos objetos concretos não é suficiente para tal construção. Ao professor cabe mediar esse estudo, de forma que os alunos possam refletir, discutir entre eles e com o professor, baseados nos conhecimentos já adquiridos, para garantir uma aprendizagem mais efetiva. O professor não deve manipular os objetos, realizar os procedimentos, nem fazer conclusões. Conforme Rêgo, Rêgo & Vieira (2012, p.18), "é importante que o aluno faça as atividades, participando de todo o processo, atuando como sujeito na construção de seu conhecimento".

Para Turrioni & Perez (2010, p. 61),

> O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem, facilitando a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos.

Segundo Mendes (2009), é importante que o professor perceba a necessidade de relacionar esses materiais com as operações que estão sendo utilizadas, para que esse material faça parte do processo cognitivo do aluno. A aprendizagem é um processo contínuo que não se reduz apenas à manipulação desses objetos, mas ocorre também na relação de abstração realizada em cada atividade.

Todo material utilizado nos processos de ensino e aprendizagem são considerados didáticos, como um giz, um livro, um filme ou uma embalagem. É possível perceber uma grande diversidade de materiais que podem ser utilizados como um dos inúmeros fatores para melhorar o rendimento escolar.

Dentre os materiais didáticos, alguns possibilitam modificações em suas formas, permitindo uma maior participação do aluno, transformações, descobertas, percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem, caracterizando-se como material concreto (LORENZATO, 2010).

A potencialidade do material utilizado em sala de aula pode ou não influenciar o aluno, vai depender de como foi empregado pelo professor. Concordamos com Lorenzato (2010), com relação à diferença pedagógica entre uma aula exclusivamente oral, apresentada pelo professor, e aquela em que o aluno manuseia o material ou constrói esse material. Foi o que propomos na nossa pesquisa, na realização da sequência de atividades, em sala de aula.

> Talvez a melhor das potencialidades do material didático seja revelada no momento de construção pelos próprios alunos, pois é durante esta que surgem imprevistos e desafios, os quais conduzem os alunos a fazer conjecturas e a descobrir caminhos e soluções (LORENZATO, 2010, p. 28).

Acreditamos que, dessa forma, os alunos conseguem compreender melhor as propriedades e conceitos dos sólidos que produzem.

Segundo Passos (2010), um material manipulável é considerado bom quando apresenta aplicabilidade para modelar um grande número de ideias matemáticas, quando proporciona uma verdadeira personificação dos conceitos ou das ideias matemáticas a serem exploradas. Passos também alerta que as experiências através dos recursos manipuláveis não podem ser desvinculadas da existência de uma intuição.

> Há que se fazer duas considerações a respeito das finalidades da utilização do material concreto: uma relativa às faculdades sintéticas da criança, as quais permitem ao aluno construir o conceito a partir do concreto; e outra relativa às faculdades analíticas, em cujo processo o aluno deve distinguir no objeto elementos que constituem a globalização (CASTELNUOVO, 1970, citado por PASSOS, 2010, p. 88).

Para Kaleff (2010), tanto os materiais concretos quanto os visuais só cumprem o papel de mediador lúdico, para atrair o desenvolvimento das habilidades e conceitos geométricos, quando o professor tem clareza do papel dessas habilidades e de suas relações.

Com isso, busca-se que, a partir da manipulação dos materiais concretos, os alunos consigam compreender propriedades e conceitos, sendo capazes de abstrair e observar em situações diversas a importância e aplicabilidade da Matemática. Para tanto, apresentamos duas tendências metodológicas que contribuem para o ensino de geometria.

2.3. Tendências metodológicas para o ensino de geometria

Para Lopes e Borba (1994), tendência metodológica de ensino é uma forma de trabalho que surgiu a partir da busca de soluções para os problemas da Educação Matemática, apresentadas sob diferentes posições epistemológicas. A partir do momento que é usada por muitos professores, ou mesmo pouco utilizada, que resulte em experiências bem sucedidas, estamos diante de uma tendência.

> Estudos modernos sobre a ciência em geral têm nos ensinado que a pesquisa científica sempre está vinculada a uma ou outra pressuposição de ordem

> ontológica e/ou epistemológica. Não poderia ser diferente com a Educação Matemática. Assim, essa área de Educação tem se estruturado com base em algumas tendências, amparadas em várias concepções filosófico-metodológicas, que norteiam o pesquisador na sua busca de um ensino mais eficaz (MENDES, 2009, p. 24).

Percebe-se com isso que a utilização de uma tendência adequada nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática nos diversos níveis de ensino pode contribuir para que os professores e alunos vivenciem uma forma diferente e mais prazerosa de ensinar e aprender Matemática.

Diante das tendências no ensino da Matemática atualmente, analisamos duas que se relacionam, de forma mais abrangente, com o estudo da geometria no Ensino Médio e que foram utilizadas no planejamento e realização da nossa pesquisa. Dentre outras possibilidades, desenvolvemos atividades envolvendo *Investigação Matemática e uso de tecnologias* e *Modelagem Matemática*.

Podemos dizer, entretanto, que as tendências apresentadas sintetizam parte do esforço feito pela comunidade na Educação Matemática em superar a noção de que a Matemática só pode ser apreciada por poucos (LOPES & BORBA, 1994).

2.3.1. Investigação matemática e uso de tecnologias

Pesquisadores em Educação Matemática têm buscado, nos dias atuais, estratégias eficazes para o ensino e aprendizagem da geometria. Com o intuito da democratização do acesso a esse saber, haja vista o consenso entre docentes e discentes em relação a sua não aprendizagem pela maioria dos que iniciam seu estudo. Diante dessa problemática, acompanhamos discussões e sugestões acerca da utilização de diversos instrumentos mediadores, desde o uso da dobradura até os *softwares* educativos. Essa diversidade tem como função criar o maior número possível de situações de aprendizagem e, com elas, oferecer diferentes representações de um mesmo objeto geométrico, aumentando as possibilidades de acesso ao saber geométrico (NEVES, 2008).

De acordo com Fillos [s.d.], a geometria pode ser descrita como um corpo de conhecimentos fundamental para a compreensão do mundo e participação ativa do homem na sociedade, pois facilita a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento e desenvolve o raciocínio visual. Portanto, o laboratório de ensino da geometria pode ser um ótimo recurso ao processo de ensino e de aprendizagem dos estudantes. Assim, o uso de artefatos, como o geoplano, geoespaço e *software* como *Geogebra*, *Cabri Géometre*, *Polly* e outros podem favorecer a aprendizagem dos educandos.

Almeida (2006) argumenta que a geometria, assim como os demais ramos da Matemática, deve ser ensino rompendo-se com a forma tradicional que vem ocorrendo. Segundo seus argumentos, é necessária uma reflexão tanto sobre o desenvolvimento da geometria enquanto construção humana, quanto sobre a forma como ela é ensinada, incorporando-se a tecnologia do presente. Almeida sugere ainda "que os alunos devem notar como os conceitos e ideias da geometria se aplicam na ciência, na arte e no mercado, além de experimentá-la ativamente. O uso da informática no currículo escolar pode ser uma maneira de propiciar isto" (ALMEIDA, 2006, p. 11).

Para Van de Walle (2009), a tecnologia é uma ferramenta essencial para ensinar e aprender Matemática de forma efetiva; ela amplia a Matemática que pode ser ensinada e enriquece a aprendizagem dos estudantes. O autor ainda ressalta que o termo tecnologia no contexto de Matemática escolar se refere a calculadoras de qualquer tipo e a computadores, incluindo o acesso à *Internet* e outros recursos disponíveis (*software*, aplicativos, ferramentas) para uso com esses dispositivos.

Segundo Ponte (1995), o uso das tecnologias, em especial o computador, contribui bastante para o ensino de Matemática:

> - Uma relativização da importância das competências de cálculo e de simples manipulação simbólica, que podem ser realizadas de forma mais rápida e eficiente;
> - Um reforço do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem dos mais variados problemas;
> - Uma atenção redobrada às capacidades intelectuais de ordem mais elevada, que se situam para além do cálculo e da simples compreensão de conceitos e relações matemáticas;
> - O crescimento do interesse pelo desenvolvimento de projetos e atividades de modelagem matemática e investigação (p. 2).

A utilização do computador como uma ferramenta no ensino de geometria pode estabelecer uma nova relação entre professor e aluno. Deste modo, o professor necessita também buscar novos conhecimentos para que possa utilizar novas estratégias construindo assim essa interação.

> As novas tecnologias colocam desafios irrecusáveis à atividade educativa dada a sua possibilidade de proporcionar poder ao pensamento matemático e estender o alcance e a profundidade das aplicações desta ciência. Trata-se de

> poderosas ferramentas intelectuais, que permitem automatizar os processos de rotina e concentrar a nossa atenção no pensamento criativo. Mas estas tecnologias não ensinam por si só. Ao professor cabe um papel decisivo na organização das situações de aprendizagem (PONTE, 1995, p. 2).

Segundo Ponte (2010), as atividades propostas na sala de aula podem ser abordadas de diferentes maneiras, sendo elas: *exercício* – atividade que pode ser resolvida de forma mecanizada com base em conhecimentos prévios; *problema – atividade* que pode ser resolvida de forma mecanizada, mas diferencia-se do exercício por não propor uma solução imediata; e a *investigação*, a qual é concebida como um problema com maior complexidade estrutural, em que a questão não se encontra bem definida inicialmente e que nem sempre se chega a uma resposta.

> Investigar, em Matemática, inclui a formulação de questões, que frequentemente evoluem à medida que o trabalho avança. Investigar envolve, também, a produção, a análise e o refinamento de conjecturas sobre essas mesmas questões. E, finalmente, envolve a demonstração e a comunicação dos resultados (PONTE, 2010, p. 15).

Segundo Braumann (2002), compreender Matemática não é apenas resolver uma situação já conhecida, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática, sem que possamos saber qual o resultado que será obtido. Com isso, o aluno pode perceber que a Matemática e sua utilização fazem parte do nosso cotidiano e com o conhecimento adequado podemos interferir na construção do mundo.

Fonseca, Brunheira & Ponte (1999) destacam que "uma investigação é uma viagem até ao desconhecido. A ideia pode ser ilustrada pela metáfora geográfica de Susan Pirie: 'o importante é explorar um aspecto da Matemática em todas as direções. O objetivo é a viagem e não o destino'". Diferentemente da resolução de problemas, em que as situações convergem para uma resposta, a investigação tem como objetivo analisar e explorar todos os caminhos que sejam interessantes, sem mesmo ter a certeza de chegar à resposta correta, ou seja, sabe-se o ponto de partida mas não o ponto de chegada.

A investigação nas aulas de Matemática ainda está muito ausente, as atividades de Matemática são definidas em resolução de problemas, que muitas vezes não se caracterizam em verdadeiros problemas para os alunos. Para fazer Matemática de forma que os alunos tenham interesse e a torne importante no seu currículo é necessário investigar, ou seja, "desenvolver e usar um conjunto de processos característicos da atividade Matemática" (ABRANTES, FERREIRA, OLIVEIRA, 1995, p. 243).

Ponte, Brocardo & Oliveira (2009, p. 13) destacam que:

> Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. Com um significado muito semelhante, senão equivalente, temos em português os termos “pesquisar” e “inquirir”. Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades.

Percebe-se que investigar é um processo bem mais complexo e interessante para os alunos que a resolução de problemas, pois uma investigação matemática se desenvolve em torno de um ou mais problemas.

Os alunos podem seguir alguns caminhos que não chegarão à resposta nenhuma, porém o professor não deverá conduzi-lo imediatamente ao caminho certo, o próprio aluno vai descobrir, através de tentativas e experiências, que irá descobrindo durante a investigação, com isso podendo até percorrer caminhos que o professor ainda não tinha percebido. É importante que o professor esteja sempre alerta para situações distintas que possam levar a descobertas interessantes e que contribuam para construção do conhecimento matemático.

> A discussão final sobre a atividade dos alunos é também uma boa ocasião para promover a reflexão sobre o trabalho, sabendo que esta é um elemento indispensável numa aula de investigação. Como referem Bishop e Goffree (1986) à aprendizagem não resulta simplesmente da atividade, mas sim da reflexão sobre a atividade. Deste modo é fundamental, proporcionar aos alunos momentos onde possam pensar, sobretudo, refletir sobre a atividade realizada (FONSECA, BRUNHEIRA& PONTE, 1999, p. 9).

É importante ressaltar que o professor continua sendo o principal ator dos processos de ensino e aprendizagem, cabendo-lhe dar mais autonomia e ideias aos alunos, para que possam compreender o que significa de fato uma atividade de investigação em Matemática.

Ocorrendo investigação nas aulas de Matemática, utilizando os diversos recursos tecnológicos que temos em mãos, os alunos poderão se sentir mais incluídos no processo, percebendo que a Matemática pode contribuir de forma significativa para o seu desenvolvimento cognitivo.

2.3.2. Modelagem no ensino de geometria

A Matemática é uma disciplina que a cada dia vem se transformando em um instrumento muito importante na sociedade para responder diversas situações do dia a dia de forma pragmática e resolutiva. Com isso, a modelagem matemática se tornou ao longo de anos de pesquisa uma tendência muito importante e eficaz para compreensão e resolução de situações-problema do cotidiano.

Segundo Mendes (2006), a utilização da modelagem como tendência metodológica de ensino conduz o aluno a seguir uma lógica viva de descoberta, ao contrário de uma lógica estática de organização e procedimentos já conhecidos. Dessa forma, os conteúdos matemáticos ganham significados e são redescobertos, dando aos alunos condições de perceberem o processo de formalização de tais conteúdos.

Uma proposta como essa de uso da modelagem matemática é diferente do que geralmente se propõe no ensino da Matemática, que segue uma tendência formalista, fundamentada somente em axiomas, definições e teoremas, muitas vezes sem sentido algum para o aluno.

> A Matemática aplicada é essencialmente interdisciplinar e sua atividade consiste em tornar aplicável alguma estrutura matemática fora do seu campo estrito; a modelagem, por sua vez, é um instrumento indispensável da Matemática aplicada. A construção matemática pode ser entendida nesse contexto, como uma atividade em busca de sintetizar ideias concebidas a partir de situações empíricas que estão quase sempre, escondidas num emaranhado de variáveis. Fazer matemática, nesta perspectiva, é aliar, de maneira equilibrada, a abstração e a formalização não perdendo de vista a fonte originária do processo (BASSANEZI, 1999, p. 13).

Segundo Bassanezi (2002), os platonistas afirmam que os objetos matemáticos existem independentemente do nosso conhecimento sobre ele. A modelagem combate as atitudes intelectuais que buscam o conhecimento de práticas e de experiências sensoriais ou intuitivas. O autor confirma que os platonistas afirmam que o matemático não inventa, mas descobrem as coisas já existentes, apreendendo-as essencialmente pela via da razão.

A modelagem vem sendo utilizada para quebrar a divisão existente entre a Matemática escolar formal e sua aplicabilidade na vida real. Mendes (2006, p. 11), diz que, “os modelos matemáticos são vistos como formas de estudar e formalizar fenômenos do dia a dia a fim de que o aluno se torne consciente da utilidade da Matemática para resolver e analisar problemas do cotidiano”.

Para Barbosa (2001), a definição de modelagem como ambiente de aprendizagem se dá da seguinte forma:

> Modelagem pode ser entendida em termos mais específicos. Do nosso ponto de vista, trata-se de uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da Matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento. Os conceitos e ideias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade (p. 5).

Segundo Bassanezi (2002), a modelagem pode ser considerada como uma das tendências ou dos caminhos pedagógicos que despertam maior interesse, que ampliam o conhecimento dos alunos e que os auxiliam a estruturar a maneira pela qual eles pensam, raciocinam e agem. Esta tendência de ensino tem como objetivo desenvolver a formação de alunos críticos, reflexivos, e que estejam atentos aos diferentes problemas que são enfrentados no cotidiano. No entanto, para que este objetivo seja atingido, é necessário que os alunos estejam inseridos em um ambiente de aprendizagem que facilite a utilização do conhecimento matemático espontâneo, que eles previamente adquiriram na escola e na comunidade na qual estão inseridos.

Barbosa (2001) utiliza a noção de ambiente de aprendizagem de Skovsmose (2002) para se referir às condições nas quais os alunos são estimulados a desenvolverem determinadas atividades. O termo ambiente está relacionado a um lugar ou espaço em que o aluno sinta-se envolvido. Para o autor, o ensino tradicional também é um ambiente de aprendizagem, assim como a história da Matemática é um recurso didático em que os alunos também desenvolvem certas atividades que possam trazer conhecimentos. Já a modelagem estimula os alunos a fazer uma investigação de situações que estejam relacionadas ou não com a Matemática.

“Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (BARBOSA, 2001, p. 6). Assim, a modelagem pode ser entendida como um ambiente (lugar, espaço) de aprendizagem, que tem como objetivo facilitar a investigação de uma situação do cotidiano através da elaboração de atividades contextualizadas, que auxiliem os alunos na conversão e na utilização dos conhecimentos matemáticos implícitos ou explícitos para a resolução de situações que são propostas nesse ambiente.

De acordo com Mendes (2006), a modelagem apresenta-se associada à construção de um modelo abstrato descritivo de algum sistema concreto, cujas características gerais são apresentadas assim:

- Formulação do problema;
- Construção do modelo matemático que represente o sistema de estudo;
- Dedução para o modelo;
- Testagem do modelo e a solução deduzida por ele (p. 12).

A modelagem sendo utilizada dessa forma pode quebrar a dicotomia que existe entre a Matemática escolar formal e a utilizada na vida real, sendo assim os modelos são vistos como formas de formar e formalizar situações diárias. A partir da formulação e entendimento do problema é possível construir um modelo que possa ser analisado e discutido a respeito da realidade investigada, criando diversas possibilidades de sistematização matemática, na tentativa de compreender o conceito acadêmico embutido no modelo. Enfim, é importante a compreensão dos termos matemáticos e a classificação do modelo, apenas como uma representação da situação observada.

> *[...] na dinâmica da conceitualização geométrica, o percurso é diferente de outras áreas do conhecimento, em que os conceitos científicos são tratados a partir dos conceitos cotidianos das pessoas. Nos pressupostos teóricos de Vygotsky, os conceitos cotidianos mediam a vivência com os objetos, são eles que fundamentam e dão a base vivencial para os conceitos científicos.*
>
> *Nacarato, (2000).*

TERCEIRO CAPÍTULO

O MODELO VAN HIELE E A INTERAÇÃO SOCIAL DE VYGOTSKY

Será apresentado, neste capítulo, o referencial teórico como forma de refletir sobre os estudos dos níveis e das fases, propostos por van Hiele, referentes à geometria e sua aprendizagem. Os níveis serviram como parâmetro e ponto de partida deste estudo, enquanto as fases foram importantes para nortearem a elaboração da sequência de atividades realizada nesta pesquisa. A partir da discussão teórica de van Hiele e de outros teóricos, buscamos reflexões sobre o uso de materiais didáticos, com o objetivo de favorecer de forma mais efetiva o ensino de Matemática e, particularmente, de geometria, por meio da identificação do desenvolvimento do pensamento geométrico.

Nesta pesquisa, as contribuições da teoria vygotskyniana estão focalizadas na reflexão do trabalho em grupo, ao considerar, conforme Vygotsky (1991), que o conhecimento é reconstruído, ou co-construído, através de relações interpessoais mediadas por signos e artefatos. Por isso, consideramos a aprendizagem escolar um tipo de socialização específica, sendo o principal acelerador para a construção de conhecimentos. Sendo assim, foram valorizadas as inter-relações dos sujeitos com o ambiente em que vivem na construção do conhecimento, dando ênfase à Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), ao considerarmos que alunos com mais habilidades geométricas auxiliam outros que enfrentam dificuldades de aprendizagem, considerando que estes têm potencial para atingir os conhecimentos geométricos e avançar de nível.

3.1. Um modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico

As ideias, em geral, são diferentes entre as pessoas, não seria de outra forma se tratando das ideias geométricas. Nós não somos todos iguais, porém temos a mesma capacidade de desenvolver habilidades, pensar e raciocinar no contexto geométrico. A pesquisa dos van Hiele nos fornece condições de observar e estabelecer essas diferenças no pensamento geométrico.

O modelo de pensamento geométrico surgiu da tese de uma pesquisa de doutorado do casal de professores holandeses, Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele, da Universidade de Utrech, na década de 1950, sob a orientação do educador matemático Hans Freudenthal. A teoria de aprendizagem foi desenvolvida a partir de uma pesquisa sobre o ensino de geometria com alunos de 12 e13 anos, dando ênfase à manipulação de figuras, esclarecida, aperfeiçoada e promovida por Pierre, uma vez que Dina faleceu logo após terminar sua tese.

Foi na década de 60 que a União Soviética reformulou o currículo e passou a utilizar o modelo van Hiele. Só na década de 70, Izaak Wirszup (1976) começou a falar sobre o modelo e na mesma época foi lançado um livro, Mathematics as an Eductional Task (1973) [Matemática como tarefa educacional], de autoria de Hans Freudenthal, professor dos van Hiele. Mas as contribuições do casal foram despontar mundialmente depois da tradução para o inglês, em 1994.

A partir de estudos, a teoria passou por reformulações e atualizações pelos autores e por outros colaboradores, a partir daí tem sido base de diversos projetos de pesquisa e publicações especializadas referentes à Educação Matemática sobre os processos de ensino e aprendizagem de geometria (ALMEIDA, 2011).

O modelo propõe diversos níveis de aprendizagem dos conceitos geométricos, desde a percepção intuitiva, e mais simples das figuras geométricas, até o aluno desenvolver habilidades para demonstrações formais generalizadas.

> O progresso de um nível para o seguinte se dá através da vivência de atividades adequadas, e cuidadosamente ordenadas pelo professor. Portanto a elevação de níveis depende mais de aprendizagem adequada do que de idade ou maturação. Segundo van Hiele, cada nível é caracterizado por relações entre os objetos de estudo e linguagem próprias. Consequentemente, para que haja compreensão é necessário que o curso adote o nível de raciocínio dominado pela turma (NASSER & SANT'ANNA, 2010, p. 6).

De acordo com Nasser & Sant'anna (2010), Oliveira & Gazire (2012) e Crowley (1994), o modelo van Hiele parte da classificação de cinco níveis hierarquicamente estabelecidos: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. É necessário um processo de aprendizagem para ocorrer a progressão de um nível para o outro, não sendo possível avançar de níveis se não estiver claro em que nível está o aluno.

> Cada um dos cinco níveis descreve os processos de pensamentos usados em contextos geométricos. Os níveis descrevem como pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sobre as quais pensamos mais do que a quantidade de conhecimento ou de informação que temos a cada nível. Uma diferença significativa de um nível ao seguinte são os objetos de pensamento – sobre os quais somos capazes de pensar [operar] geometricamente (VAN DE WALLE, 2009, p. 440).

Segundo Kaleff (1989), os trabalhos dos van Hiele revelam uma enorme falta de harmonia entre o ensino e a aprendizagem em Matemática. As crianças pensam e agem de formas diferentes, seu crescimento cronológico não quer dizer avanço no desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico.

Para Van de Walle (2009), nem todas as pessoas pensam geometricamente da mesma forma, não sendo iguais, porém, com as mesmas capacidades de desenvolver habilidades de pensar e usar o raciocínio geométrico de forma adequada, podendo, contudo, fazer abstrações. Para o autor, o modelo van Hiele tem fornecido *insights* quanto às diferenças no pensamento geométrico e como essas diferenças são estabelecidas.

Segundo Almeida (2011), o modelo da teoria de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico compreende dois pontos teóricos fundamentais:

> - O primeiro propõe uma sequência de cinco níveis de pensamento geométrico que estão divididos por graus de complexidade. Os níveis permitem descrever o desenvolvimento cognitivo do aluno, relativo à compreensão de um determinado saber geométrico.
> - O segundo fundamento teórico é composto por cinco fases de ensino bem determinadas. Elas estão conceituadas na forma metodológica de ensino-aprendizagem de geometria. A intenção, segundo os teóricos, é a de propiciar ao aluno o progresso satisfatório ao longo desses níveis de conhecimento geométrico (p. 12-13).

Diferente de Piaget, van Hiele acreditava que o desenvolvimento cognitivo em geometria pode ser acelerado através de instruções adequadas. O primeiro ponto teórico fundamental é totalmente descritivo, explicando, através dos níveis, o processo de evolução do raciocínio geométrico dos alunos. Para isso, o professor pode contribuir para o seu aluno alcançar um nível superior dando instruções planejadas, propositais e organizadas. Quanto ao segundo ponto teórico que são as fases de ensino, ou seja, as fases de aprendizagem, estas devem ser seguidas pelo professor para dar subsídio aos seus alunos.

3.1.1. Os níveis de pensamento geométrico de van Hiele

A teoria de van Hiele é estabelecida através de cinco níveis hierarquicamente organizados. A ideia é que o aluno só avança para um determinado nível de raciocínio se dominar bem os níveis anteriores. Isso pode revelar as dificuldades encontradas pelos alunos, quando são postos em um curso de geometria sem ter vivenciado experiências nos níveis anteriores.

3.1.1.1.Nível 0 (visualização)

Os alunos nesse nível reconhecem e nomeiam as figuras geométricas, baseados em características visuais, na aparência da forma que a define. “Uma forma quadrada é um quadrado porque se parece com um quadrado”, prevalecendo sobre as propriedades às aparências das figuras (VAN DE WALLE, 2009, p. 440). As figuras são vistas na sua totalidade sem observar suas propriedades. Os alunos conseguem produzi-las sem especificá-las, podem criar e começar a compreender as classificações de figuras geométricas. Identificam figuras geométricas espaciais: cubo, pirâmide, paralelepípedo, não pelas suas propriedades, mas pela relação com objetos do cotidiano, dado, caixa. O autor ainda ressalta que, com foco na aparência das figuras, os alunos percebem como as figuras são parecidas e diferentes.

Nesse nível a ênfase está nas figuras geométricas espaciais (prismas, pirâmides, cilindro, e assim por diante), do modo como os alunos podem observar, construir, decompor, compor, tocar ou manipular de alguma maneira, tendo como objetivo identificar suas aparências e diferenças para começar a criar classes. As propriedades e os elementos das figuras geométricas espaciais, como faces, vértices, arestas, superfície lateral, bases entre outras são observadas de maneira informal.

3.1.1.2.Nível 1 (análise)

Nesse nível os alunos conseguem analisar as figuras geométricas dentro de uma classe e não separadamente, de forma única. Segundo Crowley (1994), através da observação e da experimentação os alunos começam a identificar as características das figuras. Começam a dialogar sobre uma classe de figura, o que é necessário para que tal forma se constitua em determinada figura, podendo enumerar suas propriedades de uma figura que conheçam. Para Nasser & Sant'anna (2010), nesse nível os alunos começam a analisar as figuras a partir de seus componentes, são capazes de reconhecer suas propriedades e utilizá-las para resolver diversos problemas.

Os alunos são capazes de analisar as figuras geométricas dentro de uma classe, não apenas uma única forma. Em vez de observar um paralelepípedo como uma caixa, é possível observar a semelhança entre vários prismas, e pensar sobre as características que os tornam prismas (duas bases paralelas, faces laterais retangulares, etc.).

> Nesse nível, os alunos começam a apreciar que uma coleção de formas é composta devido às suas propriedades. As ideias sobre uma forma individual agora podem ser generalizadas a todas as formas que se encaixam naquela classe. Se uma forma pertence a uma classe particular tal como cubos, ela possui as propriedades correspondentes daquela classe. "Todos os cubos possuem seis faces congruentes e cada uma dessas faces é um quadrado". Essas propriedades estavam apenas implícitas no nível 0 (VAN DE WALLE, 2009, p. 441).

O aluno nesse nível é capaz de listar as propriedades das figuras geométricas, porém não percebe que são subclasses de outra classe, que todo cubo é um prisma e nem todo prisma é um cubo. Van de Walle (2009) ainda ressalta que uma diferença significativa entre o nível 0 e o nível 1é o objeto de pensamento do aluno em cada nível.

3.1.1.3.Nível 2 (dedução informal)

Os alunos que chegam nesse nível são capazes de fazer inter-relações das propriedades de figuras (por exemplo, um cubo é um prisma, pois possui as propriedades do prisma). Pensam nas propriedades de objetos geométricos sem as restrições de um objeto particular e são capazes de identificar relações entre essas propriedades. Começam discernir a necessidade ou ausência de propriedades para caracterizar uma figura geométrica. As figuras geométricas podem ser classificadas usando apenas uma quantidade mínima de características (VAN DE

WALLE, 2009). As observações vão além das propriedades, chegando aos argumentos lógicos.

> Os alunos acompanham e formulam argumentos informais. Neste nível, porém, não compreendem o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas. Resultados obtidos empiricamente são muitas vezes usados em conjunção com técnicas de dedução. Os alunos são capazes de acompanhar demonstrações formais, mas não vêem como se pode alterar a ordem lógica nem como se pode construir uma prova partindo de premissas diferentes ou não familiares (CROWLEY, 1994, p. 3-4).

Para o aluno nesse nível, um argumento lógico é necessário, ele desenvolve a compreensão de várias propriedades das figuras geométricas espaciais. Nesse momento é necessário fazer questionamentos para induzi-lo a conjecturar.

3.1.1.4.Nível 3 (dedução formal)

Neste nível os alunos são capazes de analisar mais que as propriedades das figuras geométricas, começam a observar as conjecturas que foram feitas no nível anterior. Essas conjecturas estão corretas? São verdadeiras? Segundo Kaleff (1989), os alunos conseguem desenvolver sequências de afirmações deduzindo uma afirmação a partir de outras, tais deduções são o caminho para o estabelecimento de uma teoria geométrica. Van de Walle (2009, p. 443), diz que:

> Quando essa análise dos argumentos informais começa a ocorrer, a estrutura de um sistema completo – com axiomas, definições, teoremas, corolários e postulados – começa a se desenvolver e pode ser apreciada como um meio necessário de estabelecer verdades geométricas.

Os alunos conseguem observar sentenças abstratas sobre as propriedades das figuras geométricas, mais pela lógica do que pela intuição. O aluno, no nível 3, pode observar claramente que as diagonais de um cubo bissectam uma à outra. No nível anterior também poderiam, porém nesse nível são capazes de fazer demonstrações. Para Van de Walle (2009), esse nível é característico para alunos do Ensino Médio, quando constroem uma lista de axiomas e definições para criar teoremas e os provam usando raciocínio lógico articulado, enquanto no nível 1 pode ser bastante informal.

3.1.1.5.Nível 4 (rigor)

Nesse nível, o mais elevado da hierarquia, o aluno tem como objeto de atenção os sistemas axiomáticos. Pode estudar, analisar e até mesmo compreender a geometria não euclidiana, passando a geometria a ser vista em um contexto mais abstrato. Para Van de Walle (2009), este é geralmente o nível de um especialista em Matemática no Ensino Superior que esteja estudando geometria como um ramo da Matemática.

No quadro a seguir está exposto que os produtos de pensamento em cada nível são os objetivos do nível seguinte. Segundo Van de Walle (2009), os objetos (ideias) devem ser criados em um nível de modo que as relações entre esses objetos possam se tornar o foco do nível seguinte.

Quadro 2 - Objetivo e Produto do pensamento geométrico

Nível de hierarquia	Objetivo	Produto
Nível 0 Visualização	As formas e o que elas parecem.	Classes ou agrupamentos de formas que são parecidas.
Nível 1 Análise	As classes de formas, mais do que as formas individuais.	São as propriedades das formas.
Nível 2 Dedução informal	As propriedades das formas.	Relações entre as propriedades de objetos geométricos.
Nível 3 Dedução formal	Relações entre as propriedades de objetos geométricos.	Sistemas axiomáticos dedutivos para a geometria
Nível 4 Rigor	Sistemas dedutivos axiomáticos para a geometria.	Comparações e confrontos entre os diferentes.

(VAN DE WALLE, 2009)

De acordo com Van de Walle (2009) e Crowley (1994), para que os alunos consigam avançar de nível de pensamento geométrico, algumas características foram identificadas e suas propriedades são particularmente significativas para educadores e merecem atenção especial, pois podem orientar a tomada de decisões quanto ao ensino.

1. *Os níveis seguem uma sequência*. Como em outras teorias, para se chegar ao nível seguinte o aluno deve percorrer todos os níveis anteriores, ou seja, o aluno experimentou o pensamento geométrico adequado para aquele nível e criou em sua mente o produto que será o objetivo do pensamento no nível seguinte.
2. *O avanço de níveis*. A progressão de um nível para outro vai depender mais dos métodos utilizados nas instruções do que da idade cronológica dos alunos. Este avanço está relacionado às experiências geométricas que tiveram. Um aluno do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio pode estar no mesmo nível, um número significativo de adultos não consegue avançar do nível 0 e outros não chegam ao nível 2. A idade não está relacionada ao avanço, porém o aluno mais velho, certamente teve maior quantidade de experiências geométricas, portanto é natural que o aluno do Ensino Médio esteja em um nível mais elevado que o aluno do Ensino Fundamental.
3. *Intrínseco e extrínseco*. A experiência geométrica é fator principal que permite e influencia o aluno sobre o avanço ou desenvolvimento através dos níveis, dando oportunidade ao aluno perceber que o objeto de um nível torna-se objetivo do nível seguinte. Van de Walle (2009) acredita que são as atividades que permitem que a criança explore, converse sobre e interaja com o conteúdo do nível seguinte. À medida que amplia sua experiência naquele nível tem mais chances de desenvolver o nível de pensamento geométrico.
4. *Combinação inadequada* versus *Linguagem e ensino*. Uma relação que é correta para um nível pode ser modificada em outro (CROWLEY, 1994). Por exemplo, uma figura geométrica espacial que pode fazer parte de mais de uma classe (um cubo, que também é prisma e poliedro regular). Quando a linguagem, o ensino ou os métodos estão superiores aos dos alunos haverá uma falta de comunicação, desta forma a aprendizagem e o progresso poderão não ser alcançados. Se os alunos forem submetidos a lidar com objetos de pensamento que ainda não foram construídos no nível anterior, podem ser forçados a uma aprendizagem mecânica e até alcançar uma aprendizagem superficial.

O processo ao longo dos níveis depende mais da metodologia ou da instrução recebida do que mesmo da idade do aluno, como afirmam os van Hiele. Os materiais, o método, a organização do ambiente e, principalmente, a forma como serão conduzidas as atividades, se tornam a preocupação metodológica para o professor.

3.2. Fases do aprendizado dos van Hiele

As fases da teoria de van Hiele contribuíram para elaboração e aplicação de uma metodologia adequada na realização da sequência de atividades do nosso trabalho e servem como estratégia para auxiliar o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno. Segundo Crowley (1994), para minimizar essas questões, os van Hiele propuseram cinco fases sequenciais de aprendizado: *interrogação/informação*, *orientação dirigida*, *explicação*, *orientação livre* e *integração*. Acreditam que o desenvolvimento dessa sequência facilita a aquisição e avanço para níveis superiores.

Para Oliveira & Gazire (2012), os alunos progridem de um nível para o próximo como resultado da metodologia utilizada em cinco fases sequenciadas, que enfatizam a exploração, a discussão e integração dos saberes adquiridos. As fases de aprendizagem podem ser observadas como uma sequência a ser seguida pelo professor para auxiliar os alunos na transição entre os níveis.

3.2.1. Interrogação/informação

É estabelecido um diálogo entre professor e aluno para desenvolver as atividades envolvendo o material de estudo desse nível. São levantadas questões, realizadas observações e introduz-se um vocabulário específico. Crowley (1994) destaca o seguinte exemplo:

> O professor pergunta aos alunos: “O que é um losango? Um quadrado? Um paralelogramo? O que têm de semelhante? De diferente? Você acha que um quadrado poderia ser um losango? Um losango poderia ser um quadrado? Por quê? O propósito dessas atividades é duplo: (1) o professor fica sabendo quais os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tópico, e (2) os alunos ficam sabendo em que direção os estudos avançarão (p. 6).

Temos, como exemplo na nossa pesquisa, perguntas feitas aos alunos: O que é um cubo? Um prisma? Um paralelepípedo? Quais as semelhanças e diferenças? Um cubo pode ser um prisma? E um paralelepípedo? Por quê? Dessa forma induzimos os alunos para perceberem as relações entre os sólidos.

> Os alunos experimentam um primeiro contato com o conteúdo a ser trabalhado. O professor apresenta materiais e informações sobre eles, dando ao aluno a oportunidade de adquirir conhecimentos básicos indispensáveis ao trabalho matemático propriamente dito. Por outro lado, o professor

> aproveita a oportunidade para se informar sobre o conhecimento prévio dos alunos sobre o assunto tratado (OLIVEIRA & GAZIRE, 2012, p. 10)
>
> .

Para Kaleff (1989), nesta fase o professor percebe quais conhecimentos prévios os alunos possuem a respeito do assunto e qual direcionamento do estudo deve utilizar.

3.2.2. Orientação Dirigida

O professor, após planejar e organizar, selecionará o material necessário para que os alunos explorem de acordo com as orientações e o conteúdo em questão, de forma que descubram e aprendam as várias relações com o novo conhecimento. As atividades, na maioria das vezes, são realizadas em uma única etapa para possibilitar respostas específicas. Como expomos no Capítulo 4, a sequência de atividades proposta em nossa pesquisa foi planejada levando em consideração a utilização de materiais manipuláveis e objetos do cotidiano do aluno, priorizando o uso desses materiais, iniciando com embalagens.

Oliveira & Gazire (2012) acreditam que os alunos, devidamente orientados pelo professor, executam tarefas simples que lhes permitem explorar as relações implícitas dos elementos trabalhados. As atividades devem ser organizadas e desenvolvidas de modo que os alunos assimilem novos conceitos de forma progressiva e efetiva, uma vez que serão utilizados como base para o nível seguinte.

3.2.3. Explicação

Esta fase é muito importante para troca de diálogos, pois o professor deve estimular os alunos a expressar suas ideias e registrar os resultados, motivando-os a desenvolver uma linguagem adequada para expressar as descobertas.

Nessa fase os alunos buscam experiências vividas nas fases anteriores, trocam suas visões imediatas por aquelas observadas anteriormente. O professor deve apenas orientar os alunos para usarem uma linguagem adequada e que eles mesmos busquem a formação do sistema e de relações.

> O professor deve estimular seus alunos a expressarem suas descobertas e a participar de diálogos em que a defesa ou contestação de ideias, próprias ou de outros, se manifestem e impulsionem o desenvolvimento do raciocínio. Iniciam-se, assim, os trabalhos de desenvolvimento de uma linguagem técnica específica. A utilização de termos técnicos e de uma simbologia

> própria deve promover uma boa comunicação entre o grupo e uma consolidação dos conceitos adquiridos na fase anterior (OLIVEIRA & GAZIRE, 2012, p. 10-11).

É nessa fase que ocorrem discussões entre os alunos, entre os alunos e o professor, para que aos poucos seja estabelecida uma linguagem específica em que os alunos percebam a necessidade de dominar o vocabulário. Nasser & Sant'anna (2010) acreditam que os alunos expressam e modificam seus pontos de vista sobre estruturas que foram observadas.

3.2.4. Orientação Livre

Nessa fase o professor deve apresentar atividades mais complicadas, com muitos passos e muitas formas de serem concluídas. Para Kaleff (1989, p. 28), "é fundamental que o aluno ganhe experiência na busca de sua forma individual de resolver tarefas, buscando sua própria orientação no caminho da descoberta de seus objetivos".

Segundo Crowley (1994, p. 7 apud Hoffer, 1983, p. 208), "eles ganham experiência ao descobrir sua própria maneira de resolver as tarefas. Orientando-se a si mesmos no campo da pesquisa, muitas relações entre os objetos de estudo tornam-se explicitas para os alunos". As atividades propostas deram oportunidades para resolverem esses tipos de tarefas, em que seus conhecimentos tornaram-se mais sólidos. Cujas soluções requerem um pouco mais de algoritmos ou definições e o professor apenas auxilia na resolução dos problemas. O professor tem como objetivo dar oportunidade aos alunos de raciocinar, investigar e encontrar soluções próprias para as tarefas mais complicadas.

Para Almeida (2011), o professor fornece instruções e incentiva os alunos a refletir sobre as soluções encontradas, com isso ganham experiência e autonomia, o aluno aprende a encontrar seus caminhos, por si próprio.

3.2.5. Integração

Nessa fase, o aluno revê o que foi aprendido nas fases anteriores, de forma que faça uma síntese do que foi estudado, com o objetivo de formar uma visão global entre os objetos, suas relações e propriedades, para internalização do conhecimento. Segundo Crowley (1994, p. 8), "no final da quinta fase, os alunos alcançaram um novo nível de pensamento. O novo domínio de raciocínio substitui o antigo, e os alunos estão prontos para repetir as fases de aprendizado no nível seguinte".

> Tudo o que foi trabalhado nas fases anteriores, o conhecimento adquirido, as habilidades e competências desenvolvidas devem, nessa fase, passar por processo de “sedimentação”. O professor deve estimular o aluno a ter uma visão global de tudo o que aprendeu, estabelecendo uma nova rede de relações mentais, mais ampla, mais abrangente e capaz de lhe servir de base para o novo nível a que pretende ascender (OLIVEIRA & GAZIRE, 2012, p. 11).

Nessa fase o professor deve apenas orientar para que façam um resumo das percepções e dos conhecimentos adquiridos de forma mais consistente de acordo com o que foi construído durante as atividades propostas, ou seja, deve aplicar exercícios que promovam uma síntese dos conteúdos aprendidos. Com isso os alunos, a partir de uma revisão, formarão uma visão mais abrangente e irão refletir sobre os questionamentos vivenciados nas atividades.

Observando a sequência de fases, percebeu-se que as modificações e a estabilidade de noções, relacionados à compreensão dos conteúdos geométricos estudados, são alcançados pelas interações sociais entre os alunos nas atividades em grupo e com o professor, especificamente na fase da explicação. Já nas fases seguintes, orientação livre e integração, a interação recai no trabalho em grupo pelos alunos na resolução dos questionários. De acordo com a teoria vygotskyniana, acreditamos que, nesses momentos, a abordagem, sendo partilhada entre os membros dos processos de ensino e aprendizagem, pode ser internalizada a partir das interações sociais e da exploração da Zona de Desenvolvimento Proximal.

Para amenizar a discrepância entre níveis, observada nos alunos de uma mesma turma, Nasser & Sant’anna (2010, p. 8) destacam duas estratégias que devem ser adotadas. 1) “desenvolver atividades que propiciem a elevação e a unificação dos níveis dos alunos da turma”, e 2) “adotar para a instrução um nível mais baixo, o mais próximo possível do nível atingido pela turma”. Para isso é necessário identificar o nível de cada aluno. A melhor maneira de fazer esse reconhecimento é através de uma observação direta, observar no aluno o seu modo de raciocinar geometricamente e as estratégias utilizadas para resolver situações propostas. Sabemos que não é fácil de fazer em uma turma completa e com poucas aulas de geometria. Nossa proposta no teste diagnóstico foi avaliar o desempenho de cada aluno através de atividades características de cada nível. As autoras citadas acima acreditam e defendem que as questões de múltiplas escolhas não traduzem o nível real em que se encontram os alunos, porém indicam com confiança os níveis de cerca de 90% dos alunos de uma amostra.

Os níveis são distribuídos seguindo uma hierarquia. Para o aluno que atinge o nível de abstração, o ideal seria que acertasse os questionamentos dos dois níveis anteriores, isso nem sempre acontece. Foi identificado com isso que houve falhas na construção geométrica relacionada àqueles níveis. É possível encontrarmos alunos que mostrem estratégias de raciocínio de mais de um nível no mesmo questionamento. Alguns autores acreditam e sugerem que os níveis de van Hiele são contínuos, ou seja, que o aluno demonstra comportamentos de um nível mesmo sem ter atingido completamente o nível anterior. Nasser & Sant'anna (2010) consideram que o aluno alcançou um determinado nível quando acerta pelo menos 60% das questões propostas daquele nível.

3.3. A interação social na internalização de conhecimentos

Alguns teóricos relacionam a aprendizagem com *estímulo-resposta*. Entre eles, segundo Lefrançois (2012), Pavlov identificou que entre o estímulo e a resposta há um sinal externo, fora do alcance do sujeito. Vygotsky aproveita sua ideia e define melhor o conceito de instrumento, que o sujeito ao longo do seu desenvolvimento introduz novos sinais exteriores para facilitar a comunicação. Contudo, embora essa mediação seja externa, o sujeito atribui significado e consegue lembrar-se de algo, coisa que não acontece no método mecanizado. Diz Moysés (2012, p. 26), "com o passar do tempo, a criança deixa de necessitar desse elemento auxiliar externo, e passa a utilizar signos internos". Com isso as crianças substituem as representações mentais, ou seja, o abstrato, por objetos reais.

> A função do instrumento é servir como um condutor da influência humana sobre o objeto da atividade; ele é orientado externamente; deve necessariamente levar a mudanças nos objetos. Constitui um meio pelo qual a atividade humana externa é dirigida para o controle e domínio da natureza. O signo, por outro lado, não modifica em nada o objeto da operação psicológica. Constitui um meio da atividade interna dirigido para o controle do próprio indivíduo; o signo é orientado internamente. Essas atividades são tão diferentes uma da outra, que a natureza dos meios por elas utilizados não pode ser a mesma (VYGOTSKY, 1991, p. 40).

Vygotsky e seus colaboradores realizaram inúmeros experimentos sobre o processo de internalização de comportamentos externos e em todos chegaram à conclusão de que são na interação social e por intermédio de signos que se dá o desenvolvimento das funções psíquicas superiores. Segundo Moysés (2012), ao contrário do que afirmava Piaget, Vygotsky defendia a ideia de que o verdadeiro curso do processo de desenvolvimento do pensamento infantil assume uma direção que vai do social para o individual. Evidenciando, assim, a criança como um ser social desde seu nascimento. Com isso, percebe-se que o homem age e interage com a sociedade, construindo seus conhecimentos a partir das relações pessoais.

A internalização ocorre no processo de transformação da linguagem egocêntrica em fala interior. Segundo Moysés (2012), tanto Piaget quanto Vygotsky perceberam que a criança utiliza uma linguagem egocêntrica.

> No entanto, descobriu que à medida que ela vai procurando soluções, a fala sofre um deslocamento, passando a ser usada para ajudar no próprio planejamento dessas soluções. Se antes a fala seguia a ação, agora ela a antecede. É a fala quem origina a função intelectual, reguladora da conduta infantil. Com o passar dos anos, a criança vai deixando de usar a fala egocêntrica, em favor da "fala interior silenciosa" (MOYSÉS, 2012, p. 29).

Vygotsky e seus colaboradores chamam de internalização à reconstrução interna de uma operação externa. A criança, ao começar internalizar uma nova função, estará interagindo com outras já existentes em sua mente. Para haver um processo de internalização se faz necessário uma série de transformações.

> a) Uma operação que inicialmente representa uma atividade externa é reconstruída e começa a ocorrer internamente. É de particular importância para o desenvolvimentismo dos processos mental superiores a transformação da atividade que utiliza signos, cuja história e características são ilustradas pelo desenvolvimento da inteligência prática, da atenção voluntária e da memória.
> b) Um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal. Todas as funções no desenvolvimento da criança aparecem duas vezes: primeiro, no nível social, e, depois no nível individual; primeiro, entre pessoas (interpsicológica), e, depois, no interior da criança (intrapsicológica). Isso se aplica igualmente para a atenção voluntária, para a memória lógica e para a formação de conceitos. Todas as funções superiores originam-se das relações reais entre indivíduos humanos.
> c) A transformação de um processo interpessoal num processo intrapessoal é o resultado de uma longa série de eventos ocorridos ao longo do desenvolvimento. O processo, sendo transformado, continua a existir e mudar como uma forma externa de atividade por um longo período de tempo, antes de internalizar-se definitivamente. Para muitas funções, o estágio de signos externos dura para sempre, ou seja, é o estágio final do desenvolvimento (VYGOTSKY, 1991, p. 41).

No processo de internalização, observa-se que o aluno dá significado a uma atividade ou informação externa, observa os aspectos principais, estruturas e transforma a partir do contato com o meio em um novo processo de conhecimento. A construção do conhecimento do ser humano é desenvolvida ao longo de sua história por meio desse processo, de forma que fica evidente a fundamental importância das trocas de informações com o meio social. Para

Vygotsky, a construção do conhecimento passa primeiro pelo social e depois é internalizado para em seguida ser apropriado pelo indivíduo segundo os níveis de desenvolvimento.

Vygotsky entende que o aprendizado da criança começa bem antes dela frequentar a escola. Cada criança, quando chega à idade escolar, traz consigo seus conhecimentos prévios que devem ser aproveitados para a construção do conhecimento. Ele ainda afirma que o aprendizado na idade pré-escolar é bem diferente do aprendizado da escola.

> Qualquer situação de aprendizado com a qual a criança se defronta na escola tem sempre uma história prévia. Por exemplo, as crianças começam a estudar aritmética na escola, mas muito antes elas tiveram alguma experiência com quantidades, elas tiveram que lidar com operações de divisão, adição, subtração, e determinação de tamanho (VYGOTSKY, 1991, p. 56).

Segundo Almeida (2011, p. 28), “Vygotsky postula que a constituição do conhecimento é fundamentalmente social. Em outras palavras, o conhecimento é co-construído através de relações interpessoais mediadas por signos e artefatos culturais”. Percebe-se que a aprendizagem escolar é considerada como socialização específica, sendo a principal fonte para formação de conceitos de forma que o ensino estabeleça o desenvolvimento da mente.

Vygotsky (1991), diz que Koffka percebe uma similaridade entre os aprendizados, e que a diferença entre o aprendizado pré-escolar e o escolar está na sistematização, enquanto aquele é um aprendizado não sistematizado este é sistematizado. Diz ainda que a sistematização não é o único fator e que o aprendizado escolar produz para a criança algo fundamentalmente novo para seu desenvolvimento.

> As principais conclusões que chegou emanaram do confronto que estabeleceu ente o desenvolvimento dos conceitos espontâneos e científicos. Considerou os primeiros como sendo aqueles que a criança aprende no seu dia a dia, nascidos do contato que ela possa ter tido com determinados objetos, fatos, fenômenos etc., dos quais ela não tem sequer consciência. E os últimos, como sendo aqueles sistematizados e transmitidos intencionalmente, em geral, segundo uma metodologia específica. São, por excelência, os conceitos que se aprendem na situação escolar (MOYSÉS, 2012, p. 35).

Vygotsky, em suas pesquisas, estruturou uma teoria sócio-cultural de aprendizagem, que está sendo estudada e divulgada por estudiosos e pesquisadores ligados à educação em geral e especificamente em Educação Matemática. Sua teoria enfatiza, principalmente, a interação social como processo de aprendizagem que privilegia o ambiente social e cultural.

Sua teoria é pautada na formação social da mente, enfatizando a mediação social e cultural por meio das pessoas, baseando-se na linguagem, na troca de experiências, na fala e na relação entre o indivíduo e o meio. Consideramos que a aprendizagem acontece pela interação dos alunos, com os alunos e com o professor, nos trabalhos realizados em grupos e com o meio, ou seja, com o ambiente.

A interação ocorre ininterruptamente em sala de aula, assim destacamos os momentos em que o professor indaga um aluno individualmente ou esta indagação passa a ser dirigida para toda turma, quando o aluno não consegue resolver determinada situação e pergunta ao seu colega ou ao professor.

Um importante conceito desenvolvido por Vygotsky é a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Ao realizar seus experimentos, Vygotsky encontrou três contextos diferentes. O primeiro quando a criança desempenha uma atividade assistida por outra pessoa que a orienta. O segundo está ligado a situações relacionadas com o social, em que a criança está assistida ou mesmo quando atua sozinha, relacionada diretamente ao processo de ensino e aprendizagem. O terceiro é que passa a trabalhar o conceito relacionado ao jogo.

Vygotsky realizou experimentos com crianças que apresentavam resultados idênticos e em pouco tempo percebeu resultados diferentes, observou que o desenvolvimento cognitivo de cada criança evoluía de acordo com o meio em que estava inserido. Moysés (2012, p. 34) argumenta que “as investigações de Vygotsky e as de seus colaboradores também os levaram a perceber que aquilo que uma criança não é capaz de fazer sozinha poderá desempenhá-lo com a ajuda de um adulto”.

Nos experimentos realizados, percebeu-se que as capacidades de crianças com iguais níveis de desenvolvimento mental não se desenvolviam igualmente com a orientação de um professor. Ficou evidente que elas não tinham a mesma idade mental e que a etapa seguinte de aprendizagem seria de forma diferente. Vygotsky chamou essa diferença, entre doze e oito anos, ou entre nove e oito, de ZDP.

> Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VYGOTSKY, 1991, p. 58).

O nível de desenvolvimento real é aquele no qual a criança já consegue desenvolver um problema sozinho sem a ajuda de outro, tem sua própria independência para chegar à solução, ou seja, já adquiriu maturidade suficiente para tais funções. O que define a ZDP são exatamente os problemas que a criança não consegue resolver sozinha, necessita da ajuda de outro ou de outros.

Nesse momento são muito importantes as instruções e intervenções do professor, bem como da interação entre os alunos, mesmo por que ainda não tem condições de caminhar sozinho para o aprendizado. Isto quer dizer que, no nível de desenvolvimento proximal, o aluno tem o potencial para aprender, porém ainda não atingiu o processo completo do aprendizado.

Vygotsky define a ZDP de forma bem mais simples, utilizando uma metáfora.

> A Zona de Desenvolvimento Proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário. Essas funções poderiam ser chamadas de "brotos" ou "flores" do desenvolvimento, ao invés de "frutos" do desenvolvimento. O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimentismo mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente (1991, p. 58).

Segundo Almeida (2011), a Zona de Desenvolvimento Proximal ou potencial trata precisamente dos processos de ensino e aprendizagem, no momento mesmo em que ele acontece, como resultado das interações sociais concretas dos participantes envolvidos nesse processo.

Para que haja uma formação completa do aluno, é necessário que o mesmo passe do conhecimento espontâneo para o conhecimento científico. Aquele totalmente diferente desse, em que há uma elaboração intencional, sendo que o sujeito pressupõe uma relação consciente com o objeto do conhecimento. Tendo o professor como tarefa principal a transmissão e contribuição ao aluno para que possa construir esse conhecimento.

O professor, segundo Vygotsky, deve agir como mediador entre o aluno e o objeto de conhecimento, ou seja, reconstruir esse saber através de estratégias adequadas. Diz Moysés (2012) que, conhecendo a ZDP do aluno, o professor bem preparado saberá fazer as perguntas que irão provocar o desequilíbrio na sua estrutura cognitiva, fazendo-o avançar no sentido de uma nova e mais elaborada reestruturação.

É possível perceber o quanto Vygotsky valoriza a escola enquanto ambiente que contribui para a formação do aluno e do professor na construção do desenvolvimento e aprendizagem, enquanto atuação transformadora nas relações com o conhecimento.

Concordamos com a teoria de Vygotsky, que os alunos, quando trabalham em grupo e com o auxílio do professor e dos colegas, conseguem desenvolver suas habilidades e têm a oportunidade de construir as ideias como participantes ativos nas atividades em sala de aula, gerando discussões de diferentes interpretações e perspectivas, favorecendo a produção de seus conhecimentos e o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Acredita-se que o conceito da ZDP pode oferecer subsídios para compreender os processos de ensino e aprendizagem levando em consideração a responsabilidade por parte do professor em reconhecer as necessidades de seus alunos. Deste modo, percebe-se a importância atribuída ao professor e aos alunos que apresentam maior habilidade na teoria de Vygotsky, observa-se que a responsabilidade e a sensibilidade do professor são de fundamental importância em relação à percepção das necessidades e capacidades concretas do aluno, para nortear adequadamente as atividades propostas em sala de aula.

Se a aparência e a essência coincidissem, a ciência não teria sentido, então pesquisar não seria necessário.
O conhecimento é trazer luz para algo que ainda é obscuro, o que não é compreendido.

Karl Marx

CAPÍTULO QUATRO

METODOLOGIA

Neste capítulo, detalhamos os procedimentos metodológicos nos quais nos baseamos para a realização desta pesquisa, de característica qualitativa, os quais, a nosso ver, permitiram alcançar de forma satisfatória os nossos objetivos.

4.1. Aspectos metodológicos

Ao longo dos anos, como professor de Matemática na escola onde ocorreu a pesquisa, observamos o quanto é difícil para nós professores ensinarmos os conteúdos de geometria, utilizando fórmulas, teoremas, axiomas, sem fazer nenhuma relação com o meio em que vivem os discentes, e também para os alunos compreenderem e relacionarem tais conteúdos com sua prática do dia a dia. A partir daí chegaram as dúvidas e indagações: Porque a geometria está tão próxima da gente e não conseguimos mostrar suas aplicações, de forma que os alunos internalizem tais conhecimentos? Será que o problema está em alguma deficiência trazida pelos alunos dos anos anteriores ou a forma, a metodologia, que estamos utilizando para ensinar essa geometria está inadequada? Com isso, e a partir de reflexões e discussões realizadas nas disciplinas do mestrado, surgiu a necessidade de fazer uma investigação para melhor entender porque tanta dificuldade no ensino e na aprendizagem de geometria no Ensino Médio.

A partir das reflexões feitas após o estudo de autores que já realizaram pesquisas sobre a geometria e seu ensino, como Lorenzato (2010), Fonseca *et al* (2011), Nacarato & Santos (2014), Rêgo, Rêgo & Vieira (2012), entre outros que fundamentam nossa pesquisa, veio a ideia de realizar esse trabalho.

Analisamos os conteúdos de geometria programados para o Ensino Médio, tendo como base os PCN+ e o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola onde foi realizada a pesquisa. Os conteúdos de geometria espacial, segundo o currículo de Matemática para o Ensino Médio, com base nos Parâmetros Curriculares do Estado do Pernambuco, envolve: planificações de sólidos, figuras espaciais (vista e perspectiva), corpos redondos e suas propriedades, projeções ortogonais, geometria espacial de posição, posições relativas (ponto e reta, ponto e plano), determinação no plano, posições relativas de dois planos no espaço, posições relativas de uma reta e um plano, paralelismo no espaço, perpendicularismo no espaço, projeção ortogonal, poliedros: prismas e pirâmides, noção de poliedros, poliedro convexo e poliedro não-convexo, relação de Euler, poliedros regulares.

Para tanto, observadas as orientações, nós, os professores de Matemática da referida escola, escolhemos o livro didático *Matemática: Ciência e Aplicações*, do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), para ser utilizado em 2015, 2016 e 2017. Para nossa pesquisa, verificamos os conteúdos propostos de geometria espacial para o Ensino Médio. A partir daí fizemos um recorte nos conteúdos a serem trabalhados. Os conteúdos de geometria espacial abordados são: planificações de sólidos, poliedros e suas propriedades, corpos redondos e suas propriedades, poliedros: prismas e pirâmides, a noção de poliedros, a relação de Euler para poliedros convexos e poliedros regulares.

A questão proposta para nortear a investigação da nossa pesquisa vem ao encontro do recorte dos conteúdos que trabalhamos ao longo da sequência de atividades e da necessidade dos alunos, no sentido de provocar o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, com base nas intervenções e mediação do pesquisador. Dessa forma, temos como questão norteadora: *Em que medida uma sequência de atividades, partindo de objetos concretos, pode contribuir para compreensão de conceitos e propriedades da geometria espacial no Ensino Médio?*

Baseado nas dificuldades encontradas no ensino de geometria e tendo em vista a importância da geometria no desenvolvimento do pensamento geométrico e também na aplicabilidade diária em diversas áreas do conhecimento, a pesquisa foi formalizada com o objetivo de *investigar como uma sequência de atividades pode contribuir para o avanço de nível segundo o modelo van Hiele partindo de objetos concretos do cotidiano e de materiais manipuláveis relacionando-os com os conceitos e propriedades de sólidos geométricos*.. Desta forma, durante as atividades propostas, espera-se realizar reflexões pertinentes para a construção do conhecimento relacionado à geometria espacial do Ensino Médio, conforme a fundamentação teórica que foi apresentada. Para atingir esse objetivo geral, a partir do referencial teórico, nós pretendemos refletir sobre algumas relações entre objetos do cotidiano e a geometria espacial, a partir de materiais manipuláveis. Além disso, vamos explorar conceitos e propriedades da geometria espacial, relacionada a objetos concretos do cotidiano e materiais manipuláveis, em uma prática no laboratório de ensino de geometria. Para concluir, verificar se a metodologia utilizada, a partir da mediação por meio dos processos interativos em sala de aula, contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A sequência de atividades foi elaborada a fim de alcançar os objetivos e responder de forma satisfatória à pergunta que norteia essa investigação, a partir da análise dos dados levantados, para isso se faz necessário utilizar vários instrumentos para realização de coleta de dados, os quais passamos a apresentar.

4.1.1. Tipo de pesquisa

Essa pesquisa teve característica de investigação qualitativa, a qual teve preocupação fundamental com o estudo e com a análise de experiências vividas em sala de aula ou pertinente a ela, valorizando o contato direto do pesquisador no trabalho de campo. Como ressaltam Bogdan & Biklen (1994), os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o ambiente onde está sendo realizada a pesquisa. Com isso, o pesquisador assume uma visão da realidade social dos alunos para melhor compreensão do que pode ser elaborado. Para melhor aquisição do conhecimento é importante uma orientação qualitativa que pode ser caracterizada pela descrição, compreensão e interpretação de fatos e fenômenos.

Os acontecimentos e fenômenos ocorridos durante a pesquisa podem ser compreendidos no contexto em que acontecem, na sala de aula, de onde realizamos todas as observações necessárias e importantes, independentemente da diversidade de instrumentos utilizados. Bogdan & Biklen (1994) ressaltam que os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém através do contato, ficando claro que o investigador qualitativo frequenta o local de estudo porque se preocupa com o contexto.

> Os locais têm de ser entendidos no contexto da história das instituições a que pertencem. Quando os dados em causa são produzidos por sujeitos, como no caso de registros oficiais, os investigadores querem saber como e em que circunstâncias é que eles foram elaborados. Quais as circunstâncias históricas e movimentos de que fazem parte? Para o investigador qualitativo divorciar o ato, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o significado (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 48).

Nesta pesquisa buscamos materiais importantes para análise, com isso utilizamos a coleta de dados por meio de gravações em áudio das aulas durante as atividades propostas, diário de bordo para anotações pertinentes feitas pelo pesquisador, relatórios, tabelas produzidas pelos alunos, bem como fotografias e filmagens produzidas no momento que as ações das atividades eram realizadas. Segundo Almeida (2012), os instrumentos de coleta, numa investigação qualitativa, servem à pesquisa porque diretamente nem tudo pode ser observado, desde percepções, representações ou significados que os alunos relacionam com cotidiano.

Assim, todo esse material foi analisado de forma esmiuçada, para garantir o máximo de realidade na conclusão da pesquisa, garantindo dessa forma, toda descrição dos dados em forma de palavras ou imagens. Segundo Bogdan & Biklen (1994), a abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo.

Na pesquisa qualitativa o pesquisador ocupa lugar de destaque, pois nesse processo a pesquisa é descritiva, desempenhando um papel fundamental na obtenção das informações coletadas a partir de diversas fontes. Com isso, a geração efetiva dos dados contribui para uma ampla compreensão do fenômeno a ser estudado. Por isso, utilizamos diversos instrumentos para o levantamento de dados: gravador de áudio, câmara digital, diário de bordo e questionários.

> Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produto. Como é que as pessoas negociam os significados? Como é que se começaram a utilizar certos termos e rótulos? Como é que determinadas noções começaram a fazer parte daquilo que consideramos ser o senso comum? Qual a história natural da atividade ou acontecimentos que pretendemos estudar? (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 49).

De acordo com Bogdan & Biklen (1994), para respeitar os créditos de confiabilidade, a análise das informações levantadas durante as intervenções e aplicações da sequência de atividades deve ser feita pelo próprio pesquisador e de forma indutiva, ou seja, não recolhe dados para confirmar hipóteses, mas sim para construir um quadro novo que vai ganhando forma à medida que os dados vão sendo analisados.

4.1.2. O campo de pesquisa

Esta pesquisa foi realizada em uma escola da rede pública estadual de ensino, situada em um bairro no centro da cidade de Flores – PE, mediante a autorização da gestora (Apêndice A). A escola não apresenta problemas pontuais que venham a dificultar os processos de ensino e de aprendizagem. As salas de aula e o pátio sempre estão em boas condições, muito limpa. Há, de certa forma, falta de funcionários para trabalhar na parte burocrática da secretaria. A escola oferece, pela manhã, o Ensino Médio semi-integral, e, à noite, a Educação de Jovens e Adultos (EJA) de Ensino Médio.

O quadro de professores é formado, em sua maioria, por efetivos e com uma grande experiência docente. O pesquisador, autor desta pesquisa, é efetivo há mais de nove anos nessa mesma escola, tendo lecionado, como contratado, quatro anos em outra escola pública estadual.

A pesquisa foi realizada com 28 alunos do 3º ano do Ensino Médio semi-integral, com idades entre 16 e 19 anos, ou seja, com idade apropriada para este ano escolar. Todos os alunos que participaram da pesquisa foram aprovados no ano letivo anterior. Os alunos, em geral, apresentam um desempenho mediano nas aulas de Matemática e não têm perspectiva de continuarem na vida acadêmica. Um dos fatores que ocasiona isto, acredita-se, é que, em média, 60% deles são da zona rural e a cultura local contribui para um pensamento dessa natureza. Dentre os 40% da zona urbana, uns e outros falam em fazer um curso de nível superior, outros apenas estão cursando o Ensino Médio por conta da cultura e pela exigência dos pais.

Os educandos que participaram dessa pesquisa não tinham o hábito de trabalhar em grupo, nem mesmo de apresentar trabalhos de forma a se exporem, não eram habituados a realizar atividades que envolvam situações do cotidiano escolar. Porém, é importante evidenciar que essas observações podem caracterizar um fator que dificulte a participação dos mesmos nas atividades iniciais da investigação. Uma observação importante que contribuiu para as intervenções foi o fato que os alunos não trocam de sala de aula, entre as aulas, proporcionando assim certa facilidade na preparação do ambiente de pesquisa.

Foi fácil perceber, ao longo do ano letivo passado e diante dos diálogos com outros professores da escola, que os alunos não tiveram oportunidade, durante sua vida escolar, de conhecer um ensino de geometria de forma diferenciada, contextualizada, relacionada com o meio em que vivem. Sempre foram submetidos à apresentação de uma forma técnica, como foi relatado no primeiro e segundo capítulos, como se o currículo ainda estivesse de acordo com os preceitos do Movimento da Matemática Moderna. Alguns alunos declararam e demonstraram que, durante os anos finais do Ensino Fundamental, não construíram um conhecimento sólido sobre geometria. Analisando isto a partir de Lorenzato (1995), talvez seja porque o professor não se sentia preparado para lecionar geometria e preferia dar prioridade a outros conhecimentos matemáticos.

Quando foi apresentada a proposta de realizar nossa pesquisa aos alunos, todos aceitaram participar e pareciam muito entusiasmados e ansiosos. Logo em seguida foi entregue a cada aluno a autorização (Apêndice B), para que seus pais ou responsáveis assinassem, concordando e autorizando a gravação de áudio, fotografias, filmagens e todos os materiais produzidos durante a pesquisa. Foi explicado aos participantes que não seria divulgada a imagem e os nomes dos mesmos, apenas trechos de suas falas que seriam transcritos, sempre utilizando pseudônimos, assim preservamos as suas identidades.

Realizamos a coleta de dados de nossa investigação, durante uma sequência de quatro atividades realizadas no primeiro semestre de 2015 na própria sala de aula do 3º ano do Ensino Médio (Quadro 3). Fizemos isto porque a mesma é adequada para realização das atividades, com estrutura e espaço suficientes para organização das cadeiras em fileiras para as atividades individuais, como também para organização em grupos de quatro ou cinco componentes, para as atividades que foram realizadas em equipes.

Quadro 3 - Cronograma da Sequência de Atividades

ATIVIDADE PROPOSTA	DATA DA REALIZAÇÃO
Os sólidos geométricos no dia a dia	10 de Abril de 2015
Reconhecendo grupos de formas: prismas e pirâmides	05 de Junho de 2015
Os corpos redondos	12 de Junho de 2015
Os poliedros regulares: modelando os poliedros de Platão	19 de Junho de 2015

Fonte: Produzido pelo autor

Observa-se um grande intervalo entre a primeira e a segunda atividade, provocado por dois motivos distintos: o primeiro proveniente de adequações das atividades após as contribuições da banca por ocasião do Exame de Qualificação; o segundo provocado pela greve na rede estadual de ensino no Estado de Pernambuco. Porém, podemos assegurar que isto não causou problemas para realização das atividades, tampouco diminuiu o entusiasmo para participação dos alunos.

4.2. Estratégias para coleta de dados

O trabalho de campo é planejado a partir da questão que pretendemos responder e pelo que queremos investigar. Em uma pesquisa de caráter investigativo é importante dar ênfase ao contexto do ambiente da pesquisa como também aos instrumentos que vamos utilizar no levantamento de dados.

Fiorentini & Lorenzato (2009) destacam que não podemos inventar qualquer coisa sobre a realidade nem abarcar sua totalidade. Por isso, destacamos a importância do compromisso do pesquisador durante a investigação, principalmente no levantamento e análises dos dados. A utilização de diversos instrumentos para geração de dados nos dá uma boa oportunidade para fazer a observação das informações, no intuito de elevar o grau de fidedignidade nos resultados, que devem ser submetidos a vários procedimentos e métodos de identificação e análise.

Com isso, buscamos produzir as informações necessárias e suficientes para garantirmos êxito em nossa investigação, cuja coleta de dados foi realizada mediante diversos instrumentos os quais passamos a apresentar.

O diário de bordo – um dos instrumentos mais ricos e mais utilizados para o levantamento de informações, utilizado para o registro das informações imediatas pelo pesquisador. Fiorentini & Lorenzato (2009, p. 118-119) ressaltam que “é nele que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos. Quanto mais próximo do momento da observação for feito o registro maior a acuidade da informação”. É importante, ao iniciar cada registro, indicar a hora, o local da observação e o período de duração, sempre deixando uma margem para posterior codificação. Em nossa pesquisa, o diário de bordo nos conduziu a registrar, *in loco*, o que estava acontecendo com e entre os alunos envolvidos nas atividades, suas expressões, angústias, desânimos e, em outras situações, o diálogo entre colegas do mesmo grupo, entre grupos distintos. Situações nas quais não podíamos garantir o registro através dos outros instrumentos, copiávamos no diário de bordo.

Patton (2002 apud ALMEIDA, 2012, p. 151), diz não haver um método definido para a prescrição de notas de campo, afirmando que essas são possíveis pelas diferentes configurações em detrimento de diferentes situações e procedimentos e que a organização desse trabalho depende muito do estilo de cada pesquisador.

Para Almeida (2012), é importante que o pesquisador registre anotações a mais do que tinha planejado, pois é natural ocorrer, durante as atividades, situações inesperadas em que não é possível ser captadas por outros instrumentos e que serão utilizadas se necessário, ou mesmo descartadas, durante a etapa das análises.

Fotografias – intimamente ligadas à investigação qualitativa, podendo ser usadas de diversas maneiras. O registro fotográfico pode ser mais um importante instrumento de geração de dados para uma análise de uma leitura visual. O pesquisador deve ter o cuidado para fotografar momentos em que os alunos estejam realizando as atividades espontaneamente. Para manter a discrição e o anonimato dos alunos, evitamos registrar fotos que mostrassem seus rostos. Bogdan & Biklen (1994) destacam que o investigador, para evitar a empatia do sujeito por uma fotografia, deve evitar tirar fotos no início da investigação, sendo aconselhável iniciar esses registros, apenas, depois que tenham se empenhado nas atividades e passado a confiar nos investigadores.

Os autores citados acima defendem que o registro fotográfico permite ao pesquisador um olhar no sentido literal. Mesmo sendo recomendada para pesquisas em que o investigador não esteja presente, justificamos a utilização desse instrumento, lembrando que esse tipo de registro resiste ao tempo, uma vez que todas as fotografias foram produzidas em formato digital.

Durante nossas atividades, esses registros contribuíram bastante para análise dos dados, uma vez que por meio desses recursos registramos diversas situações que não poderiam ser evidenciadas por outros instrumentos, como também mostramos os diversos materiais manipuláveis que foram utilizados, como foi recomendado por alguns teóricos citados no segundo capítulo.

> [...] há diferentes tipos de fotografias que podem ser consideradas em uma pesquisa: podem ser aquelas que os sujeitos da pesquisa têm disponíveis; produzidas pelo pesquisador; ou produzidas pelos próprios sujeitos da pesquisa no decorrer da aplicação da pesquisa, das atividades (PATTON, 2002 apud ALMEIDA, 2012, p. 157).

As fotografias que utilizamos para análise dos dados e apresentamos no trabalho são aquelas que nós mesmos produzimos durante a realização da sequência de atividades, em que foram registradas pessoas em atividade, ambientes, cenários, procedimentos.

O nosso objetivo, ao utilizar esse instrumento para coleta de dados, foi possibilitar uma análise mais precisa dos fatos, na perspectiva de buscarmos dados importantes, que sem esse recurso seriam escapados pelos outros instrumentos.

Questionários e/ou relatórios – na atividade diagnóstica, apresentamos questionários sobre o conteúdo de geometria especial, o que serviu como fonte complementar de informações, principalmente na fase inicial e exploratória da pesquisa, para termos ideia de como estava o desenvolvimento do pensamento geométrico de cada aluno.

O questionário é mais um importante instrumento de coleta de dados, que contribuiu com a nossa pesquisa. Para Bogdan & Biklen (1994), a análise de questionários se constitui em mais uma oportunidade de apreensão de significados acerca das concepções, experiências, práticas e formas de enfrentamento da realidade pelos sujeitos envolvidos na pesquisa.

Em cada atividade da nossa pesquisa utilizamos questionários, compostos de perguntas abertas, para que os alunos tivessem a liberdade de responder de acordo com sua conveniência. Dessa forma, não oferecemos, de antemão, hipóteses de respostas que pudessem parecer corretas, procurando não induzir as respostas.

De acordo com Fiorentini & Lorenzato (2009), por meio dos relatórios os sujeitos mostram depoimentos importantes a serem observados na análise das atividades feitas durante toda a intervenção. Para Almeida (2012), toda a coleta de dados deve atender naturalmente à prescrição da pesquisa, ao analisar todo o material produzido, buscando atender aos objetivos, em direção de responder à questão norteadora. Em nossa pesquisa, a partir dos relatórios foi possível resgatar fatos e memórias da aula, como também observações relacionadas à compreensão das atividades correspondentes. Consequentemente, pudemos observar, de modo geral, se os alunos estavam demonstrando avanço nos níveis segundo o modelo van Hiele.

Gravação áudio digital – um instrumento complementar muito importante para a coleta de informações que auxiliou bastante na análise do diário de bordo, pois o pesquisador, por mais atento que esteja, pode falhar na escrita do diário, sem contar que esse instrumento registra exatamente os diálogos dos alunos entre si e dos alunos com o professor. Foram gravadas todas as quatro atividades, posteriormente transcritas.

Foi um instrumento muito importante na nossa pesquisa. Pelas gravações, registramos diversas passagens que configuram a relação interpessoal, contribuindo bastante no desenvolvimento e na construção do conhecimento do aluno, conforme proposto no terceiro capítulo.

A partir dos áudios, relacionamos vários diálogos. Como os alunos eram conhecidos do pesquisador, foi fácil destacar aqueles que contribuíam mais efetivamente. Almeida (2012) reitera que o registro em vídeo, áudio, questionário ou por meio de fotografias só tem validade quando combinados com outros dados coletados por diversos instrumentos. Todos contribuíram para concluir de forma mais exitosa nossa pesquisa.

Como partes importantes dos dados a serem coletados estão as atividades desenvolvidas com os alunos sujeitos da pesquisa. Dividimos a sua apresentação em três seções. Iniciamos pela atividade diagnóstica, para termos ideia de qual nível de desenvolvimento geométrico estavam os alunos. Depois, continuamos com a sequência de atividades que desenvolvemos com os alunos, com o objetivo de proporcionar observações acerca do avanço entre os níveis. Por fim, realizamos um teste para verificar se houve evolução quanto ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

4.3. Diagnosticando os conhecimentos prévios

A primeira atividade realizada na pesquisa foi um teste diagnóstico, o qual foi composto por cinco questões. Com o objetivo principal de fazer um levantamento dos conhecimentos adquiridos em relação aos conteúdos que foram abordados na sequência de atividades, para que, baseados nas respostas, pudéssemos fazer uma possível classificação em relação aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto pelo modelo Van Hiele.

A atividade foi realizada individualmente. Antes de iniciar, o pesquisador organizou a sala de aula, colocando as cadeiras em fileiras, junto com os alunos que estavam envolvidos na pesquisa. Nas atividades de intervenção, que foram realizadas após a análise da atividade diagnóstica, a turma foi dividida em seis grupos de cinco alunos. A seguir apresentamos as questões propostas nessa primeira atividade (Apêndice C).

Na primeira questão são apresentadas três colunas, A, B e C, para que os alunos façam a correspondência entre elas. Na primeira coluna há algumas imagens que representam objetos do cotidiano: um recipiente cilíndrico, pirâmides, cone (representado pela casca de sorvete), prismas de base hexagonal, em forma de favos de mel, uma embalagem em forma de paralelepípedo e uma embalagem de chocolate em forma de prisma de base triangular. Na segunda coluna estão os nomes geométricos convencionais das figuras: pirâmide, paralelepípedo, cilindro, cone, hexágono e triângulo, no intuito que façam a correspondência entre as colunas A e B. Na coluna C, estão representadas as figuras geométricas: paralelepípedo, hexágono, cilindro pirâmide de base hexagonal, cone e um triângulo. Importante observar que nem todas as imagens da coluna A têm correspondentes na coluna B, assim como nem todos os nomes da coluna B têm correspondentes com os elementos da coluna C. Por Crowley (1994), Oliveira & Gazire (2012) e Nasser & Sant’anna (2010), podemos afirmar que nessa atividade os alunos têm oportunidade de demonstrar se estão ou não no nível 0 (visualização ou reconhecimento).

As orientações dos PCN de Matemática do Ensino Médio, que foram abordadas no primeiro capítulo, sugerem que o ensino de geometria seja feito a partir de objetos do cotidiano do aluno para que ele estabeleça conexões entre a Matemática e sua aplicabilidade. Segundo Crowley (1994, p. 2), “alguém nesse nível consegue aprender um vocabulário geométrico, identificar formas específicas e, dada uma figura, consegue reproduzi-la”.

Na segunda questão, apresentamos duas colunas, A e B, que devem ser relacionadas pelos alunos. Na primeira, estão planificações de sólidos geométricos, especificamente de cilindro, cone, paralelepípedo e prisma de base pentagonal; na segunda, figuras que representam os sólidos geométricos planificados na coluna A. O objetivo principal dessa questão também é verificar em qual nível está o aluno. Para Kaleff (1989, p. 25), os alunos que estão no nível 1 (análise) começam a discernir características das figuras geométricas, estabelecendo propriedades, que são usadas para conceituarem classes e formas.

A terceira questão tem como objetivo verificar se o aluno é capaz de representar pelo menos uma planificação de um cubo, questão elaborada diante das expectativas de aprendizagem dos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco, que propõem ao aluno do 3º do Ensino Médio associar modelos de sólidos e suas planificações. Para Crowley (1994), no nível 3 (dedução) o aluno é capaz de construir demonstrações e não apenas de memorizá-las, sendo capaz de demonstrar de várias maneiras diferentes.

Na quarta questão temos uma relação de figuras que representam sólidos geométricos: pirâmides de base quadrada e triangular, cone, cubo, prisma de base triangular, esfera, paralelepípedo e cilindros. O aluno deverá marcar com “x” as figuras que representam poliedros e, abaixo delas, colocar o nome pelas quais as conhecem. Nessa questão tínhamos o objetivo de analisar se os alunos reconhecem a divisão dos sólidos geométricos em dois grandes grupos (poliedros e corpos redondos) e se sabiam identificar os nomes dos sólidos apresentados. Segundo os autores citados acima, essa questão oportuniza aos alunos a demonstração de um conhecimento mais avançado, relacionado às características das figuras geométricas e utilizando uma nomenclatura mais adequada. Portanto, podem estar no nível 0, reconhecendo apenas as figuras geométricas pelas suas aparências no nível 1, identificando as características e propriedades que as diferenciam; ou, até mesmo, no nível 2, quando, através das propriedades identificadas, conseguem separá-las por grupos e subgrupos utilizando uma nomenclatura mais adequada.

Para quinta questão entregamos um sólido geométrico a cada aluno a fim de verificar se eles conheciam algumas propriedades e elementos desse sólido. A partir de sua manipulação, pedimos que respondessem às seguintes perguntas: a) Ele é um poliedro ou um corpo redondo? b) Qual nome pode ser atribuído a esse sólido? c) Quais são as principais características desse sólido? Descreva-o. d) Qual sólido você recebeu? Essa última pergunta tinha o intuito apenas de identificarmos o sólido que foi entregue a cada aluno, pois todos os sólidos estarão identificados com letras do alfabeto, para posteriormente analisar suas respostas.

A partir dessa questão é possível observar em qual nível de desenvolvimento geométrico proposto por van Hiele o aluno se encontra, entre os níveis zero, um ou dois. Segundo Crowley (1994), uma pessoa deve passar pelos níveis sucessivamente, e, para se dar bem em um determinado nível, deve ter assimilado muito bem estratégias do nível anterior. Para melhor proporcionar o avanço de níveis, o professor deve seguir uma sequência de fases de ensino para oportunizar a compreensão dos alunos, como foi fundamentado no terceiro capítulo.

4.4. Descrição da sequência de atividades

A sequência de atividades foi elaborada a partir dos pressupostos teóricos do segundo e do terceiro capítulos, principalmente das fases do desenvolvimento do pensamento geométrico proposto por van Hiele, levando em consideração o material produzido pelo pesquisador, que faz parte do Laboratório de Ensino de Geometria, materiais esses que foram manipulados de forma individual e em equipe. Dessa forma, buscamos atender às necessidades dos alunos para avançar de nível de pensamento geométrico e construir relações interpessoais dos aprendizes, com o intuito que eles demonstrem os conhecimentos internalizados, conforme teoria de Vygotsky.

4.4.1. Os sólidos geométricos no dia a dia

Essa atividade teve como objetivo geral reconhecer as figuras geométricas tridimensionais nas embalagens, observando as diversas figuras geométricas, e identificar dois grandes grupos, o dos corpos redondos (cilindro, cone e esfera) e os poliedros (prisma, pirâmide e os poliedros regulares), além de suas planificações. Para isso, dividimos em três objetivos específicos para melhor conduzir as etapas que foram realizadas nesta atividade: observar nos objetos do cotidiano (as embalagens) uma associação ou uma relação com as figuras geométricas e os sólidos tridimensionais; separar os sólidos geométricos segundos dois grandes grupos, observando como são empilhados; e construir possíveis sólidos geométricos (modelos) que substituam algumas embalagens, no intuito de identificar suas planificações.

No primeiro momento, os alunos, divididos em grupos de cinco componentes, juntos com o pesquisador, visitaram um supermercado da cidade, munidos dos materiais necessários para fazerem as observações propostas, como fita métrica, caderno para anotações, lápis, máquina fotográfica, ou mesmo celular. Foram orientados para observar as diversas embalagens, suas formas diversificadas, como os produtos são acondicionados e armazenados de diferentes maneiras. A partir daí, identificar as figuras geométricas que lhes chamaram mais atenção para fazer diversas anotações sobre o produto acondicionado em determinada embalagem, dimensões, quantidade, preço, o tipo do produto, material da embalagem, uma possível nomenclatura geométrica para a embalagem em questão.

A segunda parte dessa atividade foi realizada em sala de aula, onde o pesquisador pediu para que eles se organizassem em grupos de cinco componentes. Foram os próprios alunos que fizeram a divisão dos grupos. Com as anotações realizadas na visita ao supermercado, foram orientados a desenhar uma possível planificação para as embalagens observadas. Como foram feitas as medições das embalagens, pedimos que produzissem a planificação com as medidas reais de cada uma delas, que calculassem a área total para identificar a quantidade de material utilizado na fabricação da embalagem, e que verificassem se realmente a quantidade estabelecida no rótulo pode ser acondicionada em determinada embalagem, através do cálculo do volume.

Na terceira e última etapa dessa atividade, foram apresentadas aos grupos diversas planificações de sólidos geométricos, através de uma projeção utilizando *data show*, além de sólidos geométricos de acrílico e de papelão, no intuito deles identificarem qual planificação seria mais adequada para a embalagem escolhida pelo grupo.

Aos grupos, foi solicitada a produção de uma embalagem (modelo), dentre as que foram observadas no supermercado. Com essa atividade os alunos tiveram oportunidade de trabalhar, manipular, analisar materiais concretos e observar os conceitos e elementos básicos da geometria (ponto, reta, plano), grandezas e suas medidas, de uma forma implícita, e, na reprodução de embalagens, trabalharam com polígonos, área e volume. Como propõem Rêgo, Rêgo & Vieira (2012, p. 16), as atividades "constituídas de desafios, questionamentos e a construção de modelos, possibilitam a incorporação de novos conhecimentos ou provocam a reorganização dos esquemas já existentes, gerando novas aprendizagens". Dessa forma, espera-se que os alunos tenham interesse e possam, a partir do contato com esses objetos, desenvolver seus conhecimentos e avançar no nível de pensamento geométrico.

4.4.2. Reconhecendo grupos de figuras geométricas: prismas e pirâmides

Nessa atividade tínhamos, como objetivo geral, reconhecer elementos e características de prismas e pirâmides, a partir de suas planificações e construções, com o intuito de fazer conjecturas quanto à nomenclatura. Com isso formulamos alguns objetivos específicos para darem suporte ao nosso trabalho durante as etapas dessa atividade: diferenciar prismas de pirâmides de acordo com suas características; identificar elementos e propriedades semelhantes e diferentes: de primas e de pirâmides, estabelecendo, se possível, alguma relação entre elas; estimular a troca de ideias sobre os conceitos de poliedros, prismas, pirâmides e suas partes; e estabelecer uma nomenclatura dos prismas e das pirâmides a partir das conjecturas identificadas.

O pesquisador disponibilizou o material para realização dessa atividade: recortes de papelão na forma de polígonos: triângulos isósceles, retângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos, entre outros; elásticos para a montagem das pirâmides e dos prismas. Os alunos trouxeram o material que iam utilizar ao longo da atividade: lápis, régua, folha para anotações ou caderno, aparelho celular para fotografar as atividades desenvolvidas.

Para desenvolver essa atividade baseada nos objetivos acima, seguimos três etapas. Na primeira, a partir dos recortes de papel na forma de polígonos, os alunos foram desafiados a montar objetos semelhantes aos sólidos que estavam expostos em sala de aula: prismas e pirâmides de acrílico e de papelão. Manipularam, planificando-os, trocando informações sobre características semelhantes e diferentes, identificando as figuras planas que utilizaram para montar os poliedros.

Depois de montados os poliedros propostos na etapa anterior, na segunda etapa cada componente do grupo escolheu um dos sólidos para responder algumas questões sobre esse poliedro (Apêndice D). Ficou bem claro que cada um podia manipular e até mesmo planificar o poliedro, se necessário, para facilitar a compreensão. Ainda de forma individual, cada aluno respondeu à segunda parte dessa etapa (Apêndice E). Nesse questionário, todas as perguntas foram formuladas de forma a induzir o aluno à generalização, dessa forma o aluno tem possibilidade de avançar de níveis no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Na última etapa, a partir da manipulação, observação e troca de ideias, os alunos, em equipe, identificaram os elementos (vértices, faces, arestas) e as características dos sólidos que tinham em mãos. Ao fazer essas observações, tentaram conjecturar suas nomenclaturas e fizeram uma relação entre seus elementos, preenchendo uma tabela (Apêndice F). O pesquisador ficou muito atento quando os alunos estavam preenchendo a tabela, pois, quando necessário, orientava os alunos que estavam em um nível mais baixo, pois alunos nesse nível precisam de estímulos e o professor deve intervir nesse processo.

Como ressaltam Nacarato *et al* (2014):

> Os processos de comunicação de ideias na sala de aula são fundamentais, uma vez que os discursos que circulam é que possibilitarão a apropriação da linguagem geométrica. Essa linguagem, associada às atividades experimentais, é que possibilitará a formação do pensamento geométrico. Cabe ao professor a criação desse ambiente propício à aprendizagem (p. 25-26).

Com isso percebemos que não basta uma sequência de atividades, nem tampouco materiais adequados, para garantir a aprendizagem dos educandos, mas a comunicação, o diálogo, as indagações, as intervenções realizadas pelo professor, e também a troca de ideias dos alunos entre si e destes com o professor, como propõe Vygotsky (1991).

4.4.3. Os corpos redondos

Buscamos como objetivo geral nessa atividade, identificar, através da revolução de figuras planas, as estruturas dos corpos redondos (cilindro, cone e esfera), com o intuito de observar sua superfície em objetos do cotidiano. Para isso, os objetivos específicos são os seguintes: observar e visualizar a formação dos corpos redondos através da revolução das figuras planas, extrair elementos dos corpos redondos (cone e cilindro). Identificar quais os polígonos necessários para sua construção a partir de sua planificação e relacionar os corpos redondos a diversos objetos do dia a dia dos alunos.

Para desenvolver essa atividade, o pesquisador utilizou, na primeira etapa, recursos tecnológicos, fazendo a projeção, com *data show*, de rotação, em torno de um eixo, de figuras geométricas traçadas no *software Educandus*[8], para que os alunos visualizassem os corpos redondos (cone, cilindro e esfera).

---

[8] Plataforma educacional personalizável que disponibiliza conteúdos e recursos educacionais destinados ao suporte de atividades mediadas pelas tecnologias. Este ambiente virtual de aprendizagem conta com um sistema de aprendizagem baseado em LMS (Learning Management System), que permite o gerenciamento do aprendizado a distância contribuindo para a melhoria do desempenho dos alunos, a participação dos pais, a organização da rotina escolar e a dinamização do trabalho pedagógico.

O intuito foi mostrar aos alunos que as superfícies dos corpos redondos, assim como dos poliedros, podem ser produzidas a partir de figuras planas, pela revolução de retângulos, triângulos retângulos e semicircunferências. Para isso, essa atividade foi desenvolvida em três etapas. Na primeira, foi feita a apresentação da revolução do retângulo, triângulo retângulo e semicircunferência, para dar origem ao cilindro, cone e esfera, respectivamente.

Antes de iniciarmos o segundo momento, a turma foi separada em grupos, os mesmos grupos das atividades anteriores. Pedimos que observassem os sólidos que estavam sobre a mesa central da sala: cones (papelão, casca de sorvete, chapéu de aniversário de criança e madeira), cilindros (papelão, latas de ervilhas e de milhos e madeira) e esferas (isopor e madeira). Com a manipulação e planificação desses sólidos geométricos, foi proposto aos alunos que respondessem, em equipe, o questionário 3.1. (Apêndice G), relacionado ao cilindro. Da mesma forma, através do diálogo e manipulação dos objetos, solicitamos que respondessem com atenção ao questionário 3.2. (Apêndice H), relacionado ao cone. E, por fim, ao questionário 3.3. (Apêndice I), relacionado à esfera.

Segundo os teóricos citados no segundo capítulo, Lorenzato (2010), Rêgo, Rêgo & Vieira (2012), o conteúdo apresentado com materiais manipuláveis ou com materiais concretos facilita a aprendizagem do aluno, com isso desenvolve seu pensamento geométrico.

4.4.4. Os poliedros regulares: modelando os poliedros de Platão

Os sólidos de Platão são uma das fontes mais ricas para entender características importantes da geometria espacial. Nessa atividade temos o objetivo geral voltado para identificar os poliedros regulares, como poliedros de Platão, sua importância na arte e representação do universo. Para conseguirmos alcançar o objetivo citado acima, separamos essa atividade em três etapas com os seguintes objetivos específicos: explorar os poliedros regulares através da construção por meio de polígonos; perceber, através das construções, a existência de apenas cinco poliedros; identificar a relação de Euler nos sólidos regulares, suas propriedades e nomenclatura.

Com o objetivo de explorar os poliedros de Platão, seus elementos e suas propriedades, esta atividade foi desenvolvida em três etapas. Na primeira foi entregue aos alunos, que estavam divididos em grupos, um *kit* com vários recortes de papel em forma de polígonos regulares e não regulares: triângulo, quadrados, pentágonos, hexágonos, retângulos, entre outros, para que eles tentassem montar ângulos poliédricos, ou seja, vértices, unindo as faces com fita adesiva, no intuito de perceberem o modo como são formados e em seguida notar que só é possível construir cinco poliedros regulares. Após a construção dos ângulos poliédricos, foi entregue a cada grupo o questionário 4.1. (Apêndice J).

A segunda etapa foi a partir da manipulação dos poliedros, produzidos pelos próprios alunos, para identificar algumas características semelhantes e diferentes.Com base nessas observações, cada grupo foi submetido a responder ao questionário 4.2. (Apêndice K), dentre as questões algumas deveriam ser respondidas com a interação entres os grupos. Para finalizar essa atividade, cada grupo preencheu uma tabela (Apêndice E), no intuito de identificarem as propriedades e os elementos dos poliedros, e conjecturar a relação de Euler, como também nomeá-los.

Na terceira etapa, o pesquisador fez uma demonstração de que só é possível construir cinco poliedros de Platão, ou seja, cinco poliedros regulares, facilitando, assim, o entendimento em relação ao ângulo poliédrico.

Fizemos uma breve explanação sobre a importância dos poliedros regulares e sua relação com universo e à arte.

4.5. Sintetizando e socializando os conhecimentos

Para finalizar a nossa pesquisa, propomos um teste prognóstico com o objetivo geral de sintetizar, socializar e verificar o que aprenderam ao longo de todas as atividades anteriores e se houve avanço no desenvolvimento do pensamento geométrico. Para isso, tínhamos dois objetivos específicos: relatar as experiências exitosas e não exitosas em todas as atividades e avaliar, a partir de um teste individual, se houve avanço nos níveis de desenvolvimento geométrico.

Para desenvolver essa atividade, foram necessárias duas etapas. Na primeira foram organizadas todas as evidências produzidas nas atividades anteriores, foi organizada a sala de forma que os sólidos produzidos pelos alunos ficassem no centro da sala, pois os mesmos seriam utilizados para dar subsídios a responderem algumas questões da atividade final.

Na segunda etapa, realizada em sala de aula e individualmente, foi entregue a cada aluno uma atividade prognóstica (Apêndice L) com seis questões, para verificar se os alunos conseguiram avançar de nível segundo a proposta dos van Hiele.

Toda a nossa cultura procura insistentemente manter os jovens afastados do contato com os problemas reais. Será possível inverter essa tendência?
Carl Rogers

QUINTO CAPÍTULO

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Este capítulo descreve os acontecimentos observados durante a sequência de atividades, o desempenho da turma ao realizá-las e, consequentemente, os resultados obtidos. Apresenta-se o nível de desenvolvimento geométrico que os alunos demonstraram quando foi realizado o teste diagnóstico, as categorias de análises observadas durante a sucessão de atividades, elaboradas a partir do resultado desse teste, como também algumas descrições aleatórias que se julgou importante para conclusão dessa pesquisa.

Dessa forma, buscou-se descrever as evidências observadas nos diálogos e interações entre aluno-aluno, professor-aluno, material-aluno, na perspectiva de identificar relações de lideranças e outros aspectos importantes. Além de tudo, observar e analisar as relações interpessoais dos alunos, dando ênfase à Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) e observar, a partir das atividades, o desenvolvimento do pensamento geométrico de acordo com o modelo van Hiele.

5.1. Conhecimentos prévios

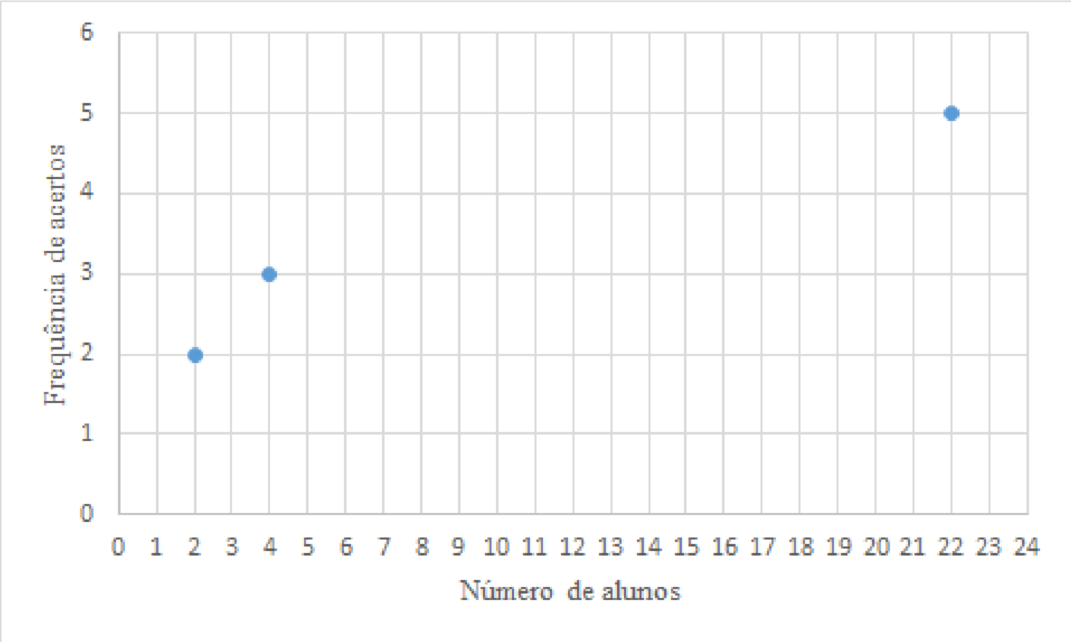
Para analisar em qual nível de pensamento geométrico estavam os alunos do 3º ano do Ensino Médio e, em seguida, planejar e preparar a sequência de atividades para oportunizar os alunos ao avanço de níveis, foi proposto um teste diagnóstico (Apêndice C) individual, com cinco questões distribuídas em ordem de acordo com os níveis segundo o modelo van Hiele.

O teste diagnóstico foi realizado no dia 21 de março de 2015, com 28 alunos do 3º ano do Ensino Médio. Iniciou-se com a organização da sala de aula, colocando as cadeiras em fileiras para que os alunos realizassem de forma individual. Foi feita a leitura e explanação de cada questão na perspectiva que eles tivessem uma ideia mais clara para a sua resolução.

Na primeira questão é possível observar se o educando está no nível básico (visualização ou reconhecimento), pois, segundo Crowley (1994, p. 9), o aluno nesse nível é capaz de observar, reconhecer figuras geométricas "envolvendo objetos físicos da sala de aula, da casa, de fotografias e de outras localidades". Para verificar se os alunos estão no nível da atividade proposta ou não, tendo como base Nasser & Sant'anna, (2010, p. 9), verificamos "que o aluno alcançou o nível quando ele acerta pelo menos 60% das questões do teste daquele nível". Feitas as análises das respostas nos questionários dos alunos, baseados nos trabalhos de Crowley (1994), Nasser & Sant'anna, (2010), Oliveira & Gazire (2012), entre outros, percebeu-se que os alunos demonstraram estar no nível básico (visualização ou reconhecimento), ou seja, no nível zero.

Foi proposto aos alunos que relacionassem a coluna A à B. Na coluna A se encontravam figuras de objetos do cotidiano: fotografia de um instrumento musical (tambor), em forma de cilindro; imagem das três pirâmides do Egito; ilustração de um sorvete em forma de cone; ilustração de um favo de mel, representando hexaedros; ilustração de uma caixa de leite em forma de paralelepípedo; e ilustração de um tablete de chocolate em forma de prisma de base triangular. Na coluna B havia os nomes de alguns sólidos geométricos: pirâmide, paralelepípedo, triângulo, cone, hexágono e cilindro. Dos 28 alunos que fizeram a atividade, 22 relacionaram corretamente 5 ilustrações aos nomes dos seus sólidos; 4 acertaram 3 correspondências; e 2 acertaram apenas 2 das 6 correspondências possíveis (Gráfico 1).

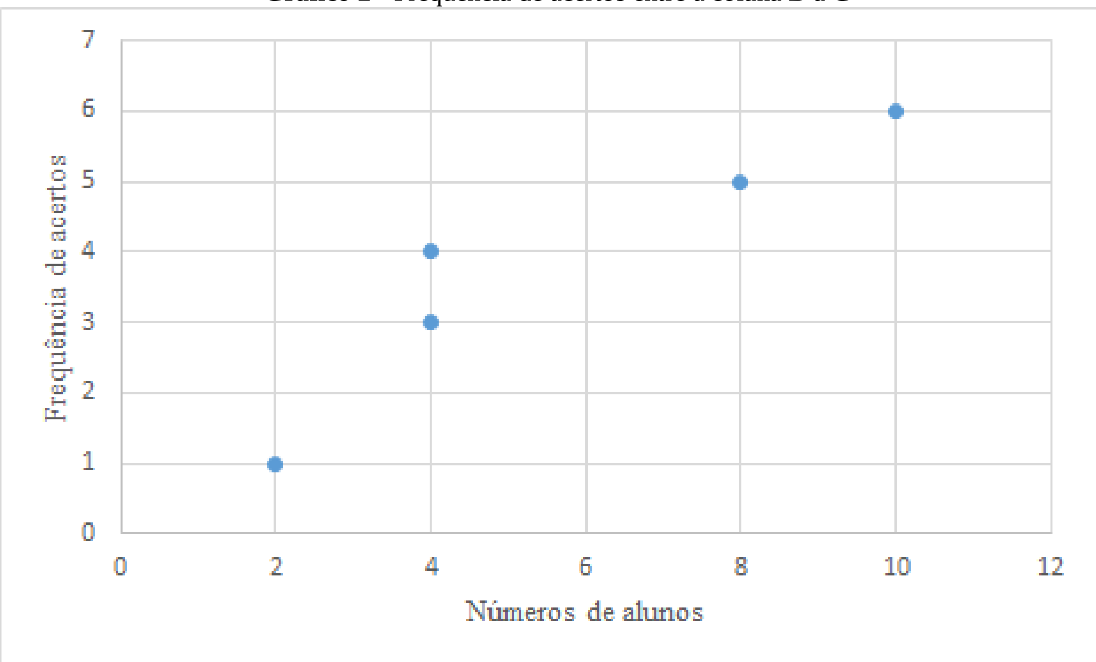
Gráfico 1 - Frequência de acertos entre a coluna A a B



Fonte: Produzido pelo autor

Ainda na primeira questão os alunos relacionaram a coluna B à C, na qual estavam algumas imagens de figuras e sólidos geométricos: paralelepípedo, hexágono, cilindro, cone, triângulo e uma pirâmide de base hexagonal. Observou-se que o desempenho foi mais baixo que na primeira relação. Dos 28 alunos, 10 relacionaram corretamente 6 nomes às imagens dos seus sólidos; 8 acertaram 5 correspondências; 4 acertaram apenas 4; 4 acertaram apenas 3; e 2 acertaram apenas 1 das 6 correspondências possíveis (Gráfico 2).

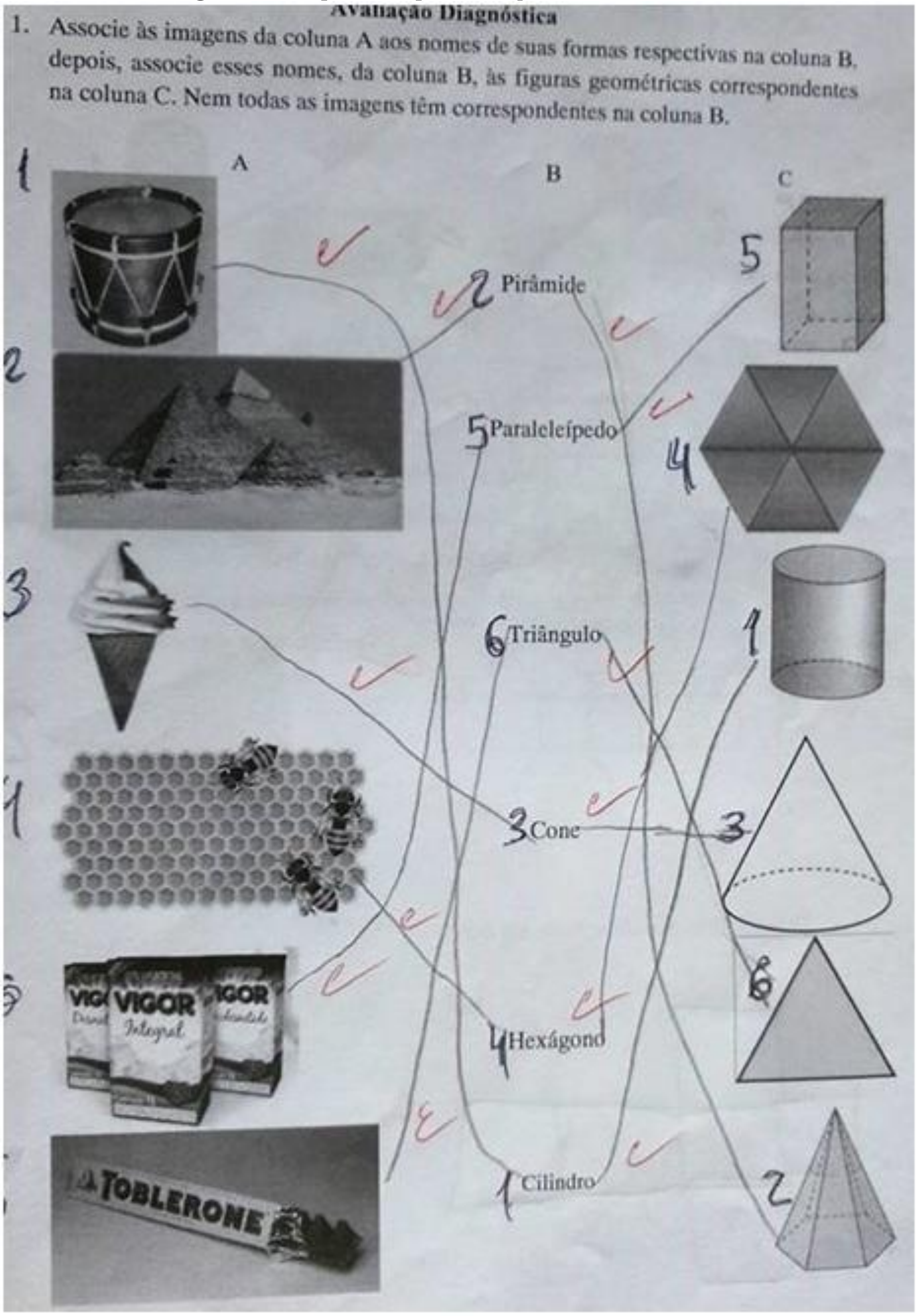
Gráfico 2 - Frequência de acertos entre a coluna B a C



Fonte: Produzido pelo autor

Mediante essa observação, evidenciou-se que, dos 28 alunos, apenas 3 não demonstraram, sequer, estar no nível básico. Três alunos se destacaram, entre eles João (Figura 1).

Figura 1- Resposta da primeira questão do aluno João



Fonte: Registro do autor

Ao observar a imagem acima, percebe-se que João, quando foi relacionar o sexto item da coluna A, não levou em consideração a terceira dimensão, relacionando-o a triângulo. Todas as demais relações foram feitas corretamente por ele.

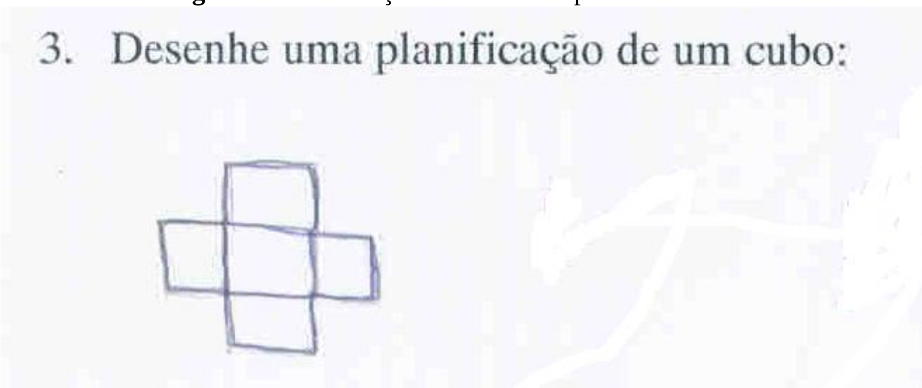
Na segunda questão, foi proposto aos alunos que relacionassem imagens de sólidos geométricos da primeira coluna com imagens da planificação dos sólidos na segunda coluna. Não demonstraram dificuldades em responder, obtiveram 100% de acertos. Ao analisar as questões posteriores, percebe-se que as soluções demonstram que estavam no nível básico (visualização ou reconhecimento), uma vez que na terceira, quarta e quinta questões não utilizaram os conhecimentos necessários sobre as propriedades dos sólidos em questão, o que justifica estarem no nível acima do básico. Como propõem Crowley (1994) e Oliveira & Gazire (2012), os alunos quando estão no nível de análise começam a identificar e utilizar as propriedades das figuras geométricas com um vocabulário mais adequado, situação que não foi percebida.

Na terceira questão, cujo enunciado era "desenhe uma planificação de um cubo", tinha como objetivo observar se eles conseguiam diferenciar a geometria plana da geometria espacial. Muitos alunos, ao terminar o 3º ano do Ensino Médio, não sabem diferenciar essas duas situações, sem contar que o cubo (hexaedro) apresenta várias planificações. Durante a realização dessa atividade, houve algumas indagações como: "o que é planificação?", "Cubo é um quadrado?", "Tem quantos lados?", uma vez que os alunos demonstram certa dificuldade em conhecer alguns termos da geometria plana e também da espacial.

A partir das análises, foi possível perceber que alguns alunos não demonstraram estar em um nível mais avançado, ficando apenas no nível de visualização. São capazes de reconhecer algumas características das figuras, mas não conseguem perceber ou analisar propriedades. Quando um aluno diz "é um quadrado?", percebe uma característica, porém não vê o sólido como um corpo tridimensional. Quando pergunta "o que é planificação?", não percebe que os poliedros (nem todos os sólidos) possuem faces planas, na forma de polígonos, tendo consequentemente dificuldades na sua planificação, como também no cálculo de área e volume. Demonstram falta de intimidade com os elementos e as propriedades ao indagar "quantos lados têm?", ou seja, ainda não compreenderam que os sólidos são formados de faces e não de lados.

A partir dessas indagações, percebeu-se que doze alunos erraram a planificação do cubo, dentre eles alguns representaram com o desenho do cubo, ou seja, não demonstraram saber discernir as figuras geométricas bidimensionais das tridimensionais. Dez alunos acertaram. Vale salientar que, entre esses dez alunos, alguns representaram a planificação de um paralelepípedo retângulo, mostrando, assim, certa dificuldade em saber qual a diferença para um cubo. Quatro alunos não responderam, dessa forma não temos como identificar suas dificuldades quanto a essa questão. Ocorreram duas situações curiosas na resolução dessa questão. A aluna Jacira, fez a planificação abaixo (Figura 2), ela demonstrou certa habilidade em reconhecer o que é uma planificação, mas não percebeu que realmente o cubo (hexaedro) é formado por seis faces, e não cinco como foram planificados.

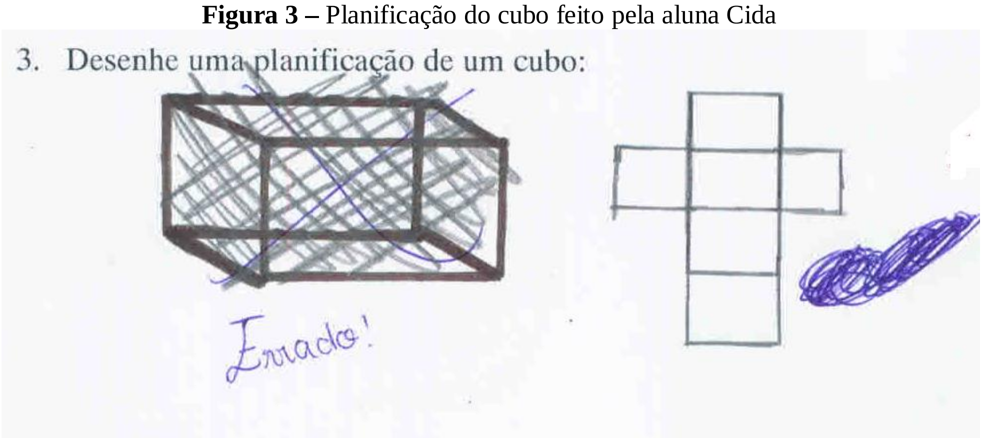
Figura 2 - Planificação do cubo feito pela aluna Jacira



Fonte: Registro do autor

Já a aluna Cida fez o desenho de um paralelepípedo retângulo, em seguida fez sua planificação, colocando abaixo de um deles a palavra "errado", como podemos ver na figura 3. Não podemos concluir e identificar se ela percebeu que estava errado e fez a correção, não tendo muita habilidade para desenhar, ou mesmo que não sabia que no cubo todas as faces são congruentes. No segundo desenho seria uma planificação correta se as faces, de fato, fossem congruentes. Percebe-se que a aluna diferenciou muito bem a geometria plana da geometria espacial, no momento em que tinha desenhado um paralelepípedo, depois sua planificação.

Figura 3 – Planificação do cubo feito pela aluna Cida



Fonte: Registro do autor

A quarta questão foi proposta com o intuito de verificar se os alunos conseguem demonstrar avanço de nível em relação às questões anteriores. Acredita-se que é possível analisar os três primeiros níveis: nível 0 (visualização ou reconhecimento), em que os alunos podem associar as figuras a objetos do cotidiano e identificá-las pela aparência; nível 1 (análise), é possível identificar propriedades e utilizar uma linguagem mais apropriada; e nível 2 (dedução informal), os alunos são capazes de observar propriedades de uma figura ou classes de figuras. Com base nesses três níveis da teoria de aprendizagem dos van Hiele, foi feita a análise a partir das respostas obtidas nos questionários. Nessa questão, observaram-se duas situações diferentes e importantes que serão trabalhadas na sequência de atividades: uma relacionada aos dois grupos de sólidos geométricos, corpos redondos e poliedros (Quadro 4). Outra relacionada à nomenclatura dos sólidos em questão (Quadro 5).

Quadro 4 – Respostas dos alunos à questão quatro: relacionadas aos corpos redondos e poliedros

IDENTIFICAÇÃO DOS CORPOS REDONDOS E POLIEDROS	
Quantidade de acertos	Número de alunos
9	6
8	1
7	8
6	4
5	4
4	4
2	1

Fonte: Produzido pelo autor.

Percebe-se que 19 alunos acertaram acima de 60%. Baseados em Nasser & Sant'anna, (2010), podemos dizer que eles demonstram estar no nível de visualização ou reconhecimento, enquanto 9 não conseguiram, sequer, demonstrar estar no nível zero nessa atividade, havendo certa dificuldade.

Quadro 5 – Respostas dos alunos à questão quatro: relaciona das à nomenclatura dos sólidos

IDENTIFICAÇÃO DA NOMENCLATURA DOS SÓLIDOS	
Quantidade de acertos	Número de alunos
9	0
8	0
7	2
6	1
5	4
4	8
3	7
2	4
1	1
0	1

Fonte: Produzido pelo autor.

Percebe-se que nessa situação apenas 3 alunos demonstraram estar no nível de análise (nível 1). Observando suas respostas, percebeu-se que eles conseguem identificar as propriedades das figuras e utilizam a nomenclatura com um vocabulário ideal.

Duas situações chamaram nossa atenção. A aluna Sílvia, com 7 acertos dentre os 9 possíveis, conseguiu demonstrar certo conhecimento quanto à nomenclatura das pirâmides, identificando-as de forma correta. A primeira sendo uma pirâmide de base quadrada e a segunda de base triangular; já o prisma de base triangular, nomeou como triângulo retangular; o cilindro menor como roda. A outra situação foi da aluna Lila, que utilizou a nomenclatura das pirâmides de forma correta, como a aluna anterior, porém não conseguiu identificar nenhum dos corpos redondos, nem mesmo relacionando a nomes de objetos do cotidiano, como fez Sílvia.

Observou-se também que muitos nomes foram dados com base em objetos do cotidiano. Em alguns questionários a esfera recebeu nomes como *bola* e *oval*. Da mesma forma, o cilindro menor foi chamado de *roda*; o cubo, de *quadrado*; o paralelepípedo, de *retângulo*; a pirâmide, de *triângulo*; caracterizando, mais uma vez, a dificuldade encontrada em diferenciar geometria plana de geometria espacial, e que uma boa parte dos alunos demonstra estar no nível de visualização ou reconhecimento. As características para o nível básico, segundo, Nasser & Lopes (1996, p. 12), são "identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas, com base em sua aparência global".

Na quinta questão, “observando o sólido que você recebeu, responda”, foram feitas algumas perguntas. Na primeira pergunta, “Ele é um poliedro ou um corpo redondo?”, apenas 2 dos 28 alunos erraram, demonstrando estar no nível zero do modelo proposto pelos van Hiele.

Na questão b), “Qual nome pode ser atribuído a esse sólido?”, tivemos respostas diversas, entre elas algumas relacionadas a objetos do cotidiano, aos elementos dos sólidos e algumas totalmente fora das expectativas. Apenas quatro alunos responderam de forma coerente com os termos matemáticos, demonstrando estar um pouco acima de nível dos demais, utilizando um vocabulário adequado para nomear os sólidos. Nove alunos demonstraram estar no nível de visualização, utilizando objetos do dia a dia para fazer relações com os sólidos. Cinco destes usaram o termo pirâmide como respostas, ou seja, não fizeram qualquer menção a características que diferenciam uma das outras, como a sua base. Dois que estavam com o octaedro regular fizeram relação com *balão*, como a aluna Gisa que escreveu “formato de um balão”. Um deles disse que o octaedro regular parece com uma pirâmide. Doze alunos deram aos sólidos os nomes de suas faces: triângulo, ao octaedro; retângulo ao hexaedro. Mais uma vez se configura uma falta de conhecimento em relação à geometria plana ou espacial. Três alunos não responderam a essa questão.

Para finalizar, a questão c), “quais são as principais características desse sólido? Descreva-o.”. Nessa atividade, foi dada oportunidade aos alunos para expressarem todos os conhecimentos em relação aos sólidos que estavam em mãos, pois tiveram como demonstrar de fato em qual nível de pensamento geométrico estavam.

Poucos alunos demonstraram estar em um nível acima do básico (visualização e reconhecimento), sendo que a maioria das respostas tinha relação com objetos do cotidiano.

> [Beto] É composto por seis partes e tem forma parecida com a da colmeia de abelha.
> [João] São duas pirâmides, uma em cima e a outra embaixo, cada pirâmide tem quatro lados.
> [Cida] Ele tem quatro pontas, e todos os lados iguais.
> [Bruno] Lembra um balão.

A partir dessas respostas, observamos que quinze alunos relacionaram à forma geométrica plana dos lados, outros com a quantidade de lados. Enfim, não conseguiram demonstrar conhecimentos sobre as propriedades dos sólidos. Sendo assim, segundo Crowley (1994) e Nasser & Sant’anna (2010), demonstraram estar no nível básico.

Destacamos algumas respostas interessantes, porém não fica claro perceber se estão em um nível acima do básico. Por exemplo, Tânia descreve: "quatro lados iguais de base triangular", referindo-se ao tetraedro; Edson, referindo-se à pirâmide de base quadrada, diz: "ela tem base quadrada e lados triangulares". Apenas três alunos se reportaram às propriedades, características e elementos dos sólidos, coincidentemente os mesmos alunos que se destacaram em questões anteriores.

A partir das atividades analisadas, concluímos que vinte alunos estão no nível básico (visualização e reconhecimento), e que apenas três demonstraram estar no nível acima do básico, sendo que cinco não puderam ser classificados nem no nível 0.

A partir desse diagnóstico, preparou-se uma sequência de atividades, apoiados em Nasser & Sant'anna (2010), com suas propostas de trabalho do Projeto Fundão da UFRJ, e na proposta de Oliveira & Gazire (2012), que apresentaram um trabalho de pesquisa sobre as dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem de geometria tridimensional no Ensino Médio. Essa sequência de atividades foi organizada em quatro partes (Quadro 6), na perspectiva de oportunizar aos alunos momentos de interação, em que pudesse ser verificada como se dá a relação interpessoal e, especificamente, verificar se essas atividades contribuem (e como contribuem) para o avanço nos níveis do desenvolvimento geométrico segundo o modelo van Hiele.

Quadro 6 – Organização da Sequência de Atividades

ATIVIDADE PROPOSTA	DATA DA REALIZAÇÃO
Os sólidos geométricos no dia a dia	10 de Abril de 2015
Reconhecendo grupos de figuras geométricas: prismas e pirâmides	05 de Junho de 2015
Os corpos redondos	12 de Junho de 2015
Os poliedros regulares: modelando os poliedros de Platão	19 de Junho de 2015

Fonte: Produzido pelo autor

À medida que se foram realizando as atividades, eram feitas também a observação direta, registros com fotografias, anotações e gravação de áudio, para em seguida desenvolver as análises. Diante disso, pudemos classificar cinco categorias de codificação que consideramos importantes para organizar e realizar essas análises. As categorias, identificadas *a posteriori*, são: *Comunicação por pensamento geométrico; Relacionando as figuras* *geométricas bidimensionais às tridimensionais; Sólidos geométricos relacionados ao cotidiano*; *Objetos concretos e abstratos e Manipulação de materiais concretos*.

5.2. Categorias de análise de dados

Após a descrição e análise das atividades, conseguimos destacar cinco categorias que contribuíram para a reflexão sobre a questão norteadora e sobre os objetivos propostos na Dissertação. No quadro abaixo está apresentada cada uma dessas categorias de forma mais detalhada.

Quadro 7 - Descrição das Categorias de Análise.

Categorias de Análise	Descrição
Comunicação por pensamento geométrico	Enfatizamos nessa categoria a forma de interação dos alunos entre si e como os diálogos contribuíram para o desenvolvimento das atividades e a construção do conhecimento.
Relacionando as figuras geométricas bidimensionais às tridimensionais	Nessa categoria enfatizamos a relação entre as geometrias plana e espacial, assim como as dificuldades encontradas pelos alunos em diversas situações, demonstrando não saber de forma correta a diferença entre as duas e que a geometria espacial apresenta vários conceitos, propriedades e características da geometria plana.
Sólidos geométricos relacionados ao cotidiano	Procuramos nessa categoria enfatizar a relação encontrada entre os sólidos geométricos e o cotidiano, buscando, assim, facilitar o entendimento do aluno e fazer com que ele perceba a importância dos conhecimentos geométricos para melhor entender e resolver situações do dia a dia.
Objetos concretos e abstratos	A partir das atividades procuramos enfatizar a manipulação dos objetos concretos para melhor conceituar os termos geométricos para uma abstração adequada. Demonstrar através desse processo um avanço no desenvolvimento geométrico baseado na teoria de van Hiele.
Manipulação de materiais concretos	A partir do material produzido pelo professor no planejamento e produção das atividades, como também produzido em sala de aula pelos alunos, temos como ênfase a manipulação desses objetos para melhor compreensão dos conceitos e propriedades geométricos.

Fonte: Registro do autor

5.2.1 Comunicação por pensamento geométrico

Buscou-se nessa categoria destacar, durante a sequência de atividades, a interação dos alunos entre si, entre alunos do mesmo grupo, de grupos distintos, com o professor e como os diálogos e a relação interpessoal podem contribuir para o desenvolvimento das atividades e do pensamento geométrico, de acordo com o modelo van Hiele para construção do conhecimento.

Os grupos foram divididos espontaneamente pelos alunos. Percebemos que eles o fizeram de acordo com a aproximação e interação entre os componentes. Ao iniciar a primeira atividade, cada grupo, ao chegar ao supermercado, observou as embalagens demonstrando muito cuidado, atenção e troca de diálogo para, em seguida, fazer as anotações necessárias sobre as embalagens escolhidas e dar continuidade às atividades propostas em sala de aula (Figura 4). Observaram com mais frequência as embalagens que têm o formato de paralelepípedo. Ao ser dirigida a pergunta “porque escolheram tais embalagens?”, falaram que seria mais fácil trabalhar com elas e são mais comuns entre as demais. Pedimos que fizessem observações também de embalagens com outras figuras geométricas. Todos os grupos fizeram as anotações necessárias. Ao final de cada visita, recolheram-se as observações realizadas para não correr o risco de algum grupo ficar sem o material, por motivo de algum componente não comparecer na etapa seguinte.

Figura 4 – Grupos fazendo suas observações no supermercado

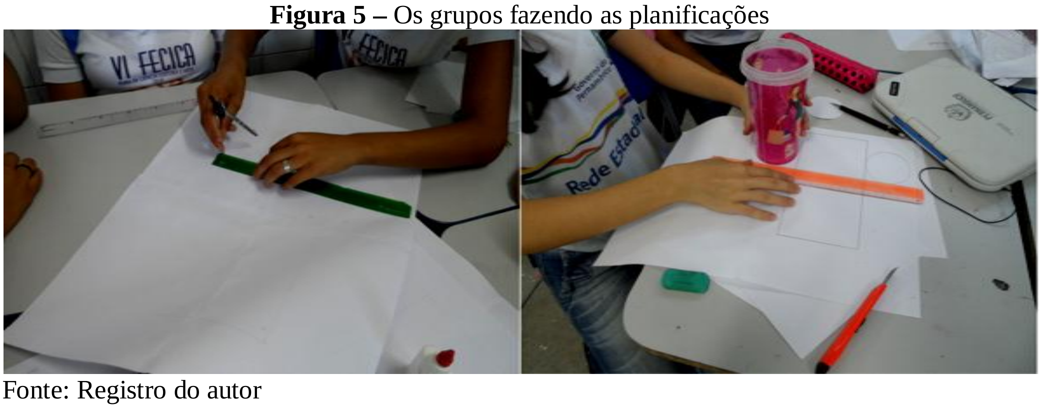
Fonte: Registro do autor

Os seis grupos realizaram as pesquisas de acordo com a proposta, sempre demonstrando interação e diálogo nas escolhas das embalagens. Fizeram as observações de diversas embalagens, em seguida anotaram aquelas que acharam mais interessantes. Percebeu-se que quatro grupos escolheram espontaneamente embalagens em forma de paralelepípedo. Após serem orientados a observarem embalagens em forma de corpos redondos, tomaram iniciativa para realizar as anotações. Dois grupos, ao iniciar as observações, logo fizeram anotações de produtos cujas embalagens tinham forma de corpos redondos, assim como os demais também observaram outros tipos de embalagens. Fizeram diversas anotações relacionadas às embalagens observadas, suas dimensões, capacidade, preço e peso.

Na segunda etapa da primeira atividade, em que foi proposto aos alunos que planificassem as embalagens que foram observadas no supermercado, a partir das observações anotadas naquele momento, utilizando as dimensões reais em seguida identificar as figuras geométricas planas e calcular área e perímetro. Ao iniciar as atividades, percebeu-se que mesmo dialogando entre si não conseguiram identificar a fórmula de calcular o comprimento e construir a circunferência na planificação do cilindro e do cone. Nesse momento, orientou-se que utilizassem o celular ou mesmo o tablete para pesquisar, na internet, a fórmula de como encontrar o comprimento correto para cada circunferência. A partir daí, eles começaram a imaginar como fazer esse cálculo. Logo em seguida, Maria disse: “essa circunferência deve ser do mesmo tamanho desse lado” (referindo-se ao lado maior do retângulo da planificação do cilindro). Então foi dirigida a pergunta: “Maria, como encontrar esse valor?”. Maria não respondeu. Depois de encontrar a fórmula através da pesquisa, identificaram e calcularam a área das figuras geométricas (retângulo e círculos) planificadas.

Um dos grupos, ao planificar a embalagem de uma lata cilíndrica (Figura 5), com dimensões reais, não demonstrou dificuldade, pois um integrante, Luiz, apresentou habilidade em manusear o compasso. Como já tinham feito a pesquisa em ralação à fórmula utilizada para calcular o comprimento da circunferência, logo percebeu como produzir tal desenho e calcular sua área de forma prática e eficaz. Percebeu-se que ele orientou colegas do grupo e também de outros grupos, de maneira espontânea.

Figura 5 – Os grupos fazendo as planificações



Fonte: Registro do autor

Dessa forma, percebeu-se que os alunos, ao participar dessa etapa, demonstraram interesse e dedicação, pois todos os grupos realizaram suas atividades em sala de aula com êxito, dentro do planejamento feito para execução das atividades.

Ao finalizar a segunda etapa, foi distribuído aos grupos um papel mais resistente para que eles escolhessem uma, entre as planificações produzidas, a fim deque criassem um produto que pudesse ser acondicionado na embalagem. Essa etapa foi realizada fora da sala de aula, ou seja, atividade para casa. Todas as embalagens criadas pelos alunos foram entregues na data prevista. Eles relataram que a atividade foi realizada em equipe e que todos participaram efetivamente. Quatro grupos criaram embalagens em forma de paralelepípedo retângulo, como caixa de sabão em pó, macarrão integral, biscoito, entre outros. Apenas dois grupos apresentaram embalagens em forma diferente: uma em forma cilíndrica, para acondicionar o produto "pó contra recalque" (nome dado pelo grupo ao produto produzido por eles); e outra na forma de tronco de cone, para o produto "macarrão instantâneo".

Na realização da segunda atividade, *Reconhecendo grupos de figuras geométricas: prismas e pirâmides*, ao iniciar a segunda etapa foi entregue um *kit* contendo vários cartões em forma de polígonos (quadrado, triângulo, retângulo, pentágono, hexágono, e outros), além de alguns elásticos, para que fossem utilizados na montagem de sólidos.

Eles trocavam muitas ideias entre si, perguntavam, gesticulavam. Alguns alunos disseram que não conseguiam montar. De repente, Lila, em tom de desânimo, disse: "Ô, professor, eu sei montar isso não". Na vontade de montar os poliedros de forma correta, houve nesse momento certa inquietação que gerou um diálogo entre alunos do mesmo grupo e de grupos diferentes.

> [Bárbara] Essa aí é daqui Iara, esse aqui é maior.
> [Maria] Ah, já sei como é que faz agora.
> [Beto] Maria, não é assim.
> [José] Como faz para encaixar as peças se não tem lados iguais?
> [Lila] Homem, eu desisto disso.

Renata, depois de observar os colegas do grupo, falou: "Ah, eu sei como é que faz", e continuou pedindo: "ô Lila, me dê um desses que eu estava terminando aqui". Lila disse: "o que? Não, que me dê um desse?". Percebe-se nesse momento que os alunos trocavam experiências e até mesmo seus materiais.

Renata, ao terminar de montar, disse: "Professor, consegui, vem cá, dá para identificar que é um...". Beto quis ajudar:- "que é o que, Renata?". Renata respondeu: "uma pirâmide de base pentagonal". Ao terminar essa etapa, percebeu-se o quanto as trocas de informações foram importantes para concluírem com êxito as atividades.

Concluída essa fase, quando todos os grupos estavam com os poliedros que montaram. Iniciou-se a próxima etapa pedindo que, ao observar e manipular esses poliedros, respondessem o questionário 2.1. (Apêndice D). Ao observarem as questões, começaram as inquietações:

> [Beto] Maria, é uma pirâmide de base quadrada?
> [Maria] Não, é uma de base triangular.
> [Lila] Õ Professor, quando é que as faces são congruentes?
> [Maria] É uma coisa que conclui.
> [Bruna] Congruência é quando são iguais.

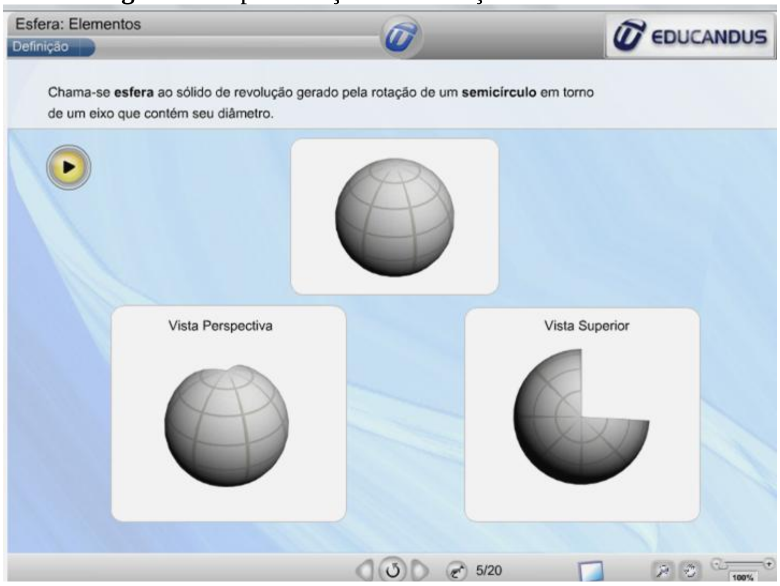
Para iniciar a segunda parte dessa etapa, propõem-se aos alunos responderem o questionário 2.2. (Apêndice E). Ao entregarmos o questionário houve uma série de indagações e discussões entre os alunos, demonstrando dessa forma a interação com o meio e a relação interpessoal. Perguntamos se alguém havia conseguido identificar alguma relação entre os elementos dos poliedros. Ao que foram dialogando:

> [José] Não tem cinco lados? E tem quinze arestas? Então você divide quinze para cinco dá quanto?
> [Renata] Três.
> [José] Então é como? O número de aresta é três vezes.
> [Renata] Não tem uma conta que faz para descobrir o vértice ou aresta? Não tem uma forma?
> [José] A forma é isso, justamente isso que ele quer.
> [Bruna] Não, ele quer a resposta.
> [Renata] O que é um prisma?
> [José] Então pode ser, é formado por cinco lados, ou seis lados, seis faces.
> [Renata] Tem que falar assim: um prisma é...

Na terceira atividade, *Os corpos redondos*, foi projetada uma imagem mostrando a revolução de figuras planas (retângulo, triângulo retângulo e semicircunferência) em torno de um eixo, na perspectiva de mostrar a composição da superfície dos corpos redondos (cilindro, cone e esfera, respectivamente). Antes de mostrar, fizemos a seguinte pergunta: Quais figuras geométricas planas teríamos que rotacionar para visualizar a superfície lateral do cilindro, do cone e da esfera, utilizando recursos tecnológicos? E qual seriam suas planificações? No que se refere ao retângulo e ao triângulo retângulo, não demonstraram dificuldades. Já relacionado à esfera houve alguns questionamentos. Bárbara disse: "dois círculos". Bruna e Tânia, conversando entre si, perceberam que na rotação de um semicírculo é possível visualizar a esfera, demonstrando mais uma vez a importância do diálogo e troca de experiências para construírem juntos os conhecimentos.

Após o diálogo, observou-se que os alunos não tinham a mesma segurança quanto ao cilindro e ao cone. Ao mostrar usando o *software Educandus* (Figura 6), perceberam que realmente seria necessário fazer a rotação de um semicírculo sobre o eixo, como tinham proposto Bruna e Tânia. Não conseguiram explicitar a forma geométrica de sua planificação.

Figura 6 – Apresentação da revolução do semicírculo



Fonte: Imagem produzida com o *Software Educandus*

Ao concluir a apresentação, percebeu-se que os alunos têm certas dificuldades em conceitos e propriedades dos corpos redondos, em particular relacionados à esfera. Para finalizar essa atividade, foram entregues os questionários 3.1. (Apêndice G), com questões relacionadas ao cilindro; o 3.2. (Apêndice H), referentes ao cone; e o 3.3. (Apêndice I), com questões sobre a esfera. A partir desse momento começaram os questionamentos e troca de experiências.

> [Renata] A parte plana é essa? [Referindo-se à lateral do cilindro]
> [Lila] Não, é essa aqui, os círculos.
> [Beto] Círculo ou esfera?
> [PP] O que vocês acham?
> [Maria] É uma esfera.
> [PP] Por que esfera?

Em seguida, Beto leu a quinta questão do questionário 3.1. e disse: "eu falei a ela que ambas as partes têm que ter o mesmo comprimento, tanto o círculo como o retângulo têm que ter o mesmo tamanho para quando encaixar ficar certinho". Bruna, referindo-se à sexta questão desse questionário, perguntou: "aumentando o lado que não encaixa na circunferência, haverá problema para montar o sólido?". Durante todo tempo de observação percebe-se o diálogo entre os componentes do mesmo grupo e entre grupos diferentes, ficando explícita a importância da troca de experiências.

Para responderem o questionário 3.2, orientamos que observassem o chapéu de aniversário (material concreto e manipulável), em forma de cone, para terem uma ideia. Sobre esse momento, destacamos esse diálogo:

> [Bruna] Em qualquer um.
> [PP] Se você quer montar, esse círculo poderia ser em outro ponto?
> [Bruna] Pode.
> [PP] Em qual?
> [Bruna e Bárbara] Em qualquer um.
> [Bruna] Em qualquer ponto ele pode tocar.
> [Larissa] Em todos os pontos ele pode tocar, em todos porque não dá para montar.

Ao analisar a resolução do questionário 3.3., percebeu-se que os alunos demonstraram não dominar muito os conceitos e propriedades sobre setor circular, não sabendo identificar o seu raio. A partir desse momento, foi necessária nossa intervenção para auxiliar e provocar a curiosidade para que buscassem alternativas diversificadas para a resolução das questões. Observou-se, no diálogo, a importância do trabalho em equipe, quando se concretizou a planificação do cone feita pelo grupo de Bruna.

A última questão desse questionário foi: "Se aumentarmos o ângulo, sem mudar o círculo da base, o que terá que mudar para que a nova planificação esteja correta? O que concluímos com isso?". Esta também causou muita discussão entre os próprios alunos e com o professor.

Bruna disse: "Ah, mais aí tá dizendo que não pode mudar...". Renata disse a Bruna: "não, não tá falando essa parte aqui..., que não pode mudar, né?", mostrando a planificação, referindo-se ao setor circular. Os dois grupos praticamente se juntaram para resolver a questão sete. Dialogaram bastante, sem muito sucesso. Diziam que teriam que aumentar o setor circular e a base do cone

Conforme Crowley (1994), questões desse tipo provocam os alunos, dando oportunidade para avançar e atingir o nível 3 (dedução formal). Mesmo depois da troca de experiências, os alunos não conseguiram chegar a uma solução. Percebeu-se que deveria haver uma intervenção para provocá-los, no sentido de procurar outra forma para resolver a questão. Apresentamos uma planificação na lousa e pedimos que observassem com atenção a explanação.

Através da gravação de áudio, percebeu-se que Renata, Lila, Bárbara, Bruna, Tânia, Larissa, Iara e outros alunos dialogaram e fizeram algumas intervenções, enquanto se fazia a explanação. Os educandos perceberam que mudando a altura do cone vai modificar alguma coisa no setor circular também. Renata fala claramente: “diminuindo a altura, porque diminuindo a altura ele encaixa perfeitamente na bola”, referindo-se ao setor circular. Após esse momento, o grupo de Renata começou a fazer explicações aos demais.

Ao iniciar o questionário 3.3., percebeu-se que os alunos estavam bastante cansados, porém não consideramos isso como um bom motivo para não se empenhar na sua resolução. Pediu-se para que todos tivessem atenção a uma breve explanação, uma vez que se percebeu uma enorme dificuldade quando se tratava de círculos, circunferências e, principalmente, esfera. Ao pegar uma esfera de isopor (representando uma esfera qualquer) e uma caneta (representando uma reta), foram mostradas todas as possibilidades de posições relativas entre as duas figuras geométricas. Destacamos o seguinte diálogo:

> [José] Professor, nessa posição a caneta ia furar a esfera em dois lugares.
> [PP] Certo. Qual tipo de intersecção seria?
> [Bruna] Um ponto.
> [Lila] Dois. Exatamente um na entrada e outro na saída.
> [PP] E se a esfera for cheia, por exemplo, uma maçã em forma de esfera, vai ser dois pontos a intersecção? Se pegar um canudo e atravessar essa maçã, o que formaria?
> [Bruna] Um cilindro.
> [PP] Considerando o cilindro uma única dimensão, seria o que?
> [Bruna] Uma reta.

A partir dessas explanações os grupos se reuniram, dialogaram e responderam às questões, demonstrando dificuldades relacionadas a conceitos e generalizações.

No início da atividade quatro (Os poliedros regulares: modelando os poliedros de Platão), após uma abordagem sobre as atividades anteriores, através de questionamentos, ficou notório que a turma não sabia o significado de ângulo poliédrico. Nesse momento foi feita uma breve explanação.

Vários sólidos estavam expostos sobre a mesa central. Aproveitou-se para provocar a discussão, perguntando: “entre esses sólidos, quais vocês identificam? Tem algum sólido que não tem características com os estudados anteriormente, ou seja, que tem propriedades especiais?

> [Maria] Esse aí [referindo-se ao octaedro regular].
> [PP] É um prisma?
> [Maria] Acho que não.
> [PP] O que é prisma?
> [José] Tem que ter duas bases e laterais retangulares.
> [Bruna] Parece mais com pirâmide.
> [PP] É uma pirâmide?
> [Bruna] Não, pois a pirâmide tem uma base e todas as faces laterais se encontram no mesmo vértice.

Percebeu-se nesse momento que Bruna conseguiu conceituar de forma clara a pirâmide e observar que o octaedro regular tem algumas características semelhantes, porém não se configura como uma pirâmide. Nos termos de Oliveira & Gazire (2012), nessa atividade a aluna demonstrou ter avançado e atingido o nível 3 (dedução formal), quando ela estabeleceu relações de propriedades de uma figura ou classe de figuras.

Após receberem o material necessário, os grupos começaram a realizar a atividade proposta. Alguns demonstraram dificuldades, pois não são acostumados a realizar atividades dessa natureza. Aos poucos foram trocando ideias e construindo os ângulos poliédricos com cartões em forma de triângulos equiláteros. Logo conseguiram utilizando três, quatro ou cinco desses cartões. Quando foram montar com seis, perceberam que não é possível formar um vértice.

José, quando juntou seis triângulos equiláteros no plano, chamou e mostrou: "olha aí, Professor". Pediu-se para ele juntar as arestas com fita adesiva e formar um vértice. Quando o fez, disse: "fica não Professor, para formar um bico tem que ficar algum espaço entre os triângulos", ou seja, a soma dos ângulos internos tem que ser menor que 360°. O grupo de Tânia observou que só é possível formar ângulo poliédrico a partir de três faces. Ao chegar a seis faces triangulares, pediu-se para que juntassem as faces com fita adesiva e tentassem fazer um vértice. Forçaram tanto as faces de papelão que as deformaram. Então o grupo percebeu que os anteriores, com três, quatro e cinco triângulos, formaram sem forçar.

Durante a realização dessa etapa, perceberam-se muitos diálogos entres os componentes do grupo. Lila falou: "ô professor, essa pergunta do três, aqui", referindo-se ao questionário 4.2, "a partir dessa questão, responderemos à seguinte?". O grupo de Luiz e José perguntou como conceituar um poliedro.

Após analisar a sequência de atividades, percebeu-se que os alunos teriam bem mais dificuldades em responder essas questões e desenvolver seu pensamento geométrico se não houvesse a troca de informações nessa relação interpessoal. Ficou claro, durante as observações, que a interação provocou a ansiedade de acertar, uma forma de disputa em que eles procuram contribuir de forma mais efetiva para o crescimento e construção do conhecimento um do outro e de si mesmo. Dessa forma, verificou-se que é muito importante essa categoria de análise, pois houve grandes contribuições para que os alunos explorassem conceitos e propriedades geométricas a partir do diálogo e da troca de experiências.

5.2.2. Relacionando as figuras geométricas bidimensionais às tridimensionais

Nessa categoria foi identificada a relação entre as geometrias plana (bidimensional) e espacial (tridimensional) e as dificuldades dos alunos, observadas durante a realização da sequência de atividades. Em diversas situações, os alunos demonstraram não ter clareza para fazer a distinção entre as geometrias.

Ao iniciar a primeira atividade, *Os sólidos geométricos no dia a dia*, houve uma explanação sobre as geometrias plana e espacial, uma vez que percebemos, através do teste diagnóstico, certa confusão na diferenciação entre elas. Em seguida, projetaram-se na lousa, com *data show*, diversas planificações de sólidos geométricos, para relembrar a ideia de planificação. Depois devolvemos a cada grupo as anotações que realizaram sobre a visita ao supermercado e foi proposto aos grupos que planificassem, com as dimensões reais, as figuras geométricas das embalagens sobre as quais fizeram as observações. Em seguida deveriam identificar as figuras geométricas planas e calcular suas áreas.

Os grupos realizaram a atividade de planificação das embalagens observadas no supermercado, demonstrando facilidade para as figuras poliédricas. As que possuíam figuras geométricas de copos redondos provocaram mais dificuldades. Utilizando as dimensões reais, os alunos identificaram as figuras geométricas planificadas e calcularam a área. Ao iniciar a segunda atividade, *Reconhecendo grupos de figuras geométricas: prismas e pirâmides*, expomos vários sólidos geométricos e pedimos que os identificassem, à medida que soubessem dar um nome a qualquer deles. Bruna disse se lembrar dos corpos redondos, Jacira dos poliedros. Falamos que durante as atividades iam ser trabalhados dois grupos de sólidos geométricos: poliedros e corpos redondos. Nessa atividade seriam explorados dois subgrupos dos poliedros: prismas e pirâmides.

Na sequência, perguntamos se alguém conhecia algum dos poliedros dos que estavam expostos no centro da sala. Imediatamente, alguns alunos mencionaram pirâmide, prisma e cilindro. Maria disse: “esse aqui, que não sei o nome, é...”, apontando para uma pirâmide de base pentagonal. Perguntamos qual nome ela daria ao sólido, ao que ela respondeu: “poliedro”, perguntando se estava certa. Respondemos que sim, mas afirmando que *poliedro* é um nome genérico para aqueles sólidos, assim ele apresenta um nome mais específico. Perguntamos aos demais se alguém conseguia identificar esse nome. Em seguida pegamos um prisma de base pentagonal e perguntamos: "quem sabe o nome desse poliedro?". Renata respondeu que era um pentágono.

Mais uma vez percebeu-se que alguns alunos não conseguem discernir a geometria plana da espacial, então foi feita mais uma pequena explanação sobre a geometria plana. Em seguida dirigiu-se a pergunta: "quem poderia falar o nome de alguma figura plana?". Falaram vários nomes diferentes, entre eles: triângulo, quadrado, retângulo, pentágono, trapézio e círculo. Para desfazer a confusão entre geometria plana e espacial, com uma pirâmide de base hexagonal em mãos, indagamos: "trata-se de uma figura, ou seja, um desenho?". Disseram imediatamente que não. Para encerrar essa etapa, fizemos uma breve abordagem sobre geometria espacial e algumas características, como: sólidos geométricos ou figuras geométricas espaciais, faces, vértices e arestas.

Ao iniciar a etapa seguinte da segunda atividade, os alunos estavam distribuídos em grupos e foi entregue um *kit* contendo vários cartões em forma de polígonos. Cada *kit* continha 5 quadrados, 18 triângulos, 18 retângulos, 5 pentágonos, 5 hexágonos, dentre outros, além de alguns elásticos, para que fossem utilizados na montagem dos sólidos. Ao manusear o material, a princípio tiveram certas dificuldades para montar os sólidos, foram se familiarizando com o material e aos poucos montando os prismas e as pirâmides. Consideramos importante essa etapa, uma vez que alguns alunos foram percebendo a relação entre as geometrias espacial e plana, como também a utilização de modelos como foi proposto no segundo capítulo.

Ao concluir essa fase, sugeriu-se aos grupos observar e manipular os poliedros que montaram para responder ao questionário 2.1. (Apêndice D). Observamos diálogos em que os alunos relacionam as geometrias plana e espacial.

> [Beto] Nesse caso são cinco lados, quatro são congruentes?
> [Lila] Lados não, face.
> [Beto] Decagonal é? [Referindo-se ao prisma cuja base tem 10 lados].

Percebemos que, ao utilizarem termos não adequados, são corrigidos pelos próprios colegas de grupo, demonstrando que o conhecimento está sendo compartilhado.

A atividade três, *Os corpos redondos*, foi iniciada com indagações relacionadas às atividades anteriores, na perspectiva de fazermos uma revisão dos conteúdos vistos anteriormente, mantendo uma sequência baseada no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Alguns alunos logo disseram que estavam trabalhando com sólidos geométricos. Pedimos que fossem mais específicos nas abordagens, pois existem vários tipos de sólidos geométricos. Bruna lembrou-se das pirâmides, disse que tinham lados triangulares e que se convergem ao mesmo ponto, falou também dos prismas, afirmando que tinham duas bases e as faces laterais eram retangulares. Percebemos que os alunos começaram a perceber que um sólido possui, em si, as geometrias plana e espacial.

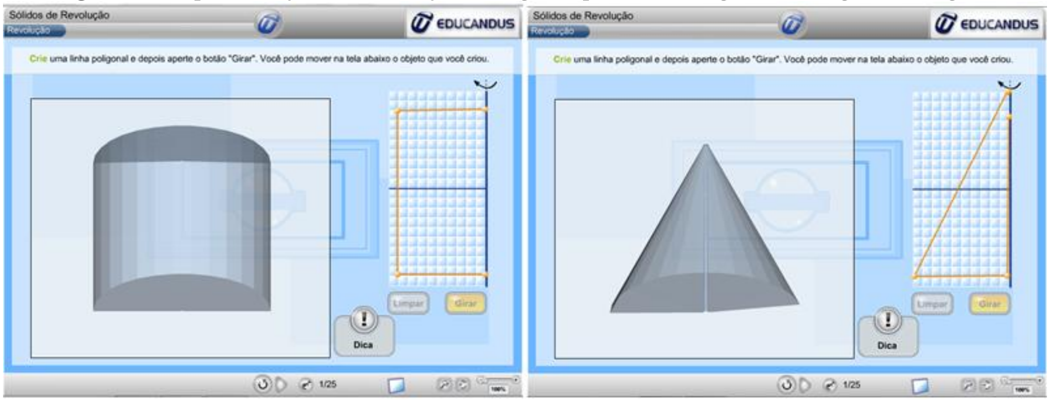
Continuamos a explanação fazendo algumas perguntas para provocar a turma, no intuito deles identificarem, de forma prática, a diferença entre os dois tipos de sólidos estudados durante a sequência de atividades. “Quais as diferenças observadas nos dois tipos de sólidos”? Bruna respondeu: “um é corpo redondo e o outro não é”. “Por que esses aqui [com um cilindro e um cone em mãos] são corpos redondos”? Bruna, novamente, disse: “Porque não é formado por linhas”. “Porque nós podemos dizer que esses são corpos redondos”? “O que vocês acham sobre isso”? Com um cilindro e um cone em mãos, perguntamos, ainda, qual a semelhança entre os dois corpos. Jéssica, imediatamente, respondeu que era a circunferência, e José disse que ambos não possuem arestas. Percebe-se que há certo conflito em termos relacionados acima.

Ao apresentar os corpos redondos, fizemos uma abordagem no sentido de identificarem as diferenças deles para os poliedros. Para o cilindro e para o cone não apresentaram dificuldades, porém, quando foi apresentada a esfera, surgiram alguns nomes relacionados tanto à geometria plana como à geometria espacial: bola, roda, círculo, circunferência e esfera.

Antes de apresentar a revolução de cada uma das figuras planas (retângulo, triângulo retângulo e semicírculo), em torno de um eixo, para composição da superfície dos corpos redondos (cilindro, cone e esfera, respectivamente), perguntamos qual sólido seria visualizado. “Se imaginar apenas a superfície lateral desse sólido [cilindro], sem as bases, qual figura geométrica vai aparecer na sua planificação”? Bruna imediatamente respondeu: “um retângulo”. Perguntamos também qual sólido iria ser visualizado ao rotacionarmos o triângulo retângulo. Renata disse: “um cone, né professor?”. “Se planificasse esse cone, qual figura plana encontraria”? José disse: “um semicírculo, eu acho”, e Maria completou: “a metade de um círculo, ou uma lua”. Percebemos que, mesmo antes de fazer a demonstração, alguns alunos observaram que a superfície dos corpos redondos, como dos poliedros, pode ser reproduzida a partir de figuras geométricas planas.

Utilizando o *software Educandus*, foram feitas algumas apresentações. Primeiro desenhamos um retângulo junto ao eixo e fizemos a rotação. Ficou claro na imagem a visualização da superfície lateral de um cilindro (Figura 7). Em seguida, desenhamos um triângulo retângulo e efetuamos a rotação. Assim os alunos visualizaram facilmente um cone, como tínhamos conseguido anteriormente como uso do material concreto.

Figura 7 – Apresentação da revolução de figuras planas, retângulo e triângulo retângulo



Fonte: Imagens do *software Educandus*

Através das imagens projetadas, ficaram bem definidos os corpos redondos (cilindro e cone), a partir da rotação do retângulo e triângulo retângulo, respectivamente, junto ao eixo. Dessa forma, percebe-se que as superfícies de tais sólidos são produzidas a partir de figuras geométricas planas.

Na apresentação da esfera os alunos não demonstram enxergar com a mesma facilidade a relação entre conceitos bi e tridimensionais percebidos no cilindro e no cone.

Ao distribuir os corpos redondos aos grupos para iniciar a discussão sobre os questionários referentes a essa atividade, observaram-se e registraram-se alguns diálogos entre os alunos, a partir da manipulação dos objetos, nos quais eles ainda demonstram insegurança quanto às dimensões analisadas.

> [Beto] Círculo ou esfera?
> [PP] O que vocês acham?
> [Maria] É uma esfera.
> [PP] Por que esfera?
> [Beto] Esfera tem que ser a figura completa de uma bola, esse aqui é só um círculo [Referindo-se ao círculo da planificação do cilindro].
> [PP] Isso é um círculo ou uma esfera?
> [Jailma] Acho que é um círculo.
> [PP] A esfera é um corpo, já o círculo trata-se de um desenho.

O diálogo acima deixa bem claro a falta de clareza quanto aos conceitos e propriedades das geometrias plana e espacial, e mostra também que a partir da troca de experiências, aos poucos, conseguem adquirir certa maturidade para observar com mais cuidado os termos utilizados. Porém, percebe-se que em alguns momentos utilizam termos inadequados e, ao serem refutados, corrigem com facilidade.

Iniciamos a quarta atividade, *Os poliedros regulares: modelando os poliedros de Platão*, recordando as atividades anteriores e mostrando, a partir dos sólidos no centro da sala, que suas superfícies também são figuras geométricas planas, no intuito dos alunos perceberem a relação entre o bi e o tridimensional. Ao distribuir o material (*kit* de cartões de papelão em forma de figuras geométricas planas regulares e não regulares e fita adesiva), propomos que montassem ângulos poliédricos e, em seguida, os poliedros regulares. Após essas construções, deviam identificar conceitos geométricos e propriedades que relacionem as geometrias plana e espacial.

Para esta análise, utilizamos as nossas observações, o áudio, os questionários respondidos pelos alunos, as imagens registradas, ao que percebemos que alguns alunos demonstraram muita dificuldade na relação entre as geometrias plana e espacial. Sintetizando o que discutimos nesta categoria podemos afirmar que as atividades propostas provocaram muita interação e relação interpessoal e os alunos aos poucos iam percebendo as características das geometrias. Compreendendo melhor as propriedades da geometria plana, puderam explorar de forma mais eficaz os conceitos e propriedades da geometria espacial.

5.2.3. Sólidos geométricos relacionados ao cotidiano

Foi de suma importância enfatizar essa categoria e mostrar a relação encontrada entre os sólidos geométricos e o cotidiano. Acreditamos que dessa forma pode ser facilitado o entendimento ao aluno, também fazendo com que ele perceba a importância dos conhecimentos geométricos para melhor entender e resolver situações do dia a dia, situações essas relacionadas a conteúdos matemáticos como também em outras áreas do conhecimento.

> É a partir da exploração de elementos ligados à realidade do aluno que as primeiras noções relativas a elementos geométricos podem ser trabalhadas, incorporando-se sua experiência pessoal com os elementos do espaço e sua familiarização com as formas bi e tridimensionais, e interligando-as aos conhecimentos numéricos, métricos e algébricos que serão construídos (RÊGO, RÊGO & VIEIRA, 2012, p.13).

Diante da atenção e da forma como participaram da primeira atividade, quando visitaram um supermercado, percebemos a importância de trabalhar com objetos do cotidiano, uma vez que os alunos começam a enxergar a Matemática, ou pelo menos alguns conceitos matemáticos que são úteis para o convívio social. Nesse aspecto, Rêgo, Rêgo & Vieira (2012, p. 97) destacam que "as embalagens apresentam um universo de informações matemáticas de grande importância, principalmente em função do seu valor social".

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p. 127),

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades.

As noções geométricas também contribuem para aprendizagem de outros eixos da Matemática como números e medidas, pois as crianças são estimuladas a observar, perceber as diferenças e semelhanças e identificar certas regularidades, principalmente quando se trabalha com objetos do mundo físico, muitas vezes fazendo as conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Na segunda etapa dessa atividade foi proposto aos alunos fazerem as planificações, utilizando as medidas reais das embalagens que foram observadas na visita ao supermercado. Os alunos realizaram essa atividade de maneira exitosa.

Baseados em Crowley (1994), percebemos que essa atividade oportuniza aos alunos avançarem de nível ao manipular, colorir, dobrar, construir figuras geométricas, envolver objetos físicos, identificar e desenhar uma figura dada uma descrição, ou seja, a partir das observações que foram feitas e anotadas na visita ao supermercado.

Quando se iniciou a segunda atividade, *Reconhecendo grupos de figuras geométricas: prismas e pirâmides*, apresentamos diversos sólidos geométricos e perguntamos quais eram conhecidos por eles. Bárbara disse: "cilindro, cubo, caixa, pirâmide". Jacira falou: "Ah! professor, sendo assim, bola, dado". Percebemos que alguns sólidos foram relacionados com objetos do dia a dia dos alunos, os quais eles demonstram mais facilidade para nomear.

Após uma breve explanação, pedimos que, em grupo, montassem os poliedros para auxiliar nas respostas aos questionários. Durante esse momento, observamos algumas situações que demonstram a comparação dos sólidos com objetos do dia a dia. Beto disse: "oh!, montei, oh". Perguntamos o que ele montou. Ele respondeu: "uma pirâmide quadrada". De acordo com as dificuldades demonstradas, foram trocando ideias, ajudando uns aos outros, um segurando os cartões, outro colocando as ligas, e acabaram conseguindo. Todos os grupos montaram os poliedros que foram propostos e começaram a dar nomes, inclusive nomes popularmente conhecidos do seu cotidiano, como: caixa, dado, pirâmide do Egito, balão e quadro.

Durante a realização das atividades, sempre éramos indagados, mas em nenhum momento dávamos a resposta, pelo contrário, fazíamos outras perguntas que provocavam o diálogo entre eles. Nesses diálogos percebemos que demonstravam mais facilidade quando conseguiam relacionar as figuras geométricas a objetos do convívio deles. Concordamos com Vygotsky (1997): se o professor identificar o nível de desenvolvimento atual ou real do aluno pode provocá-lo e fazer com que alcance o nível de desenvolvimento proximal ou potencial.

Deixamos expostos sobre a mesa central vários sólidos geométricos para utilizar na terceira atividade, *Os corpos redondos*: cilindros, cones, esferas, troncos de cone (em papelão, madeira, isopor e acrílico), e alguns produtos do cotidiano, como lata de milho e ervilhas, chapéu de aniversário de criança e casca de sorvete (Figura 8).

Figura 8– Sólidos geométricos (poliedros e corpos redondos)

Fonte: Registro do autor

Continuamos a explanação, fazendo algumas perguntas para provocar a turma, no intuito deles identificarem, de forma prática, a diferença entre os dois tipos de sólidos estudados durante a sequência de atividades.

Ao apresentar revolução de figuras geométricas sobre o eixo, para formação da superfície dos corpos redondos, percebeu-se que os alunos demonstraram dificuldades em identificar características dos corpos redondos, principalmente da esfera. Percebeu-se que a utilização de objetos do cotidiano e os aparatos tecnológicos ajudaram para a compreensão de conceitos básicos, como discutido na subseção anterior.

Destacamos o seguinte diálogo, ocorrido ao iniciar a quarta atividade, *Os poliedros regulares: modelando os poliedros de Platão*, logo depois de observarem os sólidos:

> [Larissa] Professor! Esse parece com um balão [referindo-se ao octaedro].
> [Luiz] Esse é um dado [referindo-se ao tetraedro (cubo)].
> [Tânia] Aquele é um diamante [com o dodecaedro].
> [Maria] Parece uma bola [ao pegar no icosaedro].
> [PP] Vocês sabem o nome desses objetos matemáticos?
> [Bruna] O que Jacira pegou é um icosaedro e o de Luiz um cubo.

Percebeu-se, nesse momento, que ao relacionarem os sólidos com objetos do dia a dia, apenas Bruna se pronunciou de forma adequada sobre os objetos matemáticos. Concordamos com Rêgo, Rêgo & Vieira (2012): ao explorar objetos da realidade dos alunos, do seu mundo físico, a atividade fica mais interessante e prazerosa para eles. Percebe-se a facilidade que eles têm quando conseguem relacionar o sólido matemático com objetos do seu cotidiano e identificam com mais facilidade as propriedades e conceitos relacionados a esses objetos.

5.2.4. Objetos concretos e abstratos

Por nossas análises, diante do que expomos, destacamos que são necessárias atividades, em sala de aula, envolvendo a manipulação de objetos concretos para desenvolver melhor os conceitos e os termos geométricos, em busca de uma abstração adequada.

Segundo Rêgo, Rêgo & Vieira (2012), os alunos não podem confundir uma representação com o objeto matemático, para não ocorrer a redução das propriedades formais do objeto às propriedades da representação. Esses autores ressaltam que:

> O ato físico de ver desenvolve-se naturalmente, enquanto o ato de visualizar para verificar se a imagem satisfaz determinadas condições formais necessita da realização de atividades voltadas para esse fim e de treinamento (RÊGO, RÊGO & VIEIRA, 2012, p. 14).

Para desenvolver no aluno a construção da representação, são necessárias ações específicas durante o processo de formação. Na primeira atividade, da visita ao supermercado, foram dadas oportunidades para eles terem contato direto com os objetos concretos com representação matemática para, em seguida, a partir das planificações, buscarem o desenvolvimento das propriedades e características geométricas dos sólidos analisados.

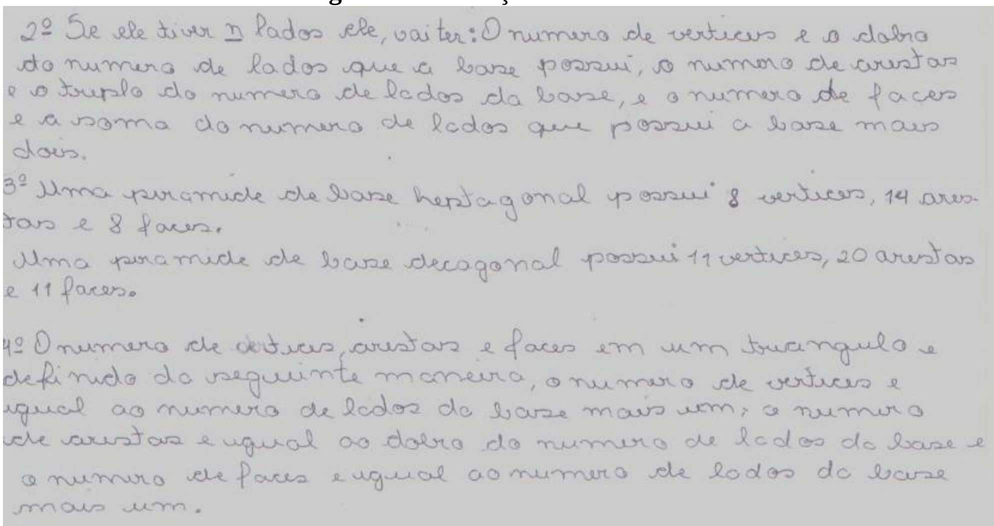
Os grupos, ao fazerem as planificações, demonstraram habilidades em representar os sólidos através das embalagens, pois fizeram anotações importantes e suficientes na visita ao supermercado, realizando as planificações com êxito. Quatro grupos, ao planificar as embalagens em forma cilíndrica, demonstraram certa dificuldade principalmente em desenhar a parte da circunferência, constatando que as equipes não tinham prática em manipular o compasso e não sabiam identificar o raio adequado para a circunferência.

Analisando as atividades dos alunos, através das imagens registradas e gravação de áudio, percebeu-se a importância dessa atividade, uma vez que proporcionaram associar representações de objetos a figuras geométricas.

> A aprendizagem de geometria demanda o domínio de uma série de procedimentos, principalmente os associados à representação de figuras e de sólidos, que envolvem, por exemplo, o uso de instrumentos de desenho, o conhecimento dos processos de medição e de solução de problemas por meio de construções geométricas (RÊGO, RÊGO & VIEIRA, 2012, p. 7).

Na atividade que pedíamos para classificar os poliedros em prismas e pirâmides, a partir dos sólidos que estavam no centro da sala, solicitamos que identificassem relações e fizessem generalizações, abstraindo para o caso de um prisma de *n* lados. Ao analisar os questionários, percebemos que os alunos conseguiram identificar os elementos dos sólidos baseados na generalização da relação de Euler, e descreveram esses sólidos utilizando o mínimo de propriedades, como foi o caso da aluna Jaine (Figura 9).

Figura 9 – Descrição da aluna Jaine


2º Se ele tiver n lados ele, vai ter: O numero de vertices e o dobro do numero de lados que a base possui, o numero de arestas e o triplo do numero de lados da base, e o numero de faces e a soma do numero de lados que possui a base mais dois.

3º Uma piramide de base heptagonal possui 8 vertices, 14 arestas e 8 faces.

Uma piramide de base decagonal possui 11 vertices, 20 arestas e 11 faces.

4º O numero de vertices, arestas e faces em um triangulo e definido da seguinte maneira, o numero de vertices e igual ao numero de lados da base mais um; o numero de arestas e igual ao dobro do numero de lados da base e o numero de faces e igual ao numero de lados da base mais um.

Fonte: Registro do autor

Observamos, na descrição acima, que a aluna consegue generalizar as relações existentes entre os elementos de um prisma ou de uma pirâmide qualquer, demonstrando avançar de nível.

Perguntamos se algum aluno conseguiu identificar alguma relação entre seus elementos, o que gerou o seguinte diálogo:

> [Renata] O que é um prisma?
> [José] Então pode ser, é formado por cinco lados, ou, seis lados, seis faces.
> [Renata] Tem que falar assim um prisma é....
> [Bruna] Aresta a gente já sabe que é o dobro do número da base, das arestas da base [referindo-se à pirâmide].
> [Tânia] Sabemos a base, que é n, então temos $n + 1$ faces e arestas, percebe que o número de faces e vértices de uma pirâmide é igual.

Esse diálogo demonstra a relação interpessoal e o avanço no pensamento geométrico, uma vez que a aluna Tânia explicita claramente a generalização para encontrar os elementos de uma pirâmide.

Com uma pirâmide e um prisma em mãos, perguntamos o que difere esses sólidos. Renata logo respondeu: “as faces da pirâmide se tocam num mesmo ponto, no mesmo vértice, as faces laterais de um prisma são retangulares e de uma pirâmide triangulares”. José, ao responder à questão cinco do questionário 2.2. (Apêndice E), perguntou: “se um prisma tiver 21 arestas, você consegue determinar o número de vértices e faces? E uma pirâmide de 9 arestas?” E falou: “professor, não pode ter uma pirâmide com 9 faces, porque o número de lados da base tem que ser o número de faces dividido por 2, e não pode uma face ter 4 lados e meio, como faço para responder esta questão?". Com isso, ele demonstra generalizar a relação existente entre os elementos desse sólido.

Observamos que durante a resolução desse questionário houve bastante diálogo e troca de experiências entre os alunos. Foi dada a oportunidade ao aluno para avançar de nível, observando que no nível 2 (dedução informal) o aluno começa a formar uma rede de relações, acompanhada de argumentos informais em uma demonstração. O aluno José demonstrou ter desenvolvido seu pensamento geométrico um pouco acima dos outros, por esse motivo sempre era indagado por alunos de outros grupos, e correspondia de forma satisfatória, ou seja, sempre respondia com perguntas, provocando os demais.

Com um prisma e um cilindro em mãos, pedimos que observassem bem o que pode acontecer com um, e com o outro não, sobre o solo. Eles perceberam que os corpos redondos rolam com facilidade no solo, já os poliedros ficam estáticos. Indagou-se também, por que os corpos redondos rolam e os poliedros não. José disse: "uns são formados por retas e os outros por curvas". Percebe-se, nessa fala, de certa forma, a compreensão de alguns conceitos.

Dando continuidade, na atividade de revolução de figuras planas em torno de um eixo, usando o *software Educandus*, procuramos observar se os alunos seriam capazes de abstrair conceitos e propriedades de figuras planas. Oportunizando-os a observarem os diversos materiais que servirão de modelos para desenvolver a atividade (Figura 10).

Figura 10 – Os sólidos geométricos expostos no centro da sala

Fonte: Registro do autor

Antes de realizar a apresentação, fez-se uma explanação sobre a revolução das figuras planas, em seguida algumas indagações como: ao rotacionar um retângulo, o que visualizaremos? E um triângulo retângulo? E se planificássemos?

> [Bruna] Um cilindro, se planificar, fica um retângulo.
> [José] Oxe, ficariam um retângulo e dois círculos, né?
> [Renata] Um cone [referindo-se à revolução do triângulo retângulo].
> [José] Se planificar, um semicírculo, eu acho.
> [Maria] A metade de um círculo, ou uma lua.
> [PP] E para esfera, o que vocês acham?

Nesse momento não conseguimos respostas satisfatórias, percebemos que os alunos demonstraram insegurança. Ao fazer as apresentações, alguns alunos perceberam que não era possível planificar a esfera. Bruna, ao observar a revolução do semicírculo, falou que conseguiu compreender.

Observamos que as três primeiras questões do Questionário 3.1 (Apêndice G) foram fáceis para responder, pois eles demonstraram tranquilidade. A partir daí, houve uma intensidade nos diálogos, como nesse excerto.

> [Gisa] Os círculos da planificação podem mudar de lugar?
> [Gisa e Renata] Podem.
> [Renata] Se eu quiser desenhar desse lado para formar a figura vai dá do mesmo jeito, e se eu girar, ele forma o círculo do mesmo jeito.
> [José] Que o tamanho da circunferência tem que ser do mesmo do retângulo.
> [Renata] O tamanho do retângulo tem que ser igual aos dos círculos, para que eles encaixem perfeitamente.

Ao analisar os dados, percebemos que responderam ao questionário 3.2. (Apêndice I) sem muitas dificuldades. Porém, a sua última questão, “Se aumentarmos o ângulo, sem mudar o círculo da base, o que terá que mudar para que a nova planificação esteja correta?”; e “O que nós concluímos com isso?”, causou muita discussão. Buscou-se nessa questão provocar os alunos para avançar de nível e atingir o nível 3 (dedução formal), que, segundo Nasser & Sant’anna (2010), é necessário ter domínio no processo de dedução, ou seja, reconhecer condições necessárias e suficientes. Identificou-se certa dificuldade, porém, a partir das discussões, das intervenções realizadas nessa atividade, Renata, Luiz e José demonstraram ter avançado de nível, pois conseguiram fazer a generalização e repassaram para os demais. Ao observar os diálogos e anotações no diário de bordo, percebemos a importância da troca de experiência, pois nesta questão ficou evidente, ao utilizarem termos adequados, os alunos citados conseguiram repassar de forma exitosa o desenvolvimento da questão.

Figura 11 – Montando os poliedros regulares

Fonte: Registro do autor

Durante a realização da etapa de montagem de poliedros, usando faces recortadas em papel, percebemos um intenso diálogo entres os componentes dos grupos. Lila falou: “ô Professor, essa pergunta do 3, aqui? “Junte-se com outro grupo, justaponha dois poliedros de 4 faces congruentes e responda: a) Todas as faces deste sólido são polígonos regulares congruentes? b) Por que este sólido não é um poliedro regular?”, referindo-se ao questionário 4.2. (Apêndice K). Pedimos que utilizassem os poliedros montados pelo grupo e os expostos na sala para facilitar a generalização e responder com clareza as questões propostas.

Essa questão induz o aluno a abstrair conceitos e propriedades, com isso oportuniza o avanço de nível, como proposto por Crowley (1994), ao argumentar que quando o aluno compreende a natureza da dedução demonstra compreensão de condições necessárias e suficientes.

Para responder a última questão, “Com base nas observações, defina o conceito de poliedros regulares, ou poliedros de Platão”, Luiz, com o poliedro, hexaedro montado a partir da justaposição de dois tetraedros, em mãos, disse: “Por que nesse vértice aqui tem três faces, e nesse aqui tem quatro?”. Perguntamos a ele se verificou nos outros se são todos iguais, ou seja, se o mesmo número de faces converge para o vértice. Ele disse que foi baseado nisso que deu sua resposta. Bruna perguntou: “Por que as arestas de um poliedro regular são todas iguais? Não entendi essa pergunta”. Percebeu-se, portanto, que as questões provocaram bastante os alunos.

Observamos que, em alguns momentos, os alunos conseguem, a partir de objetos concretos, abstrair conceitos e propriedades geométricas, dessa forma essa categoria contribuiu bastante para nossa análise, uma vez que, em diversas situações percebemos que houve a compreensão dos termos matemáticos. Isto está de acordo com Rêgo, Rêgo & Vieira (2012), ao argumentarem que o ato físico de ver e manipular objetos concretos contribui para o desenvolvimento e construção do pensamento geométrico.

5.2.5. Manipulação de materiais concretos

Destaca-se nessa categoria a utilização dos materiais produzidos pelo professor no planejamento e produção das atividades e dos materiais produzidos em sala de aula pelos alunos, tendo como ênfase a manipulação desses objetos para melhor compreensão dos conceitos e propriedades e para o desenvolvimento do pensamento geométrico baseado no modelo van Hiele.

> É a partir das experiências pessoais com a forma, cor, textura, dimensões e a manipulação de um objeto físico que as imagens mentais deles serão construídas, permitindo sua visualização ainda que na ausência deste, assim como sua representação por meio de modelos concretos ou desenhos (RÊGO, RÊGO & VIEIRA, 2012, p. 14).

Como já apresentamos, na atividade *Reconhecendo grupos de figuras geométricas: prismas e pirâmides*, orientamos os alunos para que observassem e manipulassem os sólidos para facilitar a discussão acerca do questionário 2.2. (Apêndice E). Com um prisma de base triangular e outro de base pentagonal em mãos, pedimos que observassem a relação existente entre seus elementos, ou seja, entre vértices, arestas e faces.

> [José] Aquele tinha 15, então esse terá nove vezes três, não é? [Referindo-se às arestas dos prismas de base pentagonal e triangular, respectivamente].
> [PP] O prisma pode ter quantas faces laterais?
> [Renata] Vai usar qualquer valor, é?
> [PP] Você, a partir da observação de um deles, tem que generalizar.

Para servir de orientação na busca pela resposta da questão seis, "Um prisma é...", perguntamos o que dois prismas têm em comum. Orientamos para que observassem prismas, tentando apreenderem características comuns, para conceituar de forma clara e correta.

> [Lila] Tem duas bases.
> [José] As bases são paralelas.
> [Renata] Tem forma de faces laterais iguais.

Com uma pirâmide e um prisma em mãos perguntamos sobre características que os distinguem. Perceberam que a pirâmide tem faces laterais triangulares que convergem ao mesmo vértice e possui apenas uma base, diferente do prisma, que tem duas bases paralelas e faces laterais retangulares.

Mais uma vez percebemos a importância da manipulação de objetos concretos. Se estivéssemos em uma aula expositiva, apenas representando figuras tridimensionais de forma plana na lousa, dificilmente os alunos teriam a mesma facilidade para compreensão.

Na discussão sobre a planificação de um cilindro, os alunos apresentaram alguns momentos interessantes de interação, como esse:

> [Renata] A parte plana é essa? [Referindo-se à lateral do cilindro].
> [Lila] Não, é essa aqui, os círculos.
> [Beto] Círculo ou esfera?

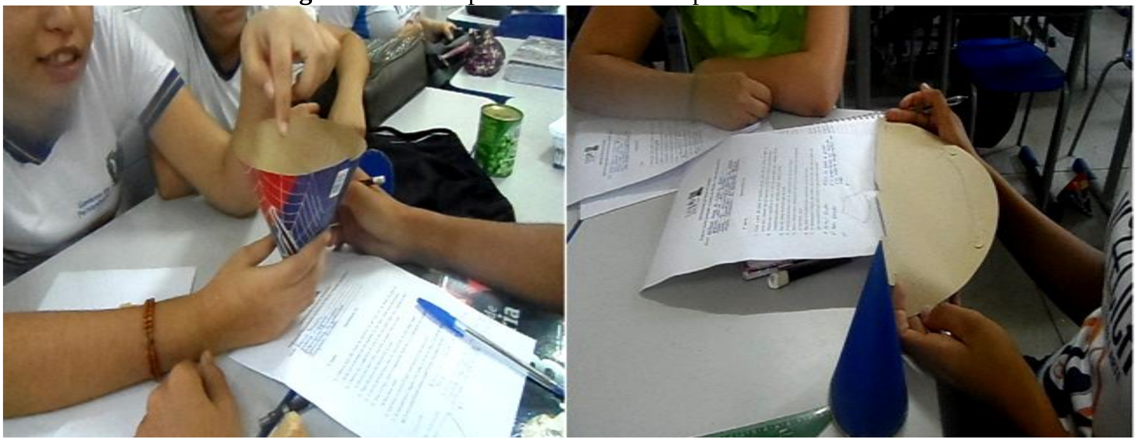
Bruna, referindo-se à quinta questão do questionário 3.1., indagou: "qual é a relação entre o comprimento dos lados do retângulo e os círculos da base?". Ela mesmo respondeu: "aqui, eu sei, que esse lado é igual à circunferência", referindo-se ao comprimento da circunferência na planificação do cilindro e ao lado do retângulo dessa mesma planificação. Ela ainda completou: "a base do retângulo tanto faz ser esse como o outro lado, esse lado maior é igual à circunferência".

> [Bruna] Aumentando o lado que não encaixa na circunferência, haverá problema para montar o sólido? [Referindo-se ao lado do retângulo na planificação do cilindro].
> [Bárbara] Não.
> [PP] Qual a diferença desse sólido para este outro? [Comparar o cilindro original, representado por uma lata de ervilha, com o que aumentou a altura proposto na atividade]
> [Bruna] Só ia mudar a altura, Professor, só vai mudar a altura e o que cabe aqui dentro vai caber mais.
> [Bárbara] Depende, porque pode não ser que não seja uma embalagem.
> [Bruna] Mas vai aumentar de todo jeito, se eu digo que vai aumentar a altura, com certeza vai aumentar o...
> [Bárbara] Consequentemente.
> [PP] Se aumentar só altura do retângulo, vai modificar o sólido?
> [Renata] Não, porque a altura é diferente da largura, se aumentar isso, aqui vai ter que aumentar para poder encaixar [referindo-se ao lado do retângulo na planificação do cilindro].
> [Renata] Se aumentar o lado do retângulo ia aumentar apenas a altura, Veja, só iria mudar a altura, olhe só [mostrando na planificação que ao aumentar o lado do cilindro que representa a altura não vai influenciar no comprimento das circunferências que representam as bases].
> [Gisa] Não, o tamanho. Por exemplo, aqui é 200, vai ficar 800.

[PP] E isso aumenta o que?
[Gisa] O volume.

Ao iniciarem a discussão acerca do questionário 3.2., percebemos um intenso diálogo entre os alunos. Bruna pediu para explicar a questão quatro, "observe se o círculo da planificação de um cone poderia tocar o arco do setor circular em outro ponto". Pedimos que observassem o chapéu de aniversário, em forma de cone, para terem uma idéia e o utilizassem como modelo. Percebemos que a manipulação dos materiais provoca, a todo instante, uma maior interação, facilitando a compreensão (Figura 12).

Figura 12 – Manipulando os sólidos e planificando-os



Fonte: Registro do autor

Da mesma forma, os outros grupos discutiam muito sobre as questões. Um aluno perguntou qual a relação entre a circunferência e o setor circular na planificação do cone. Para que todos compreendessem, pedimos para observarem os elementos da planificação, e sugerindo a planificação de alguns dos sólidos que estavam sobre a mesa. Beto observou que ambos devem ter o mesmo comprimento, referindo-se ao setor circular, que representa a superfície lateral do cone e a circunferência referente à base.

Ao percebermos a planificação errada de um cone, sugerimos que recortassem e verificassem se era possível a sua montagem. Antes mesmos de realizar essa tarefa, Tânia percebeu que estava errado e disse que seria necessário mudar. Ainda disse que, se montassem aquela mesma, obteriam um tronco de um cone.

A questão sete desse questionário causou inquietações e muita interação: "Se aumentarmos o ângulo, sem mudar o círculo da base, o que terá que mudar para que a nova planificação esteja correta? O que concluímos com isso?". Renata disse: "Professor, analise comigo, se ó, a gente aumentar o ângulo, no caso o ângulo é aqui, se eu fizer isso, isso aqui aumenta, olha só, se aumentar aqui vai dá incorreto". Enquanto ela fazia todas as suas colocações mostrando a planificação do cone, Bruna e Bárbara, de outro grupo, vieram observar suas indagações. Orientamos que elas tentassem perceber que havia uma maneira de aumentar o ângulo e manter o mesmo setor circular. Bruna disse: "ah, mais aí tá dizendo que não pode mudar...". Renata disse à Bruna: "não, não tá falando essa parte aqui..., que não pode mudar né?", mostrando a planificação, referindo-se ao setor circular. Os dois grupos praticamente se juntaram para resolver essa questão. Dialogaram bastante, mas não obtiveram sucesso, dizendo que teria que aumentar o setor circular e a base do cone.

Eles demonstraram muita dificuldade para responder às questões propostas no questionário 3.3. (Apêndice I), assim percebemos a necessidade de uma intervenção, ao que fizemos outra explanação. Mostramos uma esfera. Logo Renata indagou se era "vazada", ao que respondemos que sim, ou seja, tratava-se de uma superfície esférica. Continuamos: "Suponhamos que essa caneta seja um alfinete enorme, se este estiver nessa posição, paralelo, em relação à esfera, haverá intersecção? E se esse estiver nessa posição, no sentido da esfera, haverá intersecção? Quais as situações possíveis?". Os alunos continuaram:

> [José] Professor, nessa posição o alfinete ia furar a esfera em dois lugares.
> [PP] Certo. Qual tipo de intersecção seria?
> [Bruna] Um ponto.
> [Lila] Dois. Exatamente, um na entrada e outro na saída.
> [PP] E se a esfera for cheia, por exemplo, uma maçã em forma de esfera, vai ser dois pontos a intersecção? Se pegar um canudo e atravessar essa maçã, o que formaria?
> [Bruna] Um cilindro.
> [PP] Considerando o cilindro uma única dimensão, seria o que?
> [Bruna] Uma reta.

Mais uma vez percebeu-se a importância do material manipulável, os alunos observam e demonstram compreender de maneira mais eficaz.

Na atividade *Os poliedros regulares: modelando os poliedros de Platão*, percebemos mais uma vez o quanto são importantes os materiais manipuláveis. Ao fazer uma explanação sobre ângulo poliédrico, vimos que só foi possível a compreensão depois que os alunos começaram a manipular os cartões.

O vértice formado pelas faces representa um ângulo poliédrico, mas nem sempre é possível formar um ângulo desse tipo com qualquer número ou forma geométrica de faces. Para representação de um ângulo poliédrico temos que unir as faces e formar um vértice. Foram apresentados dois cartões em forma de triângulos, perguntando se era possível construir um ângulo poliédrico. Todos observavam com muita atenção. Notamos, nesse momento, que eles demonstravam que não estavam compreendendo o conteúdo abordado. Mostramos que, para formar um vértice, seriam necessárias pelo menos três faces. Perguntamos se seria possível com quatro, com cinco, com seis, e assim por diante. E com quadrados? Pentágonos? Hexágonos? E assim por diante.

Apresentamos, ainda, os sólidos geométricos que estavam no centro da sala, os mesmos que foram trabalhados em atividades anteriores, mas agora com outra especificidade, ou seja, o hexaedro (cubo) como prisma e o tetraedro como pirâmide (Figura 13).

Figura 13 – Sólidos geométricos (poliedros e corpos redondos)

Fonte: Registro do autor

Para encerrar a explanação, foram explicitados que existem alguns sólidos especiais, esses sólidos são regulares, conhecidos como sólidos de Platão. Essa atividade tinha por objetivo identificar, através da montagem, porque eles são regulares, quais os conceitos e quantos podemos montar.

A primeira etapa dessa atividade é justamente para que eles construam ângulos poliédricos e a partir de suas construções respondam o questionário 4.1. (Apêndice J). Mostramos que é possível desenhar figuras planas regulares com diversos lados, três, quatro, cinco, seis, sete, assim por diante. O desafio dessa atividade era que eles percebessem que não é possível construir mais de cinco poliedros regulares.

Ao manipular os cartões, perceberam que não seria possível formar ângulos poliédricos com quaisquer faces. Pedimos que analisassem os ângulos internos das faces possíveis na tentativa de perceberem que só é possível se tiver ângulos maiores ou iguais a 180º e menores que 360º. Quando entenderam melhor a ideia de ângulo poliédrico, ficou mais simples a montagem dos poliedros em geral. Orientamos para que utilizassem os poliedros construídos para facilitar a compreensão e resolução das questões.

Para facilitar a compreensão da quarta questão do questionário 4.2. (Apêndice K), “Junte-se com outro grupo, justaponha dois poliedros de quatro faces congruentes e responda: a) Todas as faces deste sólido são polígonos regulares congruentes? b) Por que este sólido não é um poliedro regular?”, julgamos necessária a manipulação dos sólidos.

Ao analisar as atividades, percebemos que os alunos, quando utilizam objetos manipuláveis, são capazes de generalizar e compreender com mais facilidade os conceitos e propriedades dos sólidos em questão. Nesse sentido, concordamos com Rêgo, Rêgo & Vieira (2012) ao afirmarem que:

> Os conceitos são ideias a serem construídas pelo aluno. Esta construção exige o trabalho de mediadores (professores, colegas, materiais instrucionais, entre outros) que contribuam para a atribuição de significados aos fenômenos estudados, no caso associados às formas, ao espaço ou suas representações (p.2).

Observamos que os materiais utilizados nas atividades, servindo como modelos, contribuíram de forma bastante efetiva para que os alunos construíssem e atribuíssem significados aos conteúdos estudados, podendo, dessa forma, desenvolver seu pensamento geométrico e avançar de níveis, de acordo com a teoria de aprendizagem de van Hiele.

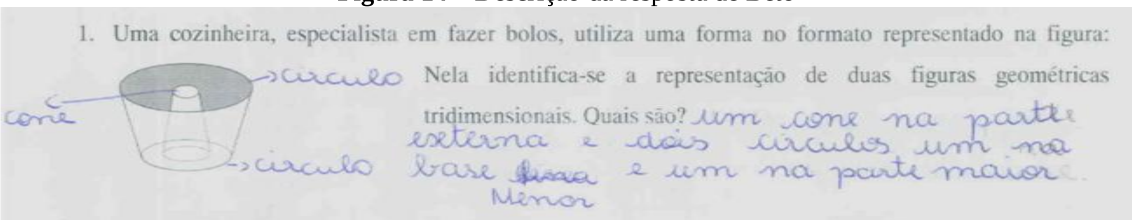
5.3. Sintetizando e socializando os conhecimentos

Após realizar a sequência de atividades, ficaram perceptíveis, através das análises dos questionários, imagens (fotografias) registradas, áudios e registros realizados no diário de bordo, que os alunos demonstraram muito engajamento e disponibilidade para execução das atividades propostas. Para verificar se houve desenvolvimento no pensamento geométrico, segundo o modelo van Hiele, foi elaborado um teste prognóstico, com questões elaboradas a fim de avaliarmos se houve avanço entre os níveis.

No dia 10 de Julho de 2015 foi realizado esse teste com os vinte e quatro alunos participantes da sequência de atividades desta pesquisa. Iniciamos sua aplicação falando da necessidade e da importância do conhecimento, em linhas gerais e no tocante à geometria, relacionado aos sólidos geométricos que foram trabalhados nas atividades anteriores.

Foram entregues as atividades, feita a leitura de cada questão, explicando que tinha questões abertas e fechadas (de múltipla escolha). Na primeira questão havia o desenho de uma fôrma de bolo. Nela, os alunos deveriam identificar as figuras geométricas tridimensionais presentes. Ao analisar os questionários, verificamos que oito alunos responderam corretamente dizendo que a representação é de troncos de cones. Cinco responderam que são semi-cones, o que consideramos uma resposta coerente. Sete responderam parcialmente correto, pois disseram haver um tronco de cone e um cilindro. Três, *coincidentemente*, deram a mesma resposta: “cone não completo e um dodecaedro não completo”, demonstrando não saber diferenciar um poliedro de um corpo redondo. Um aluno, Beto, escreveu uma resposta um pouco curiosa, envolvendo as geometrias plana e espacial em sua interpretação (Figura 14).

Figura 14 – Descrição da resposta de Beto


1. Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura: Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Quais são? um cone na parte externa e dois circulos um na base ~~[illegible]~~ Menor e um na parte maior

Fonte: Registro do autor

Ele identificou um cone, no centro da figura, e dois círculos, como base, ainda apresentando certa confusão entre as geometrias plana e espacial, característica que foi observada na segunda categoria de nossa análise.

Por Oliveira & Gazire (2012), sabemos que os alunos podem ser classificados no nível 0 quando são capazes de reconhecer e nomear as figuras geométricas, mas o fazem apenas pela sua aparência, relacionando-as com objetos do cotidiano, sem identificar suas propriedades.

Baseados em Nasser & Sant’anna (2010), podemos afirmar que nesse nível os alunos devem conseguir responder pelo menos 60% da atividade proposta. Analisando as respostas dos alunos, percebemos que apenas 3 não demonstraram estar além desse nível, ou seja, dos 24 alunos apenas esses 3 não conseguiram responder a questão com certa coerência.

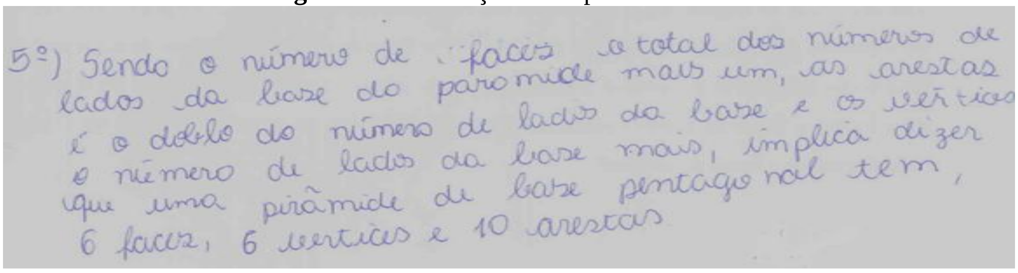
Na segunda questão propomos aos alunos que identificassem entre cinco alternativas aquela que melhor representa a planificação de um tronco de cone. Nove alunos responderam corretamente. Outros nove rasuraram a resposta, marcando uma das alternativas e, em seguida, outra, não deixando clareza na resposta. Seis erraram, dentre eles Beto, que assinalou a alternativa que mais se aproxima da correta, ou seja, de certa forma demonstrou um avanço. Percebemos que houve avanço de nível, pelo menos dos nove alunos que responderam corretamente, demonstrando estarem no nível 1.

Na terceira questão pedíamos a planificação de um cilindro, um prisma de base pentagonal e uma pirâmide de base triangular, tendo como objetivo a identificação da alternativa correta. Apenas uma aluna rasurou a questão. A segunda e a terceira questões exigiam do aluno certo conhecimento das propriedades dos sólidos em questão. De forma convergente, Crowley (1994, p. 10) afirma que nesse ponto, “a forma recua e emergem as propriedades das figuras”, uma vez que a visualização não é suficiente para determinar a resposta correta. Percebemos que na terceira questão os alunos não demonstraram dificuldades, porém foi notório também que os sólidos dessa questão são mais comuns no dia a dia, caracterizando, assim, a nossa terceira categoria de análise, que são dos *sólidos geométricos relacionados ao cotidiano*.

Segundo Oliveira & Gazire (2012, p. 8), os alunos que estão no nível 3 (dedução informal) “são capazes de estabelecer relações entre propriedades de uma figura ou classe de figuras”, com isso, são capazes de perceber argumentos informais para fazer uma demonstração. Baseados nesses autores, propomos, na questão quatro, a determinação do número de faces de uma pirâmide “cuja base tem oito vértices”, criando, assim, oportunidade para verificarmos se os alunos avançaram ou não de nível. Alguns alunos utilizaram os sólidos que estavam expostos e conseguiram fazer a relação entre os vértices e as faces de uma pirâmide. Bárbara generalizou a fórmula que envolve faces (F) e vértices (V), $F = V + 1$, demonstrando, nessa atividade, ter compreendido e avançado para o nível 2 (dedução informal). Os demais alunos não demonstram tanta clareza, uma vez que responderam de forma descritiva, sem recorrer a fórmulas ou deduções informais ou formais.

A quinta questão, “Determine o número de faces, de vértices e arestas de uma pirâmide que tem n faces laterais, sendo n um número natural maior que 2”, também foi proposta na perspectiva de observar se os alunos conseguem generalizar fórmulas, o que demonstraria um avanço para o nível 2 (dedução informal), ou para o nível 3 (dedução formal), quando os alunos conseguem acompanhar argumentos informais e identificar informações implícitas numa determinada figura ou numa dada informação (CROWLEY, 1994). Dezesseis alunos acertaram parcialmente, pois atribuíram um determinado valor para n e conseguiram fazer a relação correta, além de identificar o número dos demais elementos. Da mesma forma, sete alunos atribuíram valor para n, mas não conseguiram fazer a relação correta e não identificaram os outros elementos. Já Bruna demonstrou estar ter avançado de nível, pois, de forma simples, generalizou a relação entre seus elementos (Figura 15).

Figura 15 – Descrição da resposta de Bruna


5º) Sendo o número de faces o total dos números de
lados da base do piramide mais um, as arestas
é o dobro do número de lados da base e os vértices
o número de lados da base mais, implica dizer
que uma pirâmide de base pentagonal tem,
6 faces, 6 vertices e 10 arestas

Fonte: Registro do autor

Para concluir nossa atividade prognóstica, propomos, na sexta questão, quatro itens, com o objetivo de verificarmos o avanço em relação ao desenvolvimento do pensamento geométrico. Desde o nível básico, ou nível 0 (visualização ou reconhecimento), quando na primeira pergunta o aluno deveria escrever qual sólido recebeu, se era um corpo redondo ou um poliedro. Neste quesito, todos os alunos conseguiram fazer a classificação correta, assim podemos dizer que demonstram habilidade do nível 0.

O segundo e o terceiro itens foram propostos com a finalidade de observarmos se os alunos alcançariam o nível 1 (análise), quando são capazes de reconhecer as propriedades do sólido em questão, assim como no nível 2 (dedução informal), quando o aluno consegue conceituar e identificar um sólido utilizando o mínimo de propriedades possíveis. Treze alunos responderam o segundo item corretamente. Apenas um aluno respondeu “semicone” em vez de “tronco de cone”. Três não conseguiram nomear adequadamente o sólido que estava em mãos. Mesmo após a sequência de atividades, dois ainda não conseguiram diferenciar a geometria plana da geometria espacial, o que conseguimos perceber porque nomearam um “hexaedro regular”, ou “cubo”, como um “quadrado”. Dois alunos, com uma “pirâmide de base triangular”, ou “tetraedro”, a nomearam apenas como “pirâmide”, não demonstrando clareza, ou firmeza, nas suas respostas. Tânia nomeou o “hexaedro regular” apenas como “cubo”. E Ana, ao receber o “paralelepípedo retângulo”, com base quadrada, nomeou apenas como “paralelepípedo”, deixando de nomear por algumas de suas propriedades.

Duas respostas nos chamaram mais atenção. Luiz, ao receber uma pirâmide de base quadrada, a nomeou como “pentaedro”, resposta que se caracteriza pela quantidade de faces do sólido geométrico em questão. Ao observar a resposta do item seguinte, ele demonstrou saber identificar o poliedro também como uma pirâmide de base quadrada. Já a aluna Jaine, com um dodecaedro regular em mãos, escreveu que se tratava de um “poliedro de base pentagonal”.

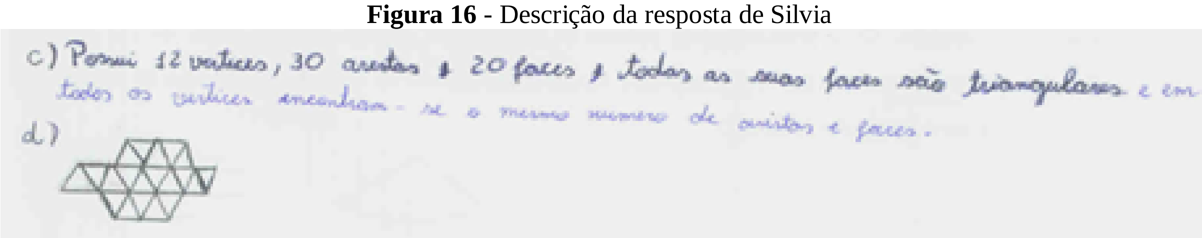
Ainda no terceiro item foi possível verificar se os alunos avançaram e demonstraram está no nível 2 (dedução informal) ou nível 3 (dedução formal), quando são capazes de compreender a natureza da dedução. Ao analisar os questionários, percebemos que a maioria dos alunos não consegue compreender a natureza da dedução, pois não foram capazes de identificar as propriedades e os elementos dos sólidos geométricos. Dezesseis alunos identificaram apenas as características básicas dos sólidos, quantidade de arestas, vértices e faces, e algumas figuras geométricas das faces.

Eduarda relacionou o cilindro com um objeto do dia a dia ao dizer que "ele é todo redondo, ele é comprido, parece um copo". Lila, sobre uma esfera, escreveu que ela "tem forma circular, arredondada, uma bola e não possui esboço". Daniela disseque o cone "tem forma de casca de sorvete e de chapeuzinho de aniversário". Na classificação de Crowley (1994), Nasser & Sant'anna (2010) e Oliveira & Gazire (2012), observamos que os alunos estão no nível zero, quando relacionam os sólidos geométricos com objetos do cotidiano e não são capazes de identificar propriedades. Isto ficou evidente em nossa categoria de *sólidos geométricos relacionados ao cotidiano*.

A aluna Jailma, ao analisar um cilindro, escreveu que "ele toca todos os lados, e é um corpo redondo", não demonstrando clareza. Assim, não foi possível identificar se avançou ou não do nível 0.

Quatro alunos se destacaram em todas as atividades, demonstrando avanço considerável de níveis. Sílvia, por exemplo, relata as características importantes do icosaedro e seus elementos, mas não consegue fazer o esboço de forma correta, talvez pelo nível de dificuldade requerido (Figura 16).

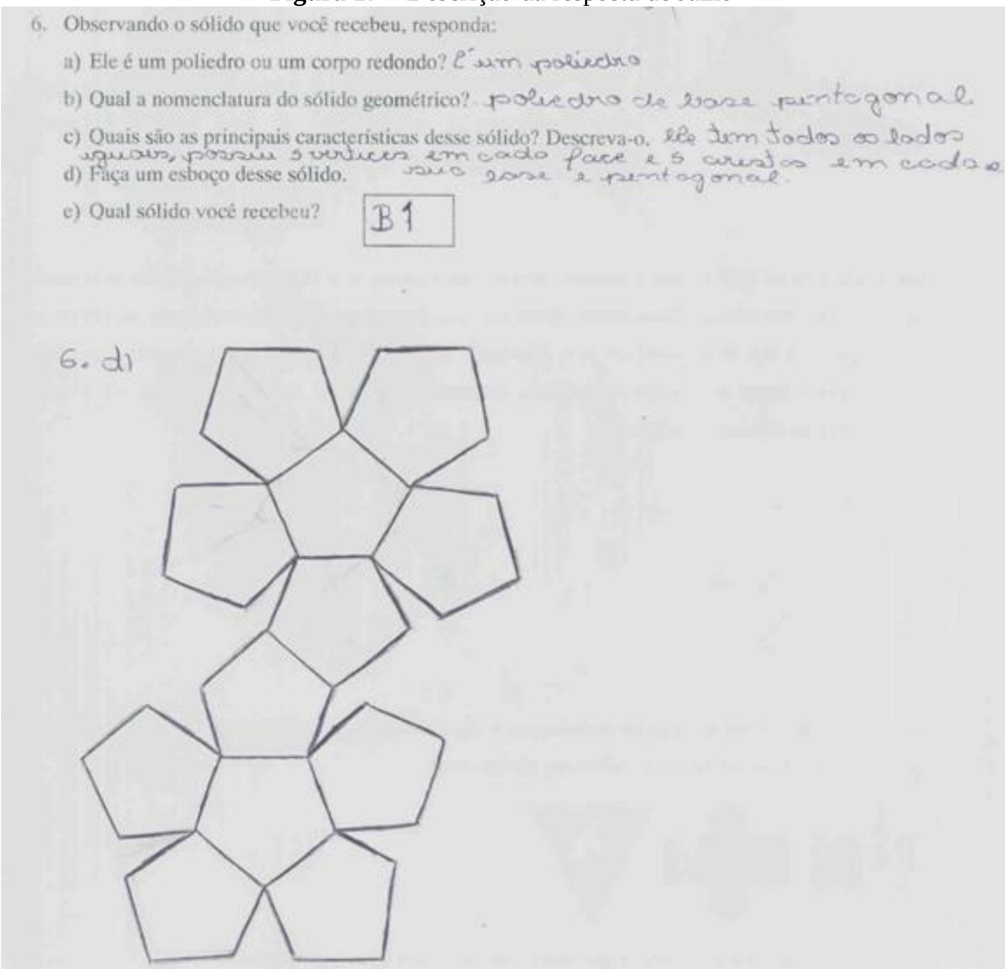
Figura 16 - Descrição da resposta de Silvia



Fonte: Registro do autor

Jaine não conseguiu caracterizar o dodecaedro regular de forma clara, porém percebemos a identificação relacionada às faces. Ou seja, não enxergou o sólido como um todo, mas planificado. Sua planificação (Figura 17) ficou muito bem feita, considerando o grau de dificuldade para se fazer um desenho desses utilizando apenas caneta e régua. Além disso, ela o nomeia como “poliedro de base pentagonal” e identifica alguns elementos das faces.

Figura 17 – Descrição da resposta de Jaine


6. Observando o sólido que você recebeu, responda:

a) Ele é um poliedro ou um corpo redondo? É um poliedro

b) Qual a nomenclatura do sólido geométrico? poliedro de base pentagonal

c) Quais são as principais características desse sólido? Descreva-o. Ele tem todos os lados iguais, possui 5 vertices em cada face e 5 arestas em cada sua base é pentagonal

d) Faça um esboço desse sólido.

e) Qual sólido você recebeu? B1

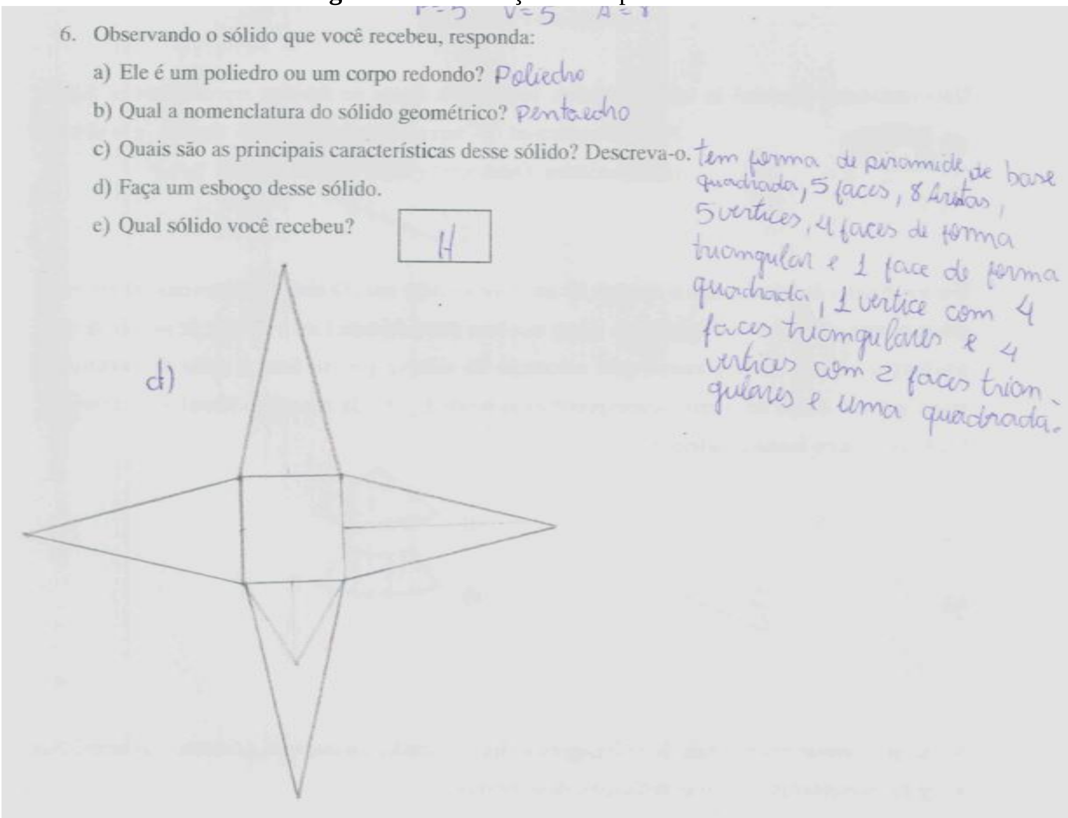
6. d)

Fonte: Registro do autor

Beto descreveu o cone da seguinte forma: “ele começa na sua base em círculo e termina pontiagudo, suas características são parecidas com a casca do sorvete, e também o chapéu de aniversário”. A sua planificação ficou bem definida.

Luiz mais uma vez se destacou. Identificou as propriedades de uma pirâmide de base quadrada e fez sua planificação corretamente (Figura 18). Observamos que, pelo teste prognóstico em relação à sequência de atividades, ele demonstrou avanço considerável no desenvolvimento geométrico.

Figura 18 – Descrição da resposta de Luiz



Fonte: Registro do autor

Percebemos que as categorias identificadas em nossa análise contribuíram positivamente para observar a evolução no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Pelo resultado que tínhamos do teste diagnóstico, o nosso ponto de partida, percebemos que, dos 28 alunos, apenas três demonstraram estar além dos demais, mesmo assim não podemos garantir que estavam no nível 1 (análise), e outros três demonstraram sequer está no nível zero. Os outros 22 alunos demonstram alcançar o nível básico (visualização e reconhecimento).

Ao realizar as atividades em grupos e finalizar com o teste prognóstico, individualmente, pudemos verificar os avanços de níveis.

Por nossa análise a partir dos registros que possuímos (diário de bordo, fotografias, áudio, filmagens e as respostas dos questionários, em grupo e individualmente), percebemos o avanço considerável de dois alunos (Luiz e João), destacando-se nas atividades, assim como no teste prognóstico, que foi respondido por 24 alunos, os quais demonstraram ter desenvolvido seu pensamento geométrico, em algumas atividades atingindo o nível 3 (dedução formal) e num contexto geral, baseado na fundamentação teórica, podemos garantir que tiveram um bom desempenho e estão no nível 2 (dedução informal). Entre os 22 restantes, apenas três não demonstraram avançar de nível, permanecendo no nível 0 (visualização e reconhecimento). Quatro alunos (Bruna, Bárbara, Sílvia e Renata) demonstraram ter avançado além dos demais, porém não podemos garantir que atingiram o nível 2, sendo assim, dezenove alunos avançaram do nível 0 para o nível 1.

Com isso, percebemos que em determinados momentos os alunos chegaram ao nível 3 ou ao nível 2, no entanto, num contexto geral, apoiados pela fundamentação teórica, podemos assegurar que todos os alunos alcançaram o nível 1.

Aprender é a única coisa que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.
Leonardo da Vinci

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Refletindo sobre os desafios enfrentados pela educação pública brasileira, em particular a educação básica, e sobre a necessidade de metodologias favoráveis e acessíveis para um melhor desenvolvimento dos alunos, nosso projeto evidencia o desenvolvimento do pensamento geométrico, através de materiais manipuláveis, materiais concretos que se relacionam com cotidiano, utilizando o Modelo van Hiele para exploração da geometria em sala de aula.

Nosso trabalho teve, como objetivo, *investigar como uma sequência de atividades pode contribuir para o avanço de nível segundo o modelo van Hiele, partindo de objetos concretos do cotidiano e de materiais manipuláveis, relacionando-os com os conceitos e propriedades de sólidos geométricos*. A partir disso, propomos reflexões pertinentes para construção do conhecimento da geometria espacial do Ensino Médio. Para atingir esse objetivo geral, a partir do referencial teórico, nós pretendíamos refletir sobre algumas relações entre objetos do cotidiano e a geometria espacial, a partir de materiais manipuláveis. Além disso, explorar conceitos e propriedades da geometria espacial, relacionada a objetos concretos do cotidiano e materiais manipuláveis, em uma prática no laboratório de ensino de geometria. Para concluir, verificar se a metodologia utilizada, a partir da mediação por meio dos processos interativos em sala de aula, contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Através do teste diagnóstico, realizado individualmente, identificamos o nível de compreensão geométrica da turma, apresentando um nível muito baixo do esperado para uma turma de 3º ano do Ensino Médio. Com base nesse diagnóstico e em nossos constructos teóricos, elaboramos e realizamos uma sequência de atividades, de tal forma a contribuir de forma efetiva para que os alunos avançassem de nível e que fosse possível para nós percebermos esse avanço.

Nessas atividades, nosso objetivo foi analisar de que forma os alunos compreendiam conceitos da geometria, bem como as respectivas propriedades geométricas, a partir das estratégias apresentadas. A partir disso, as análises aconteceram de acordo com os níveis do Modelo van Hiele. Com essa proposta, também analisamos a interação e, consequentemente, a forma como os alunos se comunicavam na resolução dos questionários envolvendo conteúdos geométricos.

Identificamos que os alunos, quando se deparam com materiais manipuláveis e têm oportunidades de relacioná-los com objetos do cotidiano, apresentam menos dificuldades, em se comparando com aquela forma mecânica de decorar fórmulas e manipular números, que era utilizada antes, até mesmo durante o MMM.

Percebemos, pelo que apresentamos no primeiro capítulo, que esse avanço se deu após algumas reformulações no currículo de Matemática, especificamente, no de geometria. Portanto, para que haja um ensino que acompanhe as mudanças sociais, pois já não faz tanto sentido o aluno estar limitado em atividades rotineiras e repetitivas, é importante que os alunos tenham oportunidade de desenvolver sua capacidade de resolver situações diárias. Podemos afirmar que a contextualização histórica apresentada no primeiro capítulo contribuiu significativamente para pensarmos e refletirmos sobre esse panorama do ensino de geometria no Brasil, compreendendo as práticas hoje agendadas para a escola.

O desafio do ensino de geometria, para Fonseca (2011), é como passar da representação concreta para uma representação mental, ou seja, fazer com que os alunos consigam abstrair conceitos geométricos. Portanto, é importante proporcionar situações desafiadoras nas aulas de Matemática, desde os anos iniciais, com o intuito de promover uma formação mais contundente, formando sujeitos críticos e criteriosos, a fim de ganharem maturidade para, ao concluir o Ensino Médio, alcancem, pelo menos, o terceiro nível do Modelo van Hiele (dedução informal). Muitos alunos ainda estão raciocinando no nível básico (visualização ou reconhecimento), sendo esta uma grande preocupação, pois, de acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, espera-se que, ao final dessa modalidade, os alunos sejam capazes de usar a Matemática para resolver problemas práticos do dia a dia, modelando fenômenos em outras áreas.

Diante de tudo isto, consideramos importante atividades que configurem um Laboratório de Ensino de Geometria, pois nele se desenvolvem materiais e métodos a serem trabalhados em sala de aula, possibilitando aos alunos o desenvolvimento de habilidades durante a Educação Básica. Pensamos, assim, em um LEG que se caracteriza como um espaço que possibilita diversas maneiras de representar figuras geométricas através de modelagem matemática, sendo, assim, mais que um repositório de materiais concretos manipuláveis. Ou seja, o LEG é um ambiente propício para proporcionar o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Em nosso trabalho, percebemos que a produção de materiais pelos próprios alunos foi o que mais evidenciou o empoderamento deles, pois, ao mesmo tempo em que aprendem por meio da interação com o material e com os colegas, discutem a própria produção, ao buscar diferentes caminhos, fazer conjecturas, enfrentar os desafios, reconhecer os seus erros e limitações, superar os imprevistos.

Acreditamos que a utilização dos materiais manipuláveis, durante as atividades, deu oportunidades aos alunos para refletir sobre algumas relações entre objetos do cotidiano com objetos matemáticos e para desenvolvimento da capacidade de abstrair e observar, em situações do cotidiano, a importância e aplicabilidade de conceitos geométricos.

Na perspectiva de contribuir para o processo de aprendizagem e alcançar os objetivos propostos nessa pesquisa, procuramos utilizar duas tendências metodológicas de ensino. Destacamos que a geometria, assim como qualquer outro ramo da Matemática, na escola básica, deve ser ensinada de maneira diferente da forma tradicional, como ainda ocorre em algumas situações. Na atualidade, para que possamos desenvolver a geometria enquanto construção humana, é necessário utilizarmos os mais variados recursos para facilitar a visualização e a compreensão dos conceitos geométricos, para que os alunos percebam que esses conceitos e ideias se aplicam em outras áreas do conhecimento.

Consideramos em nossa pesquisa, alguns recursos tecnológicos, como calculadoras, computadores, e *software*. Alguns desses recursos foram utilizados nas atividades e contribuíram efetivamente para construção do pensamento geométrico. Quando disponibilizamos a utilização do *software Educandus*, para apresentarmos a rotação de figuras planas sobre um eixo formando a superfície dos corpos redondos, percebemos que houve uma facilitação para a compreensão. Junto a isto, ao fazer o experimento em sala, em que rotacionamos polígonos confeccionados em madeira (triângulo retângulo, retângulo e semicírculo), em torno de um eixo, oportunizamos mais uma vez a aprendizagem dos mesmos conceitos e propriedades, utilizando um novo recurso, os materiais concretos. Assim, concluímos que a utilização de uma diversidade de recursos promove mais chances para que uma turma de alunos aprenda segundo suas peculiaridades.

Ao propormos uma investigação utilizando diversos recursos, entre eles os tecnológicos, sem dúvida os alunos sentiram-se incluídos no processo e perceberam que a Matemática contribui, ou pode contribuir, significativamente para o desenvolvimento pessoal e cognitivo do ser humano. A sala de aula é um espaço muito rico para investigações, por ser o centro das observações, fatos e acontecimentos. Desta forma, pode ser muito bem aproveitado para um desabrochar de pesquisas pertinentes no campo da Educação Matemática.

É preciso e necessário quebrar a dicotomia existente entre a Matemática formal, utilizada na escola, e aquela da vida real. Para isso, a modelagem pode se constituir em oportunidade para sistematização matemática, na tentativa de compreender conceitos que estão embutidos no modelo, indo além de suas representações.

Conforme apresentamos, segundo o modelo van Hiele o desenvolvimento cognitivo em geometria é acelerado através de instruções e situações adequadas, tendo como primeiro ponto teórico fundamental e totalmente descritivo: os cinco níveis de conhecimento geométrico, onde explica o processo de evolução do raciocínio geométrico dos alunos. O professor pode contribuir para que o aluno alcance um nível superior dando instruções adequadas durante as fases de ensino. Esse processo, ao longo dos níveis, depende mais da metodologia que mesmo da maturidade do aluno. Baseados no teste prognóstico que aplicamos, percebemos que houve avanço sobre os níveis, com isso podemos afirmar que a metodologia aplicada durante as atividades, através da mediação do professor, contribuiu para que os alunos desenvolvessem o pensamento geométrico.

É importante que o professor tenha habilidade para identificar qual o conhecimento real do aluno, para viabilizar oportunidades a fim de que o mesmo supere suas dificuldades e atue em sua Zona de Desenvolvimento Proximal. A responsabilidade e a sensibilidade do professor são de fundamental importância em relação à percepção das necessidades e capacidades concretas do aluno, para nortear adequadamente as atividades propostas em sala de aula, afim de proporcionar a construção do conhecimento. Assim, as reflexões teóricas a respeito dos materiais manipuláveis e concretos e o trabalho de socialização em grupo, aliados às reflexões teóricas, permitiram um olhar mais aguçado para a observação e análise das atividades práticas no processo de aprendizagem dos alunos.

Essa proposta de atividades organizadas em grupos, com a orientação do professor em sala de aula, certamente estimulou relevantes resultados, uma vez que os alunos compartilhavam o que sabiam e discutiam as diferentes opiniões. O professor, em sua função de mediador, de orientador, provoca, direciona e esclarece dúvidas, estimulando-os na busca de estratégias mais significativas. Observando os resultados, concordamos com Moysés (2012), ao dizer que o trabalho compartilhado contribuiu para a aquisição do conteúdo teórico em termos de conceitos científicos.

Ao analisarmos as atividades, fica claro que a comunicação e a troca de experiências diminuem bastante as dificuldades de responder as questões e desenvolver o pensamento geométrico, promovendo também a relação interpessoal, e que essa interação provoca a ansiedade de acertar, uma forma de disputa onde eles procuram contribuir de forma mais efetiva para o crescimento e construção do conhecimento pelo outro. Entendemos que propor atividades matemáticas que despertem o interesse e a curiosidade dos alunos, bem como o trabalho em pequenos grupos, é de grande valia, pois, dessa forma, eles são provocados a pensar mais, refletir e se comunicar, o que sem dúvidas, é muito positivo dentro dos processos de ensino e aprendizagem.

Ao longo das atividades e após analisarmos os instrumentos de coleta de dados, percebemos que alguns alunos demonstravam dificuldade na relação entre as geometrias plana e espacial. As atividades propostas provocaram muita interação e relação interpessoal, assim, os alunos, aos poucos, iam percebendo e distinguindo características das geometrias. Demonstraram compreensão das propriedades da geometria plana, podendo, assim, explorar de forma mais eficaz os conceitos e propriedades da geometria espacial.

Para motivar, incentivar e tornar as aulas mais interessantes e prazerosas, propomos, aos alunos, a exploração e manipulação de objetos da realidade deles, do seu mundo físico. Percebemos a facilidade que eles têm quando conseguem relacionar o sólido matemático a objetos do cotidiano, identificam com mais facilidade e naturalidade as propriedades e conceitos relacionados a esses objetos.

Seguindo o mesmo raciocínio, relacionando aos materiais do mundo físico, observamos que, em alguns momentos, os alunos conseguem, a partir desses objetos concretos, abstrair conceitos e propriedades geométricas. Em diversas situações, percebemos a compreensão dos termos matemáticos, dando significados aos conteúdos estudados. Da mesma forma que Rêgo, Rêgo & Vieira (2012), acreditamos que o ato físico de ver e manipular objetos concretos contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Verificamos ainda que o trabalho em grupo é fundamental para socialização e construção de conhecimentos geométricos. A sequência de atividades desenvolvida em grupos contribuiu bastante para o desempenho dos alunos, demonstrando muita troca de informações entre seus membros e membros de outros grupos. Percebemos que o compartilhamento de conhecimentos favoreceu o desenvolvimento do pensamento geométrico, por diversos fatores, entre eles, os alunos mais habilidosos auxiliaram aqueles com mais dificuldades, demonstrando e promovendo, também, afetividade nas relações interpessoais.

Desta forma, percebeu-se que o professor também assumiu, em algumas situações, outro papel importante, além de orientador, qual seja o de mediador de conflitos, evitando divergências e discórdia entre alunos. Assim, confirmamos a influência do professor para superação de situações difíceis e não esperadas, dando mais segurança aos alunos para realização das atividades. Portanto, a participação do professor é fundamental para coordenar as atividades dos alunos e essencial para que todos se sintam importantes a realização do trabalho.

Concluímos que a sequência de atividades, da forma como foi realizada, com a utilização de materiais concretos, contribuiu significativamente para compreensão de conceitos e propriedades da geometria espacial no Ensino Médio.

Ainda identificamos uma série de questões acerca do conhecimento geométrico dos alunos que concluem o Ensino Médio. Ao analisar as categorias percebemos que os alunos se reportavam muito às peculiaridades da linguagem da geometria. Uma linguagem carregada de muitos termos técnicos, como diagonal, base, faces, vértices, arestas, os próprios nomes dos poliedros, dos polígonos, geometria plana, geometria espacial, as suas grandezas e medidas, o que destacamos como sendo um bom ponto para continuidade da pesquisa que ora empreendemos e encerramos.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo, FERREIRA, C. e OLIVEIRA, H. **Matemática Para Todos – Investigações na sala de aula**. ProfMat 95. Actas, p. 243- 249. 1995.

ALMEIDA, André Ferreira. **Repercussões do uso de materiais didáticos manipuláveis na aula de geometria.** 2011. 200 p. Campinas, SP. (Dissertação de Mestrado), 2011.

ALMEIDA, José Joelson Pimentel. **Formação continuada de professores: um contexto e situações de uso de tecnologias de comunicação e informação**. São Paulo: FE-USP, 2006. (Dissertação de Mestrado)

ALVES, George de Souza, SAMPAIO, Fábio Ferrentine. **O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica**. F/ Revista de Sistemas da Informação da FSMA n.5 (2010) p. 69-73.

ANDRADE, Edelaine Cristina. **Análise de uma proposta aplicada em sala de aula sobre geometria com foco na demonstração.** 2011, 148 p. Londrina, Paraná. (Dissertação de Mestrado), 2011.

ANDRADE, José Antônio Araújo. O **ensino da geometria: uma análise das atuais tendências, tomando como referências as publicações nos Anais dos ENEM´S**. Itatiba: USF. (Dissertação de Mestrado), 2004.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico**. In: Reunião Anual da ANPED, 24. 2001, Caxambu. *Anais*... Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. Editora Contexto, São Paulo. 2002

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática: uma disciplina emergente nos programas de formação de professores.** Biomatemática IX . Campinas. São Paulo, p. 9-22, 1999.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani, S. (org): **Pesquisa em educação matemática: concepções & perspectivas**. São Paulo: Editora Unesp, 1999, pp. 97-115.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. **Filosofia da educação matemática.** 1. Ed: Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 196 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução a teoria e aos métodos.** Tradução: Maria João Alvarez Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto – Portugal: Porto Editora. p. 11- 78. 1991.

BRASIL. Governo Provisório da República dos Estados Unidos do Brasil. Decreto nº 19.980, de 18 de abril de 193. Rio de Janeiro, 18 de abril de 1931. Disponível em: http://www.presrepublica.jusbrasil.com.br/legislacao/129393/decreto-19890-3. Acessado em: 10 Jan. 2015.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino Médio - orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias** (Orientações Curriculares para o Ensino Médio). Brasília. MEC. 135 p. 2006.

BRAUMANN, Carlos. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE João Pedro da. et al. **Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores** (pp. 5-24). Lisboa: SEMSPCE, 2002.

BURIGO, Elizabete Zargo. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. p. 285 . Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS, 1989. Dissertação (Mestrado em Educação).

BUSSAB, Wilton de Oliveira.; MORETTIN, Pedro Alberto. **Estatística Básica**. 5 Ed: São Paulo: Saraiva, 2004.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Introdução à Geometria Espacial**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA Isolgraf,1999. (Coleção do Professor de Matemática).

COSTA, Marco Antônio Ferreira da; COSTA, Maria de Fátima Barrozo da. **Projeto de pesquisa: entenda e faça.** 3 ed.: Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

CROWLEY, Mary L. **O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico**. In / Mary Montgomery Lindquist, Alberto P. (Org.), aprendendo e ensinando geometria, São Paulo: Atual, 1994. p. 1-20.

CRUZ, Sabrina Susan Lucena; BRITO, Arlete de Jesus; FERREIRA, Josefa Poliana Clementino. **A inserção do movimento da matemática moderna na UFRN.** Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 6, n.18, p.91-100, maio/ago. 2006.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. História da matemática e educação matemática. In:

DALLABRIDA, Norberto. **A reforma Francisco Campos e a modernização nacionalizada do ensino secundário.** Revista Educação, Porto Alegre, v. 32, n. 2, p. 185-191, maio/ago. 2009.

DANTE, Luíz Roberto. Matemática. Livro do professor. 1 ed. São Paulo: Ática, 2004.

EVES, Howard. **História da geometria – Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992 (v.3) p. 1-28.

EVES, Howard**. Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FILLOS, L.M. **O ensino da geometria: depoimentos de professores que fizeram história.** [s.d.]. Disponível em: http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/05-11.pdf. Acesso em: 20/07/2012.

FIORENTINI, Dário. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil**. Revista Zetetikê, Ano 3, nº 4. Unicamp: Campinas SP, p. 1-33, 1995.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3 ed. Campinas, SP: Autores associados, 2009. (Coleção formação de professores)

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; MELLO Ana Cláudia Collaço de. **Tendências em educação matemática**. 2. Ed. Palhoça, SC. Unisul Virtual. 2005.

FONSECA, Maria da Conceição F. R., et al. **O ensino de geometria na escola fundamental – três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais**/Maria da Conceição F. R. Fonseca et al. – 3. ed. – Belo Horizonte: Autêntica, p. 127. 2011.

GÓES, Maria Cecília Rafael; CRUZ, Maria Nazaré da. **Sentido, significado e conceito: notas sobre as contribuições de Lev Vigotsky.** Pro-Prosições: Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, v. 17, n. 2 (50), p. 31-45, maio/ago. 2006.

IEZZI, Gelson, et al. **Matemática: ciência e aplicação.** 7 ed. São Paulo, 2013.

KALEFF, Ana Maria; HENRIQUE, Almir; Rei, Dulce M. & FIGUEIREDO, Luiz Guilherme (1994). **O desenvolvimento do pensamento geométrico: o Modelo de van Hiele**. Bolema, n. 10, PP. 21-30.

KALEFF, Ana Maria. Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades desenvolvidas no laboratório de ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense. In: LORENZATO, S. (org.): **O laboratório de ensino de matemática na Formação de professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2010, pp. 113-134

KOLLER, Helena Sílva; COUTO, Maria Clara Pinheiro de Paula; HOHENDORFF, Jean Von. **Manual de produção científica**. Ed. Penso. Porto Alegre, p. 191, 2014.

LEFRANÇOIS, Guy R. **Teorias da aprendizagem.** Tradução: Vera Magyar. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

LOPES, Anemari Roesler Luersen Vieira; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Tendências em educação matemática**. Revista Roteiro, Chapecó, n. 32, p. 49-61, jul./dez. 1994.

LOPES, Maria Laura M. Leite; NASSER, Lilian. **Geometria: na era da imagem e do movimento**. Rio de Janeiro: UFRJ. 160 p, 2005 (Projeto Fundão).

LORENZATO, Sérgio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (org.): **O laboratório de ensino de matemática na Formação de professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2010, pp. 3-37.

LORENZATO, Sergio. **Por que não ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista, Campinas, nº 4, 1º semestre, p. 3–12, 1995.

MARQUES, Alex Sandro. **Tempos Pré-Modernos: a matemática escolar dos anos 1950**. 2005. 161 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2005.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em sala de aula: Tecendo redes cognitivas da aprendizagem**. Ed. ver. e aum. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2009. 213 p. (Coleção Contexto da Ciência).

MENDES, Iran Abreu. **Tendências metodológicas no ensino de matemática**. Belém: Ed. UFPA. v. 41, p. 72, 2008.

MENDES, Iran Abreu; MARTINS, André Ferreira Pinto. **Didática: tendências em educação matemática.** Nata: EDUFRN – Editora da UFRN, 264 p. 2006.

MIGUEL, Antônio. **Três Estudos Sobre história e educação matemática.** Unicamp-Campinas, SP. Tese de Doutorado, 1993.

MIORIM, Maria Ângela. Introdução à história da educação matemática. São Paulo: Atual, 1998 D'Ambrósio (1987)

MIORIM, Maria Ângela. A geometria presente em livros didáticos do período de implantação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Anais do V Congresso Luso-Brasileiro de História da Educação**, 2004. Disponível em formato pdf: http://professor.eventos.uevora.pt/5clb2004/

MORACO, Ana Sheila do Couto Trindade. **Um estudo sobre os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do Ensino Médio**. Bauru: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. (Dissertação de Mestrado), 2006.

MORAES, Lafayette de. **O Abandono da geometria: uma visão histórica**. Campinas: DEME –FE-UNICAMP. Dissertação Mestrado. 1989. 196p.

MORAES, Maria Célia Marcondes de. **Educação e política nos anos 30: a presença de Francisco Campos.** Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, Brasília, v. 73, n. 174, p. 291-321, maio/ago. 1992.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. Campinas. SP: Papirus, 2012. 174 p.

NASSER, Lilian; SANT'ANNA, Neide F. Parracho. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2. Ed: Rio de Janeiro: IM/UFRJ. 101 p, 2010 (Projeto Fundão).

NASSER, Lilian; TINOCO, Lúcia. **Curso básico de geometria – Módulo I: Formação de conceitos geométricos**. Rio de Janeiro: IM/UFRJ. 126 p, 2011 (Projeto Fundão).

NASSER, Lilian; TINOCO, Lúcia. **Curso básico de geometria – Módulo II: Visão dinâmica da congruência de figuras**. 3 Ed: Rio de Janeiro: IM/UFRJ. 88 p, 2004 (Projeto Fundão).

NASSER, Lilian; TINOCO, Lúcia. **Curso básico de geometria – Módulo III: Visão dinâmica da semelhança de figuras**. 3 Ed: Rio de Janeiro: IM/UFRJ. 92 p, 2004 (Projeto Fundão).

NEVES, Regina S.P. **Aprender e ensinar Geometria: um desafio permanente**. In Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria Prática 3 - TP3: matemática nas formas geométricas e na ecologia. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. 250 p.

NOBRE, Sérgio. **Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática.** Revista Ciência & Educação, v. 10, n. 3, p. 531-543. Bauru. São Paulo, 2004

OLIVEIRA, Mariangela de Castro. **Ressignificando a geometria plana no ensino médio com o auxílio de van Hiele**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. 55 p.

PAIS, Luiz Carlos. **Intuição, experiência e teoria geométrica**. Zetetiké: Cempem/ EF/ Unicamp, Campinas, SP, v. 4, n. 6, p. 65-74, jul./dez. 1996.

PASSOS, Cármem Lúcia Brancaglion. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (org.): **O laboratório de ensino de matemática na Formação de professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2010, pp. 77-92.

PAVANELLO, Regina Maria. **O Abandono do Ensino de Geometria no Brasil: Uma Visão Histórica**. Dissertação de Mestrado. Unicamp. 1989.

PAVANELLO, Regina Maria. **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Conseqüências**(Campinas-SP). Zetetiké, Ano 1, no. 1, p.p. 7-17. 1993.

PATTON, Michael Q. **Qualitative research and research methods.**2. ed. London: Sage Publications, 2002.

PEREIRA, Gisliane A., SILVA, P. Sandreane, MOTTA, Walter dos Santos. **O Modelo Van Hiele de Ensino de Geometria aplicado à 5ªe 6ª séries do Ensino Fundamental**. In FAMAT em revista, n° 5, setembro de 2005.

PERES. G. **A realidade sobre o ensino de Geometria no 1º e 2º graus, no estado de São Paulo.** São Paulo: Educação Matemática em Revista. SBEM, n. 4, 1995.

PIROLA, N. A. **Solução de Problemas Geométricos: Dificuldades e Perspectivas**. UNICAMP – Campinas, SP. Tese de Doutorado. 2000.

PONTE, João Pedro da. **Explorar e investigar em matemática: uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem.** Revista Iberoamericana de Educacíon Matemática. Portugal, n 2, p 13-30, Mar. 2010.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

REGO, Rômulo Marino do e REGO Rogéria Galdino do. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, S. (org.): **O laboratório de ensino de matemática na Formação de professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2010, pp. 39-56.

REGO, Rômulo Marino do; REGO Rogéria Galdino do e VIEIRA, Klever Mendes. **Laboratório de ensino de geometria.** Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

ROMANELLI, Otaiza de Oliveira. **História da educação no Brasil**. Petrópolis – Rio de Janeiro. Ed. 8: Vozes. p.142, 1986.

SANTOS, Cleane Aparecida dos; NACARATO, Adair Mendes. **Aprendizagem em Geometria na educação básica: A fotografia e a escrita na sala de aula**. 1. Ed: Belo Horizonte: Autêntica, 2014. 111 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SKOVSMOSE, O. **Cenários de investigação**. Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

SOARES, Eduardo Sarquis**. Ensinar Matemática – desafios e possibilidades**. Belo Horizonte: Dimensão, 2009. 136 p.

TURRIONI, Ana Maria Silveira e PEREZ, Geraldo. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, S. (org.): **O laboratório de ensino de matemática na Formação de professores.**
Campinas, SP: Autores Associados, 2010, p.57-73.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **A Matemática do ensino secundário: duas disciplinas escolares?** Revista Diálogo Educacional. V. 11. n. 34. PUCRS: Curitiba PR, p. 645-662, 2011.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **A matemática do ginásio: livros didáticos e as reformas Campos e Capanema**. São Paulo: GHEMAT-FAPESP, 2005. 1 CDROM.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Livros didáticos de matemática e as reformas Campos e Capanema**. In: ENEM, 8.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **O nascimento da matemática no ginásio**. Annablume Editora. São Paulo, 2004.
VAN DE WALLE, J. **A. Matemática no ensino fundamental: o pensamento e os conceitos geométricos**. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, p. 438-384. 2009.

VITTI, Catarina Maria. **Movimento da matemática moderna: memória, vaias e aplausos**. Piracicaba, SP, 1998. Tese (Doutorado) - Universidade Metodista de Piracicaba, 1998.

VYGOTSKY, Lev Semenovith. **A formação social da mente**. Martins Fontes, 1991, p. 200.

APÊNDICES

Apêndice A - Termo de autorização aos pais ou responsáveis

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
TERMO DE AUTORIZAÇÃO

AUTORIZO o mestrando GILBERTO BESERRA DA SILVA FILHO, regularmente matriculado no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, sob a matrícula 2013.0923.0, a utilizar, parcial ou integralmente, anotações, gravações em áudio ou vídeo, das falas ou imagens do aluno (a): ____, matriculado no 3º ano "B" do Ensino Médio Semi-integral, turnos manhã e tarde, para fins de pesquisa relacionada ao mestrado, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que seja garantido o meu anonimato no relato da pesquisa.

Dados dos pais ou responsáveis preenchidos pelo pesquisador

NOME DO PAI OU RESPONSÁVEL: ______________________________.

RG:____.

TELEFONE: ____.

E-MAIL:____.

____
Assinatura
ORIENTADOR: Prof. Dr. JOSÉ JOELSON PIMENTEL DE ALMEIDA

____

Assinatura

Flores, _____ de Março de 2015.

Apêndice B - Autorização responsável institucional

AUTORIZAÇÃO[9]

.

Eu ____abaixo assinado, responsável pela (o)____ autorizo a realização da pesquisa: **Ensino de Geometria destinado aos alunos do 3º ano do Ensino Médio a partir de materiais concretos**, a ser conduzido pelos pesquisadores abaixo relacionados. Fui informado(a) pelo responsável do estudo sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

Esta instituição está ciente de suas co-responsabilidades como instituição co-participante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infra-estrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Flores, 10 de Março de 2015

____

Assinatura e carimbo do responsável institucional

NOME DO PESQUISADOR:

____

[9]Termo adaptado e disponível em: http://www.pucpr.br/pesquisacientifica/comitespesquisa/cep/documentos.php.

Apêndice C - Avaliação Diagnóstica

Universidade
ESTADUAL DA PARAÍBA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

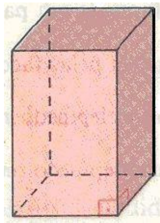
Aluno (a): ____

Avaliação Diagnóstica

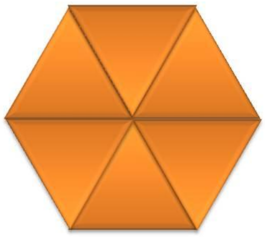
1. Associe as imagens da coluna A aos nomes de suas formas respectivas na coluna B. Depois associe esses nomes, da coluna B, às figuras geométricas correspondentes na coluna C. Nem todas as imagens têm correspondentes na coluna B.

A | B | C

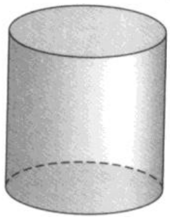
Pirâmide

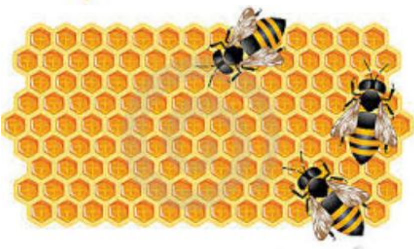


Paraleleípedo

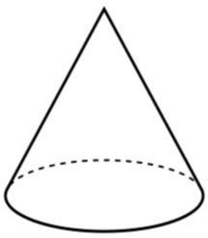


Triângulo

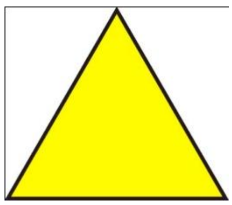




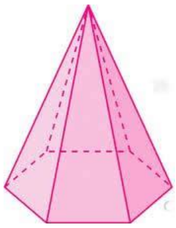
Cone



Hexágono



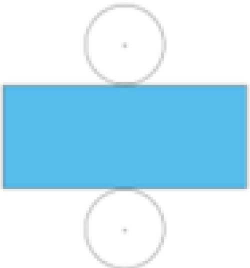
Cilindro

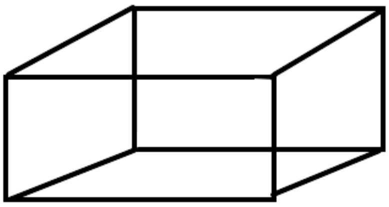


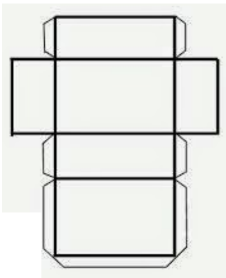
2. Associe a coluna A com à B.

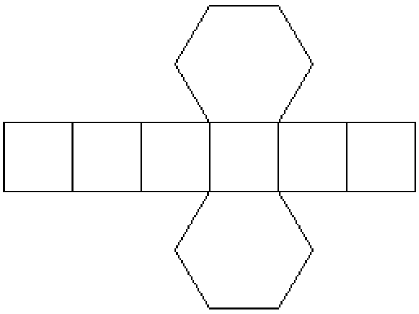
A

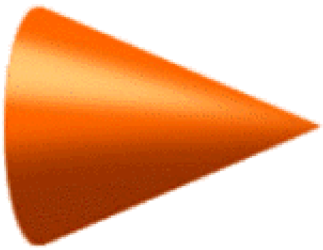
B











3. Desenhe uma planificação de um cubo:

4. Marque com x as figuras que representam poliedros. Abaixo de cada uma, escreva o nome do poliedro correspondente.

5. Observando o sólido que você recebeu, responda:
   a) Ele é um poliedro ou um corpo redondo?
   b) Qual nome pode ser atribuído a esse poliedro?
   c) Quais são as principais características desse sólido? Descreva-o.
   d) Qual sólido você recebeu?

Apêndice D - Questionário 2.1.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Grupo: ____

Questionário 2.1.

1. O sólido que vocês têm em mãos já é conhecido de vocês? Que nome ele tem?
2. Descreva as faces que você identifica no seu sólido. Essas faces são congruentes? Quantas são elas?
3. Quantas arestas têm o seu sólido?
4. Quantos vértices têm o seu sólido?
5. Faça um esboço da planificação deste sólido:

Apêndice E - Questionário 2.2.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Grupo: ____

Questionário 2.2.

1. Um prisma de base pentagonal, tem quantos vértices, arestas e faces? E de base octogonal?
2. E um prisma de base n?
3. Uma pirâmide de base heptagonal, quantos são os vértices, arestas e faces? E de base decagonal?
4. E uma pirâmide de base n?
5. Se um prisma tiver 21 arestas, você consegue determinar o número de vértice, de aresta e face? Quantos? E uma pirâmide de 9 arestas?
6. Um prisma é ....
7. Uma pirâmide é ....
8. Numa pirâmide qualquer, o número de vértice é igual ao número de ....

Apêndice F - Tabela

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Grupo: ____
____
____
____
____

Tabela

Objeto	Nomenclatura	Vértice (V)	Aresta (A)	Face (F)	

Apêndice G - Questionário 3.1.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Equipe: ____
____
____
____
____

Questionário 3.1.

1 ª parte.

1) Cubra de papel a parte não plana da superfície de um cilindro. Qual a forma geométrica formada?
2) Contorne as partes planas do cilindro, que forma elas tem?
3) Faça um esboço da planificação de um cilindro.
4) Os círculos da planificação podem mudar de lugar?
5) Qual é a relação entre o comprimento dos lados do retângulo e os círculos da base?
6) Se aumentarmos a altura do retângulo, igualmente, haverá problema para montar o sólido? Qual a diferença entre o sólido que você obteria se fizesse esse aumento e o que acabou de montar?

Apêndice H - Questionário 3.2.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Equipe: ____

____

____

____

____

Questionário 3.2.

2 ª parte.

1) Cubra a parte não plana da superfície de um cone com um pedaço de papel, de modo que a emenda seja um segmento de reta. Qual a forma dessa planificação?
2) Observe que a superfície do cone só tem uma parte plana, que é chamada de base. Contorne esta parte sobre uma folha de papel. Qual sua forma?
3) Faça um esboço da planificação do cone.
4) O círculo poderia tocar o arco do setor circular em outro ponto? Qual?
5) Qual a relação entre o comprimento deste arco e o comprimento da circunferência da base desse cone?
6) Que linha (s) da planificação corresponde ao raio deste setor?
7) Se aumentarmos o ângulo, sem mudar o círculo da base, o que terá que mudar para que a nova planificação esteja correta? O que concluímos com isso?

Apêndice I - Questionário 3.3.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Equipe: ____

____

____

____

____

Questionário 3.3.

3 ª parte.

1) Imagine uma reta e uma esfera no espaço. Dependendo da posição dessa reta e da esfera, a intersecção entre as duas muda. Quais são as intersecções possíveis entre essas duas figuras?

   Obs.: Responda a pergunta, considerando a esfera e a superfície esférica; as respostas serão diferentes nos dois casos.
2) Repita o item 1 para o caso de um plano e uma esfera ou uma superfície esférica.
3) Que condição deve satisfazer o plano que o círculo de intersecção seja o maior possível?

Apêndice J - Questionário 4.1.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Equipe: ____
____
____
____
____

Questionário 4.1.

1. Podemos formar um ângulo poliédrico unindo quaisquer polígonos? Ou qualquer número de polígonos?
2. O que devemos observar nos polígonos para conseguirmos formar um ângulo poliédrico?
3. Quanto(s) polígono(o) precisou no mínimo para formar um ângulo poliédrico?
4. É possível construir um poliedro utilizando seis triângulos eqüiláteros? Justifique sua resposta.

Apêndice K - Questionário 4.2.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Equipe: ____
____
____
____
____

Questionário 4.2.

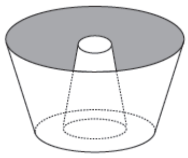
1. Observe cada poliedro montado e responda:
   a) Como são suas faces? Quantas arestas se encontram em cada vértice?
2. Por que as arestas de um poliedro regular são todas iguais?
3. Junte-se com outro grupo, justaponha dois poliedros de 4 faces congruentes e responda:
   a) Todas as faces deste sólido são polígonos regulares congruentes?
   b) Por que este sólido não é um poliedro regular?
4. Com base nas observações, defina o conceito de poliedros regulares, ou poliedros de Platão:

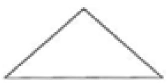
Apêndice L - Avaliação Prognóstica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

Aluno (a): ____

Avaliação Prognóstica

1. Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura: 
   Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Quais são?
   .
2. Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida. Qual deverá ser a forma do adesivo?

   a) 

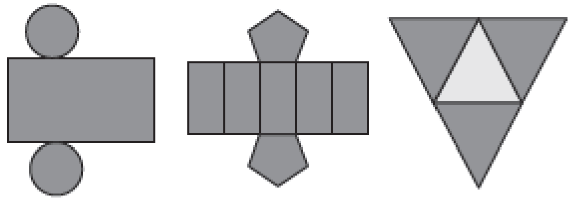
   b) 

   c) 

   d) 

   e) 

3. Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
c) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
e) Cilindro, prisma e tronco de cone.

4. Determine o número de faces de uma pirâmide cuja base tem 8 vértices.

5. Determine o número de faces, de vértices e de arestas de uma pirâmide que tem n faces laterais, sendo n um número natural maior que 2.

6. Observando o sólido que você recebeu, responda:

e) Ele é um poliedro ou um corpo redondo?
f) Qual nome pode ser atribuído a esse poliedro?
g) Quais são as principais características desse sólido? Descreva-o.
h) Faça um esboço desse sólido.
i) Qual sólido você recebeu?