



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

ANDRÉ FERREIRA DE LIMA

DO SENSÍVEL ÀS IDEIAS: UM ESTUDO DE GEOMETRIA A PARTIR DE
ATIVIDADES ENVOLVENDO ESPAÇO E FORMA

CAMPINA GRANDE

2015

ANDRÉ FERREIRA DE LIMA

**DO SENSÍVEL ÀS IDEIAS: UM ESTUDO DE GEOMETRIA A PARTIR DE
ATIVIDADES ENVOLVENDO ESPAÇO E FORMA**

Dissertação de mestrado, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, sob a orientação do Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

CAMPINA GRANDE
2015

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

L732d Lima, André Ferreira de.
Do sensível às ideias [manuscrito] : um estudo de geometria a partir de atividades envolvendo espaço e forma / André Ferreira de Lima. - 2015.
251 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.
"Orientação: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, Departamento de Matemática".

1. Geometria. 2. Ensino de Geometria. 3. Geometrias espacial e plana.

21.ed.CDD 516

ANDRÉ FERREIRA DE LIMA

DO SENSÍVEL ÀS IDEIAS: UM ESTUDO DE GEOMETRIA A PARTIR DE
ATIVIDADES ENVOLVENDO ESPAÇO E FORMA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, sob a orientação do Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Campina Grande, 16 de Setembro de 2015.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida (UEPB)
Orientador



Prof. Dr. Nilson José Machado (USP)
Examinador



Prof. Dr. Silvério de Andrade (UEPB)
Examinador

Aos meus pais, Antônia e Luiz, que incansavelmente buscaram esforços
para a formação cidadã de seus filhos.

AGRADECIMENTOS

“A gratidão é o único tesouro dos humildes”.

William Shakespeare

A Deus, Autor da vida.

A minha mãe, Antônia, e a meu pai, Luiz.

Aos meus irmãos Adriana, Adriano, Juliana, Luciana e Leandro.

Ao meu primo José Vicente, sua esposa Edileuza e seu filho Marcos.

A todos os familiares.

Aos meus amigos Jackson, Ferdiramar, Carlos, Wilton e Rafael.

As minhas amigas Cinthia e Ana Maria.

Aos colegas da graduação.

Ao meu professor da graduação Airlan.

Aos amigos do PPGECEM/UEPB: Gilberto, Edivam, Tiêgo, Sheila, Lucimara, Tony e Joseane.

A todos que me consideram como amigo.

Ao meu orientador e amigo, professor José Joelson Pimentel de Almeida.

Aos membros da banca examinadora: Silvanio de Andrade e Nilson José Machado.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

A todos os funcionários do PPGECEM/UEPB.

À Secretaria Municipal de Zabelê-PB, sob a direção de Marleide.

Aos meus colegas professores da Escola Municipal Maria Bezerra da Silva, em especial, Terezinha Saturnino, tia Cícera, Andréia, Aristófanos e Joyce.

À professora Mauriceia da Escola Estadual Miguel Santa Cruz

Aos alunos participantes da pesquisa.

A minha colaboradora pelas filmagens, Flávia.

Aos integrantes do Grupo de Leitura e Escrita em Educação Matemática – LEEMAT/UEPB.

Aos responsáveis e funcionários da escola em que realizei a pesquisa.

Aos meus ex-alunos.

E a TODOS que, de uma forma ou de outra, colaboraram com esta pesquisa.

RESUMO

LIMA, A. F. **DO SENSÍVEL ÀS IDEIAS: UM ESTUDO DE GEOMETRIA A PARTIR DE ATIVIDADES ENVOLVENDO ESPAÇO E FORMA**. 2015. 251f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2015.

O interesse pelo tema dessa pesquisa tem origem na Licenciatura em Matemática do professor-pesquisador. Momento esse em que surgiram as primeiras ideias. Hoje, verificam-se alguns resultados das reflexões durante essa caminhada. Defende-se que há um caminho mais coerente para que as crianças possam construir conceitos geométricos, desde que o ensino de geometria seja desenvolvido, inicialmente em ideias empíricas para em seguida explorar conceitos da geometria plana e que seja abordado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Porém, o reconhecimento do ensino de geometria foi relegado por quase todos durante muitos anos e acabou prejudicando a qualidade dele nas escolas. Uma das causas desse abandono foi o Movimento de Matemática Moderna (MMM). Felizmente, nas últimas três décadas, procuram-se resgatar e mostrar a potencialidade do conhecimento geométrico para a formação do indivíduo. Diante disso, trilhou-se na busca de possíveis explicações que possibilitassem responder a seguinte questão norteadora: Quais são os efeitos produzidos por uma série de atividades planejadas que privilegiam a exploração de uma geometria sensível para, em seguida, abordar noções da geometria plana com alunos do quinto ano do Ensino Fundamental? Em que medida essa intervenção em sala de aula, guiada pelas recomendações no tocante ao ensino de geometria para o segundo ciclo do Ensino Fundamental, contribuirá para a construção de conceitos da geometria plana a partir da exploração de atividades que envolvam a composição e decomposição de algumas representações de sólidos geométricos? Essa problemática foi discutida a partir do seguinte propósito: investigar quais são os efeitos produzidos por uma série de atividades planejadas que privilegiam a exploração de uma geometria sensível para, em seguida, abordar noções da geometria plana com alunos do quinto ano do Ensino Fundamental através de situações que envolvam a composição e decomposição de algumas representações de sólidos geométricos. Realizou-se uma pesquisa qualitativa sob um aspecto interpretativo e naturalístico em uma escola da Rede Estadual de Ensino da cidade de Monteiro no estado da Paraíba, envolvendo vinte e cinco alunos de uma turma de quinto ano do Ensino Fundamental. A pesquisa estruturou-se através de um conjunto de oito atividades relacionadas à geometria que foram denominadas no decorrer do texto de episódios. Eles foram pensados à luz de uma geometria que privilegie inicialmente o caráter sensível e empírico como uma possibilidade de se construir alguns conceitos geométricos envolvendo três dimensões para, em seguida, abordar elementos da geometria plana fazendo um diálogo constante entre as geometrias plana e espacial. Coletou-se os dados entre os meses de Fevereiro a Maio de 2015. Utilizou-se diversos instrumentos de coleta, destaca-se os cadernos de atividades entregues às equipes em cada episódio e as filmagens. Como resultados, evidencia-se que as atividades desenvolvidas em equipe favoreceram uma comunicação interpessoal em que participantes mais habilidosos contribuíram com os que apresentaram mais dificuldades, fato investigado pela zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky. Verificamos também que os discentes deixaram de denominar um sólido geométrico a partir do formato de suas faces à medida que as atividades transcorreram. Por fim, registra-se grande crescimento nas faces da construção do conhecimento geométrico.

Palavras-chave: Geometria. Ensino de geometria. Geometrias espacial e plana.

ABSTRACT

LIMA, A.F. **IDEAS TO SENSITIVE: A GEOMETRY STUDY SPACE AND FORM INVOLVING ACTIVITIES FROM.** 2015. 251f. Thesis (MS) – University of Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2015.

My interest for, and my first ideas related to, this research area began during my initial teacher training. Today, I can verify some results from the reflections along this journey. They make us infer that if geometry is approached since the first years in school, initially through empiric ideas, and later on through the exploration of concepts of plane geometry, that would be a more coherent way for school children to develop geometrical concepts. However, the recognition of geometry was relegated by almost everyone for many years, which has damaged its teaching quality in the schools. Fortunately, during the last three decades, there is a tendency to recuperate and show the potential of geometrical knowledge for the development of a human being. In this context, we are searching for possible explications that lead us to the answer to our guiding questions: What effects are produced by a series of planned activities that favor the exploration of a concrete/sensitive geometry in order to approach notions of plane geometry with fifth-graders? To what extent does this classroom intervention, guided by the recommendations for geometry teaching to fifth-graders, contribute to the development of concepts of plane geometry based on the exploration of activities that involve the composition and decomposition of some representations of geometric solids? In order to discuss these questions, this study aims to investigate the effects produced by a series of planned activities that favors the exploration of a concrete/sensitive geometry in order to approach notions of plane geometry with fifth-graders, through situations that involve the composition and decomposition of some representations of geometric solids. We carried out a qualitative field study with an interpretative and naturalistic aspect, involving 25 pupils from a fifth-grade-class at a State school in the town of Monteiro, State of Paraíba, Brazil. The research structure was based on a set of eight activities related to geography that were denominated along the episodes of the text. These activities were thought in the light of a geometry that initially favors the concrete, sensitive character as a possibility to develop some tri-dimensional geometric concepts and, later on, approach elements of plane geometry in a constant dialogue between plane and spatial geometry. The data was gathered between the months of February and March of 2015. Various instruments were used in this task, among them the activity notebooks that were handed out to every work group during every episode, the film recording, the facial, corporal and gestural expressions along the process of achieving information, and commentaries said before or after the moments of construction of geometric knowledge. As part of the results, it can be highlighted that the activities developed in groups favored an interpersonal communication where the more skillful participants contributed to the learning of those that presented more difficulties.

Key-words: Geometry. Teaching geometry. Spatial and plane geometry

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CIEAEM	Commission Internationale Pour l' 'Etude et l' Amelioration de 'Enseignement des Mathématiques
CNLD	Comissão Nacional do Livro Didático
COLTED	Comissão do Livro Técnico e Livro Didático
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
EUA	Estados Unidos da América
FAE	Fundação de Assistência ao Estudante
FENAME	Fundação Nacional do Material Escolar
GEEM	Grupo de Estudos do Ensino da Matemática
INL	Instituto Nacional do Livro Didático
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
LEEMAT	Leitura e Escrita em Educação Matemática (Grupo de Pesquisa)
MEC	Ministério da Educação
MMM	Movimento da Matemática Moderna
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PLD	Programa do Livro Didático
PLIDEF	Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental
PNAIC	Pacto Nacional de Alfabetização na Idade Certa
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PROLETRAMENTO	Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
USAID	Agência Norte-Americana Para o Desenvolvimento Internacional
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal (Vygotsky)

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O tetraedro: percepção/construção/representação/concepção.	81
Figura 2 – Caixas contendo o material necessário para cada episódio.	116
Figura 3 – Caderno de atividades das equipes.	116
Figura 4 – Exemplo de uma urna confeccionada para o episódio Percepção tátil	118
Figura 5 – Imagens de objetos para o segundo momento do episódio Percepção tátil	119
Figura 6 – Planificações de alguns objetos que estavam dentro das urnas	120
Figura 7 – Tabuleiro para o episódio O cão <i>Bob</i> e seu itinerário	127
Figura 8 - Algumas representações de sólidos geométricos, que são confundidas com o formato de suas faces.	158
Figura 9 - Tetraedro com um prisma em seu interior.	159
Figura 10 - Semelhanças e diferenças apontadas pelo grupo D, para representações de alguns sólidos e seus lados.	160
Figura 11 - Semelhanças e diferenças apontadas pelo grupo C, para representações de alguns sólidos e seus lados.	162
Figura 12 - Produção do grupo A acerca da representação da embalagem de ervilha.	168
Figura 13 a e b - Representações de um prisma e tronco de cone feito pelo grupo E.	168
Figura 14 a e b - Algumas maquetes da sala de aula.	170
Figura 15 - Desenho de um rolo de linha (tronco de cone) feito pelo grupo A.	173
Figura 16 - Planificações de embalagens de prismas das equipes C e E.	176
Figura 17 - Contorno das embalagens feitas pelos grupos C e D, em ordem.	177
Figura 18 - Imagem do alto da Praça João Pessoa, Monteiro-PB.	182
Figura 19 - Respostas da aluna A1, sobre as observações, no mapa, dos arredores da escola.	185
Figura 20 - Respostas da aluna E2, sobre as observações, no mapa, dos arredores da escola.	185
Figura 21 a e b - Itinerário, entre a casa e a escola da aluna E2 e o mapa dessa localidade.	187
Figura 22 a e b - Itinerário da aluna E3 que reside na zona rural da cidade de Monteiro – PB.	188
Figura 23 a e b - Itinerário entre a casa e a escola da aluna F1 e o mapa dessa localidade.	189
Figura 24 - Produção do grupo F, acerca do caminho mais curto, feito pelo cão, para recolher os objetos.	190
Figura 25 - Utilização de termos convenientes para dar orientações acerca de endereços.	190
Figura 26 - Posição de alguns objetos representados na malha pela equipe B em função de informações prestadas pelo grupo A.	191
Figura 27 - Produção do grupo F, acerca do percurso, realizado pelo cão, para recolher o sapato e o osso.	192
Figura 28 - Produção de uma equipe, acerca da banca escolar e a representação do aluno.	193

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Calendário das intervenções realizadas no 5º ano do Ensino Fundamental.	115
Quadro 2	Lista das embalagens manipuladas e suas analogias feitas pelos alunos das equipes.	140
Quadro 3	Representações e descrições das embalagens tocadas pelos alunos, assim como, as planificações apontadas.	146

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1. O pesquisador e sua busca	13
2. Aporte de pesquisas precedentes.....	17
3. Problemática da pesquisa	20
4. Pilares da dissertação	24
PRIMEIRO CAPÍTULO – SOBRE A HISTÓRIA DA GEOMETRIA E DO SEU ENSINO.....	26
1.1 Contribuições para o desenvolvimento do conhecimento geométrico.....	27
1.2 A docência antes do Movimento da Matemática Moderna no Brasil	32
1.3 Indícios do surgimento do Movimento de Matemática Moderna	37
1.4 A difusão do Movimento de Matemática Moderna no Brasil.....	44
1.5 Proliferação do livro didático de Matemática Moderna no Brasil	46
1.6 O ensino de geometria no Brasil após o Movimento de Matemática Moderna	47
SEGUNDO CAPÍTULO – SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA NA ATUALIDADE	50
2.1 Resgate do ensino de geometria	51
2.2 Recomendações do PNLD, quanto ao ensino de geometria	55
2.3 Do espaço ao plano	57
2.4 Habilidades geométricas	69
2.4.1 Habilidades visuais.....	70
2.4.2 Desenho e construção.....	72
2.4.3 Comunicação.....	74
2.4.4 Lógica.....	75
2.4.5 Aplicação ou transferência.....	77
2.5 Aspectos intuitivos, experimentais e teóricos do conhecimento geométrico.....	78
2.6 As faces da construção do conhecimento geométrico.....	80

TERCEIRO CAPÍTULO – IMPLICAÇÕES DA TEORIA SOCIOCULTURAL DE VYGOTSKY	87
3.1 Apresentação	87
3.2 Aquisição de conhecimentos a partir da Teoria Sociocultural.....	88
3.3 Concepção de aprendizado na visão de Vygotsky	92
3.5 O desenho e o desenvolvimento de crianças.....	98
QUARTO CAPÍTULO – CAMINHOS METODOLÓGICOS E DESCRIÇÃO DOS EPISÓDIOS	101
4.1 Apresentação	102
4.2 Delineamento da pesquisa.....	103
4.3 A pesquisa de campo.....	105
4.4 Pesquisas em Educação Matemática sob a ótica do paradigma indiciário.....	109
4.5 Descrição dos <i>episódios</i>	114
4.5.1 Primeiro episódio – Percepção tátil.....	116
4.5.2 Segundo episódio – Decomposição de sólidos em figuras planas	121
4.5.3 Terceiro episódio – Construindo esqueletos de poliedros	123
4.5.4 Quarto episódio – Eu vou para a escola – Explorando itinerários	125
4.5.5 Quinto episódio – O cão Bob e seu itinerário	126
4.5.6 Sexto episódio – diferenças entre figuras planas ou espaciais.....	128
4.5.7 Sétimo episódio - Estudo dos quadriláteros com a faixa de Möebius.....	129
4.5.8 Oitavo episódio – Avaliação – Observação da imagem de Escher.....	130
5. Sobre a coleta e a análise de dados	131
QUINTO CAPÍTULO – ANÁLISE DOS DADOS.....	137
5.1 Informações preliminares acerca das análises.....	138
5.2 Bastidores de alguns episódios	139
5.3 Aspectos comportamentais, relacionais e hegemônicos entre os educandos.....	141
5.4 As categorias	144
5.4.1 Sólidos geométricos, a partir do formato de suas faces	144

5.4.2 Conhecimento cotidiano, associado ao saber geométrico.....	164
5.4.3 Memória visual e imagens mentais	167
5.4.4 Transitar da geometria espacial para a plana, e vice-versa	172
5.4.5 Diferenciação entre corpos redondos e não redondos.....	179
5.4.6 Localizar-se no próprio espaço físico, de sua vivência, deslocar-se nele, descrever a posição, de um objeto, ou pessoa, construindo itinerários.....	181
CONCLUSÃO.....	195
REFERÊNCIAS	201
APÊNDICE A – Autorização requerida à direção escolar para fins de realização da pesquisa de mestrado	208
APÊNDICE B – Termo de autorização destinado aos pais dos alunos participantes da pesquisa	209
APÊNDICE C – Modelo do caderno de atividade utilizado pelos grupos referente ao primeiro episódio.	210
APÊNDICE D – Quadro contendo a listagem de todas embalagens inseridas nas urnas referente ao primeiro episódio.	220
APÊNDICE E – Modelo do caderno de atividade utilizado pelos grupos referente ao segundo episódio.	221
APÊNDICE F - Modelo do caderno de atividade utilizado pelos grupos referente ao terceiro episódio.....	230
APÊNDICE H – Modelo do caderno de atividade utilizado pelos grupos referente ao sexto episódio.	240
APÊNDICE I.....	241
ANEXO A – Imagem de Esher apresentada aos alunos no último episódio.....	251

INTRODUÇÃO

1. O pesquisador e sua busca

Esta pesquisa tem origem desde minha graduação em Matemática, percurso pelo qual foram decorridos quatro anos de dedicação e empenho tanto nas disciplinas específicas quanto nas pedagógicas. No segundo caso, os esforços se referiam às atividades práticas extensivas que eram desenvolvidas em escolas públicas da cidade de Monteiro-Paraíba. De certa forma, havia livre arbítrio para decidir sobre quais áreas explorar e quais metodologias utilizar, isso graças às disciplinas de enfoques pedagógicos e o interesse dos professores pelo tema.

O encanto promovido pela ideia de se construir o conhecimento matemático, a partir da mediação entre professor – aluno – saber – material didático, através da ludicidade aumentava exponencialmente. Desenvolvi no curso de formação de professores de Matemática o gosto pelo caráter prático desse campo do conhecimento. Revendo minhas pastas arquivadas em HD externo, pude fazer uma breve leitura em diversos textos produzidos por mim durante aquele percurso acadêmico e lembrar propostas aplicadas nas escolas que me acolheram durante as observações de aulas, intervenções e os estágios supervisionados. Essa busca no baú do curso de Licenciatura em Matemática me fez comprovar o que minhas recordações suspeitavam: todas as intervenções que realizei nesse período envolveram o ensino e aprendizagem de Matemática, a partir do uso de materiais didáticos confeccionados com sucatas ou objetos de baixo custo. Para isso, me empenhei em promover juntamente com outros colaboradores diversas oficinas, gincanas, formações e aulas que eram ministradas sempre recorrendo ao uso de ferramentas pedagógicas concretas.

Durante esses momentos, adotei uma postura de ouvir os alunos e mostrar que era possível construir conceitos de Matemática a partir de experiências simples, entretanto, significativas. Iniciativas como essas precisavam ser duradouras e as horas de extensão que a universidade oferecia não permitiam um trabalho desse tipo. Além disso, no meu caso, inexistiam bolsas de manutenção, alimentação, transporte entre outros. Esse cenário fazia com que o tempo de estudo torna-se limitado, pois foi necessário trabalhar no decorrer de todo o curso de graduação, felizmente sempre em sala de aula.

Percebi que o apoio de professores, diretores, supervisores e até a universidade local seria imprescindível para difundir o uso de materiais concretos na escola em que trabalhava, então fui busca-lo e o consegui. Minha pretensão foi tornar, como diz Brasil, (1997, p. 19), a

Matemática “ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente”. Independentemente de quaisquer circunstâncias, nós, educadores, devemos torná-lo acessível aos alunos.

No decorrer desse trabalho, utilizamos frequentemente a expressão *material concreto*, sendo assim, decidimos, nesse momento, justificar essa escolha, para isso, partimos de preceitos defendidos na literatura encontrada. O termo concreto é utilizado habitualmente “como o que se pode tocar, atribui-se aos objetos manipuláveis a propriedade de tornar significativa uma situação de aprendizagem” Brasil (2001, p. 105). Portanto, nossa intenção foi oportunizar contextos de ensino e aprendizagem através da utilização adequada desses recursos pedagógicos, de tal modo que os educandos pudessem compreender as noções geométricas pretendidas de forma mais acessível. Assim, foi possível obtermos resultados significativos através dos objetos manipuláveis que adotamos.

Os anos transcorreram-se e concluí meu curso de graduação em Matemática. Após essa etapa, continuava lecionando em escolas públicas de minha cidade e meu interesse pelo caráter prático da Matemática persistia. Isso contagiava aqueles que me cercavam. E foi nessa época que tive a ideia de equipar um laboratório de Matemática na escola que lecionava. Consegui financiamento da direção escolar para comprar alguns itens essenciais que não poderiam ser construídos com material de baixo custo.

Pautado nesse desejo fui buscar apoio no Câmpus da Universidade Estadual da Paraíba, localizado na cidade de Monteiro-PB. Foi um momento enriquecedor, pois compartilhei experiências com a professora Thayse, de Estágio Supervisionado. No encontro ficou decidido que ela, a partir da colaboração de seus alunos do curso de Matemática, proporcionaria uma oficina envolvendo a confecção de materiais e jogos pedagógicos na escola em que o autor desse trabalho dissertativo trabalhava. Todo material produzido foi doado ao laboratório de Matemática que já contava com uma sala própria cedida pela diretora da escola. Aos poucos, o espaço se tornava atrativo e inspirador, pois juntamente com os alunos da escola confeccionamos diversos materiais para compor o acervo do ambiente e isso acontecia sempre que ministrava algum conteúdo de Matemática, sendo possível fazer mediação com materiais disponíveis ou construídos pelos próprios alunos.

Entretanto, devido à inexistência de vínculo empregatício com a referida escola, sempre ocorria o risco de a qualquer momento deixar de exercer a função docente naquela instituição educacional. Isso me causava pânico, pois se isso não ocorresse poderia dar continuidade aos projetos que estavam em execução. Infelizmente foi exatamente isso que aconteceu, pois em 2010 já não pertencia ao quadro de professores da escola, sendo assim o

espaço que se transformara em um laboratório de Matemática foi esquecido pelos demais professores da comunidade escolar. Relatarei dois momentos importantes que aconteceram em minha vida profissional, pois considero de extrema importância para mostrar íntima relação deles com o tema proposto nesta pesquisa.

Primeiro, garantia de estabilidade profissional a partir da aprovação em um concurso público da cidade de Zabelê, do Estado da Paraíba e, pouco tempo depois, estava lecionando nessa comunidade. Foi a partir daí que desenvolvi diversos projetos voltados ao ensino e à aprendizagem de Matemática. Entre outros, em uma parceria com a Secretaria Municipal de Educação, equipamos uma sala propícia para ministrar algumas aulas de Matemática, ela foi denominada de Laboratório de Matemática. Proporcionei inúmeras oficinas e aulas a partir da mediação dos materiais didáticos adquiridos com recursos próprios da prefeitura, como também oportuneizei distintos momentos onde os alunos tiveram condições de confeccionar materiais pedagógicos.

No entanto, estava ancorado em uma prática sem nenhuma validação teórica solidificada, mesmo tendo concluído o curso de formação de professores de Matemática, sentia que me faltava algo, isto é, uma fundamentação consistente que se relacionasse com o que estava acreditando e investindo. Percebendo isso procurei participar de cursos de formação contínua, entre eles, destaco a Especialização em Matemática Básica pela Universidade Estadual da Paraíba. Além disso, retomei as minhas participações em congressos, simpósios, seminários e palestras na área de Educação Matemática. Um fato curioso para ser lembrado era que sempre procurava me engajar em minicursos e outras atividades voltadas para o uso de materiais concretos nas aulas de Matemática.

À medida que minha experiência como docente transcorria, percebia que não era somente a ausência de uma fundamentação sobre o tema que me interessava. Acrescento também que os anos perpassados nessas escolas públicas contribuíram no sentido de diagnosticar o quanto os alunos sentem dificuldades em compreender o conhecimento matemático. Essa problemática pode estar em função da falta de metodologias ancoradas em ferramentas didáticas concretas que possibilitem a interação docente-discente-saber matemático.

Enfim, destaco o segundo momento que tinha me referido anteriormente. A aprovação no mestrado e, sem sombra de dúvida, de um Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática foi enriquecedora no sentido de conhecer de uma forma mais profunda como os alunos constroem o conhecimento matemático e refletir sobre os

motivos de uma grande maioria não ter reconhecido nem reconhecer a importância desse tipo de saber para o desenvolvimento das civilizações.

A aprovação nesse Programa de Pós-Graduação foi possível também pela submissão do pré-projeto que teve como tema Laboratório de Ensino de Matemática e, aos poucos, foi tomando outros rumos no decorrer do curso. No entanto, não houve desvio do foco no interesse que tínhamos da relação entre a Matemática e a utilização adequada de ferramentas pedagógicas para seu ensino. Nesse período recebi o convite do meu orientador para participar na modalidade de aluno de Pós-Graduação do Grupo de Pesquisa em Leitura e Escrita em Educação Matemática – LEEMAT, cuja finalidade é problematizar questões relativas à leitura e escrita em Educação Matemática, mormente aquelas concernentes à linguagem matemática, à produção de significados em aulas de Matemática, inclusive na formação de professores, no âmbito escolar e na universidade. Obviamente aceitei o convite, pois naquele momento percebi uma grande possibilidade de discutir temas que intrigam a sala de aula e, simultaneamente, seria um espaço onde poderia construir conhecimentos em colaboração a partir de vivências com os integrantes do grupo, os quais contribuíram direta ou indiretamente com a nossa dissertação de mestrado.

As experiências no LEEMAT possibilitaram aperfeiçoar o nosso tema de pesquisa de mestrado. Entre elas, destaco ações voltadas para o resgate do ensino de geometria. Antes disso, foi preciso muita leitura e procura por autores que investigavam essa temática. Desenvolvemos trabalhos com alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Essas iniciativas fizeram com que tivesse um olhar diferente para a geometria e, conseqüentemente para seu ensino. Entretanto, em meio a toda essa empolgação, descobri que o ensino de geometria ficou por muito tempo em um segundo plano no currículo de Matemática das escolas públicas, pois até então não tinha pensado nisso, mesmo com todas as pesquisas realizadas.

Esse abandono deve-se a diversos fatores, entre eles, referenciamos os sociais, financeiros, políticos, educacionais e a falta de domínio das ideias geométricas por parte do professor. Na medida do possível, esse panorama está mudando, isso porque perceberam as conseqüências que a ausência desse ensino causa no desenvolvimento intelectual de crianças e adolescentes. Justifico trabalhar com essa temática a partir do que foi exposto anteriormente e, além disso, proponho aprofundar os fatores que implicaram no abandono do ensino de geometria; os pontos positivos ao inserir no currículo das escolas os temas referentes à geometria, principalmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental; as políticas que estão resgatando essa temática e inserindo-a nos livros didáticos e a inserção de atividades

planejadas a partir de materiais concretos como meio para mediar o trabalho do professor no tocante ao ensino de geometria.

Esta narração de uma parte de minha trajetória em primeira pessoa do singular justifica-se pelo fato dela ter influenciado as escolhas pelo objeto de estudo aqui apresentado. Além disso, será possível verificar traços dela nesta pesquisa, uma vez que concordamos com que diz Almeida (2012, p. 17), “a formação de um indivíduo dá-se pelas interações sucessivas e contínuas com o mundo e tudo que o compõe, não substituindo o que se tinha no momento anterior”. De fato, nossas concepções estão migrando de um tempo passado para outro presente-futuro, porém de modo mais sistematizado, fundamentado teoricamente e reflexivo sobre a prática docente.

Enfim, esta introdução está subdividida em quatro partes que a compõem. Na primeira, revisitamos nossa trajetória profissional interligando-a com o tema dessa pesquisa. Na segunda, fizemos enumeração de algumas pesquisas de mestrado e doutorado que também investigaram o tema dessa pesquisa, assim como suas contribuições deixadas para o meio social, político e educacional. Na terceira, discutimos ideias que influenciaram a elaboração da questão norteadora, dos objetivos e das justificativas. Por último, apresentamos os pilares que compõem essa dissertação.

2. Aporte de pesquisas precedentes

Nas buscas que fizemos no portal de periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) encontramos algumas pesquisas de mestrado e doutorado que abordam o ensino de geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Procuramos aquelas que desenvolveram atividades utilizando material concreto para introduzir primeiramente noções geométricas espaciais e, em seguida, a geometria plana.

O trabalho de Kazanowski (2010) foi estruturado de modo que as atividades se fundamentassem em três blocos trabalhados sequencialmente e foram denominados pela pesquisadora de *Orientação espacial, objetos tridimensionais e figuras bidimensionais*. Conforme explicações da autora, isso esteve em conformidade com os Parâmetros Curriculares Nacionais, os quais defendem que o estudo da geometria espacial deve ser iniciado desde cedo, pois as primeiras concepções das crianças são de ordem tridimensional e isso ocorre pela constituição de um sistema de coordenadas relativo ao próprio corpo da criança.

A pesquisadora Radaelli (2010), através de uma atividade em que os alunos deveriam fazer uma pré-visualização de alguma embalagem fechada e, em seguida, desenhar uma possível planificação para posteriormente comparar o desenho feito antes e o desenho real da embalagem, comprovou que alguns alunos confundiram o nome das figuras, a exemplo de um hexaedro denominado pelos discentes de quadrado e um prisma de retângulo. A dissertação de Almeida (2011), a partir de uma atividade similar, também constatou que os alunos, na grande maioria, nomearam os sólidos por figuras planas e também os confundiram com objetos do cotidiano. O trabalho de Kazanowski (2010) realizou atividade semelhante com as professoras que fizeram parte de um grupo de estudos, contudo não encontramos relatos a respeito dos resultados da intervenção.

Almeida (2011) desenvolveu uma pesquisa no sentido de diagnosticar as implicações acerca das potencialidades do uso de materiais didáticos manipuláveis em aulas de geometria. Foram explicitadas algumas razões para o abandono do ensino de geometria nessas séries, consequências da ausência desse conhecimento e, além disso, abordaram-se detalhadamente as contribuições daqueles materiais para as aulas de geometria. A intervenção foi realizada com alunos do 5º do Ensino Fundamental e desenvolveu-se um conjunto de atividades com esses materiais.

Outros trabalhos que envolveram o ensino de geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental foram voltados para a formação de professores e desenvolveram-se a partir da formação de grupos de estudo envolvendo docentes desses anos. Essas investigações também trouxeram contribuições para esta pesquisa, no que concerne às ideias referentes à geometria. Por exemplo, no trabalho de Barbosa (2011), foi observado pela pesquisadora que as professoras participantes do estudo passaram a utilizar um vocabulário geométrico mais condizente com situações que envolviam as propriedades das figuras ou orientação espacial. Também percebeu melhoras significativas no que diz respeito às habilidades de visualização e representação.

No trabalho de Silva (2006) encontramos algumas posições também defendidas em nossa pesquisa. Para a investigadora, as descobertas que as crianças fazem acerca de seu corpo e dos objetos estão em função de uma relação com o espaço. Defende-se também que as interações com os objetos possibilitam às crianças percepção do espaço físico e isso permite a elas organizarem as primeiras noções acerca da forma, tamanho e posição.

Silva (2006) argumenta que quando essas crianças chegam à escola há uma mudança no processo de experiências e construções espaciais. Nesse contexto, são verificados dois cenários: no primeiro, as crianças continuam de forma espontânea a construir noções espaciais

e, no segundo, vão se deparar com processos sistemáticos acerca dos conteúdos de espaço e forma, sendo que, é papel da educação fazer com que os conhecimentos geométricos espaciais oriundos do mundo de cada indivíduo sejam organizados e estruturados em níveis mais complexos, em comparação com os trazidos à escola.

Enfim, percebeu-se uma importância dada pela pesquisadora aos conteúdos do bloco Espaço e Forma. Contudo, em seu estudo não foi feita uma intervenção no sentido de oportunizar experiências na sala de aula que abordassem temas daquele eixo de conteúdos. Em virtude de alguns problemas relatados na pesquisa de Silva (2006), optou-se por investigar as professoras fora de suas aulas de Matemática, especificamente as de geometria. O trabalho foi se estruturando à medida que as docentes recontavam como ministravam essas aulas.

A tese de doutorado de Nacarato (2000) investigou o processo de educação continuada de cinco professoras das séries iniciais da escolarização envolvidas num processo simultâneo de aprender e ensinar geometria. Os dados foram coletados a partir de reuniões com o grupo de docentes, assim como entrevistas individuais envolvendo três grandes blocos, onde o primeiro envolvia o *currículo de geometria vivenciado pelas professoras*; o segundo, *currículo apresentado às professoras*; e o terceiro, *currículo em ação: produção de sentidos para uma possível geometria escolar e a incorporação da geometria no currículo das séries iniciais*.

Os encontros tinham como dinâmicas relatar ao grupo alguns episódios de aulas vivenciadas pelas professoras, planejamentos de aulas envolvendo geometria e privilegiando aspectos do bloco de conteúdos Espaço e Forma para os alunos das docentes participantes, gravações desses momentos para posterior reflexão em equipe assim como as produções dos educandos e as narrativas das educadoras e situações problematizadas de forma intencional pela pesquisadora.

De forma sintética, os encontros foram denominados de *episódios* e obedeceu ao seguinte cronograma: o episódio da moeda e a ressignificação do conceito figural de cilindro; o episódio da tampa e a ressignificação do conceito figural de paralelepípedo; o episódio do sabão e a ressignificação do conceito figural de prisma; planificando paralelepípedos; desenhando paralelepípedos e, por último, com quem me pareço.

As pesquisas de Silva (2006), Almeida (2011), Andrade (2011), Barbosa (2011), Lauro (2007), Marquesin (2007), Pavanello (1989), Radaelli (2010), Vasconcelos (2005); e os trabalhos de Nacarato (2002) e Nacarato e Santos (2014) e Fonseca (2011) compartilham das

mesmas ideias, isto é, uma das causas para o abandono do ensino de geometria foi o Movimento de Matemática Moderna.

Acreditamos que o caminho escolhido nessa pesquisa esteja coerente com os teóricos revisitados constantemente. Seguimos as recomendações que Radaeli (2010) decidiu percorrer, isto é, primeiro abordamos atividades que possibilitassem aos alunos terem uma percepção do mundo para depois representar o espaço através de desenhos, mapas e outras representações planas. Embora defendamos esse percurso para o ensino de geometria nas primeiras séries de escolarização da Educação Básica, há pesquisadores que alertam para o fato de que esse ensino pode se dá a partir de um trabalho conjunto envolvendo geometria plana e espacial, independentemente de onde se inicie, o que importa nesse caso é possibilitar que os alunos transitem entre as duas geometrias, para isso devemos recorrer a diversas estratégias, entre elas está o uso de materiais concretos.

3. Problemática da pesquisa

Os periódicos especializados em Educação Matemática, as dissertações e teses que investigam o ensino de geometria, as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) discutem e concordam com a mesma ideia, ou seja, recomendam que o ensino de geometria deva ter início a partir de situações envolvendo o cotidiano dos educandos para em seguida abstrair os conceitos geométricos. Uma das formas de explorarmos isso é através da introdução de ideias presentes no bloco de conteúdos Espaço e forma – primeiro e segundo ciclos. Nesse, encontramos recomendações para valorizar inicialmente as noções de espaço e, em seguida, prosseguir com as formas. No primeiro caso, merecem destaque os sólidos geométricos, pois são eles que permitem explorar diversas noções intimamente ligadas à geometria plana, como também pode viabilizar a transição do mundo tridimensional, ou seja, o concreto, para o bidimensional, isto é, o abstrato.

Validando o que foi elucidado anteriormente, Brasil (1997, p. 81) afirma que “num primeiro momento, o espaço se apresenta para a criança de forma essencialmente prática: ela constrói suas primeiras noções espaciais por meio dos sentidos e dos movimentos”. Compete à escola proporcionar atividades planejadas que aperfeiçoe essas noções. Todavia, a problemática consiste, conforme os PCNs, em migrar de um espaço ao outro. Encontramos a

resposta nos próprios Parâmetros, isto é, “esse espaço percebido pela criança — espaço perceptivo, em que o conhecimento dos objetos resulta de um contato direto com eles — lhe possibilitará a construção de um espaço representativo — em que ela é, por exemplo, capaz de evocar os objetos em sua ausência” (BRASIL, 1997, p. 81).

Igualmente, antes mesmo dos primeiros contatos com a escola, as crianças vivenciam situações em um mundo totalmente geometrizado, cercado de objetos de seu próprio uso e manipulação que aparecem em formatos tridimensionais. Por exemplo, a geladeira tem a representação de um paralelepípedo e a lata de leite em pó tem o formato de um cilindro. Esses conhecimentos prévios deveriam ser ampliados na escola, mas, infelizmente, temos poucas evidências de que este trabalho aconteça. O que presenciamos é uma inversão das recomendações postas pelas políticas educacionais e trabalhos acadêmicos citados anteriormente, ou seja, conforme verificado em nossa fundamentação, escolas e professores privilegiam inicialmente o estudo de uma geometria abstrata, com destaque à memorização de definições, nomenclatura de polígonos sem nenhuma explicação vinculada à realidade, excesso de atividades onde os alunos são treinados a desenharem ou colorir polígonos dos mais diversos tipos. Atitudes dessa natureza muitas vezes são desprovidas de significados para os alunos.

Essa valorização excessiva da geometria plana surtiu efeito, porém negativo. Por exemplo, desde a década de 1960 até a primeira década do século XXI uma boa parte dos professores se empenhou em ministrar inicialmente os conteúdos relacionados a uma geometria abstrata, isto é, privilégio de temas geométricos com maior grau de abstração em relação aqueles que estão atrelados ao cotidiano dos discentes. Prova disso é que os alunos ficaram imersos em muitos conceitos geométricos errôneos. E isso não poderia estar acontecendo, pois em seu cotidiano a caixa de creme dental não é confundida com um retângulo simplesmente porque ela é composta por seis faces retangulares, assim como o dado (hexaedro), presente nas brincadeiras infantis e nos jogos de azar, não é confundido com a representação de um quadrado simplesmente porque possui seis faces quadradas. Com o propósito de não haver essa confusão na classificação dos sólidos geométricos, Brasil (1997, p. 51) recomenda, no bloco de conteúdos Espaço e forma, que deve haver “percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos”. Recomendações essas que foram seguidas em nossa pesquisa.

Por outro lado, quando essas crianças vivenciam as primeiras experiências na escola, passam a denominar a caixa de creme de uma figura geométrica plana retangular. Esse equívoco talvez seja causado por um ensino que supervaloriza a geometria plana, pois a partir

de então os discentes não compreendem que um prisma pode ser desmontado para formar seis retângulos.

Perante o que foi explicitado anteriormente, provavelmente o problema está na escola, pois a criança em suas experiências no seio familiar utiliza uma geometria cotidiana, desprovida de vícios, isto é, a caixa de creme dental continua sendo uma caixa, a lata de leite em pó continua sendo uma lata.

Nossa questão de pesquisa tem forte relação com o que relatamos. Assim, queremos saber: Quais são os efeitos produzidos por uma série de atividades planejadas que privilegiam a exploração de uma geometria sensível para, em seguida, abordar noções da geometria plana com alunos do quinto ano do Ensino Fundamental? Em que medida essa intervenção em sala de aula, guiada pelas recomendações no tocante ao ensino de geometria para o segundo ciclo do Ensino Fundamental, contribuirá para a construção de conceitos da geometria plana a partir da exploração de atividades que envolvam a composição e decomposição de algumas representações de sólidos geométricos?

Desta forma, temos por objetivo geral investigar quais são os efeitos produzidos por uma série de atividades planejadas que privilegiam a exploração de uma geometria sensível para, em seguida, abordar noções da geometria plana com alunos do quinto ano do Ensino Fundamental através de situações que envolvam a composição e decomposição de algumas representações de sólidos geométricos.

Para alcançar este objetivo, alguns passos estratégicos foram necessários. Inicialmente, foi preciso verificar até que ponto os conhecimentos geométricos de ordem tridimensional, oriundos do cotidiano dos alunos, foram influenciados de forma positiva ou negativa pelos apresentados na escola, isto é, aqueles que privilegiam aspectos da geometria plana; o segundo objetivo teve a finalidade de propor atividades coerentes para os alunos do quinto ano do Ensino Fundamental utilizando material concreto para introduzir conceitos geométricos de ordem tridimensional. Posteriormente, procuramos analisar a transição entre a geometria do sensível para a plana, isto é, da tridimensional para a bidimensional e, vice-versa a partir das atividades mencionadas. Por fim, foi preciso estudar conceitos iniciais da geometria plana partindo de experiências envolvendo composição e decomposição de alguns sólidos geométricos.

Esta pesquisa envolvendo ensino de geometria nos anos iniciais da Educação Básica está fundamentada em justificativas teóricas e práticas. Do ponto de vista teórico, o primeiro objetivo se explica em virtude de que, nos trabalhos que lemos, os educandos trazem consigo conhecimentos geométricos de natureza concreta tomando como base suas experiências.

Quando chegam às escolas esses conceitos entram em conflito com aqueles da geometria plana que são apresentados pelos professores. Contudo, até o presente momento não encontramos pesquisas que mensuraram esses conflitos, elas afirmam que existem, porém não se sabe até que ponto isso influencia o estudo de geometria.

Em se tratando do segundo objetivo do ponto de vista teórico, algumas pesquisas aplicaram atividades dessa natureza, entretanto, muitos estudos estavam destinados aos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Consideramos intervenções desse tipo relevantes, até porque os educadores poderão exercer a função de multiplicadores dentro das salas de aulas. Todavia, poucos são as investigações que se debruçaram em observar as implicações de intervenções desse caráter em educandos.

Os dois últimos objetivos também foram explorados a partir de atividades em algumas pesquisas, contudo foram desenvolvidas com professores, sendo assim se justifica este estudo pelos mesmos motivos expostos anteriormente.

Do ponto de vista prático, os três últimos objetivos se justificam na medida em que tanto os alunos quanto a professora regente, o professor-pesquisador e futuros investigadores terão neste estudo mais elementos para reflexão acerca da temática.

No primeiro caso, oportunizamos experiências que abordassem conceitos da geometria do sensível, uma vez que esta exige menor esforço para compreensão, e a partir daí foram desmiuçados os conceitos da geometria plana. Isso certamente produzirá reflexos na vida acadêmica e social dos indivíduos. A professora regente da sala, de forma indireta e voluntária, teve a oportunidade de estudar ou revisar o que foi proposto nas intervenções, por outro lado, caso não esteja trabalhando de acordo com as recomendações para o ensino de geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental, sentirá necessidades de se adequar.

Em nosso caso, estamos convictos de que esta pesquisa já está amadurecendo os processos de desenvolvimento profissional, além de estar contribuindo para um novo olhar no que concerne à geometria e um dos mais importantes contributos diz respeito à nova postura adotada em sala de aula. Para os futuros investigadores acreditamos que, do ponto de vista prático, eles terão interrogações e elementos propulsores para investir em futuras pesquisas voltadas para o ensino de geometria nos anos iniciais tendo como sujeitos investigados os alunos.

Essa pesquisa ocorreu em uma escola da rede estadual de ensino da cidade de Monteiro, Paraíba. A coleta de dados teve início no mês de fevereiro de 2015 e prosseguiu até maio do corrente ano. Os envolvidos foram alunos do 5º ano do Ensino Fundamental que participaram de um conjunto de oito atividades referentes aos temas de geometria,

especificamente os do bloco Espaço e Forma. Elas foram elaboradas pelo professor-pesquisador levando em conta o aspecto sensível da geometria para em seguida abordar noções geométricas planas. Denominamos as atividades de *episódios*. Essa nomenclatura foi adotada em função de seu significado se referir a uma parte de determinada produção teatral, novela, filme etc. Em nosso caso, os episódios foram etapas que forneceram indícios valiosos que utilizamos em nossa análise dos dados.

4. Pilares da dissertação

No primeiro capítulo discorremos sobre a história da geometria e do seu ensino. Para cumpri-lo decidimos delimitar o estudo partindo do pressuposto de que o conhecimento geométrico teve origem desde os períodos pré-históricos, época em que o homem inventou inúmeros instrumentos para sua sobrevivência e, à medida que o tempo transcorria, percebia a necessidade da utilização de ideias geométricas. Posteriormente são apresentados três momentos que influenciaram o ensino de geometria, eles dizem respeito ao transato, ao clímax e ao ulterior do Movimento de Matemática Moderna, especificamente no Brasil.

Quanto ao segundo capítulo, fizemos uma discussão acerca do resgate da geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental, recomendações de propostas curriculares nacionais, estaduais ou municipais, assim como elucidamos nossa proposta de pesquisa que teve por finalidade conduzir um estudo de geometria que parte do aspecto concreto ao abstrato. Por fim, fizemos alusões ao processo de construção do conhecimento geométrico nas crianças em idade escolar.

Em relação ao terceiro capítulo trouxemos resultados da teoria sociocultural de Vygotsky que contribuíram para o processo de intervenção de nossos *episódios* realizados em sala de aula. Foram discutidas as relações entre desenvolvimento e aprendizagem nos seres humanos e as temporalidades de cada etapa. Essas ideias funcionaram como amadurecimento acerca das implicações da zona de desenvolvimento proximal para o meio educacional

Os caminhos metodológicos são expostos no quarto capítulo. Eles tratam da questão norteadora, dos objetivos da pesquisa e das explicações no que diz respeito ao tipo de investigação. Também apresentamos uma reflexão sobre o paradigma indiciário como um possível método de se pesquisar em Educação Matemática. Em seguida detalhamos todos os *episódios* ocorridos em sala de aula do quinto ano do Ensino Fundamental a partir da utilização de materiais concretos com fins de mediar o ensino de geometria. Por fim,

esboçamos os procedimentos utilizados na coleta dos dados e descrição dos instrumentos dessa etapa, assim como as técnicas utilizadas para a análise dos dados.

No último capítulo contamos as experiências durante o processo de visitação ao campo pesquisado. Damos ênfase ao processo de evolução dos educandos no decorrer de cada *episódio*, respeitando a originalidade das informações recolhidas em forma de textos, desenhos, áudio, vídeo e fotografias. Esse capítulo se fundamenta nas categorias elaboradas durante o processo de interpretação das informações recolhidas. Concebemos essa parte de nossa pesquisa como uma rede tecida pela aranha para apanhar os insetos de que se alimenta, isto é, os *episódios* representam os fios finos de seda com os quais é construída a teia que, por sua vez, é o nosso quinto capítulo. Esclarecemos que ao término de cada categoria tecemos as convergências entre ela e os objetivos específicos desse trabalho, tentando, dessa forma, encaminhar as reflexões para a conclusão.

A Geometria é o agarrar do espaço. Esse espaço no qual a criança vive, respira e se movimenta. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, dominar, com vista a viver, respirar e movimentar-se melhor¹.

PRIMEIRO CAPÍTULO – SOBRE A HISTÓRIA DA GEOMETRIA E DO SEU ENSINO

Este capítulo apresenta inicialmente alguns benefícios no que diz respeito ao conhecimento geométrico deixado pelos povos de antigamente para as gerações posteriores.

Em seguida, enumeramos os principais acontecimentos que implicaram o surgimento do Movimento de Matemática Moderna, período que influenciou fortemente a geometria escolar. Damos destaque ao cenário que o Brasil vivenciou e apontamos as consequências após a implantação desse Movimento no ensino de Matemática. Posteriormente, expomos os movimentos de ideias com intuito de resgatar o ensino de geometria nas escolas, entre eles os Parâmetros Curriculares Nacionais, as reformas estaduais ou municipais, algumas dissertações e teses e, por fim, o Programa Nacional do Livro Didático.

Adentramos em nosso objeto de estudo que é o ensino de geometria, especificamente nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para isso, estamos em defesa de um ensino que tenha início nos conceitos da geometria espacial para em seguida abordar os da geometria plana. A última parte destina-se a refletir sobre o processo de construção do conhecimento geométrico.

¹Freudenthal.

1.1 Contribuições para o desenvolvimento do conhecimento geométrico

O conhecimento geométrico teve origem desde os períodos pré-históricos, época em que o homem começou a utilizar instrumentos, técnicas e procedimentos para sua sobrevivência. À medida que esses fatos ocorriam, o homem primitivo contribuía para o desenvolvimento da geometria. Conforme Almeida (2013), tudo indica ter antecedido a aritmética se levar em consideração a evolução da nossa espécie.

Não pretendemos fazer uma exaustão de todo o percurso histórico perpassado pela geometria, até porque sua origem é indefinida, além disso excede o objetivo de nossa pesquisa. Diversos investigadores em História do Ensino da Matemática se encarregaram disso. Entretanto, apresentaremos de forma resumida alguns fatos que tudo indica ter relação com o conhecimento geométrico. No que diz respeito ao ensino de geometria destacamos a dissertação de Pavanello (1989). Pesquisa merecedora de leitura, nela é feita uma retrospectiva da geometria mostrando progressivamente o abandono escolar desse conhecimento matemático. Essas pesquisas nos motivaram a elencar alguns pontos importantes referentes à história da geometria, especificamente as contribuições para o desenvolvimento do conhecimento geométrico, detalhe minucioso sobre a evolução desse ensino nas escolas e o porquê da persistência, nos dias de hoje, desse abandono da geometria, em muitos casos.

Pavanello (1989) declarou que os primórdios do conhecimento geométrico pelo homem se deram em um período sem data definida, provavelmente foi construído de forma empírica e em função das necessidades de algumas comunidades. Possivelmente, isso ocorreu no período Neolítico ou Idade da Pedra, época em que os povos começaram a viver em determinadas regiões por períodos de tempos razoavelmente longos, isto é, deixaram de ser nômades. Sobre a origem da geometria Gerdes (1992, p. 17) afirma que ela “nasceu como uma ciência empírica ou experimental. Na ‘confrontação’ com o seu meio ambiente o Homem da Idade da Pedra chegou aos primeiros conhecimentos geométricos”.

Almeida (2011), a partir de interpretações em Mendes et. al. (2006), relata que tanto a Matemática quanto a geometria se originaram em função da fixação do homem na terra, ele deixou de ser nômade e em consequência disso foi preciso utilizar o solo como instrumento de trabalho, para isso era necessária uma melhor ocupação daquele para a prática da plantação, principalmente de alimentos. A terra passou a ser explorada a partir do cultivo e técnicas de plantio da época. Radaeli (2010, p. 19) contribuiu com essa discussão argumentando que “ao abandonar a vida nômade, antes mesmo de deixar as cavernas e iniciar a construção de

habitações, o homem novamente necessitou de conhecimentos geométricos intuitivos para a produção de alimentos e a criação de animais”. Eves (2004) reforçou que os donos de terras faziam anotações escritas acerca da produção agrícola.

A Matemática Paleolítica já apresentava indícios das ideias geométricas. Ao que tudo indica, segundo Almeida (2013, p. 29), “a mais importante aquisição cognitiva para a matemática nesse estágio foi o início do pensamento simbólico, embora essa possa ter se iniciado muito antes na escala evolutiva humana”. Esse período foi subdividido em Paleolítico inferior, médio e superior.

Entre as contribuições dessa época para as origens do pensamento geométrico, Almeida (2013) evidencia a pintura corporal, destaque dado às tatuagens; utilização de adornos que apresentam padrões geométricos; vestimentas, têxteis e teares; cerâmica; armadilhas, habitações, painéis e mosaicos. Na obra do autor são apresentados relatos sobre cada uma dessas inovações tecnológicas para o período Paleolítico.

O uso de vestimentas e locais para o armazenamento e comercialização de produtos excedentes se fazia necessário, essas práticas passaram a ser constantes em virtude da fixação do homem na terra como já mencionamos. Pavanello (1989), a partir de interpretações de suas leituras de Bernal², declarou que a tecelagem contribuiu para o desenvolvimento da geometria, isso porque, as formas produzidas e a quantidade de fios utilizados nessas representações são de ordem geométrica. Apoiando-se nesse argumento, Pavanello (1989, p. 22) reafirmou que “a análise da arte de tecer vai proporcionar uma maior compreensão das relações existentes entre forma e número, deixando assim patente uma ligação entre geometria e aritmética. Por outro lado, os ornamentos usados na tecelagem vão desenvolver as noções de simetria”. A prática da tecelagem também foi um marco no período Paleolítico em que muito se presenciou o conhecimento geométrico disponível nas peças produzidas. A respeito disso, encontramos relatos de outros autores que comprovam o que afirmou Pavanello (1989). Por exemplo, Almeida (2013, p. 139) esclareceu que “como é sabido, a tecnologia da tecelagem de tecidos, das paredes, das redes, de artefatos entrançados, implica em conhecimentos geométricos elaborados, necessários para a construção dos padrões que aparecem nestes produtos”. Do que foi visto até aqui é inegável a relação entre a geometria e outras áreas da Matemática, entre elas, a aritmética. Essa combinação também é relatada nos documentos nacionais, como nesse excerto dos PCNs:

² BERNAL, J.D. *Ciência na história*. 1975.

A Aritmética e a Geometria formaram-se a partir de conceitos que se interligavam. Talvez, em consequência disso, tenha se generalizado a idéia de que a Matemática é a ciência da quantidade e do espaço, uma vez que se originou da necessidade de contar, calcular, medir, organizar o espaço e as formas (BRASIL, 1997, p. 24).

Já a Matemática Neolítica, conforme Almeida (2013, p. 29), é caracterizada pela “introdução da agricultura e do pastoreio que exigiu a concepção de novos métodos de quantificação”. A partir das necessidades humanas, esse período impulsionou o surgimento de variados instrumentos e técnicas para o trabalho que desenvolveu a agricultura e, conseqüentemente, a geometria.

Eves (2004, p. 53) julga que “as periódicas cheias do Amarelo, do Nilo, do Tigre e do Eufrates significaram construção de barragens – atividade que requeria não só cooperação e a arte da engenharia como também, igualmente, um sistema de preservação de registros”. Para Pavanello (1989), obras que eram destinadas à coletividade tais como represas e canais de irrigação exerceram influência na elaboração de conhecimentos e técnicas essenciais à resolução de problemas da sociedade.

Quanto à agricultura, Pavanello (1989, p. 23) acredita que ela “vai, de muitas maneiras, contribuir para que o conhecimento geométrico se desenvolva, empiricamente, geração após geração, entre os povos da Mesopotâmia e do Egito”. Contribuições que vão desde o reconhecimento dos períodos mais propícios para o plantio e para colheita até para construção de reservatórios mais adequados e que podiam comportar uma grande quantidade de sementes. Também não podemos esquecer a sofisticação das ferramentas utilizadas na agricultura e que preservavam ideias geométricas em sua construção.

De acordo com a mesma autora, à medida que a população aumentava fazia-se necessário uma grande quantidade de alimentos, desse modo, iniciava-se o processo de plantio em larga escala para atender as demandas dos povos. Esse contexto impulsionava os agricultores a plantarem em determinados períodos de tempo, preferindo àqueles chuvosos, em função disso percebia-se a necessidade e envidavam-se esforços para a confecção de um calendário. Esse fato histórico fez com que se desenvolvesse tanto a astronomia quanto a geometria. Nas interpretações de Almeida (2011), a partir de Mendes et. al. (2006), também foi verificado que o homem passou a observar o movimento das estrelas para programar plantações, colheitas e festas religiosas. Esses acontecimentos contribuíram para o desenvolvimento da geometria.

A preocupação dos agricultores com o plantio, de acordo com Eves (2004), se devia às grandes enchentes e à estação chuvosa, diante disso os calendários e almanaques se desenvolveram. São notórias as contribuições da agricultura para o desenvolvimento do conhecimento geométrico.

Do que se disse até aqui destacamos a fixação do homem em terras, a exploração delas, a melhor época para o plantio e colheita e a confecção do calendário. O aumento populacional implicava em determinar limites para as propriedades, pois as pessoas começavam a se aglomerar em famílias precisando, dessa forma, dividir ou buscar novas terras para o desenvolvimento de seu trabalho. Pavanello (1989, p. 24) assegurou que isso “contribui decisivamente para a descoberta e utilização de princípios relativos às características de linhas, ângulos e figuras, bem como para o desenvolvimento de processos de cálculo de áreas de superfícies planas”. A agricultura também foi responsável pela criação de um sistema de medidas, isso porque era necessário o recolhimento de tributos e excedentes de produção, assim como divisão das terras.

Outra característica do período Neolítico se refere, de acordo com Almeida (2013), ao surgimento das primeiras vilas e cidades que impulsionaram a construção de habitações que apresentavam decorações em suas paredes, gerando dessa forma os primeiros painéis pintados. Esse contexto também é motivo de grande expressividade para o desenvolvimento das ideias geométricas.

As primeiras habitações certamente influenciaram de forma significativa o desenvolvimento da construção civil. Conforme Pavanello (1989, p. 25), “a técnica necessária à construção de edifícios com tijolos ou pedras conduz, certamente, à ideia de ângulo reto, à utilização de fio de prumo, aos conceitos de áreas e de volumes de figuras e sólidos a partir das arestas, à elaboração do desenho com escala, à maquete”. Essas descobertas possivelmente foram significativas para o desenvolvimento da geometria. De fato, ainda hoje percebemos a importância da utilização desses instrumentos para a construção civil. Tanto que os avanços tecnológicos fizeram com que diversas ferramentas que exercem a mesma função do fio de prumo fossem criadas, no entanto não houve alguma que o substituísse de forma tão eficiente e prática.

Encontramos em Pavanello (1989) declarações a respeito do crescimento de algumas profissões após o surgimento da agricultura. O conhecimento geométrico intrínseco a cada uma dessas atividades era restrito apenas às pessoas que as exerciam. Para a autora, muitas vezes esses profissionais guardavam segredos no tocante às atribuições de suas funções, pois exigiam forte conhecimento geométrico prático, isso só era revelado aos seus familiares.

Portanto, uma grande massa de pessoas aprendia somente as técnicas essenciais para o desenvolvimento de suas profissões. Por outro lado, o conhecimento geométrico era reservado apenas à classe dirigente. Entretanto, Pavanello (1989) comentou que esses esforços não impediram que os conhecimentos e práticas dessas civilizações chegassem aos povos do Mediterrâneo. O conhecimento geométrico prático era destinado à classe de trabalhadores, já o que desenvolvia o raciocínio lógico-dedutivo destinava-se à classe burguesa.

Muito tempo depois entre os séculos VI e VII a.C., surgiu na cidade de Mileto, especificamente na costa ocidental da Ásia Menor, Tales, precursor da geometria dedutiva. Posteriormente, na cidade de Crotona, funda-se a Escola Pitagórica cujo fundador provavelmente tenha sido Pitágoras. Essa Escola teve enorme influência e esteve no auge pelo menos nos dois séculos seguintes.

A Idade Média foi um período compreendido desde a queda do Império Romano até o século XV. Pavanello (1989) situa que os primeiros séculos desse período foram caracterizados pela ausência de avanços importantes para a ciência, a geometria e a Matemática na Europa. Assim:

É a partir do Renascimento que se produzem alguns trabalhos em geometria, impulsionados, num primeiro momento, pelo interesse artístico. A necessidade, na pintura, de representar em duas dimensões figuras tridimensionais exige do artista um profundo conhecimento de geometria (PAVANELLO, 1989, p. 41).

Hodiernamente, presenciamos essas influências em diversas situações. Por exemplo, alguns livros didáticos recorrem às obras de arte para apresentar noções da geometria. É costume na introdução dos capítulos desses livros presenças de imagens de artes envolvendo pinturas clássicas e esculturas, pois se acredita que são boas recomendações para alcançar a transposição da geometria espacial à plana. O conhecimento geométrico adquirido ao fazer representações espaciais no plano é riquíssimo, muitos artistas possuem essas habilidades, o que é verificado também em diversos alunos quando estão na escola. É preciso que seja valorizado e desenvolvido um trabalho de sistematização com eles. Por outro lado, sabemos que muitos pintores e escultores não detêm um conhecimento profundo em geometria, nem por isso deixam de expressar em suas obras situações representativas tanto bidimensionais quanto tridimensionais.

Os trabalhos em geometria produzidos no Renascimento foram considerados relevantes para avanços significativos, nessa área, ocorridos no século XVII; (PAVANELLO, 1989).

Nesse cenário surgiram duas posições: a primeira, defendida por Desargues e Pascal, fez com que originasse a geometria projetiva; e a segunda, cujos defensores foram Descartes e Fermat, responsáveis por um novo método para estudar geometria, isto é, a geometria analítica. De acordo com Pavanello (1989, p. 42), “a grande contribuição de Descartes (é a ele que a analítica está, em geral, associada) é ter estabelecido uma associação entre a geometria e a álgebra”. Compreende-se que possivelmente o pensamento geométrico passou a incorporar conceitos algébricos para validar soluções geométricas. Contudo, essa conexão foi impedida de ser difundida em função da obra de Euclides.

O nome de Euclides estava ligado ao conhecimento geométrico perdurando por muito tempo e o teor de sua obra foi tido como regra em toda escola. Os textos de Euclides influenciaram o ensino de geometria ao ponto de desprezar as aplicações práticas dessa área do saber. Verificamos em Nacarato (2004, p. 65) que por muito tempo o ensino de geometria esteve em função da obra euclidiana, isto é: “durante séculos o ensino de Geometria manteve-se numa abordagem estática (por influência da obra de Euclides)”. Essa obra fez com que o ensino de Matemática fosse ministrado de forma isolada. Sobre esse contexto relatamos que:

No século XIX a geometria, ensinada a partir dos textos de Euclides, recebe um tratamento puramente abstrato, com inteiro desprezo pelas aplicações práticas. A álgebra é desenvolvida isoladamente tanto em relação à geometria como à aritmética (PAVANELLO, 1989, p. 86).

De tudo que foi dito até aqui, possivelmente isso contribuiu para o abandono do ensino de geometria nas escolas, linha de investigação que passaremos a abordar detalhadamente nas próximas seções.

1.2 A docência antes do Movimento da Matemática Moderna no Brasil

Nesta seção faremos uma exposição histórica das ideias marcantes sobre o Movimento de Matemática Moderna (MMM). Enumeramos os fatos cronologicamente, levando em consideração as manifestações ocorridas antes da década de 1960. Em seguida, apontamos o clímax, isto é, os momentos de maiores efervescências que culminaram para o surgimento do MMM e, por último, elucidamos as consequências do Movimento para o currículo e o ensino

da Matemática, inicialmente em âmbito internacional, porém, focalizando-se mais o cenário brasileiro. Ao refletirmos sobre esse Movimento, devemos levar em consideração o pensamento de Valente et. al. (2007), quando diz ser necessário observar as heranças deixadas pelo MMM para as práticas cotidianas dos professores de Matemática.

Na leitura que fizemos do texto *Quem somos nós, professores de Matemática?*, cuja autoria pertence a Valente (2008), percebemos que o pesquisador elencou cronologicamente os contextos vivenciados pelos professores de Matemática desde o domínio da Coroa Portuguesa até os dias atuais. Diante disso, decidimos divulgar essas passagens fazendo uma analogia como se fosse uma viagem ilusória realizada pelo autor da obra com destino aos profissionais antepassados de nosso professor de Matemática atualmente. Segundo aquele, caso o professor de Matemática de hoje conhecesse seus tataravôs, bisavôs ou avôs, poderia observar o modo como seus colegas de trabalho desenvolviam o ofício de ensinar naqueles tempos, ou até mesmo sua própria prática docente sob um novo olhar. Valente (2008, p. 12) reforçou que “o ofício de ser professor de matemática, como a maioria das profissões, é herdeiro de práticas e saberes que vêm de diferentes épocas”. Concordamos com tal pensamento, pois em início de carreira docente, o autor desse trabalho dissertativo, sempre se espelhava em uma professora que teve desde os anos finais do Ensino Fundamental até o término do Ensino Médio. Contudo, era uma prática ancorada no tradicionalismo.

Nessa viagem, Valente (2008) em suas transcrições visitou José Fernandes Pinto Alpoim, de nacionalidade portuguesa, tataravô do nosso professor de Matemática de hoje. Chegando naquela determinada época, Valente (2008) ficou sabendo que o militar tinha sido convocado pela Corte Portuguesa para ministrar aulas voltadas para a formação de militares, construtores de fortificações e adestradores de artilharia, uma vez que no Brasil não havia pessoas treinadas para manusear as peças de artilharia, muito menos construtores de fortes que eram necessários para proteger as riquezas extraídas desse país. Por isso foi instituído a Aula de Artilharia e fortificações.

Entretanto, o início dessa aula deveria ser adiado, pois faltava matéria prima, isto é, livros didáticos adequados que orientassem seus cursistas. Entre muitas dificuldades, Valente (2008, p. 12) destacou que “a principal delas era a falta de livros para a instrução militar. Mais precisamente, livros adequados ao curso criado. Ainda em 1710, tem-se notícia de que a Aula de Fortificações não havia iniciado”. Porém, nos bastidores a Corte Portuguesa já contava com a presença de Alpoim.

O ensino militar tornou-se obrigatório a todo oficial graças à Ordem Régia de 19 de Agosto de 1738. Em meio a toda essa efervescência, Alpoim precisou de livros que o

conduzisse nas aulas para os militares, dessarte, conforme Valente (1999), o português escreveu dois livros didáticos que passaram a ser os primeiros no Brasil. Retornando de sua viagem, Valente (2008) em suas transcrições decidiu descansar por algumas paradas. Em uma delas, o tataravô do professor de Matemática, Alpoim, convidou aquele para assistir uma de suas aulas que o surpreendeu, pois:

Nosso ancestral de profissão tem como uma de suas tarefas maiores, a partir da geometria, ensinar como é possível calcular o número de balas de canhão que um determinado lugar pode conter. Ou, ainda, à vista de uma pilha de balas de canhão, saber quantas balas a pilha tem. Esse longínquo professor de matemática pratica seu magistério ditando curso, isto é, fazendo com que seus alunos anotem parte de sua obra didática (VALENTE, 2008, p. 14).

De acordo com Valente (2008), esse curso foi ministrado por Alpoim desde 1738 até o ano de sua morte em 1765.

Regressando com destino ao futuro quase cem anos após a vinda de Alpoim para o Brasil, Valente (2008) foi apresentado a outro personagem, o nosso bisavô, isto é, o professor de Matemática de cursos preparatórios. Esse cenário foi presenciado após a Independência do Brasil, fato histórico que contribuiu para que os filhos da elite não se deslocassem para estudar em Portugal. Entretanto, para que isso acontecesse foi de extrema importância a criação de universidades com cursos para atender à demanda dos filhos da elite, destarte foram criados os primeiros Cursos Jurídicos em 1827.

De acordo com Valente (2008), a partir da criação desses cursos faziam-se necessários meios para que os jovens considerados da elite ingressassem às universidades. À vista disso, nosso bisavô profissional ganhou espaço para trabalhar, pois os candidatos deveriam prestar exames nas seguintes disciplinas: Língua Francesa, Gramática Latina, Retórica, Filosofia Nacional e Moral e Geometria. Do que foi dito até aqui, o professor de Matemática de cursos preparatórios deveria ministrar aulas envolvendo conhecimentos geométricos. Essa entrada oportunizou um novo destaque à Matemática. Conforme Lauro (2007, p. 48), “a Geometria fazendo parte do rol dos exames parcelados, ou como eram conhecidos, exames preparatórios aos cursos jurídicos, fez com que a Matemática mudasse oficialmente seu status”. Graças à inserção de conteúdos geométricos nos programas de estudo com vistas ao ingresso aos cursos superiores é que o ensino de geometria tornou-se pouco a pouco exigência nas escolas.

Depois de muitas discussões acerca do que os jovens deveriam estudar para ingressarem nas universidades ficaram estabelecidos alguns pontos dentro de cada disciplina.

Eles foram essenciais para que nosso bisavô se fundamentasse e elaborasse suas aulas. Dessarte, o trabalho dele consistiu em:

Fazer com que seus alunos fixassem os pontos. Com a lista deles, o candidato preparava-se para as provas escritas e orais. A preparação lançava mão das apostilas elaboradas a partir dos pontos. Saber cada um deles de cor era o modo de ser bem sucedido no ingresso ao ensino superior. Essa era a tarefa maior de nosso parente profissional dos tempos de preparatórios (VALENTE, 2008, p. 18).

O professor especializado em cursos preparatórios destinados aos jovens que desejavam ingressar em universidades desenvolveu esse trabalho por quase cem anos. No decurso desse tempo, Valente (2008), em sua viagem ilusória, conheceu nosso avô profissional e o nascimento da disciplina Matemática. O contexto vivenciado pelo professor dos cursinhos preparatórios foi distinto daquele vivido por nossos tataravôs e bisavôs. Diante disso:

Essa formação profissional de nosso avô é diferente daquela do tataravô e bisavô professores de matemática. Saídos dos cursos militares, das escolas de engenharia, esses nossos distantes parentes de profissão viram o nascimento das faculdades de filosofia constituir o berço de nosso avô profissional. Surgidas nos anos de 1930, essas faculdades tinham como tarefa a formação de professores (VALENTE, 2008, p. 18).

Para Valente (2008), um século depois foi implantado no Brasil o sistema seriado de ensino, com isso os cursos preparatórios foram-se desaparecendo, conseqüentemente a dinâmica de trabalho de nosso avô profissional ganhou uma nova estrutura, ou seja, não seria mais necessária a utilização dos compêndios franceses, muito menos de suas traduções de Aritmética, Álgebra e Geometria. Eles tinham a função de ditar pontos aos candidatos que cursavam aulas destinadas aos exames preparatórios. Em substituição àqueles, surgiram muitos livros didáticos nacionais escritos por autores com um grande conhecimento de ensino. Esse material passou a ser um guia para o trabalho de nosso avô profissional que acompanhou o nascimento da disciplina escolar, denominada Matemática. Segundo Valente (2004), ela foi resultado do agrupamento da Aritmética com a Álgebra e a Geometria, isso ocorreu a partir da Reforma Campos.

Em meio a esse cenário, conforme Valente (2008), nosso avô profissional se deparou com duas situações – investir nas propostas para conteúdos e métodos da nova disciplina ou insistir nas práticas utilizadas pelos seus ancestrais de mesma profissão. Entretanto, ele

preferiu a segunda alternativa, ou seja, para Valente (2008, p. 19), as aulas ficaram divididas no decorrer da semana, “assim, o curso de matemática acabou reunindo – e não fundindo – a aritmética, a álgebra e a geometria”. Valente (2004) conclui que a aritmética era ensinada na segunda-feira; a álgebra na terça-feira; e assim por diante. Isso fez com que nosso avô profissional se especializasse em apenas uma disciplina específica, Matemática.

Enfim, Valente (2008) retornou aos tempos de hoje e se deparou com o adolescente que se transformou em um professor de Matemática, é o nosso pai profissional, herdeiro de nossos tataravôs, bisavôs e avôs profissionais de Matemática. Entretanto, se configura nesse cenário a problemática enfrentada pelo pai – esquecer os vestígios deixados por seus antepassados. Além disso, nosso pai profissional, tendo iniciado sua prática docente na década de 1950, e no início de 1960 se deparou com:

Notícias cada vez mais freqüentes sobre mudanças no ensino de matemática: na TV, nos jornais, em conversas com colegas de trabalho, por toda a parte notícias sobre uma nova matemática, uma matemática moderna. Finalmente chega à sua escola um convite para participar de cursos de treinamento: é preciso esquecer tudo o que sabia antes e aprender novamente o que irá ensinar. As notícias e o convite vêm bem no momento em que nosso pai profissional ficou muito tocado ao ver estampada na primeira página da Folha de S. Paulo, do dia 12 de julho de 1963, a foto de uma sala de aula com os dizeres: “Professores secundários voltam novamente às carteiras para revolucionar o ensino da Matemática com 50 anos de atraso entre nós” (VALENTE, 2008, p. 20).

Essa situação fez que com surgissem novos livros didáticos que passariam a ser utilizados em todo o Brasil, entre eles destacamos o livro de Osvaldo Sangiorgi³ que também é nosso parente de profissão e foi um dos primeiros a utilizar seu próprio livro. Lançado em 1963, trazia como novidade os conjuntos e as estruturas algébricas. Em vista disso, segundo Valente (2008, p. 21), “era necessário reaprender matemática, uma nova matemática, a matemática moderna”. Em suma, Valente (2008) em sua viagem ilusória e fantástica pelos nossos antepassados professores de Matemática nos fez refletir acerca do ofício desenvolvido por aquele parente distante, nosso tataravô:

Parecia tão clara para ele, no século XVIII, a função da matemática, da geometria. Era um tempo em que o ensino aplicava-se à defesa, a geometria como um conteúdo de aparelhamento para a guerra. Contudo, à matemática escolar estava reservado um lugar mais nobre que aquele prático-utilitário-militar. Ela deveria ajudar-nos a pensar e, com seu ensino, levarmos nossos

³ Posteriormente discutimos o contexto da inserção do novo livro didático de Matemática Moderna, principalmente o de Osvaldo Sangiorgi.

alunos a desenvolverem o raciocínio. Voltamo-nos, hoje, para nosso mais longínquo ancestral e, de modo persistente, queremos ver um sentido para o que ensinamos. Queremos que nossos alunos saibam usar a matemática que ensinamos (VALENTE, 2008, p. 21).

Depreende-se que tanto a Matemática quanto o conhecimento geométrico foram utilizados para manutenção de guerras e proteção da classe burguesa. De fato, o ensino de Matemática sempre estará associado ao desenvolvimento da tecnologia, acreditamos que ele deva estar acompanhado de reflexões sobre o seu uso e suas aplicações. Por outro lado, não podemos negar a importância desse saber para o desenvolvimento científico e tecnológico da humanidade, como também as contribuições deixadas para o aperfeiçoamento de diversas áreas do saber.

E o que podemos dizer de nossas práticas, de nosso trabalho com os alunos? Os tempos de ditar curso passaram. Ficaram os de ditar ou escrever exercícios a serem resolvidos pelos alunos. Esses tempos têm origem precisa: o momento em que, no início do século XX, chegam ao Brasil as congregações católicas francesas, com seus livros didáticos cheios de exercícios. Eles passam gradualmente a substituir os compêndios, os livros de lições. Trocava-se, naquela altura, a pedagogia das lições pela dos exercícios. O professor de matemática nunca mais abandonou essa prática. A lição era a escrita da aula dada pelo professor. A memória, o passar a limpo a atividade do mestre, representava o aprendizado da matemática. Com as escolas, impera o exercício, o reiterativo, a atividade. Resolver o exercício de modo correto passa a significar aprender matemática: uma herança que já tem um século em nossas práticas (VALENTE, 2008, p. 22).

As características levantadas representam um ensino de Matemática tradicional que não está muito distante, pelo contrário, os diálogos com parceiros de profissão nos faz concluir que ainda encontram-se professores de Matemática utilizando práticas do tipo exposto anteriormente.

Enfim, após a exposição das ideias de Valente (1999) acerca dos primeiros professores de Matemática, nos dedicaremos às heranças deixadas para o pai dos profissionais docentes de nossos tempos.

1.3 Indícios do surgimento do Movimento de Matemática Moderna

Os finais do século XIX, conforme Pavanello (1989), foram caracterizados pelo surgimento de tendências que ficaram denominadas como Escola Nova, isso ocorreu em oposição à escola e ao ensino tradicional. Para a autora, os defensores desse movimento

investiram numa educação que levasse em conta a evolução natural da criança, além disso, dava-se importância aos ambientes estimuladores da cooperação entre os estudantes.

Pavanello (1998) reiterou que as ideias da Escola Nova foram de grande importância para reflexões acerca dos métodos de ensino, reorganização escolar e do currículo das disciplinas, porém, possivelmente, isso trouxe poucas alterações para o ensino de Matemática, principalmente o de geometria.

No século XX, houve grandes reformas curriculares em consequência dos avanços tecnológicos, essas mudanças fizeram com que crianças e adolescentes se dedicassem ao estudo, não sendo necessário que trabalhassem. Entretanto, era perceptível a importância para prepará-las adequadamente para o mercado de trabalho, sendo assim, necessitava-se que esses indivíduos permanecessem mais tempo na escola, o que exigiu currículos adequados. Diante disso, Pavanello (1989) pontua que nesse período os currículos foram se modificando de modo que atendessem a realidade existente. Essa mesma autora acrescentou que o ensino de Matemática foi caracterizado pela introdução de novos temas e pela utilização de novos manuais de ensino.

Pavanello (1989) pondera que a importância do conhecimento matemático passou a se justificar principalmente em função dos avanços tecnológicos e científicos após o término da Segunda Guerra Mundial. De acordo com Not⁴, interpretado por Pavanello (1981), não era suficiente ser bom nas quatro operações, precisava-se de um conhecimento matemático que desenvolvesse o raciocínio e habilitasse as pessoas a atuarem criticamente numa sociedade que se tornava tecnológica e competitiva.

A década de 1950 foi um período em que muito se criticou o ensino de Matemática. Pavanello (1989) confirmou em sua dissertação de mestrado que a Matemática era a disciplina que mais causava pânico, em consequência disso os alunos apresentavam o pior desempenho. Diante desse cenário, a mesma autora (1989) fez reflexões acerca de Kline (1976) e concluiu que diversos grupos defendiam a melhoria do currículo, segundo eles isso poderia melhorar o ensino de Matemática. A partir daí começou-se a formar grupos com intuito de montar um novo currículo para a escola básica. Eles pretendiam mudanças tanto em termo de conteúdos quanto em investigações acerca de metodologias.

Os formuladores dos currículos dessa época insistiam na necessidade de uma reforma pedagógica, incluindo a pesquisa de materiais novos e métodos de ensino renovados — fato que desencadeou a preocupação com a Didática da Matemática, intensificando a pesquisa nessa área (BRASIL, 1997, p. 20).

⁴ NOT, L. *As pedagogias do conhecimento*. 1981.

Valente et. al. (2007) declaram que o grupo denominado Nicolas Bourbaki, composto por matemáticos franceses, se empenhou no ano de 1934 em investir na proposta de escrever uma nova obra sobre Análise Matemática. No decorrer do tempo, esse ideário foi se solidificando e objetivavam organizar a Matemática como um todo. A influência do grupo para o Movimento de Matemática Moderna foi expressiva internacionalmente e, em especial, no Brasil, tanto que na década de 1940, São Paulo recebeu a visita de matemáticos pertencentes ao grupo contratado pela universidade dessa mesma cidade. Eles tiveram como meta, conforme D' Ambrósio, interpretado por Valente et. al. (2007), influenciar e orientar os responsáveis pelas cátedras, assim como jovens assistentes, com destaque para Osvaldo Sangiorgi, Jacy Monteiro, Omar Catunda e Benedito Castrucci.

Após a Segunda Guerra Mundial, foi repensado o ensino de Matemática em muitas partes do mundo. Esse período pode ser considerado como um momento em que muito se discutiu sobre Matemática e suas aplicações. Pavanello (1989) assegurou que após esse conflito foram implantadas diversas reformas educacionais em distintos países, esse mesmo período foi caracterizado pela oferta do ensino básico gratuito.

No período do pós-guerra e ao longo dos anos 50, em muitos países da Europa e também em países desenvolvidos do outro lado do Atlântico, muito em particular nos Estados Unidos da América, começou a tomar corpo a idéia de que se tornava necessário e urgente uma reforma no ensino da Matemática. Na verdade, durante toda a década de 50, foram tendo lugar numerosas iniciativas e realizações, de natureza variada e com propósitos diversificados, que tinham em comum a intenção de modificar os currículos do ensino da Matemática visando a atualização dos temas matemáticos ensinados, bem como a introdução de novas reorganizações curriculares e de novos métodos de ensino (GUIMARÃES, 2007, p. 21).

Valente (2008) também apontou a década de 1950 como sendo um período marcado por diversas ações visando melhorar os currículos de Matemática. Valente et. al. (2007), argumentaram que após essa década o currículo e o ensino de Matemática foram temas de diversas discussões em escala internacional no sentido de melhorá-los, entre elas, a *Commission Internationale Pour l' Etude et l' Amelioration de l' Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM) foi uma das primeiras comissões que organizou eventos com intuito de reformular o ensino da Matemática. Aquele mesmo autor nos informa que o grupo foi liderado por Calleb Gattegno que recebeu apoio dos parceiros Jean Dieudonné, Gustave Choquet, André Lichnerowicz e Jean Piaget. O lema da comissão era “estudar o estado

presente e as possibilidades de melhorar a qualidade do ensino e aprendizagem da Matemática”⁵.

As reflexões dessa equipe foram registradas segundo Valente (2008), em forma de um livro intitulado *L'enseignement des mathématiques*. Essa obra foi produzida envolvendo textos de J. Piaget, E. W. Beth, J. Dieudonné, A. Lichnerowicz, G. Choquet e G. Gattegno e foi publicada em 1955. De acordo com Valente (2008), o texto *Oswaldo Sangiorgi e o Movimento de Matemática Moderna no Brasil*, discute detalhadamente o teor de cada um dos seis capítulos. Situaresmos, brevemente, as principais ideias do MMM: aproximação entre a Matemática secundária e a universitária. Conforme Valente (2008), o texto de Beth (1955) destacou a importância dessa interação. Outro teórico que se preocupou em antecipar alguns tópicos da Matemática universitária à secundária foi Dieudonné⁶. Ele disse:

Mas, o que trata a essência da matemática, senão o poder de abstrair e de raciocinar sobre noções abstratas? Iremos hesitar em anunciar isso se, como foi dito anteriormente, essa verdade estiver sendo perdida de vista. É por isso, eu creio, que não seja inútil lembrar que os grandes progressos, em matemáticas, estão sempre ligados a um progresso da capacidade de nos lançarmos um pouco mais alto no domínio da abstração. A história da álgebra, desde os seus primeiros passos até nossa “álgebra moderna”, ilustrará essa tese nas páginas seguintes (DIEUDONNÉ, 1955, p. 48 apud VALENTE, 2008, 587).

Ao mesmo tempo, conforme interpretações de Valente (2008), Dieudonné (1955) advertiu que não era defensor de que os jovens inicialmente tivessem contato com muitas concepções abstratas da Matemática além daquelas que eles podiam assimilar. Entretanto, é imprescindível que os estudantes fossem conduzidos a compreenderem aspectos desse caráter abstrato.

Lichnerowicz⁷ (1955), interpretado por Valente (2008), também evidenciou o distanciamento em relação ao conhecimento matemático existente no ensino secundário e na universidade. Aquele autor pontuou diversos exemplos de como fazer essa reaproximação, entre eles destacamos:

⁵Disponível em: <http://www.cieaem.net/CIEAEM9bis/index_france.htm>. Acesso em: 4 set. 2007.

⁶DIEUDONNÉ, J.L. *Abstraction en mathématique et l'évolution de l'algèbre*. 1955.

⁷LICHNEROWICZ, A. *Introduction de l'esprit de l'algèbre modern dans l'algèbre et la géométrie élémentaire*. 1955.

Eu creio que não podemos, no ensino elementar, tratar de noções algébricas em grande número, mas é possível fazê-las serem percebidas pelos alunos; e eu penso simplesmente que se o professor tem para si presente o espírito das diferentes noções, as diferentes exigências fundamentais, alguma coisa de essencial acaba passando para o cérebro dos alunos. Algo que os poupará das dificuldades no futuro, pois isso se trata mesmo de um objetivo de nosso ensino: fazer com que os alunos participem da ciência e da tecnologia vivas de nosso tempo (LICHNEROWICZ, 1955, p. 74 apud VALENTE, 2008, p. 588).

Percebemos a preocupação do autor em inserir desde cedo noções elementares da álgebra no currículo de Matemática, no entanto alertou para que isso fosse feito de tal modo que os alunos não ficassem traumatizados, mas que percebessem esse ideário. Por outro lado, o teórico corroborou a ideia de que é função do professor essa introdução, entretanto falta-lhe fundamentação. Enfim, o autor considera isso importante porque minimiza as dificuldades encontradas pelos alunos em seus estudos posteriores.

Choquet⁸, interpretado por Valente (2008), contribui no tocante ao ensino de geometria. Aquele é contra fazer uma exposição axiomática rigorosa da geometria aos estudantes desde o início, no entanto é possível ficar próximo da experiência sensível dos alunos, de modo que a geometria clássica seja construída juntamente com eles.

Valente (2008) reafirmou que essa obra possibilitou reflexões e o surgimento de propostas novas no sentido de produzirem um currículo para o ensino moderno de Matemática. Do que foi dito anteriormente, o autor apresentou outro evento relevante para a mudança do currículo de Matemática. Isso ocorreu no finalzinho da década de 1950, mas precisamente em 1959. Sobre essa segunda ação notória:

Em 1959, a culminar este interesse muito alargado de modernização do currículo de Matemática, a Organização Européia de Cooperação Econômica (OECE) decidiu realizar um inquérito sobre a situação do ensino dessa disciplina nos seus países membros, bem como uma sessão de trabalho apoiada nos resultados desse inquérito, visando promover uma reforma generalizada e tão profunda quanto possível do ensino da Matemática (GUIMARÃES, 2007, p. 21).

Esse evento ficou conhecido como *Seminário de Royaumont*, conforme Valente (2008), foi muito importante no sentido das discussões que aperfeiçoariam as propostas de reformar a Matemática escolar. Para Guimarães (2007, p. 32), esse novo programa indicou “a valorização da Álgebra e da Geometria vetorial, com a correspondente desvalorização da

⁸CHOQUET, G. *Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire*.1955.

Geometria de Euclides, na orientação axiomática dada ao estudo da Matemática, e numa valorização da linguagem e simbologia matemáticas”.

Segundo as leituras de Pavanello (1989) em Kline⁹, nesse encontro internacional foi recomendado o abandono de todos os temas tradicionais do currículo da escola básica, incluindo também a geometria euclidiana. Conforme Pavanello (1989), as recomendações eram para inserir tópicos como a lógica e as estruturas, isso deveria ser abordado sob uma nova linguagem denominada teoria dos conjuntos.

Valente et. al. (2007) ponderam que, antes da década de 1950, o ensino de Matemática centrava-se na exploração da aritmética, especificamente, os cálculos; na trigonometria, destacavam-se as identidades; na geometria, empenhavam-se em demonstrar teoremas e resolver problemas que não apresentavam nenhuma utilidade prática; a teoria dos conjuntos ainda não se fazia presente no ensino secundário e os enunciados dos problemas matemáticos eram extensos e complexos.

Um dos grupos formados nesse contexto foi nos Estados Unidos da América (EUA). Conforme Pavanello (1989), a partir de interpretações em Kline, outros foram fundados em diversos países e investiram na criação de um novo currículo de Matemática. O fato desses movimentos terem ocorrido simultaneamente pode ter sido ou não uma coincidência. Nas ideias da primeira autora (1989), essas pesquisas começaram a receber financiamentos de órgãos governamentais, isso estava em função dos americanos perceberem seu atraso em relação aos soviéticos no que diz respeito à Matemática e às ciências. É importante observar o que levou os Estados Unidos a apressar o movimento de implantação do novo currículo de Matemática. Sobre isso, observa-se que:

Dois fatos encorajaram e precipitaram o processo de implantação dos novos currículos nos Estados Unidos: a conferência de Royaumont (França, 1959) e especialmente o lançamento do foguete soviético Sputnik (1957) pelos russos. O governo norte-americano teria, então constatado a necessidade de repensar o ensino de Matemáticas e de Ciências em suas escolas, em vista da desvantagem tecnológica e científica do país em relação à União Soviética (SILVA, 2006, p. 69).

Pavanello (1989) assegurou que os argumentos desses grupos para reformular o currículo de Matemática estavam em função de que os temas presentes se referiam a desenvolvimentos ocorridos antes do século XVIII. Os investimentos ocorreram nas seguintes áreas: álgebra abstrata, topologia, lógica matemática e álgebra de Boole. Elas ocuparam lugar

⁹ KLINE, M. *O fracasso da Matemática Moderna*. 1976.

de tópicos considerados tradicionais. Esse movimento, conforme já expusemos diversas vezes, foi denominado Movimento de Matemática Moderna.

Nesse contexto, Pavanello (1989, p. 96) proferiu: “em vez da geometria – ao lado dessa geometria algébrica que não privilegia o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo – enfatiza-se a álgebra”. E ainda acrescentou (1989, p. 97), “ora, a ênfase no aspecto algébrico do ensino da matemática, sem o complemento proporcionado pelo enfoque geométrico, priva os indivíduos de um desenvolvimento integral dos processos de pensamento, necessários à resolução dos problemas matemáticos”.

A mesma autora reforçou que o fato de priorizar a álgebra ao invés da geometria está em função de um problema político. Aquela fez um questionamento em seu trabalho que desdobramos em três: Que qualidades e habilidades nossos estudantes devem desenvolver? Isso nos faz pensar: Qual o objetivo de educar? Essa educação interessa a todos? Pavanello (1989, p. 98) sinalizou que “a questão da geometria deve ser vista como um ato político e não somente pedagógico, pois está relacionada com a possibilidade de proporcionar, ou não, iguais oportunidades – e condições – de acesso a esse ramo do conhecimento”. Por muito tempo esse direito foi negado a uma grande maioria de alunos da escola pública.

Além disso, de acordo com Carvalho (1989), o desejo das instituições científicas, incluindo as universidades, em investir em pesquisas com intuito de melhorar o ensino não depende somente dos que compõem esses órgãos, mas de um conjunto envolvendo forças econômicas, sociais e políticas, pois essas também são financiadoras de projetos voltados para o meio educacional. Diante disso, Pavanello (1989) finalizou confirmando que a origem dos recursos financeiros influencia decisivamente sobre o que será ou não privilegiado.

Pavanello (1989) contribuiu afirmando que o ensino de geometria, assim como ocorreu em tempos remotos, continua sendo um privilégio da elite. Por exemplo, esse ensino não foi interrompido nas escolas e cursos reservados às camadas privilegiadas da sociedade. Resta à camada mais pobre um ensino de geometria puramente prático e destinado ao pleno exercício de atividades profissionais. Assim, para Silva (2006, p. 82), “enquanto era de abandono o panorama do ensino de Geometria na escola pública, as escolas particulares e as dedicadas à formação militar, ainda que pesem as diferentes orientações trazidas pelos livros didáticos na época, continuaram a ensinar Geometria”. Isso ainda persiste nos dias de hoje.

Uma indagação de Pavanello (1989, p. 100) nos fez refletir: “Como explicar, então, a ênfase dada ao ensino de geometria e às inúmeras pesquisas que vêm sendo realizadas visando aprimorá-lo e torná-lo acessível à maioria?”

A autora apontou algumas respostas sobre o questionamento anterior, uma delas possivelmente pode estar em função do crescimento exponencial que o ensino superior apontou nos últimos anos em diversos países. Como resultado dessa expansão, Pavanello (1989) argumentou que a escola secundária ocupou lugar de destaque novamente.

Em suma, até o presente momento relatamos resumidamente o desenvolvimento da geometria desde tempos remotos, em seguida adentramos em fatos ocorridos com o ensino de geometria até as décadas de 1950 e 1960, momento em que aconteceu um movimento revolucionário na Matemática. A partir de agora apontaremos as consequências que o Movimento de Matemática Moderna trouxe para o ensino de Matemática no Brasil, especificamente o de geometria.

1.4 A difusão do Movimento de Matemática Moderna no Brasil

Valente et. al. (2007) apontam que após a década de 1950 iniciaram-se os primeiros congressos no Brasil que versavam sobre o ensino da Matemática escolar. Esses eventos promoveram as primeiras manifestações em defesa das ideias apontadas no Movimento Internacional da Matemática Moderna. Na década de 1960, conforme Valente et. al. (2007), presenciamos o auge de tal Movimento iniciado e difundido no Brasil pelos personagens Osvaldo Sangiorgi, Jacy Monteiro, Omar Catunda e Benedito Castrucci.

Búrigo (1989) destacou o II Congresso Nacional de Ensino da Matemática onde ocorreram as primeiras discussões acerca do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. O encontro foi realizado na cidade de Porto Alegre, Rio Grande do Sul, em 1957. De acordo com Valente (2008), houve alguns textos publicados abordando essa temática. O primeiro foi do Major Professor Jorge Emanuel Ferreira Barbosa, intitulado *Reflexos do desenvolvimento atual da matemática no ensino secundário*. Outra apresentação ficou sob a responsabilidade do professor Ubiratan D'Ambrósio que fez explanações acerca das *Considerações sobre o ensino atual da Matemática*. O trabalho do professor Osvaldo Sangiorgi foi um terceiro estudo apresentado no encontro. Em síntese, podemos considerar que o congresso reuniu renomados pesquisadores e matemáticos com intuito de refletir sobre o MMM no Brasil, a partir desse evento o currículo de Matemática passou por grandes transformações lideradas por Sangiorgi.

Nas ideias de Valente (2008), o III Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática ocorrido em 1959 no Rio de Janeiro pouco promoveu discussões ou avanços entre os professores de Matemática que participaram do evento no sentido de debater questões

referentes à modernização dos programas. Os efeitos não foram tão agradáveis para os organizadores desse congresso, diante disso, recomendaram aos professores participantes dessa versão retornar as suas atividades e realizar experiências voltadas ao curso secundário que envolvesse aspectos da Matemática Moderna e socializassem no próximo evento ocorrido em Belém do Pará em 1962.

Relatamos as principais ideias de alguns Congressos Nacionais de Ensino da Matemática. Nosso propósito foi calendarizar em quais momentos ocorreram as primeiras discussões acerca do Movimento de Matemática Moderna no Brasil, não sendo necessário entrar no mérito desses eventos. Além disso, de lá para cá já ocorreram inúmeras versões produzindo um número significativo de textos publicados em Anais.

Para Valente et. al. (2007), o ensino de Matemática no Brasil passou por transformações na Educação Básica. Elas foram oriundas de reflexões ocorridas em âmbito internacional, onde foi defendido um novo enfoque para o ensino de Matemática. A ideia era uma aproximação entre o ensino desenvolvido na Educação Básica e o explorado na universidade, como já mencionamos anteriormente. Do que se disse até aqui, o Movimento Internacional ficou conhecido como Movimento de Matemática Moderna (MMM). Valente (2008, p. 584) pontuou que essa expressão é utilizada no “âmbito dos estudos sobre o ensino da Matemática, caracterizando um período em que se elaboraram novas referências para o ensino da disciplina”.

Valente et. al. (2007) referenciam que entre os estados brasileiros, São Paulo foi o pioneiro no MMM, isso se deu por conta da criação do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), ocorrido em 1961 na mesma cidade, liderado por Sangiorgi. Esse grupo ficou encarregado de coordenar e difundir a introdução da Matemática Moderna na Escola Secundária. Também ficou responsável por organizar cursos para professores de Matemática da cidade de São Paulo e do interior. Desde então, foi proliferado para as demais unidades federativas do Brasil.

Outra herança deixada pelo GEEM foi à tradução, publicação e divulgação de livros que continham ideias recomendadas pelo MMM. Sangiorgi foi um dos autores de livros didáticos dessa natureza.

1.5 Proliferação do livro didático de Matemática Moderna no Brasil

No Brasil, as décadas de 1960 e 1970, segundo Valente et. al. (2007), são reconhecidas por um crescimento exponencial da indústria do livro didático de Matemática, além disso, as ideias do MMM nos livros se iniciam nesse período. Para os autores, foi presenciada uma revolução no rol de conteúdos matemáticos, assim como em sua forma de apresentação. Como se disse anteriormente:

Naqueles anos 60, organizaram-se grupos em diferentes estados brasileiros para a difusão da nova Matemática, programas foram alterados e, com isso, a indústria de livros didáticos de Matemática atingiu seu momento áureo. Tratava-se de uma "revolução curricular", ainda controversa nos bastidores da comunidade acadêmica (VALENTE et. al., 2007, p. 8).

Essa difusão do livro didático inspirado na Matemática Moderna, como também a mudança do currículo dessa disciplina, foi recebida pela sociedade brasileira como uma transformação milagrosa para o ensino de Matemática, entretanto a própria comunidade acadêmica ainda questionava a validade desses preceitos. Sobre a proliferação desse livro didático no Brasil e sua consequência percebe-se que:

A Matemática Moderna foi veiculada principalmente pelos livros didáticos e teve grande influência. O movimento Matemática Moderna teve seu refluxo a partir da constatação da inadequação de alguns de seus princípios e das distorções ocorridas na sua implantação (BRASIL, 1997, p. 20).

De acordo com Valente (2008) o Movimento da Matemática Moderna no Brasil precisava ser difundido, diante disso necessitava-se de um veículo informativo responsável por isso, porém de forma rápida, para que um grande número de pessoas tivesse acesso às ideias de tal Movimento. Dessa forma, os livros didáticos exerceram forte influência na divulgação.

Assim, conforme Valente (2008, p. 603), “cabe aos manuais escolares ‘falar’ diretamente aos professores brasileiros, para além de debates e discussões ocorridas em congressos e cursos”. Outro apoio monumental que o Movimento de Matemática Moderna recebeu foi da imprensa, mesmo que de forma indireta. Em uma das entrevistas realizadas com Sangiorgi, o jornal Folha de São Paulo trouxe como manchete “Verdadeira revolução vai sofrer o ensino da Matemática”, foi nessa reportagem que se estabeleceu o ano de 1964 como

Ano 1 da Matemática Moderna, isto é, ano 1, do volume 1, dos novos livros didáticos de Matemática para o ginásio (VALENTE, 2008).

Por outro lado, Silva (2006), a partir de interpretações em Miorin (1998), declarou que o MMM no Brasil foi um processo implantado apressadamente e, além disso, sua adoção não estava coerente com as reflexões surgidas nos primeiros Congressos Nacionais de Ensino de Matemática. Silva (2006) relembrou a pressa do grupo liderado pelo professor Oswaldo Sangiorgi para a implantação do programa de Reforma, promovendo diversas capacitações para professores da escola básica.

Valente (2007) assevera que as investigações feitas acerca do MMM mostram que o currículo escolar não foi marcado de forma neutra, diante disso os idealizadores da Reforma tinham pretensões, assim como intenções.

1.6 O ensino de geometria no Brasil após o Movimento de Matemática Moderna

A geometria, para Belo Horizonte (2008, p. 6), “enquanto experiência humana vem sendo desenvolvida desde a pré-história, no contato natural e social que os diversos povos mantêm visando atender às suas necessidades de abrigo, localização e comunicação”. Entretanto, a riqueza oportunizada pelo conhecimento geométrico, infelizmente, muitas vezes não é reconhecida pela escola. Ela, certamente, não foi orientada quanto ao potencial desse saber e, quando foi, ocorreu equivocadamente.

Conforme Nacarato (2004), a partir dos anos 1960, esse ensino sofreu mudanças significativas e isso esteve em função do Movimento de Matemática Moderna. Nos anos 1970 tínhamos esse cenário:

Na década de setenta, a Matemática moderna, em seu auge, fez com que a Geometria, que até esses anos tinha sido uma matéria importante, passasse a ser uma matéria escolar de segundo plano, ocupando os últimos capítulos dos livros texto, aos quais, na maioria das vezes, o professor primário não dava atenção (BARRANTES, BLANCO, 2004, p. 37).

O MMM promoveu uma verdadeira reviravolta no ensino de Matemática. Isso pode ser constatado pela valorização da teoria dos conjuntos ao invés do ensino de geometria que praticamente foi excluído “do currículo escolar ou passou a ser, em alguns casos restritos, desenvolvida de uma forma muito mais formal a partir da introdução da Matemática Moderna” (PAVANELLO, 1989, p. 180). De acordo com Lorenzato (1995), a geometria por muito tempo e em uma época não muito distante era apresentada na última parte do livro.

Nas ideias de Nacarato (2007), os esforços do movimento de reforma curricular da década de 1980 para inserção do ensino de geometria nas séries iniciais não foram suficientes, isso pode ser verificado quando observamos os efeitos dessa implantação na prática. Como se sabe o Movimento de Matemática Moderna e os livros didáticos de décadas passadas contribuíram para o abandono do ensino de geometria. Sobre isso:

O MMM acentua mais a problemática, visto que geometria passou a ser tratada metodologicamente de forma abstrata e simbólica, apoiada na linguagem da teoria de conjuntos. Os maiores difusores dessa nova abordagem são os livros didáticos que, a essa época, começam a ter maior penetração na educação brasileira. A ênfase passa a ser posta na geometria das transformações (NACARATO, 2007, p. 2).

Pavanello (1989) criticou a valorização do ensino de álgebra colocado em um pedestal, esse contexto fez com que o ensino de geometria ficasse em segundo lugar. Entretanto, a autora ponderou que os dois têm grande importância para a Educação Matemática, pois o primeiro contribui para o pensamento sequencial, enquanto o segundo, para o pensamento visual. Além disso, de acordo com Brasil (1997), outras áreas da Matemática recebem destaque ainda hoje, por exemplo, nas séries iniciais é valorizado um trabalho envolvendo conjuntos, já para os anos finais predominou-se o estudo da álgebra com excessiva atenção. Esse destaque dado aos aspectos algébricos também foi comentado por Rêgo, Rêgo e Vieira (2012) que apontaram ser um dos motivos para o abandono da geometria dos currículos escolares.

Pavanello (1989, 1993), juntamente com Gazire (2000), confirmaram que o Movimento de Matemática Moderna e o despreparo dos professores foram as principais causas para o abandono do ensino de geometria.

A literatura não minimiza palavras ao afirmar que o ensino de geometria foi abolido das escolas, principalmente, dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Todavia, encontramos argumentos em Pavanello (1989) mostrando que esse ensino já apresentava sinais agravantes, mesmo antes do Movimento de Matemática Moderna. Esses problemas eram: saberes específicos do professor, metodologia, ausência de conexão entre a geometria prática da escola e o caráter axiomático iniciado no ensino secundário. No entanto, após o MMM a situação ficou mais alarmante.

Pavanello (1989) considera medidas como a reforma da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) (Lei 5692/71), que regulamentou e deixou a critério dos professores e escolas selecionarem seu próprio currículo levando em conta as necessidades dos educandos,

como mais uma desculpa para deixar o ensino de geometria em segundo plano. De acordo com Silva (2006), essa lei deixou brechas que tornaram válidas os programas que os professores elaboravam em função das peculiaridades dos alunos.

Reforçando as ideias mencionadas anteriormente, Nacarato (2007) confirmou que os professores começaram a valorizar o ensino de aritmética e noções de conjunto, deixando o ensino de geometria para o 2º grau (Ensino Médio). Para Bukowitz (2008, p.9), “somente em situações excepcionais, a geometria se fazia presente nas aulas das séries iniciais da escola básica”.

A ausência do ensino de geometria nas séries iniciais ainda é um problema que está em seu auge. Na dissertação de Andrade (2004), foi feito um Estado da Arte levando em conta a produção brasileira de geometria, tendo como objeto de estudo os anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM). Verificou-se que entre os períodos de 1987 a 2001 o número de trabalhos envolvendo o ensino de geometria nos anos iniciais foi reduzido.

Enfim, Fonseca (2002) acentuou que a educação matemática brasileira foi marcada pelo abandono do ensino de geometria a partir do MMM. Para Silva (2006), esse Movimento reduziu a presença da geometria no currículo escolar. Neves (1998) também compartilha das mesmas ideias, para ela o Brasil presenciou o esvaziamento do ensino de geometria, chegando ao ponto dos conteúdos geométricos não terem importância no currículo da Escola Básica.

SEGUNDO CAPÍTULO – SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA NA ATUALIDADE

Este capítulo tem por objetivo discutir acerca do resgate da geometria nos anos iniciais da escolarização. Sendo assim, fizemos uma releitura nas recomendações de propostas curriculares nacionais, estaduais ou municipais que enfatizam a importância desse tipo de conhecimento para o desenvolvimento do raciocínio em crianças em idade escolar. Em seguida, adentramos em ideias intimamente ligadas a nossa proposta de pesquisa que tem por finalidade conduzir um estudo de geometria que privilegie inicialmente aspectos do cotidiano dos discentes para em seguida abordar noções abstratas. Por fim, fizemos alusões ao processo de construção do conhecimento geométrico enfatizando as habilidades geométricas, os aspectos do conhecimento geométrico e as faces da construção do conhecimento geométrico.

2.1 Resgate do ensino de geometria

A utilidade do conhecimento matemático no mundo desenvolvido científico e tecnologicamente fez com que áreas que compõem esse saber merecessem enorme destaque, por exemplo, a geometria. Esta, de acordo com Romanatto e Passos (2012), pode ser vista como uma área da Matemática que é mais intuitiva, concreta e relacionada com a realidade. Dessarte, é essencial para a formação dos educandos, possibilitando que eles possam representar e dar significados ao mundo em que vivem.

Entretanto, de acordo com diversos autores, o ensino de geometria encontra-se ausente da escola básica, em virtude disso inúmeros esforços foram feitos para compreender os motivos desse abandono e, ao mesmo tempo, propor soluções para resolver o impasse. Tudo isso foi feito diante da grande expressividade de trabalhos que evidenciam implicações positivas do conhecimento geométrico para as crianças em idade escolar.

Conforme Manoel (2012), as pesquisas que se preocupam em investigar o ensino de geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental ainda representam uma pequena quantidade. O cenário vivenciado nas escolas por muito tempo foi uma priorização de determinados conteúdos de outras áreas da Matemática, por exemplo, o ensino de aritmética e álgebra foi colocado em primeiro plano. A pesquisadora Pavanello (1989, p. 95) contribuiu informando que o estudo de geometria “é reduzido justamente no momento em que a escola secundária se democratiza e privilegia-se, em seu lugar, a álgebra e a aritmética”. Entretanto, como vimos anteriormente, há uma grande ligação entre a geometria e outras áreas da Matemática.

Parafrazeando Nacarato (2007), o ensino de geometria, na década de 1960, valorizava o reconhecimento de figuras e o cálculo de perímetros. Diante disso, Nacarato e Passos (2003) denominaram esse tipo de ensino como reducionista e simplista. Em nossa experiência, e a partir de contatos com professores que estão nos anos iniciais do Ensino Fundamental, podemos confirmar que esse contexto apresentado pela autora ainda é perceptível, porém apresentando menor intensidade.

Fundamentando-se nas palavras de Nacarato (2007), a década de 1970 foi aquela em que muitos pesquisadores preocuparam-se em fazer um resgate do ensino de geometria. Compartilhando desse mesmo pensamento, observemos que:

Uma breve contextualização histórica nos leva a considerar que, após a reforma modernista, ou seja, após o Movimento da Matemática Moderna, houve uma sensível preocupação por parte dos educadores matemáticos em torno da recuperação do ensino de Geometria, o que se fez presente nas propostas curriculares, nos livros didáticos e nas pesquisas na área de Educação Matemática (MARQUESIN, 2007, p. 49).

Para Marquesin (2007), a década de 1980 foi caracterizada por movimentos que visavam preparar e implantar Propostas Curriculares para o ensino de Matemática, no estado de São Paulo. Essas discussões fundamentaram-se em contribuições advindas de reflexões de pesquisadores e educadores matemáticos. Porém, esses documentos foram mal compreendidos e, conseqüentemente, não implantados, em virtude de uma formação inadequada ofertada ao professor e, quase, ausência de formação *in loco*.

Em seguida, vieram os PCNs, na década de 1990, para dar uma maior importância às reformas e valorizar as potencialidades de inserir-se o ensino de geometria na escola básica. De acordo com Marquesin (2007, p. 49), “no final da década de 1990, a implantação dos Parâmetros Curriculares Nacionais trouxe um novo olhar para a Geometria desde a escolarização inicial”. Juntamente com esses documentos nacionais, acrescentam-se um aumento significativo de pesquisas nessa temática.

Contribuindo com Nacarato (2007), viu-se que, após o MMM:

Houve uma sensível preocupação por parte dos educadores matemáticos em relação à recuperação do ensino da Geometria. Isso pôde ser notado nas propostas curriculares, nos livros didáticos e nas pesquisas na área de Educação Matemática, ao final dos anos 70. No Brasil, pesquisas começam a ser produzidas na década de 80 (BARBOSA, 2011, p. 20).

É notório o investimento em pesquisas, com intuito de resgatar a geometria, que tinha sido relegada para um segundo plano nas escolas. Assim:

A necessidade de resgatar o ensino de Geometria nas escolas passou a ser um dos destaques em diferentes propostas curriculares e artigos sobre o assunto. Chama-se atenção para a importância do desenvolvimento de um pensamento geométrico, de tanta relevância para o aluno como o pensamento aritmético ou algébrico (PIRES; CURI e CAMPOS, 2000, p. 15).

As propostas curriculares trouxeram um novo tratamento para o ensino de geometria. Nesse contexto, destacamos os Parâmetros Curriculares Nacionais, na década de 1990. A partir daí, foram criados diversos programas federais, que, na sua essência, incluíram tópicos

destinados ao ensino de geometria. Os PCNs foram organizados em blocos de conteúdos que receberam quatro denominações, evidenciamos, apenas, dois, *Espaço e Forma* e *Grandezas e Medidas*, por serem aqueles que mais tratam do ensino de geometria, em termos de conteúdos conceituais. No primeiro caso, de acordo com Brasil (1997, p. 49), “possibilita ao aluno a construção de relações para a compreensão do espaço a sua volta”. Em cada bloco de conteúdo, dos Parâmetros Curriculares Nacionais, há especificações, quanto aos conteúdos conceituais e procedimentais, em relação ao primeiro, recomenda-se que o trabalho deve valorizar a

Interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço a partir da análise de maquetes, esboços, croquis e itinerários, estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos — esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos — sem uso obrigatório de nomenclatura, construção e representação de formas geométricas (BRASIL, 1997, p. 51).

Confiamos e acreditamos nessas orientações tanto que, em nossas atividades planejadas, privilegiamos aspectos referentes aos acima elucidados. Enfim, no segundo caso, Brasil (1997, p. 53) alerta para o fato de os alunos terem a “sensibilidade pela observação das formas geométricas na natureza, nas artes, nas edificações”. Quanto ao segundo ciclo – 4º e 5º anos – recomenda-se que os conteúdos de geometria no bloco Espaço e Forma valorizem atividades que explorem o espaço. Destarte:

Deslocando-se no espaço, observando o deslocamento de outras pessoas, antecipando seus próprios deslocamentos, observando e manipulando formas, os alunos percebem as relações dos objetos no espaço e utilizam o vocabulário correspondente (em cima, embaixo, ao lado, atrás, entre, esquerda, direita, no mesmo sentido, em direção contrária) (BRASIL, 1997, p. 57).

É preciso, conforme Brasil (1997), desenvolver um trabalho envolvendo a representação do espaço, de forma que ele seja produzido e interpretado, sendo de suma importância privilegiar malhas e diagramas, assim como explorar guias e mapas.

Após a divulgação dos PCNs, vários cursos de formação continuada foram elaborados, para os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Aqueles, também, preocuparam-se em incluir tópicos de geometria. Destacamos, nesse texto, o Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (PROLETRAMENTO de Matemática) e, mais recentemente, o Pacto Nacional de

Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), ambos de âmbito nacional. Além dessas duas iniciativas, inserimos também a importância do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), para o ensino de geometria. Esse programa passou por diversas denominações no decorrer do tempo e foi, aos poucos, tendo um olhar específico para a fiscalização e distribuição de livros didáticos em todo o país.

A história nos aponta que, em 1929, criou-se o Instituto Nacional do Livro Didático (INL). Esse órgão coordenava o planejamento, a produção e a distribuição do livro didático e, por volta de 1938, foi instituído a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), encarregada de examinar e julgar os livros didáticos. Essa, por sua vez, apresentava um ponto negativo, ter mais uma função de controle político-ideológico do que pedagógico. Em 1966, firmou-se um acordo entre o Ministério da Educação (MEC) e a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (USAID). O resultado dessa parceria foi a criação da Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (COLTED), que possibilitou ao MEC a distribuição de cerca de 51 milhões de livros didáticos gratuitos, durante três anos. A partir dessa experiência, o programa foi financiado por verbas públicas e passou a ter o caráter de continuidade.

Extinta em 1971, a COLTED foi substituída pelo Programa do Livro Didático (PLD). Daí em diante, o INL investiu no Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF). A partir do término do convênio MEC/USAID, tornou-se necessária a criação do sistema de contribuição financeira, nesse contexto, as Unidades Federativas passaram a contribuir financeiramente com o Fundo do Livro Didático.

A extinção do INL fez com que a Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME) ficasse responsável pelo programa do livro didático. Em 1980, foram lançadas as diretrizes básicas do PLIDEF e, posteriormente, em 1983, criou-se a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), em substituição à FENAME. Nesse momento, começou-se a discussão sobre a possibilidade dos professores participarem da escolha dos livros didáticos.

Em 1985, pelo decreto nº 91.542 de 19/08/1985, o PLIDEF foi substituído pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Na ocasião, os estados deixaram de participar financeiramente e isso passou a ser de responsabilidade da FAE. Uma característica marcante desse momento foi a garantia de os professores fazerem a escolha dos livros didáticos. Mas como se apresenta a Geometria no livro didático de hoje?

2.2 Recomendações do PNLD, quanto ao ensino de geometria

O PNLD é um programa que oferece diversos serviços, entre eles, estão análises de coleções de livros didáticos, voltados à escola pública. A partir dessas vistorias, são aprovadas determinadas coleções e feito um guia para apoiar os professores no tocante às recomendações de cada coleção. Esse programa exerce a função de fiscalizador e inclui orientações, quanto aos livros vistoriados. No tocante ao de Matemática, o PNLD disponibiliza o modo como são apresentados os conteúdos, conceitos, contextualização e ênfase dada ao ensino de geometria.

Para o PNLD de 2007, o ato de situar-se e reconhecer posições dos objetos, no espaço, são habilidades importantes para serem adquiridas. Em face disso, recomendam-se abordar atividades, envolvendo localização e deslocamento em uma, duas ou três dimensões, sendo necessário o desenvolvimento de trabalhos com mapas, plantas e croquis. No entanto, as análises feitas pelo Programa, daquele ano, mostram que essas atividades são pouco exploradas.

Outra habilidade importante, destacada pelo Programa de 2007, refere-se ao ato de visualizar, na geometria, ele é essencial, tanto para ver e interpretar as informações visuais, quanto para expressar o que foi visto, por meio de representações gráficas, ou não.

Quanto à noção de semelhança em geometria, o PNLD de 2007 recomenda o trabalho a partir de atividades envolvendo ampliação, ou redução de figuras planas, utilizando, ou não, as malhas quadriculadas. Também indica a exploração da leitura de plantas e mapas com escalas.

A simetria também é uma área muito trabalhada nos livros do PNLD de 2007 e, conforme o programa, essa valorização é bastante produtiva, pois

Há algum tempo, recomenda-se o estudo de simetria no Ensino Fundamental. Essa recomendação justifica-se pela inegável importância do conceito, tanto no campo científico, como nas demais atividades humanas. Simetria é, sem dúvida, um dos princípios básicos para a formulação de modelos matemáticos para os fenômenos naturais. De modo amplo, simetria esteve sempre associada às idéias de harmonia, equilíbrio, repetição, uniformidade ou igualdade entre partes constituintes de um objeto ou de sua representação. Sua importância é considerada, inclusive, em situações nas quais a simetria não é desejada (BRASIL, 2007, p. 31).

De acordo com o PNLD de 2007, a noção de simetria é muito vista, fazendo relação com artes plásticas e arquitetura, não valorizando sua importância na Matemática e nas

ciências. Para o Programa, o estudo de simetria muitas vezes é isolado, dos demais conteúdos da Matemática e outras áreas do saber.

Quanto ao bloco de Grandezas e Medidas, o PNLD de 2007 recomenda atividades como:

Comparar os comprimentos de dois caminhos (ou de dois objetos alongados), as capacidades de dois recipientes, as massas (“pesos”) de dois corpos, as durações de dois eventos, são exemplos de situações em que não é necessário efetuar medições, mas apenas estabelecer uma relação – maior, menor, igual – entre as grandezas. Essas atividades podem contribuir para uma abordagem intuitiva das grandezas e, ao mesmo tempo, favorecer a compreensão das especificidades de cada uma delas (BRASIL, 2007, p. 33).

Trabalhos desse tipo podem ser considerados mais positivos, do que, simplesmente, fazer aferições de determinados comprimentos, apenas pela visualização. Quando proporcionamos, atividades dessa natureza, estamos contribuindo para que os estudantes façam estimativas de valores, sem que os mesmos estejam presentes, e comparações deles. Isso torna possível a dedução dos resultados.

Também é relevante, oportunizar, ao estudante, o cálculo de medições, intuitivamente, utilizando unidades não convencionais, presentes no seu cotidiano. De acordo com o PNLD (2007), as atividades que abordem essa característica são importantes, porque ajudam na compreensão do caráter arbitrário da unidade. O Programa verifica que

Muitas das obras avaliadas acompanham esse ponto de vista na sua proposta de atividades. Outras, no entanto, apressam-se em introduzir as unidades do padrão internacional. Há, também, algumas coleções que se detêm de forma excessiva em atividades de conversão de múltiplos ou submúltiplos de unidades convencionais (BRASIL, 2007, p. 33).

Atividades que envolvam o processo de conversões, de múltiplos, ou submúltiplos de unidades convencionais, podem não ser interessantes, aos estudantes, ao passo que requer desafios, memorizações de procedimentos, uso excessivo de cálculos, que não são interessantes. Nossa experiência docente fundamenta-nos a afirmar que muitos livros didáticos, de alguns anos anteriores, propõem listas de exercícios, onde é exigido converter uma determinada unidade de medida para outra. Não consideramos esse trabalho equivocados, no entanto, da maneira como está sendo executado, pode não produzir benefícios para o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes.

2.3 Do espaço ao plano

Embasando-se em uma diversidade de pesquisas da Educação Matemática, podemos afirmar que o ensino de geometria plana foi priorizado, na escola básica, nas últimas décadas. Percebemos isso nas escolhas dos conteúdos quando, conforme Fainguelernt (1995, p. 45), “estudavam-se primeiro ponto, reta e plano, passava-se aos ângulos, quadriláteros, polígonos etc”. A linearidade, denunciada pelos PCNs (BRASIL, 1997), ainda se encontra fortemente presente, nas práticas pedagógicas, isto é, o trabalho, muitas vezes, é desenvolvido sequencialmente, ensinando-se, primeiro, as noções primitivas (ponto, reta e plano), depois conceitos e formas da geometria plana e, por fim, os sólidos geométricos. Destarte, essa escolha está em sentido contrário, ao defendido por Brasil (1997, p. 81), pois

O ponto, a reta, o quadrado não pertencem ao espaço perceptivo. Podem ser concebidos de maneira ideal, mas rigorosamente não fazem parte desse espaço sensível. Pode-se então dizer que a Geometria parte do mundo sensível e o estrutura no mundo geométrico — dos volumes, das superfícies, das linhas e dos pontos.

Acreditamos nas leituras feitas por alguns pesquisadores que se preocuparam em iniciar o ensino de geometria, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir da geometria espacial. Por isso, defendemos essa bandeira nesse trabalho, mesmo porque, há muito tempo atrás, Comenius (2002, p. 234) dizia que a “verdade e a certeza da ciência não derivam senão do testemunho dos sentidos, por isso, quem quer dar aos alunos uma ciência verdadeira e certa deverá ensinar tudo, sempre por meio da observação direta e da demonstração sensível”.

Com base na discussão anterior, concordamos com Portugal (2007, p. 20), quando defende que no 1º ciclo, do Ensino Fundamental, o ensino de geometria deve ter o seguinte caráter:

Dado que vivemos num mundo tridimensional, o estudo da Geometria nos primeiros anos parte do espaço para o plano. Por exemplo, no estudo das figuras geométricas os alunos descrevem e comparam os sólidos geométricos, agrupam-nos e classificam-nos e identificam as figuras planas a eles associadas. Nesse processo, primeiro fazem o reconhecimento das formas globalmente e, só depois, identificam as propriedades relevantes de cada uma.

Por outro lado, sabemos que a prioridade de conteúdos da geometria plana, nos anos iniciais, está em função da ausência do ensino de geometria, na formação inicial dos professores, desse modo:

Os futuros professores têm lacunas de conceitos de Geometria escolar. Alguns não conhecem, sequer, os conteúdos básicos. Os conteúdos que declaram conhecer melhor são os relacionados com a Geometria do plano. Trabalharam menos a Geometria do espaço e mal conhecem os temas de isometrias. Estes últimos são esquecidos nas suas propostas didáticas (BARRANTES, BLANCO, 2004, p. 35).

Essa quase ausência do ensino de geometria nas formações iniciais, principalmente aquelas voltadas aos professores dos primeiros anos do Ensino Fundamental, foi desmascarada, quando da implantação dos PCNs, pois

O professor, que não havia tido nem vivenciado Geometria no currículo durante sua escolarização, precisou, a partir daí, inserir tal conteúdo em suas salas de aula. Iniciou-se, então, um fazer destituído de significação, em que os professores arriscavam desenvolver um ensino de Geometria de forma intuitiva e experimental e, na maioria das vezes, utilizando apenas as quatro figuras: o quadrado, o retângulo, o triângulo e o círculo e os objetos protótipos (MARQUESIN, 2007, p. 49).

O desconhecimento conceitual dos conteúdos de geometria pode estar em função de uma formação inicial falha em diversos pontos. Os cursos de formação de professores, especificamente aqueles destinados em formar docentes para os anos iniciais, sequer, abordam elementos de geometria em sua estrutura. Mas o problema não reside somente na ausência do conhecimento geométrico. Muitas dúvidas surgem com relação à maneira com que esses conteúdos deveriam ser ensinados às crianças, além disso, questiona-se sobre quais conteúdos poderiam ser suficientes, para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Fonseca et. al. (2011) contribui dizendo que o desconhecimento sobre o que ensinar de geometria é presente na maioria dos professores, além de tudo, as autoras destacam que muitos educadores desconhecem quais habilidades de geometria devem ser desenvolvidas nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Entre os matemáticos e educadores em geral, muitas discussões têm sido feitas a respeito da forma com que o ensino da Geometria deveria ser introduzido às crianças. Existe certo consenso que este ensino deveria ter início logo que a criança ingressa na escola; há, entretanto, divergências em relação aos conteúdos e aos métodos de ensino (ROMANATTO, PASSOS, 2012, p. 14).

Sendo assim, para Romanatto e Passos (2012), muitos professores ainda não conseguem perceber a importância do ensino de geometria, a maioria deles apresenta dúvidas quanto à seleção de conteúdos para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Os autores citados precedentemente acrescentam que essas interrogações são estendidas, quando os educadores avaliam os estudantes, no tocante ao conhecimento geométrico.

Diante do impasse, sobre quais conteúdos abordar nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a maioria dos autores concordam em iniciar, as experiências geométricas das crianças, abordando conteúdos que privilegiem noções espaciais. Esse trabalho, conforme Brasil (1997, p. 39), deve ser “feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento”. Devemos levar em consideração que

Paulatinamente, a criança, desde a Educação Infantil, vai conseguindo maior coordenação de suas atividades no espaço, podendo pegar um objeto que deixou cair, reiniciar uma atividade interrompida, antecipar o deslocamento de um objeto móvel oculto (por exemplo, quando um carrinho se desloca por detrás de uma cortina, a criança acompanha seu movimento e sabe onde o carrinho aparecerá) ou mesmo diferenciar os objetos que estão ao seu alcance daqueles que não estão (ROMANATTO, PASSOS, 2012, p. 13).

Desde os primeiros dias de vida, as crianças estão rodeadas de objetos tridimensionais, podendo ser apresentados de distintas formas: mamadeiras, berço, chocalhos, móveis entre outros. Nos seis primeiros anos de vida, essas crianças vivenciam a geometria a partir de brincadeiras, sejam elas individuais, ou em grupos de crianças que apresentam a mesma faixa etária. Normalmente, os meninos entram em contato com o futebol e outros brinquedos, enquanto as meninas brincam de boneca e imitam algumas profissões. Desse modo, para Romanatto e Passos (2012, p. 13), “as experiências geométricas se apresentam de forma espontânea para crianças em atividades de exploração de objetos e do espaço físico em que se desenvolve”. As experiências com a geometria aumentam, à medida que as crianças socializam-se, entre si, ou com a natureza. Diante disso,

Quando chegam à escola, as crianças já têm um conhecimento intuitivo desse espaço perceptivo; elas já exploram esse espaço através dos órgãos dos sentidos. Mais tarde essa exploração vai ser tornando mais organizada e a criança começa a modificar o espaço à sua volta intencionalmente; ela constrói um papagaio, um carrinho de rolimã, ela usa dobradura para construir um barco, um chapéu, um bicho. Esse conhecimento intuitivo deve

ser explorado para que a criança melhore sua percepção espacial, visual e tátil, identificando as características geométricas desse espaço, apreendendo as relações espaciais entre objetos nesse espaço. O ensino de Geometria deve contribuir para ampliar e sistematizar o conhecimento espontâneo que a criança tem do espaço em que vive (FONSECA et. al., 2011, p. 47).

Assim, os anos iniciais da escolarização são momentos importantíssimos, para enriquecer o repertório geométrico das crianças. Nos próximos parágrafos, comentaremos mais sobre a chegada das crianças às escolas, especificamente nos anos iniciais. Sobre as considerações expostas anteriormente observamos que

As primeiras experiências das crianças são geométricas e espaciais, ao tentarem compreender o mundo que as rodeia, ao distinguirem um objeto de outro, [...]. Aprendendo a movimentar-se de um lugar para outro, estão a usar idéias espaciais e geométricas para resolver problemas. Esta relação com a Geometria prossegue ao longo da vida (ABRANTES, SERRAZINA, OLIVEIRA, 1999, p. 71).

Para Fainguelernt (1995, p. 46), “a criança constrói a sua Geometria, desde os primeiros meses de vida. No quarto da criança, a porta é abertura, por onde alguém chega até ela, e a criança, ao engatinhar, vai descobrindo possibilidades e impossibilidades de deslocamentos”. O ato de engatinhar, agarrar pernas das cadeiras, mesas, segurar nas paredes, nas pernas da mãe, nas vestimentas de quem passa por perto dessas crianças pode ser enriquecedor para a construção do espaço pela criança.

Diante disso, consideramos que essas atitudes estão em comum acordo com o que dizem Fonseca et. al. (2011), quando argumentam que desde cedo o espaço é construído por esses sujeitos, assim como constroem a percepção das formas. Inicialmente, a criança percebe o espaço, tomando como referência seu próprio corpo. Nesse caso, conforme as autoras, as experiências dos deslocamentos são motivadoras, para ampliação do espaço, porém, é preciso expandir essas compreensões, pois os contextos citados ainda ficam restritos, ao mundo sensível dos sentidos. Sobre essas considerações observamos que

Estudos sobre a construção do espaço pela criança destacam que a estruturação espacial se inicia, desde muito cedo, pela constituição de um sistema de coordenadas relativo ao seu próprio corpo. É a fase chamada egocêntrica, no sentido de que, para se orientar, a criança é incapaz de considerar qualquer outro elemento, que não o seu próprio corpo, como ponto de referência. Aos poucos, ela toma consciência de que os diferentes aspectos sob os quais os objetos se apresentam para ela são perfis de uma mesma coisa, ou seja, ela gradualmente toma consciência dos movimentos de seu próprio corpo, de seu deslocamento (BRASIL, 1997, p.125).

A capacidade, de localizar-se no espaço, deve ser construída desde os primeiros meses de vida da criança. No entanto, para que isso ocorra, é preciso que haja um mediador, que a possibilite atividades facilitadoras dessa habilidade. A criança deve, desde cedo, comunicar-se geometricamente, isto é, dando e recebendo informações, para que tenha uma boa compreensão espacial. Por exemplo, é de extrema importância que sejam propiciadas atividades que necessitem da utilização de conceitos de geometria, tais como direita, esquerda, acima, abaixo, entre outros.

Esse contexto é presenciado no cotidiano de muitos indivíduos que, muitas vezes, se deparam com situações onde precisam se orientar, ou receber orientações acerca de como chegar a um determinado endereço. Nesse caso, é necessário haver uma compreensão do diálogo entre informante e receptor. Diante disso:

[...] é importante estimular os alunos a progredir na capacidade de estabelecer pontos de referência em seu entorno, a situar-se no espaço, deslocar-se nele, dando e recebendo instruções, compreendendo termos como esquerda, direita, distância, deslocamento, acima, abaixo, ao lado, na frente, atrás, perto, para descrever a posição, construindo itinerários (BRASIL, 1997, p. 67).

A construção de itinerários é uma recomendação bastante clara nos Parâmetros Curriculares Nacionais. É um trabalho que não pode faltar para os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Sendo assim, são feitas indicações de como isso deve ser feito, na sala de aula:

Outro trabalho rico que deve ser explorado é o de construção de itinerários, a partir de instruções dadas. É interessante que os alunos relatem oralmente como é o trajeto do lugar onde moram até a escola, desenhem o itinerário que fazem, sempre dando pontos de referência (BRASIL, 1997, p. 82).

Outro fato, destacado por Brasil (1997), refere-se à importância da observação das semelhanças e diferenças que existem nas formas tridimensionais e bidimensionais, as figuras planas e as não planas. É preciso que os estudantes possam construir e representar objetos de distintas formas. Barbosa (2011) enfatizou que a sua prática como formadora de professores revelou a enorme dificuldade enfrentada, por muitos, em relação às transformações que certos objetos sofrem, quando migram do formato de três dimensões para o de duas, dimensões, e vice-versa. Para a mesma autora (2011, p. 35), “muitas vezes, essa dificuldade pode estar na identificação dos diferentes elementos que compõem esses objetos”. A pesquisadora prosseguiu afirmando que, em virtude disso, os indivíduos não conseguem fazer as devidas

representações das propriedades desses objetos, isso está em função da ausência, ou deficiência do ensino de geometria.

De acordo com Pais (1996), há quatro elementos que influenciam o processo de ensino e aprendizagem de geometria euclidiana plana e espacial, são eles: 1) objeto, 2) desenho, 3) imagem mental e 4) conceito, sendo que eles se complementam. Salientamos que a ordem estabelecida por nós não é estática, sendo apenas uma forma de identificação. Esses elementos já são trabalhados no cotidiano das crianças, de forma indireta, e na escola isso deve ser sistematizado e aperfeiçoado.

O termo objeto, como reforçado por Pais (1996), refere-se a modelos, ou materiais didáticos, ou seja, é o sentido próprio da palavra. “Esses objetos e suas representações por desenho têm uma influência predominante nos procedimentos de raciocínio do aluno no transcurso da construção de seu conhecimento geométrico” (PAIS, 1996, p. 66). Para esse mesmo teórico, quando um cubo é construído utilizando madeira, plástico, cartolina, ou qualquer material, tem-se um objeto que é associado ao conceito de cubo e dele podem-se explorar muitos conceitos geométricos que já fazem parte do programa dos alunos das séries iniciais da escolarização. O cuidado quanto ao uso desses materiais já foi apresentado nesse estudo.

O uso dos objetos, para o ensino de geometria, possibilita, segundo Pais (1996), uma apropriação de conceitos geométricos. Por exemplo, a manipulação de um objeto em forma de um cubo pode ser útil, porque o aluno compreenderá as noções de vértices, arestas, faces, paralelismo entre as faces, quantidade de arestas presentes em um mesmo vértice, entre outros. Esses conhecimentos são obtidos de forma imediata, graças ao uso dos objetos, ou à representação de um cubo, em forma de desenho, que requer determinado tipo de abstração.

De acordo com o mesmo investigador, o educando adquire aprendizagem, quando, a partir de uma representação, consegue fazer uma leitura geométrica. Sendo assim, no caso dos objetos, é preciso tomar cuidado, quando a manipulação deles restringir-se somente ao aspecto imediato e lúdico. Além disso, eles são entidades que facilitam o entendimento de ideias consideradas abstratas e funcionam como uma ponte para se chegar a elas, porém, não se pode ocupar o lugar delas (PAIS, 1996). De acordo com as ideias precedentes,

O professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem dessa disciplina (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 4).

Quanto aos desenhos, são fortes recursos para a representação de conceitos geométricos e têm sido bastante utilizados nos processos de ensino e aprendizagem de geometria, tanto na representação de figuras planas, quanto de três dimensões (PAIS, 1996). Além disso, conforme esse teórico, os desenhos estão presentes nas aulas de geometria, em livros didáticos e são utilizados para ilustrar enunciados de exercícios, definições, ou teoremas. Os desenhos também são de caráter concreto, assim como os objetos.

Acreditamos que os desenhos também podem ser de natureza abstrata, dependendo, nesse contexto, da faixa etária e das experiências prévias que os alunos tiveram. Diante disso, determinadas crianças podem conceber os desenhos tão abstratos quanto os respectivos conceitos. Por outro lado, outras crianças podem visualizar o desenho como sendo um objeto concreto.

De acordo com Pais (1996), os desenhos utilizados nas aulas de geometria plana são de natureza bem mais simples do que aqueles utilizados nas de geometria espacial. No último caso, é necessário o uso de técnicas de desenho em perspectiva, isto é, destacar a terceira dimensão do objeto representado, sendo, essa, uma das maiores dificuldades dos alunos, quando é preciso representar conceitos geométricos espaciais. Pais (1996), a partir de interpretações de Bonafe (1988), relata que as dificuldades não se restringem apenas à produção do desenho em perspectiva, mas também à leitura dele, sendo então considerados obstáculos à aprendizagem.

No estudo de Pais (1996), envolvendo alunos entre 11 e 15 anos de idade, submetidos a observarem propriedades geométricas, nos desenhos em perspectiva, foi verificado que eles apresentavam dificuldades em observar a figura como um todo, prestando atenção, somente, a um determinado aspecto gráfico. Enfim, esse teórico evidencia que a representação a partir de um desenho apresenta um nível de complexidade muito maior do que a representação através de um objeto.

Em relação às imagens mentais, associadas aos conceitos geométricos, Pais (1996) pontuou que são de natureza distinta daquelas dos objetos e dos desenhos, além disso, são abstratas. “Pode-se dizer que o indivíduo tem uma dessas imagens quando ele é capaz de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos” (1996, p. 70). Em se tratando dos conceitos geométricos, sabe-se que eles são ideias abstratas, nesse caso, a formação de imagens mentais ocorre, quando se trabalha com objetos, ou desenhos, estimuladores de boas imagens, que são de natureza bem mais complexa do que os objetos e os desenhos (PAIS, 1996).

Enfim, de acordo com Barbosa (2011), a partir de sua leitura de Gutiérrez¹⁰, a imagem mental pode ser entendida como uma representação interna e é criada através do uso dos sentidos para observar as relações espaciais, que podem ser representadas de diversas formas, por exemplo, verbais ou gráficas.

Segundo Pais (1996), no processo de conceitualização, os educandos recorrem às representações através de objetos e desenhos que são mais acessíveis, posteriormente, às imagens mentais. De acordo com ele, no caso da geometria plana, os conceitos são identificados a partir de seus desenhos, por exemplo, um traço e um ponto na lousa, ou no papel representam uma reta e um ponto respectivamente.

Os conceitos em geometria são idealizações de nossa mente. Por exemplo, o conceito de triângulo faz-nos lembrar um objeto que apresenta face triangular, contudo, esse objeto não é um triângulo. Diante disso, para se chegar à imagem mental de uma noção geométrica, muitas vezes recorrem-se às construções. Por exemplo, o hexaedro pode ser construído utilizando diversos materiais tais como papel, plástico dentre outros. Fischbein¹¹ (1993 apud PASSOS, 2000, p. 104), diz-nos que

[...] o conceito de metal é a ideia geral de uma classe de substâncias que têm em comum um número de propriedades como condutor de eletricidade, etc. [...] a imagem de um objeto metálico é a representação sensorial do respectivo objeto (incluindo cor, magnitude, etc.).

Por exemplo, o conceito de poliedros de Platão deve ser compreendido como um grupo de sólidos, em que todas as faces são congruentes, a imagem de um poliedro de Platão pode ser a representação desse sólido, em forma de desenho, ou até mesmo o reconhecimento dele, a partir de um objeto que tenha sua representação.

Além dos quatro elementos defendidos por Fischbein (1993) e Pais (1996), Del Grande¹² (2005, p. 159 apud Passos, 2000, p. 104) acrescenta dois. O primeiro é

A coordenação visual motora, entendida como a habilidade de coordenar a visão com o movimento do corpo. Por exemplo, [...] ligar pontos no papel, juntar blocos de madeira para construir um sólido ou usar a régua para traçar uma reta [...].

¹⁰ GUTIERREZ, Angel. *Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework*. 1996.

¹¹ FISCHBEIN, Efraim. *The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity*. 1993.

¹² DEL GRANDE, John. J. *Percepção espacial e geometria primária*. 2005.

Nesse caso, destacamos o *episódio* de nossa pesquisa, denominado *Um cão chamado Bob*, onde os educandos fizeram ligações para unir objetos localizados em pontos estratégicos, em uma malha quadriculada, sendo que o cão fez um percurso circular, para conseguir alcançá-los.

O segundo é a memória visual, responsável pela “habilidade de se lembrar com precisão de um objeto que não está mais à vista e relacionar suas características com outros objetos, estejam eles à vista ou não”. Essa habilidade é responsável por fazer a criança lembrar-se do objeto tridimensional, visto em outro momento e que possa, posteriormente, representá-lo, na forma plana, ou reconhecê-lo, representado a partir de um dado objeto. Associamos esses atributos ao *episódio* de nossa pesquisa denominado *Percepção tátil*, no qual os educandos, a partir da manipulação tátil e sem o recurso da visão, identificaram as características das embalagens tocadas, que apresentavam formatos de objetos tridimensionais e, em seguida, fizeram isso em forma de desenhos, ou até mesmo planificações.

Indivíduos necessitam de habilidades espaciais, para se relacionar com a natureza e com seus pares. Desse modo, há conhecimentos tridimensionais, que são essenciais ao cotidiano e outros podem ser intrínsecos a profissionais específicos. Em ambos os casos, é preciso que os estudantes tenham uma formação que possibilitem atuar nas mais diversas situações. Enfim,

Há vários níveis de compreensão da percepção espacial. Alguns são necessários e básicos para o dia a dia, outros são solicitados pelos diferentes níveis profissionais do indivíduo. Dessa forma, uma boa formação espacial pode melhorar a adaptação desse indivíduo ao mundo tridimensional, capacitando-o a compreender as diferentes formas e expressões de nossa cultura (ROMANATTO, PASSOS, 2012, p. 18).

Essas habilidades devem ser exploradas na escola. Para isso, é preciso que os estudantes tenham igualdade de oportunidades, para visualizar e trabalhar objetos tridimensionais, isso possibilita o desenvolvimento de noções espaciais necessárias à vida cotidiana (ROMANATTO e PASSOS, 2012).

Diante das afirmações vistas acima, Fonseca e.t al. (2011, p. 73) recomendam “que o estudo da Geometria com as crianças se inicie pelo tratamento dos sólidos geométricos”, pois eles

São os objetos matemáticos mais próximos do mundo sensível e que menor esforço de abstração exigem da criança. Para a idealização das figuras planas, já seria necessário maior esforço de abstração no sentido de, por exemplo, “desmaterializar” a espessura de suas representações (FONSECA e DAVID, 1995, p. 33).

Fonseca et. al. (2011), em conformidade com Lopes & Nasser (1996), que também defendem o início do ensino de geometria a partir dos sólidos geométricos, afirmam que estamos rodeados de estruturas tridimensionais, argumentando que, por meio delas, o aluno terá mais chances de reconhecer conceitos da geometria plana. Por isso, começar o estudo de geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental, com elementos da geometria plana, conforme verificado por nós na literatura, pode não ser aconselhável e isso, possivelmente, produzirá experiências negativas às crianças, pois, de acordo com Fonseca et. al. (2011), as figuras planas são apenas idealizações, uma vez que não possuem espessura, mas o máximo que se pode conseguir é observar as representações dessas formas. Nesse caso, as autoras consideram complexo fazer com que o aluno compreenda o que é um ponto, pois ele não possui dimensão, ou até mesmo uma reta (dotada apenas de comprimento). A explicação dessa complexidade está em função de que o ponto, a reta e o plano serem entes que não estão no espaço sensível. Enfim, as autoras reforçam que, nos anos iniciais, é muito cedo para que se introduzam as noções de segmento, semirreta e ângulo, a partir das definições.

Diante do que foi apresentado até o presente momento, concordamos com Brasil (2008), ao dizer com outras palavras que o caminho tradicionalmente adotado pela escola, quanto à seleção dos conteúdos de geometria, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, caminha em sentido contrário ao da vida. Um trabalho de forma coerente pode ser desenvolvido, com os sólidos geométricos, nessa modalidade de ensino. Para o êxito dessa atividade as crianças devem classificar diversos objetos do cotidiano, delas, levando em conta o agrupamento por sua

Função utilitária, depois por dados perceptivos, como cor, material, tamanho (são as coleções figurais); numa próxima fase a criança organiza coleções não figurais, explicitando o critério utilizado para agrupar os elementos, por fim, ela consegue formar subgrupos dentro de um grupo, atingindo assim as inclusões hierárquicas ao fazer relações entre o todo e suas partes (ROMANATTO, PASSOS, 2012, p. 29).

Em outras palavras:

É interessante que, em um primeiro momento, os estudantes trabalhem em grupo e manipulem um conjunto de sólidos geométricos (cubos, paralelepípedos, outros prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas) e façam a classificação segundo o critério que eles julgarem pertinente. O professor deve acompanhar essa classificação, verificando a coerência e discutindo com a turma os critérios escolhidos. É fundamental que sejam percebidas as diferenças e as semelhanças entre as classes de sólidos e por qual motivo um determinado sólido estaria fora de um grupo (ROMANATTO, PASSOS, 2012, p. 33).

De acordo com os autores, essa tarefa permite aos educandos concluir que há somente dois grupos. Dessa forma, a partir de uma mediação adequada do professor, os estudantes poderão classificar os sólidos em poliedros e corpos que rolam. São essas atividades que oportunizam às crianças descobertas do espaço, que as rodeia. Sendo assim, o trabalho com a geometria para esses estudantes deve

Centrar-se em atividades de manipulação, exploração, percepção, comparação, conexão, classificação, construção, transformação e relação com um grande número de experiências que levem à descoberta do espaço e da forma que a criança realizou anteriormente na Educação Infantil ou mesmo antes de ingressar na escola (ROMANATTO, PASSOS, 2012, p.24).

Percebemos que os anos iniciais do Ensino Fundamental são extensões do trabalho que é realizado em geometria na Educação Infantil, ou até mesmo, conforme texto acima, em experiências anteriores, ou paralelas à escola. Para Romanatto e Passos (2012), a exploração do espaço e das formas promove criatividade, imaginação e o desenvolvimento do sentido estético das crianças.

De acordo com Romanatto e Passos (2012), os conteúdos de geometria, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, devem ser organizados progressivamente, de modo que seja privilegiado o progresso do pensamento geométrico. Assim, é interessante iniciar pela visualização, momento em que as crianças devem perceber o espaço que está a sua volta. Fonseca et. al. (2011) reafirmam que o objetivo principal do ensino de geometria, para essa faixa etária da Educação Básica, refere-se ao ato de perceber e organizar o espaço em que se vive. Nesse caso, o espaço tridimensional se torna essencial para introduzir o estudo da geometria, a partir da observação desse espaço.

Diversos documentos oferecem recomendações para o trabalho com geometria, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, as quais são agrupadas em dois ciclos conforme os PCNs. No primeiro, destinado aos estudantes de 1º, 2º e 3º anos dessa modalidade de ensino; no segundo, proposto para os estudantes do 4º e 5º anos. No primeiro segmento,

Deve-se sempre partir da manipulação de objetos de modo que as crianças possam se situar no espaço em relação às pessoas e aos objetos de diferentes naturezas. Essa manipulação vai permitir-lhes reconhecer o interior e o exterior de um domínio limitado por uma linha ou por uma superfície fechada (ROMANATTO, PASSOS, 2012, p. 25).

No segundo ciclo, conforme Romanatto e Passos (2012), são ampliados os critérios de identificação dos sólidos geométricos. Para os mesmos autores, é o momento em que é feito um trabalho planejado, possibilitando aos estudantes diferenciar os sólidos que rolam dos que não rolam, além disso, deve oportunizar situações de construção desses objetos, com materiais moldáveis. Por exemplo, a confecção do cubo pode possibilitar aos educandos perceberem a existência de faces quadradas, geometricamente congruentes, a partir do recorte deles. Também é importante a observação de distintas planificações do cubo.

Atividades que promovam a diferenciação entre o conceito de cubo e de suas faces são de extrema importância, pois diversas pesquisas apontam dificuldades em compreender a distinção entre esses dois conceitos. Um exemplo dessa dificuldade é relatado por Vasconcelos (2008, p. 78):

Verificamos também que os alunos, após cursarem as quatro primeiras séries do Ensino Fundamental e terem supostamente vivenciado situações relacionadas às figuras não planas e planas, continuavam confundindo seus nomes, chamando, por exemplo, o cubo de quadrado, o paralelepípedo de retângulo, bem como não reconhecendo as mesmas figuras em diferentes posições.

Essa realidade, relatada em nossos caminhos metodológicos, exerceu enorme influência para desenvolvermos nossa pesquisa, juntamente com os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. A pesquisadora Araújo também verificou em sua pesquisa as considerações anteriores.

É fácil encontrar-se entre alunos, das diferentes séries, ou até mesmo entre professores, aqueles que confundem o cubo com o quadrado; não identificam propriedades comuns ao quadrado e ao losango, ou ao quadrado e ao retângulo [...]. Todas essas observações demonstram que a percepção visual do espaço geométrico é confusa e equivocada (ARAUJO, 1994, p. 13).

Essas dificuldades, enfrentadas pelos alunos, no que diz respeito, por exemplo, a diferenciação entre um cubo e uma de suas faces, podem estar relacionada “à atuação didática do professor, que se limita a ‘cobrar’ dos alunos somente o nome das figuras, sem se preocupar com o reconhecimento de propriedades e componentes das figuras, importantes do ponto de vista da Matemática” (PAVANELLO, 2001, p. 183). Em um trabalho mais avançado é preciso que se proponham

Tarefas para que os estudantes reconheçam, a partir da observação e manipulação de sólidos, retas paralelas e retas perpendiculares entre si, podendo representá-las por meio de dobras sucessivas de uma folha de papel e em papel quadriculado. Posteriormente, poderão ser introduzidos instrumentos de desenho como, por exemplo, régua e esquadro (ROMANATTO, PASSOS, 2012, p. 30).

No segundo ciclo, o estudo dos sólidos geométricos prossegue, devendo fazer parte dos cinco anos do Ensino Fundamental. Entretanto, para Romanatto e Passos (2012), é um trabalho gradual, em que a cada ano é essencial enfatizar esse estudo no planejamento dos professores. Nos anos finais do Ensino Fundamental, também é relevante, sempre que possível, e quando o momento oportunizar, rever esses conceitos, claro que, explorando o raciocínio dedutivo dos alunos e os estimulando a formularem hipóteses acerca do aspecto conceitual da geometria.

2.4 Habilidades geométricas

De acordo com Hoffer, interpretado por Manoel (2012), há cinco habilidades geométricas que podem ser desenvolvidas nos alunos, do Ensino Fundamental, são elas: 1) visuais, 2) de aplicação, ou de transferência, 3) de desenho e construção, 4) de comunicação e 5) de lógica. Esse último autor, apoiando-se em Bressan, Bogisic e Crego,¹³ destacou que o desenvolvimento delas pode ocorrer simultaneamente, além disso, a primeira e a terceira

¹³ BRESSAN, A. M.; BOGISIC, B. Y CREGO K. *Razones para enseñar geometria enla educación básica*. 2010.

podem ser desenvolvidas concomitantemente. Apresentaremos resumidamente as características de cada uma dessas habilidades.

2.4.1 Habilidades visuais

Conforme Del Grande, discutido por Manoel (2012), o sentido da visão é responsável por assimilar uma grande parte das informações que recebemos. Entretanto, de acordo com Rêgo, Rêgo e Vieira (2012), é preciso fazer uma diferenciação entre o ato de ver e o de visualizar, onde o primeiro ocorre naturalmente, já o segundo, é um modo de verificar se a imagem é coerente com os aspectos formais. Nesse caso, tornam-se indispensáveis elaborações de atividades que ajudem os educandos a desenvolverem o ato de visualizar.

Nas ideias de Nacarato e Marquesin (2011, p. 122), “em geometria, a habilidade de visualizar pressupõe que se veja o objeto, para que se crie a imagem mental. O conceito exige a palavra, e esta, ao ser pronunciada, designa o conceito”. Quando são oferecidas oportunidades às crianças, para que possam ter contato com as formas geométricas espaciais, estamos contribuindo para que se lembrem em outros contextos desses momentos de manipulação, possibilitando, dessa forma, a assimilação da imagem e o reconhecimento em diversas situações sem que o objeto concreto esteja presente. Perante Fonseca et. al. (2011, p. 78), são as situações de “observação das formas geométricas que constituem o espaço, e na descrição e comparação de suas diferenças, que as crianças vão construindo uma imagem mental, o que lhes possibilitará pensar no objeto na sua ausência”. Pode-se dizer que, para Nacarato e Passos (2003, p. 78), “o estímulo visual (modelos concretos, desenhos, dobraduras, imagens na tela do computador) é o meio que faz avançar o processo de construção de imagens mentais”. Assim,

A visualização pode ser considerada como a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis (NACARATO e PASSOS, 2003, p. 78).

Dessa forma, de acordo com Kaleff (1998), essas crianças que pensaram no objeto, mesmo na sua ausência, podem ter condições de representar o objeto observado, isso poderá

ocorrer através da produção de um esboço, ou de um modelo concreto. Por outro lado, essa representação só poderá ser possível se o estudante teve experiências envolvendo tal objeto, em momentos precedentes.

Bressan, Bogisic e Crego, conforme interpretação de Manoel (2012), asseguram que a visualização ocorre por meio de duas formas de representação: externas e internas. A primeira é quando a criança representa o mental a partir de objetos visuais externos; já a segunda, quando ela consegue representar a nível mental objetos que podem ser visualizados. Manoel (2012, p. 2) oferece-nos, como exemplo, uma atividade em que um hexaedro é colocado diante de uma criança, o que lhe possibilita a visualização, no objeto, de determinadas propriedades, a partir da captação de representações visuais externas: “possui cantos, não rola como a bola, apresenta seis faces”. Porém, no momento em que o professor apresentar somente a palavra *hexaedro*, sendo que a representação desse sólido não está visível aos olhos da criança, ela terá que utilizar uma imagem mental. Assim:

É a partir das experiências pessoais com a forma, cor, textura, dimensões e a manipulação de um objeto físico que as imagens mentais dele serão construídas, permitindo sua visualização ainda que na ausência deste, assim como sua representação por meio de modelos concretos ou desenhos (KALEFF, 1998, p.16).

Além disso, para Barbosa (2011, p. 35), “o simples ato de observar não garante a aprendizagem das propriedades do objeto. Quando o professor propicia a manipulação, construção e compreensão da estrutura do objeto, sua percepção espacial pode ser mais completa para o aluno”. Assim:

É importante que se leve o aluno a vivenciar experiências com diversos tipos de materiais concretos manipulativos, a fim de que ele possa ter a oportunidade de encontrar o meio material que seja mais apropriado à sua percepção sensorial e que mais aguace a sua curiosidade (KALEFF, 1998, p. 17).

Por outro lado, o ato de manipular materiais concretos, que exercem o poder de uma ferramenta didática, não garante a aprendizagem por si só, como já discutimos anteriormente. Esse trabalho deve ser orientado pelo professor, não podendo ser um pretexto para que o tempo da aula transcorra apenas proporcionando manipulações sem reflexões acerca dos conhecimentos matemáticos, que podem ser explorados nessas ferramentas pedagógicas. Por isso, é importante deixar claro:

A simples manipulação de um material concreto não é suficiente para que o aluno construa conceitos matemáticos ou de qualquer natureza. Toda a ação sobre o material precisa ser elemento de discussão e de reflexão, baseadas em questionamentos próprios ou induzidos pelo professor, junto aos colegas ou mediados pelo professor, para que a aprendizagem seja efetiva e significativa (RÊGO, RÊGO, VIEIRA, 2012, p. 18).

Como já é de conhecimento, a nossa pretensão residia no sentido de que as crianças iniciassem seu contato com a geometria, a partir de experiências que envolviam objetos concretos, isto é, exploração de conceitos geométricos, levando em consideração aspectos preliminares da geometria espacial. Em um segundo momento, introduzimos o estudo da geometria plana, a partir da exploração da espacial. Desse modo:

A Geometria na pré-escola e no 1º grau inicia-se pela “percepção de” e “ação sobre” os objetos no mundo exterior. Esses objetos são inicialmente percebidos no espaço, depois observados e analisados, muitas propriedades são identificadas e descritas verbalmente, levando a uma classificação e mais tarde uma conceituação (FAINGUELERNT, 1999, p. 55).

A observação e manipulação de objetos, do cotidiano, dos educandos, são feitas por eles naturalmente, pois estão constantemente lidando com situações onde se presencia representações de figuras geométricas espaciais. Por exemplo, na rotina diária das donas de casas é perceptível a contribuição de seus filhos nos afazeres domésticos, entre eles as crianças têm contato diretamente com objetos, tais como lata de óleo, sabão em pó, fogão a gás, tonel, cisterna, tanque, entre outros.

2.4.2 Desenho e construção

De acordo com Manoel (2012), essa habilidade está relacionada ao uso de representações externas, que são consideradas, na matemática, como “uma escritura, um símbolo, um traço, um desenho, uma construção, com os quais se pode dar ideia de um conceito ou de uma imagem interna relacionada com a matemática (figura, número, vetor, função, etc.)” (BRESSAN, BOGISIC e GRECO, 2010, p. 41, apud MANOEL, 2012, p. 3).

Parafraseando Broitman e Itzcovich¹⁴, mencionado por Manoel (2012, p. 3), há uma diferença entre os conceitos de figura e de desenho, esse refere-se a “representações materiais

¹⁴ BROITMAN, C.; ITZCOVICH, H. – *Geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: problemas de seu ensino, problema para seu ensino*. 2008.

de objetos teóricos, matemáticos e ideias que somente têm existência no interior da geometria”. Os objetos teóricos são denominados como figuras. Sendo assim:

As representações ou modelos geométricos externos confeccionados pelos docentes ou realizados pelos próprios alunos não somente servem para evidenciar conceitos e imagens visuais internas, mas também são meios de estudo das propriedades geométricas, servindo de base à intuição e a processos indutivos e dedutivos de raciocínio (BRESSAN, BOGISIC, CREGO, 2010, p. 41 apud MANOEL, 2012, p. 3).

Encontramos, em Manoel (2012), conclusões acerca das representações feitas pelos alunos, dos anos iniciais do Ensino Fundamental. As últimas possibilitam o desenvolvimento de habilidades visuais e de raciocínio, induzindo-os a expressarem o conhecimento que possui. Para o autor, a grande vantagem é o fato de o professor poder ter um direcionamento de sua prática em sala de aula levando em conta o registro dos alunos. Desse modo, para Manoel (2007, p. 3), “se um aluno ao desenhar uma circunferência não se preocupar em representar uma figura fechada, isto pode ser um indicativo de que este ainda não desenvolveu o conceito topológico de continuidade”. Os desenhos feitos pelos alunos contribuem imensamente, pois

Muitas vezes, o registro pictórico de uma estratégia que o aluno faz traz muito mais detalhes do que o registro matemático, por exemplo. Da mesma forma que o registro escrito – em linguagem corrente ou matemática – o pictórico também precisa ser incentivado e valorizado (NACARATO, MENGALI, e PASSOS, 2014, p. 45).

Em nossa pesquisa, deixamos os educandos livres para fazerem seus registros de diversas formas, sejam elas através de textos, ou pictórica.

Apoiando-se nas ideias de Fonseca (2001), Manoel (2007) enfatizou a importância de relacionar a geometria ensinada, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a outros conteúdos escolares.

Com efeito, os conhecimentos geométricos possibilitam a elaboração de representações mais facilmente traduzíveis em recursos visuais (gráficos, diagramas, organogramas, etc.) para diversos conceitos relacionados a tais conteúdos. Dessa maneira, a Geometria surge também como um aporte relevante para a compreensão de outros campos do conhecimento (FONSECA et. al. 2011, p. 99).

Enfim, Manoel (2012) argumentou que as habilidades de desenho e construção, possivelmente, contribuem para o fortalecimento do pensamento indutivo e dedutivo das crianças.

2.4.3 Comunicação

Conforme Manoel (2012), os artigos, que tratam de temas como a educação, ao se referirem às habilidades geométricas, destacam aquelas de visualização e representação, isto é, desenho e construção. Entretanto, o autor, embasado em outros teóricos, declarou a importância dos educandos saberem expressar suas ideias, de forma verbal e simbólica. Desse modo, deve-se dar relevância também à habilidade de comunicação, pois ela é fundamental para o desenvolvimento da aprendizagem matemática. A comunicação foi outro recurso interconectado com os demais, em nossa pesquisa, isso porque, nas atividades que propomos aos alunos, eles participaram da produção de relatórios textuais, surgidos a partir do diálogo deles e de atividades que previam o desenvolvimento da oralidade, no momento em que estavam interagindo e trocando informações.

Entende-se a habilidade de comunicação, segundo Bressan, Bogisic, Crego (2010, p.59), citado por Manoel (2012, p. 4), como “a competência do aluno para ler, interpretar e comunicar com sentido, em forma oral e escrita, informação (neste caso geométrica), usando o vocabulário e os símbolos da linguagem matemática de forma adequada”. A partir de sua leitura de Hoffer¹⁵, Manoel (2012) percebeu que, nas aulas de geometria, o uso da linguagem é mais presente, isso ocorre com mais frequência nela do que com outros conteúdos matemáticos. Essa riqueza deve-se ao imenso vocabulário oferecido pela geometria, assim como suas definições são mais precisas, se compararmos às demais áreas da Matemática.

Manoel (2012) contribuiu dizendo que a geometria auxilia tanto o desenvolvimento da linguagem Matemática formal, quanto da comunicação oral, vivenciada no dia-a-dia dos educandos. Ele oferece embasamento teórico para essa afirmação, pois

Nossa linguagem verbal diária possui muitos termos geométricos, por exemplo: ponto, reta, plano, curva, ângulo, paralela, círculos, quadrados, perpendicular etc. Se nos comunicarmos com outros acerca da localização, do tamanho, ou da forma de um objeto, a terminologia geométrica é essencial. Em geral, o vocabulário geométrico básico nos permite comunicarmos e entendermos com maior precisão acerca das observações sobre o mundo em

¹⁵HOFFER, A. *Geometry is more than proof*.1981.

que vivemos (BRESSAN; BOGISIC; CREGO, 2010, p. 9 apud MANOEL, 2012, p. 5).

Sinteticamente, essas habilidades:

São fundamentais não apenas para a formação acadêmica do aluno, mas também para atender a uma necessidade de comunicação em sua vida social, considerando que a linguagem geométrica está presente não apenas em livros de matemática, mas também em jornais, televisão e revistas; até mesmo ao pedir informação para encontrar uma determinada rua, esta linguagem se torna imprescindível para a vida do aluno e, por isso, deve ser trabalhada já nos primeiros anos de escolaridade (MANOEL, 2012, p. 5).

Os indivíduos, em suas experiências do mundo real, estão, constantemente, lidando com termos geométricos, no entanto, eles não são conceituados corretamente, o que não é um problema muito grave, pois consideramos como de maior importância a percepção que aqueles possuem dos objetos geométricos do mundo real, mesmo que esses não sejam classificados de acordo com a geometria formal.

2.4.4 Lógica

Uma possível classificação para os níveis de raciocínio das pessoas em geometria foi elaborada pelo casal Van Hiele. Nas ideias de Manoel (2012), é preciso que, no pré-núncio da Educação Básica, desenvolvam-se dois, dentre os cinco níveis, são eles o nível de visualização e o da análise. O primeiro refere-se à visualização da figura como um todo, não se dá importância aos componentes, ou características dessa figura geométrica, já o segundo, é aquele onde se faz uma análise de conceitos geométricos, também é feita uma identificação de propriedades e características de figuras através da observação e da experimentação.

Conforme Lorenzato (1995, p. 5), a geometria exige do aluno uma maneira distinta de raciocinar, “isso quer dizer que ser bom conhecedor de Aritmética ou de Álgebra não é suficiente para resolver problemas de Geometria”. Além disso, para Brasil (1997, p. 56), “o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa”. As contribuições da geometria, para o desenvolvimento de crianças, são inquestionáveis, especificamente quando estamos trabalhando noções geométricas espaciais, pois

A percepção espacial desempenha um papel fundamental no estudo da Geometria. Contribui para a aprendizagem de números e medidas, estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças entre objetos e quantidades e auxilia na identificação de regularidades ou não (ROMANATTO, PASSOS, 2012, p. 18).

Desse modo, quando os estudantes conseguem se desenvolver geometricamente, a partir de um trabalho planejado, poderão ter uma melhor compreensão de outros temas específicos da Matemática.

Miguel e Vilela (2008), fundamentando-se nos níveis de Van Hiele, contribuem afirmando que o ato de raciocinar geometricamente é distinto de outros tipos de raciocínio. Por exemplo, na álgebra e no cálculo “quem aprende pode situar-se a respeito da geometria em um nível de raciocínio distinto do que apresenta na álgebra e no cálculo”. Reforçando as ideias desse autor, os PCNs (BRASIL, 1997, p. 56) destacaram que

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

Destarte, o desenvolvimento do pensamento geométrico é de extrema importância para os educandos,

Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida (LORENZATO, 1995, p.5).

Finalmente, Manoel (2012), fundamentando-se nos preceitos de Lorenzato (1995), justificou que é importante o ensino de geometria, desde os anos iniciais da escolaridade, pois o pensamento geométrico não pode ser desenvolvido por outras áreas da Matemática. Entretanto, um bom conhecedor das ideias geométricas poderá também se desenvolver em outros ramos da Matemática.

Conforme Brasil (1997, p. 127), o pensamento geométrico é desenvolvido “inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades”. Daí a importância de proporcionar momentos em que as crianças possam manipular objetos que apresentem distintos formatos, procurando sempre fazer comparativos entre diferenças e semelhanças entre esses materiais concretos.

2.4.5 Aplicação ou transferência

Conforme Bressan, Bogisic e Crego (2010, p. 87) citado por Manoel (2012, p. 6), essas habilidades permitem “utilizar, neste caso a geometria, para explicar fenômenos, fatos ou conceitos e resolver problemas de dentro e fora da matemática”. De acordo com Manoel (2012), é a partir dessas habilidades que os educandos utilizam o seu raciocínio em experiências novas, ou em outros contextos que não são considerados comuns para esses sujeitos.

Acerca das potencialidades que a geometria proporciona aos indivíduos que a descobrem por conta própria, encontramos esse relato:

A Geometria é uma das melhores oportunidades que existem para aprender como matematizar a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também um domínio aberto às investigações, e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. Até que possam de algum modo ser dispensadas, as formas no espaço são uma guia insubstituível para a pesquisa e a descoberta (FREUDENTHAL, 1973, p. 407 apud FONSECA, 2002 p. 92-93).

Manoel (2012) confirmou que a geometria possibilita relacionar certos conceitos matemáticos e a realidade. Maia (2000) ressaltou que a geometria é composta de conteúdo, fortemente relacionado com a realidade, entretanto, a escola ainda enfrenta dificuldades em relacionar a geometria com o cotidiano dos alunos. Nesse caso, Maia (2000, p. 32) desenvolveu um trabalho em geometria, pautado em abstrações, enfatizando que o ensino de geometria deve levar em conta “tanto o conhecimento empírico, quanto o teórico”. Disso podemos inferir que o aspecto teórico recebe maior ênfase. Em nossa pesquisa equilibramos esses dois aspectos. Assim, a intenção foi proporcionar descobertas de conceitos geométricos

a partir da intuição, do sensível, do perceptível para, em seguida, sistematizar o raciocínio lógico-dedutivo.

Para Kaleff (1994), nas séries iniciais da escolarização, muitas vezes são proporcionadas atividades, nas aulas de Matemática, onde os educandos concebem-nas como um divertimento, por exemplo, quebra-cabeças, jogos de montar, pinturas, colagens etc. Contudo, para a mesma autora, essas atividades são importantes para o desenvolvimento da intuição espacial e de habilidades para visualizar, desenhar, interpretar e construir, assim como a formação do pensamento geométrico dedutivo.

2.5 Aspectos intuitivos, experimentais e teóricos do conhecimento geométrico

Estudos sobre como ocorre o conhecimento geométrico foram discutidos por diversos autores, a exemplo de Pais (1996) e Nacarato et. al. (2011). Esses aspectos, para o primeiro teórico, correlacionam-se com os elementos que interferem nos processos de ensino e aprendizagem de geometria, isto é, com o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental. De acordo com Pais (1996), esse tipo de conhecimento está ancorado em três aspectos interconectados: o intuitivo, o experimental e o teórico. O primeiro é:

Uma forma de conhecimento imediato que está sempre disponível no espírito das pessoas e cuja explicitação não requer uma dedução racional guiada por uma sequência lógica de argumentos deduzidos uns dos outros. Um conhecimento baseado na intuição caracteriza-se, antes de tudo, por uma funcionalidade quase imediata quando comparada com o desenvolvimento necessário de uma sequência dedutiva do raciocínio lógico. Mas esta disponibilidade é evidentemente relativa ao conjunto de conhecimentos já acumulados pelo sujeito. O que pode ser intuitivo e evidente para uma pessoa pode não o ser para outra (PAIS, 1996, p. 72).

Pautada nessa concepção, Farias (2008) destacou a geometria como sendo uma parte da Matemática em que o aspecto intuitivo é mais presente do que os outros, principalmente, em se tratando dos anos iniciais da escolarização, sendo assim, é um conteúdo que não pode ficar fora da formação do aluno desse nível da Educação Básica. Por outro lado, esse tipo de conhecimento deve ser explorado pelo professor, para que o aluno possa migrar para os aspectos mencionados posteriormente.

Nacarato e Andrade (2004), fundamentando-se em Pais (1996), ponderam que o objetivo do ensino de geometria é ter um bom desenvolvimento nos aspectos intuitivo e experimental, chegando-se ao teórico. Para Farias (2008), o aspecto intuitivo e experimental

são indissociáveis, exercendo importante função para uma sistematização teórica. Pais (1996) ofereceu como exemplo os axiomas da geometria euclidiana, quando se refere ao aspecto intuitivo. O progresso do aspecto intuitivo de cada criança estará em função das experiências que cada uma teve em seus primeiros anos de vida, assim como nas proporcionadas pela escola. Para Maia (2000, p. 26), “a geometria é considerada como um conteúdo de ensino que se situa entre a matemática concreta e a matemática abstrata”, ou seja, é uma ponte que permite migrar dos aspectos práticos para o teórico, científico ou abstrato.

No que dizem respeito ao aspecto experimental, os Parâmetros Curriculares Nacionais dão fortes indicativos no bloco de conteúdos Espaço e Forma, para que esse tipo de conhecimento seja explorado, a partir de objetos que possam ser manipulados, ou até mesmo recorrendo ao conhecimento intuitivo das crianças. Além disso, Pais (1996, p. 66) reforçou que o trabalho com os elementos experimentais possibilitam a utilização dos recursos didáticos, para o ensino de geometria, principalmente, nas séries iniciais da escolarização, permitindo que as crianças transitem “de um nível pré-categorial para o mundo das idéias abstratas”. Contudo, alertou no sentido de que esse ensino não seja reduzido ao aspecto experimental, “o que negaria a essência do conhecimento geométrico”. O que nos permite concluir, como mencionamos em momentos precedentes, que os aspectos intuitivos e experimentais estão interconectados, isso é um aliado para a formação do aspecto teórico, que também está fundido nos dois anteriores, sendo esses essenciais para o teórico.

Para exemplificar o aspecto teórico, ilustraremos uma situação trazida por Pais (1996, p. 72), quando questiona: “uma reta que passa por um ponto que é interior à região limitada por uma circunferência vai interceptar ou não essa circunferência?” Conforme o autor, os alunos que apresentam alguma experiência em geometria têm condições de afirmar que a reta intercepta a circunferência, assim como, entendem que isso ocorrerá em dois pontos. Esse tipo de conhecimento dos alunos é intuitivo, ele ocorre de imediato, a partir de experiências vivenciadas.

Quando os educandos são levados a fazer uma construção, a partir de desenhos acerca de tal afirmação, estão desenvolvendo o aspecto experimental. Diante disso, Pais (1996) afirmou que o desenho, quando é utilizado para comprovar uma proposição, é uma forma de conhecimento experimental. Por outro lado, o exemplo trazido em questão também pode ser verificado por meio de uma demonstração, sem que sejam utilizados desenhos, ou intuições. Nesse caso temos a evidência do aspecto teórico do conhecimento geométrico.

Os aspectos intuitivos, experimentais e teóricos, propostos por Pais (1996), têm fortes características com as faces da construção do conhecimento geométrico, investigado por

Machado (2005). A partir da leitura deles, depreendemos relações entre o aspecto intuitivo e as faces da percepção e construção, já o aspecto experimental relaciona-se com a representação e o teórico com a concepção. Essa linha de pensamento será nosso objeto de estudo da próxima seção.

2.6 As faces da construção do conhecimento geométrico

Machado (2005) alerta que o ensino de geometria está polarizado em duas situações. Na primeira, o destaque é dado às atividades que envolvem observação e manipulação de objetos concretos, assim como no reconhecimento de formas mais usuais, a partir do desenvolvimento de atividades empíricas. Na segunda, encontramos a sistematização do conhecimento geométrico. Nesse momento, as atenções estão voltadas para as

Definições precisas, o enunciado cuidadoso das propriedades, o encandeamento de proposições nas demonstrações formais ou informais de certos resultados, que são os teoremas. É como se as duas faces – percepção e concepção – constituíssem um diedro que compreendesse todos os aspectos dos processos cognitivos (MACHADO, 2005, p. 51).

Nossa pesquisa pretendeu desenvolver um conjunto de atividades que não somente privilegiasse momentos de construção, manipulação, observação e classificação das formas tridimensionais, como também destacamos os aspectos teóricos e conceptivos do conhecimento geométrico. Concordamos quando Machado diz que

Nas quatro séries iniciais da escolarização, as atividades relacionadas com a geometria resumem-se a uma das faces, de cunho perceptivo; já nas últimas séries do primeiro grau, quando, a julgar pelos programas curriculares, se adentra verdadeiramente o assunto, o centro de gravidade da ação docente desloca-se para a outra face, a do exercício da lógica, dos elementos conceituais (MACHADO, 2005, p. 51).

Lauro (2007) incluiu na face conceptiva o Ensino Médio e o Superior. Esse contexto foi simbolizado por Machado como sendo um diedro. É como se a face perceptiva fosse explorada apenas nas séries iniciais e a conceptiva nos anos finais do Ensino Fundamental. O problema reside no fato de que não há retorno de uma face para exemplificar a outra. Machado (2005, p. 53) identificou essa problemática da seguinte forma: “É como se a geometria fosse organizada segundo um vetor, com origem nas atividades perceptivas e extremidade na sistematização formal”.

Para a construção do conhecimento geométrico, Machado (2005) recomendou que a polarização empírico/formal seja substituída por quatro faces, quais sejam: percepção, construção, representação e concepção. Ao mesmo tempo, alertou para o fato de que não são fases, tipo as da lua, uma vez que essas se sucedem linearmente e recorrente, obedecendo a determinados períodos de tempo. Para Machado (2005), é possível estabelecer uma analogia entre as faces do conhecimento geométrico e as do tetraedro (Figura1), que apresentam elementos comuns. Por exemplo, duas a duas, as faces desse poliedro são ligadas por arestas, ou seja, essas representam a parte comum entre duas faces. Da mesma forma, cada face relaciona-se com as demais, o mesmo ocorre com os processos geométricos. A partir dessa analogia, Machado (2005, p. 54) utilizou metáforas, para confirmar que é possível “apreender não apenas o significado e as funções do ensino de geometria, como também alguns elementos básicos na dinâmica dos processos cognitivos de uma maneira geral”.

Figura 1: O tetraedro: percepção/construção/representação/concepção



(LAURO, 2007, p. 25).

Lauro (2007), a partir de interpretações de suas leituras em Machado (2005), destacou que

A representação do processo de ensino/aprendizagem em Geometria por meio de um tetraedro parece ser interessante e satisfatória, por não privilegiar nenhuma de suas faces, mas distribuindo igualmente a sua importância, obtendo um sólido geométrico que se apóia sobre qualquer uma delas (LAURO, 2007, p. 25).

A face da representação em nossa pesquisa foi bastante explorada, uma vez que, em diversas atividades induzimos os alunos participantes a representarem suas soluções, por meio de desenhos. Por exemplo, no episódio *Percepção tátil* (descrito nos caminhos metodológicos) os educandos descreveram suas suspeitas, acerca do objeto manipulado na urna, por meio de produções textuais, ou de desenhos. Isso também pode ser percebido no episódio *Eu vou para a escola*, em que nele, os estudantes fizeram o trajeto do itinerário realizado de suas casas à escola. No entanto, nem sempre essas atividades são valorizadas

“como elementos fundamentais dos processos cognitivos, sendo, muitas vezes, concebidas tendo em vista primordialmente alcançar-se, o mais rapidamente possível, a organização conceitual” (MACHADO, 2005, p. 54).

Acreditamos que esse é o momento oportuno para definirmos as faces do conhecimento geométrico, embora já tenhamos apresentado noções preliminares sobre elas. Conforme Lauro (2007), manipular, observar objetos concretos, a partir da sensibilidade, e o reconhecimento das principais características das formas mais usuais, as quais estão, constantemente, visíveis, ao nosso redor, são elementos que identificam a face perceptiva e ocorre através da realização de atividades empíricas. Para a autora, é preciso desenvolver um trabalho desde os anos iniciais da escolarização, pautado nessa face e relacioná-la com as demais.

A produção de materiais, destinados à manipulação, através de inúmeros recursos, está enquadrada na face denominada construção. Lauro (2007, p. 26) declarou que “a construção reforça a percepção, bem como essa última estimula a construção”. Essa face é muito presente em atividades escolares para alunos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, porém, para Machado (2005), não é valorizada como deveria ser nos anos seguintes, isso acontece porque é considerada como uma atividade infantil, ou de caráter profissional, isto é, destina-se a certas profissões. Sobre o que expomos:

Constroem as crianças e os engenheiros ou os arquitetos, excluindo-se tal atividade dos anos escolares intermediários, como se ela fosse simples demais ou técnica demais. Em qualquer nível, no entanto, a construção pode ser uma atividade extremamente fecunda, que exige não apenas habilidade manual, mas também capacidade de conceber e representar (MACHADO, 1999, p. 145).

Para Lauro (2007), a representação diz respeito à reprodução, através de desenhos, dos objetos que são percebidos, ou construídos. Destacamos nessa pesquisa os desenhos envolvendo itinerários e os das planificações de embalagens representativas dos poliedros. “Em qualquer um desses contextos, a representação favorece e é favorecida pela percepção e pela construção” (LAURO, 2007, p. 27).

Sobre a concepção:

Diz respeito à sistematização do conhecimento geométrico; ao exercício da lógica, aos elementos conceituais, onde têm predomínio as definições formais, o enunciado preciso de propriedades, proposições e teoremas com

suas demonstrações, sejam elas formais ou informais. A concepção é favorecida pela percepção, representação e construção, mas também favorece essas dimensões (LAURO, 2007, p. 27).

Essa face não foi explorada em seu sentido amplo, uma vez que, desenvolvemos um trabalho voltado para alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Ano em que os objetivos para o ensino de geometria são mais de natureza perceptiva, empírica, a partir do desenvolvimento de habilidades espaciais, da possibilidade de saber orientar-se, utilizando um vocabulário geométrico conveniente. Contudo, as faces precedentes, desenvolvidas através de nossas atividades, contribuíram para um amadurecimento da face conceptiva, até porque o entendimento dessa última está em função de um bom trabalho nas anteriores. Por outro lado, no episódio *Construindo esqueletos de poliedros*, os discentes deduziram, a partir da observação das representações de sólidos, feitas com palitos de churrasco, que somente cinco objetos apresentavam as faces congruentes, assim como identificaram que para cada vértice convergiam o mesmo número de arestas, esses momentos mostraram o desenvolvimento da face conceptiva que os discentes adquiriram.

Enfim, quanto à importância, dessas quatro faces, para a construção do conhecimento geométrico, Machado (2005, p. 55) argumentou que:

É tão importante transitar, como uma criança, da percepção à construção, daí à representação e, então à concepção, quanto o é realizar o percurso do engenheiro ou do arquiteto, que concebe o objeto geométrico antes de representá-lo e construí-lo, e só então torná-lo palpável.

É notória nossa defesa, por um ensino de geometria, iniciando da percepção/observação e realização de atividades empíricas, voltadas para o reconhecimento de características dos objetos tridimensionais para, em seguida, a partir deles, explorarmos os elementos da geometria plana, uma vez que, consideramos ser necessário um esforço maior para serem compreendidos. Nesse caso, acreditamos que nossa linha de pensamento está ancorada no fato de que esse ensino “é feito de maneira linear, obedecendo a uma ordem hierárquica, partindo do mais simples – percepção – que constitui um conjunto de pré-requisitos, em direção ao mais complexo – concepção” (LAURO, 2007, p. 20). Todavia, tomamos cuidado para que a migração da face perceptiva para a conceptiva não seja feita de maneira brusca, sem levar em consideração as demais faces, muito menos infantilizamos o estágio inicial para, logo em seguida, romper inesperadamente, esses cuidados também foram apresentados por Lauro (2007). Corroborando as ideias precedentes:

Para a compreensão da dinâmica do processo de construção do conhecimento geométrico, a polarização entre as atividades perceptivas e a sistematização conceitual parece claramente insatisfatória. Por um lado, a limitação a atividades “concretas”, de manipulação é insuficiente, mesmo nas séries iniciais do ensino; as atividades operatórias mais fecundas costumam relacionar-se diretamente com a realização de algum projeto, ainda que bastante incipiente, no nível das concepções. Por outro lado, ainda que pareça possível durante certos períodos, é insólito – e muito mais difícil – trabalhar-se apenas no nível das concepções, sem relações diretas com objetos materiais, ainda que através de suas representações. Em qualquer situação, é fundamental a articulação entre as atividades perceptivas e os momentos de elaboração conceitual, ou o estabelecimento de relações mais consistentes entre o conhecimento empírico e sua sistematização formal (MACHADO, 2005, p. 52).

Do que foi apresentado, não adianta privilegiar apenas a face perceptiva, muito menos alongar-se na conceitual. É preciso movimentos de ir e vir, adiantar e retroceder para, posteriormente, crescer em termos de conhecimentos geométricos. Mas, para que isso ocorra, é condição necessária que os professores, desses anos, estejam preparados, no sentido de promover atividades que desenvolvam as quatro faces de forma interconectada, assim como

Átomos em uma estrutura com características moleculares, que não pode ser subdividida sem que se destruam as propriedades fundamentais da substância correspondente. Isoladamente, cada uma das faces desse tetraedro tem uma importância muito restrita, seja a percepção que não prepara o terreno, para a transcendência da realidade palpável, ou a concepção que se pretende inteiramente desvinculada do mundo físico, ou ainda a construção ou a representação sem compromissos com a ação, que não resultam da realização de um projeto – ou não visam a isso (MACHADO, 2005, p. 55).

Nosso trabalho está pautado em recomendações de pesquisadores que se debruçam sobre a importância de promover um ensino de geometria, embasado nas propostas curriculares. Nesse caso,

Quando o trabalho é estruturado com a preocupação de que o aluno perceba, represente, construa e conceba formas geométricas, ele tem chance de desenvolver habilidades de visualização, percepção espacial, análise e criatividade. As dificuldades de reconhecimento de formas geométricas e de suas propriedades e de relacionar diferentes propriedades de uma mesma figura ou de um conjunto de figuras ficam superadas, pois o aluno deixa de perceber as formas como um todo para se deter em partes e em propriedades da figura, passando a um estágio de pensamento mais analítico e dedutivo (SOUZA et. al., 2003, p. 4).

Depreendemos que as quatro faces do tetraedro, investigado por Machado (2005), são vias de acesso para o desenvolvimento de diversas habilidades geométricas, já expostas anteriormente. Isso mostra mais uma vez que fizemos escolhas adequadas, em nossa teoria. Quanto ao segundo pensamento, acreditamos que uma possibilidade seja o reconhecimento dessas formas geométricas, a partir da exploração dos objetos tridimensionais, fazendo com que o aluno decomponha-os em figuras planas. Essa ideia foi um recurso utilizado em nossas atividades.

Machado (2005) trouxe outra contribuição para nossa pesquisa, relacionada ao problema exposto em parágrafos bem anteriores, quanto à confusão que os educandos têm, de diferenciar uma figura plana de outra espacial, que contenha em suas faces formatos planos. Para o autor:

Poucos são os professores que buscam de modo consciente o desenvolvimento nos alunos da capacidade de representar. Frequentemente, os alunos são instados a desenhar sem qualquer orientação específica, e considera-se natural que “vejam” os objetos tridimensionais através de suas representações planas, classificando-se os recalcitrantes como “carentes de visão espacial”. Tal capacidade de transitar do objeto para a representação plana e vice-versa, sem dúvida é passível de ser desenvolvida, competindo à escola a realização de tal tarefa (MACHADO, 2005, p. 55).

Esperamos ter contribuído, com os estudantes, no sentido de que eles pudessem desenvolver seus raciocínios espaciais, isso requer, que demonstrem saber gerar determinada imagem, fazer análises de imagens e depois responder questões acerca delas, fazer transformações e operações sobre as imagens “e utilizar imagens em processos envolvendo outras operações mentais” (RÊGO, RÊGO, VIEIRA, 2012, p. 15). Em se tratando da geometria plana, investimos na conectividade das quatro faces de Machado (2005), para que se tenha um bom nível na face conceitual e, conseqüentemente, um desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo.

Alguns esclarecimentos extras, sobre essa subseção, são pertinentes, para serem comentados agora. Primeiro, quando defendemos, nesse estudo, um percurso para o ensino de geometria, a ser trabalhado, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tivemos a intenção de privilegiar aspectos concernentes a uma geometria empírica, sensível e atrelada ao cotidiano dos estudantes para, em seguida, estudar conteúdos da geometria plana, explorando as potencialidades da espacial, ou seja, um estudo pautado do espaço ao plano. Estamos cientes de que essa ideia *do concreto ao abstrato* é muitas vezes compreendida equivocadamente, pois

O item do concreto ao abstrato indica que, a partir da manipulação de objetos concretos, a criança desenvolverá o raciocínio abstrato. O papel do professor seria o de organizar as atividades matemáticas e os materiais cumpririam um papel de autoinstrução. Nessa perspectiva, o concreto e o abstrato se caracterizam como duas realidades dissociadas (AMARILHA, 2009, p. 65).

No entanto, conforme a pesquisadora elencada, essa dissociação não existe sob o ponto de vista do indivíduo, que não faz a separação entre a ação intelectual e a física, na prática. Da ideia precedente, justificamos nosso segundo ponto, isto é, tanto a geometria espacial, quanto à plana, são relevantes para desenvolver o pensamento geométrico, dos alunos, e futuros cidadãos. Diante disso, a ordem estabelecida por nós, em relação à inserção do ensino de geometria, para os anos iniciais da escolarização está fundamentada em algumas dissertações, teses, documentos curriculares e periódicos. Por outro lado, desde que o trabalho com a geometria, para esses alunos, seja vinculado ao cotidiano deles, de modo que, possam passear entre as duas geometrias, essa ordem é apenas uma proposta.

TERCEIRO CAPÍTULO – IMPLICAÇÕES DA TEORIA SOCIOCULTURAL DE VYGOTSKY

3.1 Apresentação

Neste capítulo, teceremos alguns comentários acerca do desenvolvimento e aprendizado humano, assim como suas relações. Adentramos no contexto das crianças em idade escolar, e apontamos três grupos de teóricos que tinham concepções distintas dessa relação. O primeiro defendia que os processos de desenvolvimento ocorrem antes dos processos de aprendizado; o segundo, que os dois ocorrem simultaneamente; e o terceiro, investia na ideia de que aprendizado e desenvolvimento não coincidem. Vygotsky não aceitava as três posições teóricas, mas admitiu que elas fossem essenciais, para a formulação de sua teoria, acerca dessa relação. Nesse caso, apresentamos o posicionamento de Vygotsky, quanto ao conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal e suas implicações para a educação. Em seguida, descrevemos comentários sobre as implicações do desenho para o desenvolvimento de crianças. Por fim, fazemos alusões sobre a relevância dos conceitos científicos e espontâneos, fato que só foi percebido no término de nossa pesquisa.

3.2 Aquisição de conhecimentos a partir da Teoria Sociocultural

Conforme leituras de Almeida (2011, p. 27), em Vygotsky e Piaget, as divergências, em determinados pontos, entre esses teóricos não impediram que defendessem um mesmo pressuposto, isto é, “ambos tinham concepções de que a evolução da capacidade intelectual do ser humano na constituição do conhecimento sofre interferências de fatores internos e externos ao sujeito”. Os dois consideravam o homem um ser ativo e reflexivo. Vygotsky defendia que esse construía conhecimentos ao longo de sua história, pois o ser humano faz parte da cultura em que está inserido, não podendo ser analisado sem relacioná-lo com o meio cultural em que faz parte. Nesse sentido, nas interpretações de Almeida (2011, p. 28), “Vygotsky considera o ser humano como parte inseparável da cultura, não podendo ser estudado seu desenvolvimento e seu comportamento de forma dissociada, de uma análise do contexto cultural em que ele está inserido”.

Nos trabalhos de Vygotsky, são perceptíveis os esforços no tocante às investigações, com relação ao desenvolvimento e aprendizado humano, como também suas relações, tanto que Oliveira (1997, p. 56) fez declarações acerca disso em seus textos: “o desenvolvimento humano, o aprendizado e as relações entre desenvolvimento e aprendizado são temas centrais nos trabalhos de Vygotsky”. As considerações sobre essas duas noções foram extremamente importantes para que pudéssemos compreender as relações ocorridas entre os integrantes de cada grupo, durante a execução das atividades propostas nessa pesquisa.

Entendemos, a partir de interpretações em Vygotsky (2007), que a relação entre aprendizado e desenvolvimento, em crianças, em idade escolar, gerou diversos pontos obscuros, que levaram a interpretações equivocadas. Dessa relação, conforme o teórico, pode-se classificar três grupos de teorias, defendidas por investigadores, que as representaram: o primeiro defendia o ponto de vista de que os processos de desenvolvimento ocorrem antes dos processos de aprendizado, isto é, o desenvolvimento não depende do aprendizado, além disso, esse se beneficia dos avanços daquele, ao invés de oferecer impulsos de modo que altere a trajetória dessa relação. Um contexto que retrata essas ideias pode ser observado:

Em estudos experimentais sobre o desenvolvimento do ato de pensar em crianças em idade escolar, tem-se admitido que processos como dedução, compreensão, evolução das noções de mundo, interpretação da causalidade física, o domínio das formas lógicas de pensamento e o domínio da lógica abstrata ocorrem todos por si mesmo, sem nenhuma influência do aprendizado escolar (VYGOTSKY, 2007, p. 88).

Conforme as ideias do primeiro grupo de teóricos, abordados precedentemente, Vygotsky (2007, p. 90) informa-nos que a defesa deles é notável, em considerar que “os ciclos de desenvolvimento precedem os ciclos de aprendizado; a maturação precede o aprendizado e a instrução deve seguir o crescimento mental”. Isso torna claro que os defensores dessa teoria entendem esses dois processos como se ocorressem em tempos distintos, onde o desenvolvimento antecede o aprendizado. Vygotsky alertou para o fato de que esses teóricos não levaram em conta as relações temporais dos dois processos. Diante disso ele deixou claro que

Uma vez que essa abordagem se baseia na premissa de que o aprendizado segue a trilha do desenvolvimento e que o desenvolvimento sempre se adianta ao aprendizado, ela exclui a noção de que o aprendizado pode ter um papel no curso do desenvolvimento ou maturação daquelas funções ativadas durante o próprio processo do aprendizado (VYGOTSKY, 2007, p. 89).

Entendemos que, em diversas situações de nosso dia-a-dia, deparamo-nos com exigências, em que devemos cumprir determinados pré-requisitos, para termos direito a algum serviço público, ou privado, e até mesmo a algum bem. Assim, uma condição necessária e suficiente para que alunos migrem dos anos iniciais para os finais do Ensino Fundamental é que tenham concluído a primeira etapa. Óbvio que existem outros procedimentos legais, que possibilitam isso, contudo levamos em consideração o que ocorre com mais frequência. Essa analogia pode ser aplicada na relação entre desenvolvimento e aprendizado, resguardada pelo primeiro grupo de teorias. Assim, em consonância com essa tese, para que se construa aprendizado, é necessário que o indivíduo esteja desenvolvido para assimilar tais tarefas. No entanto, o desenvolvimento não é o produto final do aprendizado. Em síntese:

O desenvolvimento ou a maturação é visto como uma pré-condição do aprendizado, mas nunca como resultado dele. Para resumir essa posição: o aprendizado forma uma superestrutura sobre o desenvolvimento, deixando este último essencialmente inalterado (VYGOTSKY, 2007, p. 89).

Já o segundo grupo de teorias investiu na concepção de que aprendizado é desenvolvimento e ocorrem concomitantemente. Ambos são considerados interconectados, entrelaçados e não há como distinguir um de outro, ou seja, para Vygotsky (2007, p. 89), “não importa se o que se considera é o ler, o escrever ou a aritmética”. Para o psicólogo russo, James foi o responsável pela elaboração dessa noção. Do que foi dito até aqui, considera-se

que aqueles processos “ocorrem simultaneamente; aprendizado e desenvolvimento coincidem em todos os pontos, da mesma maneira que duas figuras geométricas idênticas coincidem quando superpostas” (VYGOTSKY, 2007, p. 89).

Por outro lado, o terceiro grupo de teorias, que também é apresentado por Vygotsky, foi formulado combinando as duas linhas comentadas anteriormente. Segundo o teórico, essa abordagem pode ser verificada na teoria de Koffka¹⁶. Nela, o desenvolvimento está ancorado em dois processos que são diferentes e de certa forma se relacionam e se influenciam mutuamente; no primeiro caso, tem-se a maturação, que está em função do desenvolvimento do sistema nervoso; já no segundo, tem-se o aprendizado, que é um processo de desenvolvimento.

Segundo Vygotsky, nesse terceiro enfoque, há três novidades que merecem nossa atenção; a primeira já foi comentada, anteriormente, isto é, refere-se à combinação entre desenvolvimento e aprendizado, sem levar em consideração que eles são, ao que tudo indica, opostos. O principal argumento, daquele teórico, com relação a esse pensamento, é que se esses dois conceitos podem ser combinados em uma teoria, então não podem ser opostos, e deve haver pontos de intersecção entre eles. A segunda novidade é que esses dois processos são interagentes e dependentes um do outro. Por último, atribuiu-se enorme importância ao aprendizado para o desenvolvimento da criança.

Para Vygotsky (2007, p. 94), os defensores do terceiro grupo de teorias consideraram que “ao dar um passo no aprendizado, a criança dá dois no desenvolvimento, ou seja, o aprendizado e o desenvolvimento não coincidem”. Nas explicações daquele teórico, supondo que uma criança aprendeu a somar, em uma dessas operações, o professor propõe outras também de adicionar, mas que apresentem todas as parcelas iguais, dessa forma, mesmo que intuitivamente, o indivíduo poderá captar ideias, relacionadas à multiplicação, ou seja, há assimilação de outros conceitos relacionados às operações, mas que não está voltado para aquela inicial.

Vygotsky não aceitava o fato de que a mente seria um conjunto de capacidades. Dessa forma, rejeitava a ideia de que “qualquer melhora em qualquer capacidade específica resulta numa melhora geral de todas as capacidades”. Além disso, para essa teoria, “se o estudante aumentasse a atenção prestada à gramática latina, ele aumentaria sua capacidade de focalizar a atenção sobre qualquer tarefa” (VYGOTSKY, 2007, p. 92). Concluiu-se, em Vygotsky (2007, p. 92), que Thorndike¹⁷ e teóricos em psicologia e educação, “que o desenvolvimento

¹⁶ KOFFKA, K. *The Growth of the Mind*.

¹⁷Thorndike, E.L. *The Psychology of Learning*. 1914.

de uma capacidade promove o desenvolvimento de outras”. Contudo, Vygotsky não está de acordo com o pensamento citado anteriormente. Em contrapartida, Thorndike, interpretado por Vygotsky, foi contra a tese exposta anteriormente, pois, para o primeiro, “o desenvolvimento de uma capacidade específica raramente significa o desenvolvimento de outras” (VYGOTSKY, 2007, p. 92).

Acreditamos que, mesmo antes das crianças terem suas primeiras experiências escolares, aquelas já trazem consigo determinados tipos de aprendizados, que foram adquiridos a partir do contato com o meio cultural, no qual elas vivenciaram. Ao elaborarmos nossas atividades, para a intervenção dessa pesquisa, levamos em consideração essa ideia, posta anteriormente, isto é, partimos do pressuposto de que os alunos que participaram dos encontros já carregavam consigo aprendizados obtidos em seu meio social, assim como também em outros momentos oportunizados pela escola, uma vez que desenvolvemos um trabalho com aprendizes do 5º ano do Ensino Fundamental. De tudo o que foi dito, até aqui, incorporamos as ideias de Vygotsky, quando diz que

O aprendizado das crianças começa muito antes de elas frequentarem a escola. Qualquer situação de aprendizado com a qual a criança se defronta na escola tem sempre uma história prévia. Por exemplo, as crianças começam a estudar aritmética na escola, mas muito antes elas tiveram alguma experiência com quantidades – tiveram de lidar com operações de divisão, adição, subtração e determinação de tamanho. Conseqüentemente, as crianças têm a sua própria aritmética pré-escolar, que somente psicólogos míopes podem ignorar (VYGOTSKY, 2007, p. 94).

Oliveira (1997, p. 32), nas suas leituras em Vygotsky (1995), ressaltou que essa aprendizagem da criança ocorre a “partir de conceitos espontâneos apropriados de forma não sistemática nas mediações que ela manteve ao longo de sua vida, em sua comunidade de origem”. Sendo assim, compete, ao professor, prosseguir a ampliação desses conceitos, no entanto, de forma organizada e apoiada no conhecimento científico.

Em relação ao papel da escola, no tocante aos aprendizados que as crianças trazem consigo, Almeida (2011, p. 32), interpretando Vygotsky, retratou que

Considera ser papel fundamental da escola estabelecer um diálogo entre os conhecimentos escolares apresentados por um professor, como um mediador, e os conhecimentos espontâneos do aluno, ou seja, a bagagem sociocultural que ele traz para a escola. Ou seja, a escola deve considerar que o aluno, quando inicia seus estudos, não é um ser vazio, mas alguém que carrega consigo conhecimentos que influenciarão, certamente, na aprendizagem de novos conhecimentos.

Acreditamos na concepção de que o aluno não é um objeto onde se deposita materiais, e com o passar do tempo fique transbordando. Essa analogia refere-se ao fato de os materiais exercerem a função de conhecimentos e o objeto seria o educando e, nesse contexto, competiria ao professor depositar conhecimentos no aluno. Diante do exposto, a concepção baldista¹⁸ pode ter tido origem a partir dessas reflexões de Vygotsky.

3.3 Concepção de aprendizado na visão de Vygotsky

Nas palavras de Vygotsky (2007), o aprendizado não significa aquisição de capacidade para pensar, extrapola essas ideias, pois se refere à aquisição de muitas capacidades especializadas, de modo que o indivíduo pense sobre diversos temas. Mas o que vem a ser aprendizado? Nas palavras de Vygotsky (2007, p. 103):

Aprendizado não é desenvolvimento; entretanto, o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer. Assim, o aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas.

Do que foi dito antes, deduz-se a preocupação de Vygotsky, no que diz respeito a oportunizar um aprendizado ao aluno de forma adequada e organizada. Entendemos por isso que o educador deve procurar meios metodologicamente corretos, de modo que o aprendizado seja construído, a partir da mediação com os alunos. Assim, diante de um contexto incentivador, em que se dê autonomia para o aluno, criticar etapas da apropriação do conhecimento científico, a partir das atividades propostas pelo professor, pode-se obter com êxito um desenvolvimento mental, ativando assim diversos pontos do cérebro da criança, para que possa desenvolver-se em outras atividades, produzindo, dessa forma, mais aprendizado.

3.4 Níveis de desenvolvimento

Vygotsky admitiu não aceitar as três discussões teóricas apresentadas anteriormente, entretanto, considerou que elas exerceram grande influência para a elaboração dos preceitos defendidos, e que estão presente em sua teoria sociocultural, no que diz respeito à relação

¹⁸ Esse termo foi apresentado por Nilson José Machado em seu livro *Epistemologia e Didática*, 1995. De acordo com esse autor, a expressão baldista refere-se à concepção de cabeça vazia e pressupõe que o aluno ao entrar em contato com um novo conceito matemático sua cabeça se apresenta como um balde vazio.

entre desenvolvimento e aprendizagem. Na concepção do psicólogo, para se chegar a uma solução dessa relação, são necessárias muitas reflexões, pois é uma questão extremamente complexa, que está dividida em dois subpontos, são eles: primeiro “a relação geral entre aprendizado e desenvolvimento”; e segundo, “os aspectos específicos dessa relação quando a criança atinge a idade escolar” (VYGOTSKY, 2007, p. 94).

Para início de conversa, deve-se levar em consideração o que já foi proposto acima, isto é, o aprendizado das crianças tem início já na fase pré-escolar. Não obstante, Vygotsky continuou em defesa da diferença entre esse aprendizado e o que ocorre na escola, ela se encarrega de expandir o conhecimento científico. Mesmo assim, a criança aprende em quase todas as situações presentes, no ambiente que frequenta. Sinteticamente, o teórico reforçou que aprendizado e desenvolvimento estão conectados desde o dia que a criança nasceu. Complementou reafirmando que, no aprendizado pré-escolar e no escolar, há pontos de convergência e de divergência.

Vygotsky criticou Koffka por ter percebido as homogeneidades entre os dois aprendizados, mas não teve a sensibilidade de verificar as contradições entre eles. Para aquele teórico, o último aprendizado difere do primeiro, no que diz respeito aos elementos novos, que são introduzidos para o desenvolvimento da criança. A partir desse ponto, foi elaborado o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

As reflexões sobre a ZDP contribuíram imensamente para o momento de intervenção de nossas atividades, voltadas para o ensino de geometria no 5º ano, primeiro porque exploramos o trabalho em coletividade, isto é, em grupos, pois, todos puderam contribuir para o desenvolvimento, uns dos outros, o tempo todo, cada qual com suas experiências, na ocasião, observamos, constantemente, as interações entre as equipes.

Antes de definir a ZDP, Vygotsky alertou para o fato de que há algum tempo, antes dele, era frequente querer combinar o aprendizado da criança com o nível de desenvolvimento dela, mesmo recomendando não ser aconselhável, pois o objetivo era investigar as afinidades entre o desenvolvimento e a capacidade de aprendizado.

Expressões usadas por Vygotsky são constantemente utilizadas nesse texto, sendo assim, algumas delas merecem nossa atenção, tais como, desenvolvimento mental, isto é, o ponto mais alto que a criança pode chegar, independentemente de sua idade. Nesse caso, pode ocorrer de algumas crianças resolverem situações que somente outras mais velhas seriam capazes; anos cronológicos, ou seja, refere-se à idade cronológica da criança, levando em consideração o calendário vigente, assim uma criança de certa idade cronológica pode

resolver situações que somente crianças, apresentando maior, ou menor quantidade de anos mentais, resolveriam.

Vygotsky identificou pelo menos dois níveis de desenvolvimento, são eles: atual e proximal. Conforme Almeida (2011), a partir de interpretações naquele autor, o nível de desenvolvimento atual, ou real corresponde àquele conhecimento que já foi adquirido pela criança, ou até mesmo aquele que veio com ela e é determinado pela capacidade de resolver problemas, de forma independente. Reforçando suas próprias palavras, Vygotsky explicou que é “o nível de desenvolvimento das funções mentais da criança que se estabeleceram como resultado de certos ciclos de desenvolvimento já completados” (VYGOTSKY, 2007, p. 96). De forma mais clara, esse nível indica o que as crianças conseguem fazer/resolver/entender por conta própria, sem a interferência de um adulto, nesse caso, o professor, ou um colaborador.

O segundo é denominado como nível de desenvolvimento proximal, ou potencial, e é alcançado a partir do auxílio de um adulto, ou até mesmo de um de colaborador de mesma idade, ou próxima, e que tenha mais habilidade. Segundo Vygotsky (1995, p. 97), esse nível é determinado através da “resolução de um problema sob a orientação de um adulto ou da colaboração de um companheiro mais capaz”, que em algum momento já tenha adquirido esse conhecimento. Além disso, essas interações entre criança e seu par, ou criança e um adulto, contribui para o desenvolvimento daquela, uma vez que, conforme Ivic (2010, p. 16), “em particular na primeira infância, os fatores mais importantes são as interações assimétricas, isto é, as interações com os adultos, portadores de todas as mensagens da cultura”.

Vygotsky (1982, 1984, p. 281) registrou em seus relatos, no ano de 1932, que “é por meio de outros, por intermédio do adulto que a criança se envolve em suas atividades. Absolutamente, tudo no comportamento da criança está fundido, enraizado no social”. A importância dada pelo teórico ao papel desempenhado pelos adultos, para o desenvolvimento da criança, é perceptível em quase toda sua literatura. Na escola, Vygotsky valoriza a figura do professor, para o desenvolvimento das crianças.

Enfim, após esclarecimentos sobre esses dois níveis de desenvolvimento, estamos em condições de definir a ZDP. Vygotsky, em seu livro *A formação social da mente*, nos apresentou o seguinte exemplo: supondo duas crianças, uma com dez anos e outra com oito anos, de idade mental, tendo ingressado na escola simultaneamente. O teórico nos alertou que a investigação de ambas deverá ser levada em conta a partir dessas idades, isto é, tomando como referência o recorte temporal de dez e oito anos, respectivamente. Em seguida, esclareceu que as intervenções, das atividades propostas, deverão receber seu apoio (de um

adulto). Conclui-se que a primeira criança pode resolver problemas até o nível de doze anos e a segunda de nove anos de idade. De forma conclusiva, Vygotsky percebeu que crianças, com iguais níveis de desenvolvimento mental, apresentavam capacidade variada, uma da outra, isso com a ajuda de um professor, desse modo as crianças não tinham a mesma idade mental.

Assim, a diferença entre doze e oito e nove e oito é denominada de Zona de Desenvolvimento Proximal, isto é:

Distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VYGOTSKY, 2007, p. 97).

De forma similar à definição posta anteriormente, percebemos de modo exemplificado o significado da ZDP, também interpretado a partir do conceito original apresentado por Vygotsky, ou seja, ela

É definida como a diferença (expressa em unidades de tempo) entre os desempenhos da criança por si própria e os desempenhos da mesma criança trabalhando em colaboração e com a assistência de um adulto. Por exemplo, duas crianças têm sucesso nos testes de uma escala psicométrica correspondente à idade de 8 anos; mas, com uma ajuda estandardizada, a primeira não alcança senão o nível de 9 anos, enquanto a segunda atinge o nível de 12; enquanto a zona proximal da primeira é de um ano a da outra é de quatro anos (IVIC, 2010, p. 32).

De forma concisa, o nível de desenvolvimento potencial de uma criança é entendido como sendo aquelas funções já amadurecidas, isto é, nas palavras de Vygotsky, o resultado final do desenvolvimento. Isso ocorre, quando, por exemplo, se a criança mostra capacidade de classificar os sólidos geométricos em corpos redondos e não redondos em quaisquer circunstâncias, sem ajuda de um adulto, ou colaborador, mesmo não percebendo que estão fazendo isso. Desse contexto, podemos concluir que as funções necessárias a esses conhecimentos já amadureceram. Por outro lado:

A zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário. Essas funções poderiam ser chamadas “brotos” ou “flores” do desenvolvimento, em vez de “frutos” do desenvolvimento (VYGOTSKY, 2007, p. 98).

A zona de desenvolvimento proximal não pode ser vista como “um lugar físico e situado no tempo e espaço, mas, é uma metáfora para a investigação de como os recursos mediacionais são apropriados, sendo, portanto, o lugar em que as formas de mediação sociais ocorrem” (TERRA, 2009, p. 20). A ZDP é um conceito abstrato, em que não se tem acesso a ele manipulando-o, mas, observando-o, em indivíduos que estão em processo de constituição de conhecimentos.

Vygotsky contribuiu para a educação no sentido de que, em se compreendendo a ZDP, é possível verificar os ciclos e processos de maturação que já foram atingidos, assim como aqueles que ainda estão em processo de maturação. Desse modo,

A zona de desenvolvimento proximal permite-nos delinear o futuro imediato da criança em seu estado dinâmico de desenvolvimento, propiciando o acesso não somente ao que já foi atingido através do desenvolvimento, como também àquilo que está em processo de maturação (VYGOTSKY, 2007, p. 98).

De uma forma ou de outra, “o estado de desenvolvimento mental de uma criança só pode ser determinado se forem revelados os seus dois níveis: o nível de desenvolvimento real e a zona de desenvolvimento proximal” (VYGOTSKY, 2007, p. 98).

Para Vygotsky (2007, p. 98), “aquilo que é a Zona de Desenvolvimento Proximal hoje, será o nível de desenvolvimento real amanhã, ou seja, aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã”, levando em conta esse pressuposto na nossa atividade diagnóstica das urnas, onde os aprendizes se reuniram em equipes e se ajudaram mutuamente, exercendo fortes implicações na ZDP de cada um, identificamos em alguns momentos os processos de desenvolvimento já completados para determinados conceitos propostos para a ocasião.

Consideramos, extremamente relevante, relatar que Vygotsky responsabilizou a aquisição da linguagem como uma possível solução para o problema da relação entre aprendizado e desenvolvimento, assim como também reforçou que a partir da ZDP, era possível formular que “o bom aprendizado é somente aquele que se adianta ao desenvolvimento” (VYGOTSKY, 2007, p. 102).

Vygotsky também confirmou que o mais importante aspecto, defendido por ele e sua equipe, diz respeito ao fato de os processos de desenvolvimento não coincidirem com os de aprendizado. Em outras palavras, “o processo de desenvolvimento progride de forma mais lenta e atrás do processo de aprendizado; dessa sequenciação resultam, então, as zonas de

desenvolvimento proximal” (VYGOTSKY, 2007, p. 103). Por exemplo, as crianças em idade pré-escolar aprenderam diversas coisas, contudo, somente a partir de uma variedade delas é que começaram a se desenvolver.

Os estudos defendidos por Vygotsky e seus colaboradores fizeram com que a visão tradicional, existente na relação entre aprendizado e desenvolvimento, fosse modificada, pois se acreditava que

No momento em que uma criança assimila o significado de uma palavra, ou domina uma operação tal como a adição ou a linguagem escrita, seus processos de desenvolvimento estão basicamente completos. Na verdade, naquele momento elas apenas começaram. A maior consequência de analisar o processo educacional dessa maneira é mostrar que, por exemplo, o domínio inicial das quatro operações aritméticas fornece a base para o desenvolvimento subsequente de vários processos internos altamente complexos no pensamento das crianças (VYGOTSKY, 2007, p. 104).

Por mais que as crianças dominem determinados conteúdos, os processos de desenvolvimento não estarão completos, com relação aos processos de aprendizado, ao contrário, elas estarão aptas a pensarem em outras coisas de maior complexidade.

Trabalhamos, em nossa pesquisa, com a formação de grupos, envolvendo quatro alunos em cada um deles, essa estratégia utilizada foi propositalmente, pois valorizamos a interação entre os integrantes de cada equipe, como também entre as equipes. Nosso propósito era que os aprendizes que estivessem demonstrando mais habilidade pudessem contribuir com os que estavam em um processo mais lento. Assim, evitamos atitudes, como essas relatadas adiante por Vygotsky (2007, p. 157):

Muitos educadores não reconhecem esse processo social, essas maneiras pelas quais um aprendiz experiente pode dividir seu conhecimento com um aprendiz menos avançado, não reconhecimento esse que limita o desenvolvimento intelectual de muitos estudantes; suas capacidades são vistas como biologicamente determinadas, não como socialmente facilitadas.

Nessa pesquisa, as atividades foram planejadas de modo que cada aluno tivesse uma tarefa a ser cumprida, isso em forma de revezamento. Dessa forma, os discentes puderam colaborar uns com os outros. Em síntese, reconhecemos e valorizamos as interações sociais que ocorrem no ambiente escolar, pois de acordo com as leituras feitas sabemos que a interação entre alunos, e esses com o professor, poderão ser um forte aliado da educação, como forma de constituição de conhecimentos por aqueles.

Além disso, o desenvolvimento da criança pode ser impulsionado a partir de duas categorias, ou seja, inicialmente ele progride quando são oportunizadas situações, envolvendo o nível social, para depois o individual; no segundo caso, interações entre as pessoas, para depois, no interior da própria criança. A respeito disso:

Todas as funções no desenvolvimento da criança aparecem duas vezes: primeiro no nível social, e, depois, no nível individual; primeiro, entre pessoas (interpsicológica), e, depois, no interior da criança (intrapsicológica). Isso se aplica igualmente para a atenção voluntária, para a memória lógica e para a formação de conceitos. Todas as funções superiores originam-se das relações reais entre os indivíduos (VYGOTSKY, 2001, p. 75).

Vygotsky também investigou as relações de poder e disputa de forças entre os componentes de um mesmo grupo, ou entre equipes. Isso também foi possível em nossa pesquisa, investigamos a postura que os integrantes de cada grupo exerceram durante o desenvolvimento das atividades, observando aqueles que representaram líderes e utilizaram de suas habilidades para tornar suas ideias aceitas pelos que rodearam.

Vygotsky concluiu que, “mesmo com a ajuda de colaboradores, o potencial do aprendiz não é ilimitado, uma vez que ele consegue realizar apenas o que está ao alcance da sua ZDP” (TERRA, 2009, p. 22). Nesse caso, esse aluno precisará de atividades, bem elaboradas, por um adulto, que proporcionem momentos de constituição do conhecimento, a partir da mediação entre professor e aluno.

3.5 O desenho e o desenvolvimento de crianças

Vygotsky (2007) parafraseou K.Buhlera, afirmando que o desenho tem início muito depois de a linguagem falada ter alcançado um expressivo progresso, momento em que ela já é dominada pela criança.

Ao recordarmos de nossos tempos escolares, principalmente os da pré-escola, certamente lembraremos aquela professora que pedia para desenharmos nossa família, ou até mesmo, relatar, através de desenhos, como foram nossas férias. Fazíamos essa tarefa sem muito esforço, não era preciso que nossos pais estivessem próximos de nós, pois recordávamos com todos os detalhes, assim como dos melhores, ou piores momentos, das tão almejadas férias. Essa habilidade é explicada por Vygotsky:

Inicialmente a criança desenha de memória. Se pedirmos a ela para desenhá-la sua mãe, que está sentada diante dela, ou algum outro objeto que esteja perto dela, a criança desenhá-la sem sequer olhar para o original; ou seja, as crianças não desenhá-mo que veem, mas sim o que conhecem. Com muita frequência, os desenhos infantis não só tem nada a ver com a percepção real do objeto como, muitas vezes, contradizem essa percepção (VYGOTSKY, 2007, p. 135).

Podemos também fazer uma analogia entre crianças mais velhas, isto é, em torno dos nove aos dez anos de idade. O ato de desenhá para essas crianças traduz-se a partir de situações que elas já conhecem. Mas o que aconteceria, caso pedíssemos que uma determinada criança fizesse o desenho de algo, que ela nunca tenha visto? Que situações seriam retratadas nesses desenhos? São questões que nos intrigaram durante a produção desse texto.

Em relação a nossa pesquisa, desenvolvemos um trabalho de geometria, em que algumas atividades requeriam o uso de desenhos de sólidos geométricos, por parte das crianças. O propósito, em uma delas, era que os aprendizes manipulassem embalagens, que apresentassem representações semelhantes aos sólidos geométricos, no entanto, aqueles não puderam visualizar esses objetos, uma vez que ficaram inseridos em urnas confeccionadas anteriormente. Os participantes reproduziram em forma de desenho o objeto manipulado, apenas utilizando o tato, dispondo das características percebidas durante a manipulação. Diante disso, acreditamos que essa intervenção possibilitou aproximar das ideias que Vygotsky expôs, pois os alunos certamente já tiveram contato com os objetos inseridos nas urnas, sendo assim, identificamos êxito dos discentes na produção de seus desenhos, o que pode ser constatado nas análises.

A atividade de manipulação tátil, das embalagens que representavam os sólidos geométricos, corroborou a ideia de que, muitas vezes, os aprendizes desenhá determinadas figuras tridimensionais, levando em consideração as faces que compõem aquelas. Isto é, quando o aluno faz a representação, em forma de desenho de um hexaedro, apenas, a partir da representação geométrica plana, denominada quadrado, talvez possa haver duas explicações para isso, inicialmente, as crianças, na fase infantil, em suas atividades desenhistas, reproduzem certos objetos, observando, apenas, as qualidades gerais deles; ou os alunos, possivelmente, estarão viciados com uma excessiva geometria plana, aplicada de forma equivocada, pela escola. No primeiro caso, reportamo-nos às ideias do teórico sociocultural, que diz:

As crianças, ao desenharem objetos complexos, não o fazem pelas suas partes componentes, e sim pelas suas qualidades gerais, como, por exemplo, a impressão de redondo etc. Quando uma criança desenha uma lata cilíndrica como uma curva fechada que lembra um círculo, ela está, assim, desenhando sua propriedade redondo (VYGOTSKY, 2007, p. 129).

Nesse caso, deparamo-nos com situações equivalentes às reproduzidas anteriormente, em que os alunos produziram diversos desenhos para indicar que manipularam representações de cilindros, cones, esferas entre outros. Em relação aos cilindros e cones, quando os estudantes manipularam latas de refrigerantes, ou um funil, estavam sujeitos a registrarem apenas a parte frontal. No terceiro caso, nos aproximamos do que Vygotsky disse, anteriormente, isto é, os alunos, quando fizeram o desenho de um objeto que tinha similaridade com a esfera, produziram apenas a partir de uma curva fechada.

Nas crianças mais velhas, Vygotsky (2007) retratou que elas já adquiriram mais habilidades e estão em condições de descrever ações, assim como apontar que relações complexas podem ser verificadas, com relação aos diferentes objetos de uma figura.

O posicionamento dos três grupos de teóricos e o de Vygotsky, sobre a relação entre aprendizado e desenvolvimento, bem como o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal foram essenciais para entendermos diversos contextos exibidos pelos discentes, além disso, foi possível exercermos posturas na sala de aula a partir da mediação.

Por outro lado, percebemos que um sólido estudo sobre os conceitos científicos e espontâneos também investigados por Vygotsky poderiam nos possibilitar uma rica compreensão acerca dos episódios realizados. Até porque, para Vygotsky (2008, p. 117) “a inter-relação entre os conceitos científicos e os conceitos espontâneos é um caso especial de um tema mais amplo: a relação entre o aprendizado escolar e o desenvolvimento mental da criança”. Diante disso, tocamos na ideia geral, porém, não nos atentamos para delimitarmos com intuito de chegar ao núcleo, sendo esse, a nosso ver, outro personagem responsável para fornecermos explicações plausíveis sobre diversos aspectos de nossa pesquisa, principalmente no que diz respeito ao comportamento dos discentes nas primeiras intervenções.

Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática torna-se distorcida.¹⁹

QUARTO CAPÍTULO – CAMINHOS METODOLÓGICOS E DESCRIÇÃO DOS EPISÓDIOS

A intenção deste capítulo é apresentar, de forma sucinta e organizada, o percurso metodológico, escolhido para essa pesquisa. Para isso, esclarecemos alguns pontos que nos levaram à elaboração de nossa problemática, assim como a justificativa e o objetivo, que se encontram posteriormente. Em seguida, exibimos as argumentações, no tocante às escolhas referentes, ao campo investigado, personagens envolvidos, período de levantamento dos dados, procedimentos burocráticos, para o início da pesquisa e instrumentos utilizados para coleta de dados. Posteriormente, apresentamos algumas reflexões, acerca do paradigma indiciário, como uma alternativa, para produzir pesquisa em Educação Matemática. Por fim, descrevemos, detalhadamente, os passos seguidos, durante as intervenções em sala de aula.

¹⁹ (LORENZATO, 1995, p. 5).

4.1 Apresentação

Os periódicos especializados em Educação Matemática, as dissertações e teses que investigam o ensino de geometria, as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) discutem e apresentam ideia semelhante, no que concerne ao ensino de geometria ter início através de situações, envolvendo o cotidiano dos educandos, para, em seguida abstrair os conceitos geométricos planos. Uma das formas de explorar isso pode ser através da introdução de ideias, presentes no bloco de conteúdos Espaço e Forma – primeiro e segundo ciclos. Nele, encontramos recomendações para valorizar inicialmente as noções de espaço, para, em seguida, prosseguir com as formas. No primeiro caso, merecem destaque os sólidos geométricos, pois são eles que permitem explorar diversas noções, intimamente ligadas à geometria plana, além disso, pode viabilizar a transição do mundo tridimensional, ou seja, o concreto, para o bidimensional, isto é, o abstrato.

Validando o que foi elucidado, anteriormente, os PCNs (BRASIL, 1997, p. 81) afirmam que “num primeiro momento, o espaço se apresenta para a criança de forma essencialmente prática: ela constrói suas primeiras noções espaciais, por meio dos sentidos e dos movimentos”. Compete à escola proporcionar atividades planejadas, que aperfeiçoem essas noções. Todavia, a problemática consiste, conforme os PCNs, em migrar de um espaço ao outro. Encontramos a resposta nos próprios Parâmetros, quando dizem que, “esse espaço percebido pela criança — espaço perceptivo, em que o conhecimento dos objetos resulta de um contato direto com eles — lhe possibilitará a construção de um espaço representativo – em que ela é, por exemplo, capaz de evocar os objetos em sua ausência” (BRASIL, 1997, p. 81).

Da mesma forma, antes mesmo dos primeiros contatos com a escola, as crianças vivenciam situações em um mundo totalmente geometrizado, cercado de objetos de seu próprio uso e manipulação, que aparecem em formatos tridimensionais. Por exemplo, a geladeira apresenta formato de um paralelepípedo, a lata de leite em pó, tem um formato cilíndrico. Esses conhecimentos prévios deveriam ser ampliados na escola, mas, infelizmente, temos poucas evidências de que este trabalho aconteça. O que presenciamos é uma inversão das recomendações postas pelas políticas educacionais e trabalhos acadêmicos, citados anteriormente, isso significa que, conforme verificado em nossa fundamentação, escolas e professores privilegiam inicialmente o estudo de uma geometria abstrata, com destaque à memorização de definições, nomenclatura de polígonos, sem nenhuma explicação, vinculada à realidade, excesso de atividades, onde os alunos são treinados a desenharem, ou colorir

polígonos dos mais diversos tipos. Atitudes dessa natureza, muitas vezes, são desprovidas de significados para os alunos.

Essa valorização excessiva da geometria plana surtiu efeito, porém, negativo. Por exemplo, desde a década de 1960 até a primeira década do século XXI, professores de Matemática empenharam-se em ministrar inicialmente conteúdos do currículo de uma geometria abstrata, prova disso é que os alunos ficaram imersos em conceitos, ou ideias geométricas errôneas. Isso não poderia estar acontecendo, pois, em seu cotidiano, a caixa de creme dental não é confundida com um retângulo, simplesmente, porque ela é composta por seis faces retangulares, assim como o dado (hexaedro), presente nas brincadeiras infantis e nos jogos de azar, não é confundido com um quadrado, simplesmente, porque possui seis faces quadradas. Já com o propósito de não haver essa confusão, Brasil (1997, p. 51) recomenda, no bloco de conteúdo Espaço e Forma, que deve haver “percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos”.

A diferenciação, entre figuras planas e espaciais, a partir de atividades específicas, pode desvendar muitas relações e, como diz Fonseca (2003), a passagem de um sistema ao outro pode contribuir para que se compreenda o espaço tridimensional onde vivemos.

Por outro lado, quando essas crianças se encontram na escola, relacionam a caixa de creme dental a um retângulo. Esse equívoco pode ser causado por um ensino que supervaloriza a geometria plana, contribuindo para que os alunos não compreendam que um prisma pode ser decomposto em seis retângulos.

Perante o que foi explicitado, anteriormente, provavelmente um dos contextos onde o problema reside é a escola, pois a criança em suas experiências, no seio familiar, utiliza uma geometria cotidiana, em que a caixa de creme dental continua sendo uma caixa, a lata de leite continua sendo uma lata.

4.2 Delineamento da pesquisa

Nossa questão de pesquisa tem forte relação com o que foi relatado. Assim, queremos saber: Quais são os efeitos produzidos por uma série de atividades planejadas que privilegiam a exploração de uma geometria sensível para, em seguida, abordar noções da geometria plana com alunos do quinto ano do Ensino Fundamental? Em que medida essa intervenção em sala de aula e guiada pelas recomendações, no tocante ao ensino de geometria para o segundo ciclo do Ensino Fundamental, contribuirá para a construção de conceitos da geometria plana a

partir da exploração de atividades, que envolvam a composição e decomposição de algumas representações de sólidos geométricos?

Desta forma, temos por objetivo geral investigar quais são os efeitos produzidos por uma série de atividades planejadas, que privilegiam a exploração de uma geometria sensível para, em seguida, abordar noções da geometria plana, com alunos do quinto ano do Ensino Fundamental, através de situações que envolvam a composição e decomposição de algumas representações de sólidos geométricos.

Para alcançar este objetivo, alguns passos estratégicos foram necessários. Inicialmente, foi preciso verificar até que ponto os conhecimentos geométricos, oriundos do mundo sensível dos alunos, foram influenciados, por um ensino de geometria desprovido de significados e desenvolvido, sequencialmente, onde se dê privilégio à geometria plana. Posteriormente, tivemos a finalidade de propor algumas atividades coerentes aos alunos do quinto ano do Ensino Fundamental, utilizando material concreto para introduzir conceitos geométricos de ordem tridimensional. Também nos competiu analisar como ocorre a transição entre a geometria, do sensível à plana, isto é, da tridimensional para a bidimensional, a partir das atividades mencionadas. Por fim, foi indispensável estudar conceitos da geometria plana, partindo de experiências, envolvendo composição e decomposição de algumas representações de sólidos geométricos.

Esta pesquisa, envolvendo o ensino de geometria, nos anos iniciais, está fundamentada em justificativas teóricas e práticas. Do ponto de vista teórico, o primeiro objetivo fundamentou-se em virtude de que, nas leituras feitas dos trabalhos, são apontados que os educandos trazem consigo conhecimentos geométricos, de natureza empírica, a partir de suas experiências. Quando chegam às escolas, esses conceitos entram em conflito, com aqueles da geometria das formas planas, que são apresentados pelos professores. Contudo, até o presente momento, não encontramos pesquisas que mensuraram esses conflitos. Elas afirmam que existem, porém não se sabe até que ponto isso influencia.

Em se tratando do segundo objetivo, do ponto de vista teórico, algumas pesquisas, de nosso conhecimento, aplicaram atividades dessa natureza, entretanto, grande parte dos estudos estavam destinados aos professores dos anos iniciais, do Ensino Fundamental. Consideramos intervenções desse tipo relevantes, até porque, os educadores poderão exercer a função de multiplicadores dentro das salas de aulas. Todavia, poucas são as investigações que se debruçaram em observar as implicações de intervenções desse caráter diretamente com alunos.

Os dois últimos objetivos também foram explorados, a partir de atividades, nas pesquisas de nosso conhecimento, porém, foram desenvolvidas com professores e, se justificou neste estudo, pelo mesmo motivo exposto anteriormente.

Os três últimos objetivos justificam-se do ponto de vista prático, na medida em que alunos, professora regente, professor-pesquisador e futuros investigadores poderão ser beneficiados a partir deste estudo. Em relação aos discentes, tiveram oportunidades de vivenciar experiências, referentes ao aspecto concreto da geometria, uma vez que ele exige menor esforço, para sua compreensão e, em seguida, foram estudados os conceitos da geometria plana. Quanto à professora titular da turma, teve a oportunidade de estudar, ou revisar o que foi proposto nas intervenções, por outro lado, caso não esteja trabalhando de acordo com as recomendações para o ensino de geometria, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, sentirá necessidades de adequar-se. Quanto ao autor desse trabalho dissertativo, esta pesquisa ampliou os processos de desenvolvimento profissional, além de ter contribuído para um novo olhar, concernente à geometria e uma postura diferente, adotada em sala de aula. Por fim, os futuros investigadores, do ponto de vista prático, dispõem de elementos interrogativos e propulsores para investir em futuras pesquisas voltadas para o ensino de geometria, nos anos iniciais, tendo como sujeitos investigados os alunos.

4.3 A pesquisa de campo

Essa pesquisa foi desenvolvida em uma escola da rede estadual de ensino do Estado da Paraíba, na cidade de Monteiro, envolvendo 25 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Devo dizer que estudei nessa escola e depois retornei como professor da instituição, o que alio ao comprometimento por uma educação pública de boa qualidade, até porque retribuo os anos de escola gratuita que tive durante toda minha Educação Básica e até mesmo em um curso de Pós-Graduação. A forma que encontrei para recompensar isso foi a socialização de meus conhecimentos e experiências, adquiridas durante esses anos. Nada mais justo do que proporcionar ao aluno da escola pública de hoje oportunidades que tive tempos atrás.

Reforçando a escolha dessa escola para desenvolver este trabalho, destacamos a viabilidade, pois ela encontra-se na mesma cidade em que o pesquisador reside, facilitando, dessa forma, qualquer tipo de deslocamento, despesas, imprevistos, entre outros fatores naturais. Além do que, está próximo ao Campus da Universidade Estadual da Paraíba, o que favoreceu o deslocamento dos alunos para o mesmo, a fim de realizar as atividades.

A escolha do 5º ano do Ensino Fundamental ocorreu em virtude de questões referentes ao currículo, pois os alunos estão em transição para o 6º ano, conseqüentemente, podem ter tido nos anos anteriores muitas experiências escolares em geometria, sendo assim, foram motivados para mostrar esses conhecimentos geométricos naquela referida série. Por outro lado, constatamos que eles estavam habituados a um ensino de geometria puramente tradicional. Como isso foi comprovado em nossa atividade diagnóstica, reforçamos as intervenções seguintes no sentido de minimizar as conseqüências drásticas, possivelmente, causadas por um ensino caracterizado a partir de uma geometria desvinculada da realidade dos aprendizes.

Somando-se ao que relatamos, anteriormente, levamos em consideração o fato de que os alunos do 5º ano já estão em condições de vivenciar, de uma forma mais detalhada, a transição da geometria, presente no cotidiano deles, isto é, da espacial para a plana. Além disso, as experiências que tive, durante as oficinas do Projeto desenvolvido, no âmbito da Leitura e Escrita em Educação Matemática – Grupo de pesquisa (LEEMAT) foram voltadas para os alunos dos 4º e 5º anos, isso contribuiu imensamente para essa decisão.

Por fim, os PCNs (BRASIL, 1997) recomendam para o segundo ciclo, a diferenciação entre corpos redondos e não redondos, apontando diferenças e semelhanças; reconhecimento de poliedros e seus elementos, evidenciando as principais diferenças entre eles; composição e decomposição de figuras tridimensionais, investigação das planificações de figuras com três dimensões; passeio pelas características das principais figuras planas, tais como rigidez, paralelismo e perpendicularismo, entre os lados. Tudo isso nos deu suporte para desenvolver esse estudo com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

A coleta de dados, para a pesquisa, ocorreu entre os meses de Fevereiro a Maio de 2015. Foi uma intervenção de natureza qualitativa, isto é, naturalística. A escolha dessa metodologia não foi por acaso, pois estivemos inseridos em uma sala de aula investigando as atitudes dos alunos durante as atividades propostas. O professor-pesquisador encarregou-se da turma por oito intervenções, sendo que, em duas delas, foram necessários dois dias para cada uma. Esses encontros foram denominados de *episódios* e tiveram a participação dos educandos e de sua professora responsável. Durante essas ocasiões, dialogamos com ela para auxiliar-nos em determinados imprevistos, assim como para servir de controle, em minimizar possíveis casos patológicos de indisciplina entre os alunos. Logo, consideramos de extrema importância à presença dessa docente em nossas atividades, além de motivá-la a encarar desafios como os propostos nessa pesquisa. Entretanto, deixamos claro que nosso objeto de investigação não foi essa professora, mesmo que, de forma direta, ela estivesse sendo

beneficiada. Diante dos relatos, apresentados à professora regente, a mesma decidiu participar da investigação e contribuiu nos encontros propostos.

A primeira etapa da pesquisa consistiu em um encontro realizado em dezembro de 2014, com a direção da escola para apresentar os principais pontos da intervenção, assim como pedir autorização para desenvolver o trabalho em uma turma de 5º ano. Na ocasião, foi assinado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice A) para realização da pesquisa, assim como alguns esclarecimentos a respeito da provável turma que participaria desse projeto. Isso foi possível, porque a maioria dos alunos que saem do 4º ano do Ensino Fundamental prossegue na mesma escola. Outra informação repassada pelas representantes da escola diz respeito à faixa etária desses alunos, ou seja, todos estariam com dez anos de idade. Esse momento foi importante, pois os pesquisadores “precisam de permissão para conduzir a pesquisa no local e também informar às autoridades ou aos responsáveis que sua pesquisa causará um mínimo de perturbação às atividades do local” (CRESWELL, 2014, p. 61).

Antes do início de nossas intervenções, entramos em contato com a professora e manifestamos interesse em desenvolver a pesquisa com sua turma de 5º ano. Aproveitamos para esclarecer alguns pontos necessários para o entendimento do trabalho. Após esse contato inicial marcamos uma visita aos alunos da docente para convidá-los a se envolverem nessa viagem, com destino ao conhecimento de noções geométricas. Essa visita ocorreu no dia 10 de Fevereiro de 2015, quando foi pontuada a intenção em desenvolver um estudo na referida turma envolvendo algumas atividades educativas, com materiais concretos, voltados para geometria. Diante disso, conscientizamos que a participação de todos, com responsabilidade, era imprescindível.

Em momento anterior, em diálogos com a professora regente, combinamos uma reunião com os pais desses alunos para apresentar em linhas gerais a proposta da pesquisa e pedir autorização para que seus filhos pudessem ser filmados e fotografados. Isso aconteceu no mesmo dia do encontro ocorrido com os educandos. Esse contexto é importante, pois, conforme Creswel (2024, p. 61), “o começo do estudo envolve o contato inicial com o local e com os indivíduos. É importante expor aos participantes o propósito do estudo”.

Essas recomendações foram necessárias, uma vez que os alunos puderam ficar cientes do que foi desenvolvido com eles. Aproveitamos o ensejo para pedir à professora que organizasse a turma em seis grupos de quatro integrantes, de acordo com os critérios que ela achasse conveniente. A docente se encarregou dessa tarefa e informou que já conhecia alguns alunos de anos anteriores, o que facilitou a organização. Por outro lado, em um momento posterior, conversamos com a educadora para que ela expusesse os critérios adotados, sendo

que foi observado se em uma mesma equipe estava sendo composta por alunos mais habilidosos. Nesse caso, aceitamos a divisão feita pela professora e, no dia da primeira intervenção, anunciamos aos alunos em quais equipes eles seriam inseridos, evitando que se formassem alguns grupos que fossem, de antemão, taxados de *fortes* ou *fracos*.

Tivemos a pretensão de que essas equipes fossem compostas por alunos levando em conta a facilidade de aprendizagem que muitos têm em relação a outros, assim sendo, aqueles mais habilidosos de cada grupo poderiam ajudar os demais atuando na zona de desenvolvimento Proximal (ZDP) (VYGOTSKY, 2007).

Quanto às características da pesquisa qualitativa, acreditamos que elas estão fortemente presentes nesse trabalho, uma vez que os estudos qualitativos caracterizam-se como uma “abordagem interpretativa e naturalística do mundo. Isso significa que os pesquisadores qualitativos estudam coisas dentro dos seus contextos naturais, tentando entender, ou interpretar, os fenômenos em termos dos significados que as pessoas lhes atribuem” (DENZIN E LINCOLN, 2011, p. 3). Para Creswel (2014), os pesquisadores qualitativos não investigam os indivíduos em laboratórios, pelo contrário, recolhem informações de perto, observando o comportamento das pessoas em seu contexto. Em nosso caso, levamos em conta os significados atribuídos pelos alunos às atividades realizadas.

Creswel (2014) destacou algumas definições da pesquisa qualitativa. Segundo ele, uma grande quantidade de autores empenhou-se nessa tarefa, porém não chegaram a um consenso. Para ele, a “pesquisa qualitativa é uma atividade situada que localiza o observador no mundo. A pesquisa qualitativa consiste em um conjunto de práticas materiais interpretativas que tornam o mundo visível. Essas práticas transformam o mundo” (DENZIN E LINCOLN, 2011, p. 3).

Na pesquisa qualitativa, os dados recolhidos apresentam-se na forma de palavras, ou imagens e até mesmo em números, no entanto, com as suas devidas interpretações. “Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais” (BOGDAN E BIKLEN, 1994, p. 48). Dessa forma, conforme esses autores, a pesquisa qualitativa é descritiva, pois os dados recolhidos podem ser apresentados de distintas maneiras, por exemplo, em forma de palavras e imagens. Sendo assim, recorreremos a essa abordagem por termos compreendido que nosso trabalho se enquadra nesses requisitos. Além disso, respeitamos a forma e estética utilizada pelos alunos, durante o processo de escrita, dos roteiros de atividades, preservando dessa maneira, a originalidade e naturalidade nas respostas dadas pelos aprendizes.

Para Creswell (2014, p. 50), nos trabalhos de natureza qualitativa, “o investigador qualitativo planeia utilizar parte do estudo para perceber quais são as questões mais importantes. Não presume que se sabe o suficiente para reconhecer as questões importantes antes de efetuar a investigação”. Além disso, esse mesmo autor (2014, p. 52) considera que a “pesquisa qualitativa oferece mais poder aos participantes, os deixa livre para expressar suas ideias”. A partir dessa liberdade oportunizada aos alunos participantes desse estudo, seguimos as recomendações de Bogdan e Biklen (1994), quando dizem que em uma pesquisa qualitativa o investigador examina o mundo minuciosamente.

Bogdan e Biklen (1994) declaram que o comportamento dos observados com a presença do investigador é alterado inicialmente e esse é um problema praticamente existente em todas as investigações desse tipo. No entanto, à medida que a investigação prossegue, esses traços tornam-se iguais aos apresentados, anteriormente, aos das intervenções do pesquisador. Assim, como argumenta Douglas (1976, p. 19), “quanto mais controlada e intrusiva for à investigação, maior a probabilidade de se verificarem traços dos pesquisadores”. Levando em consideração este fator, empenhamo-nos em promover atividades em que, os participantes da pesquisa, pudessem expor suas ideias, suposições, comentários, enfim, deixando-os livres para qualquer forma de participação, não interferindo nem antecipando possíveis respostas das atividades.

Durante o trabalho com os alunos do 5º ano, não tivemos dificuldades na identificação deles, no processo de análise dos dados, pois trabalhamos analisando as evoluções de cada grupo, que foi identificado previamente. Desse modo, para facilitar o processo de análise, entregamos, em cada uma das intervenções propostas, um caderno de atividade, onde cada equipe encontrou espaços adequados para escreverem, desenharem, ou fazerem colagens. Avaliamos esses manuscritos para a construção dos dados mais relevantes dessa pesquisa. É importante destacar que esses roteiros foram complementos, pois observamos quaisquer detalhes, ou situações que pudessem ser consideradas fora do padrão.

4.4 Pesquisas em Educação Matemática sob a ótica do paradigma indiciário

As reflexões, que abordam o paradigma indiciário, nesse texto, são oriundas de trabalhos de alguns pesquisadores como Ginzburg²⁰ (2003), Cabrera (2012), Montenegro e Pimentel (2007), Cardoso (2009) e Garnica (1999), tendo este, feito ponderações acerca da

²⁰ GINZBURG, C. *Mitos, Emblemas, Sinais: Morfologia e História*. 2003.

compreensão de Educação Matemática, a partir do paradigma indiciário. Sabemos da existência de outros investigadores nessa temática, no entanto, restringimos apenas aos teóricos citados.

Desde os tempos pré-históricos, o homem desenvolveu técnicas que possibilitaram a sua sobrevivência, diante dos obstáculos com os quais se deparava. Assim, também adquiriu conhecimentos os mais diversos, a partir de observações da prática. Foi dessa forma que muitos ofícios, desde aquela época, desenvolveram-se. Ginzburg²¹, referenciado por Cabrera (2012), argumentou que por muito tempo o homem exerceu a prática de caçar, o que lhe oportunizou o acúmulo de experiências acerca das pistas deixadas pelos animais, por exemplo, pegadas na lama, ramos quebrados, odores, tufo de pelos, entre outros vestígios que poderiam ser valiosos, para identificação do percurso, realizado por diversas espécies de animais, que serviam para a captura e, conseqüentemente, para a alimentação. Assim, era possível saber se um determinado predador passou, ou não por certa região.

Do que foi exposto até aqui, Cabrera (2012) destacou que essas práticas realizadas pelo homem estavam ancoradas pelo que denominamos hoje de paradigma indiciário, que pode ser compreendido por nós como um conjunto de saberes, experiências, práticas, atividades e conhecimentos populares, que perpassaram de um povo primitivo para suas posteriores gerações. Dessarte:

O saber indiciário – ler nos rastros, nos sinais, nos presságios, nos sintomas – geralmente é de ordem prática, isto é, aprende-se no cotidiano, é indutivo, é oral e não é formalizado. É um saber empírico e não se explica ou se expõe de modo claro ou objetivo, mas que se adquire com a convivência e com a experiência (CARDOSO, 2009, p. 23).

Entretanto, o paradigma indiciário, de acordo com Cabrera (2012), necessita de muitas investigações. Além disso, Cardoso (2009) afirmou que esse saber indiciário só foi considerado como conhecimento científico apenas na medicina. Nas outras áreas predominava o paradigma platônico e posteriormente o galileano. Diante das informações observamos que:

[...] ainda que não teorizado explicitamente, é, de fato, amplamente operante. Sua existência remonta de data imemorial, confundindo-se com a trajetória da existência do próprio homem, quando este, durante suas caçadas, revelava operações mentais complexas e precisas, realizadas com rapidez. Esse

²¹ GINZBURG, C. *Sinais: Raízes de um paradigma indiciário*. 1989.

modelo se manifesta, ainda hoje, como patrimônio cognoscitivo transmitido de geração a geração por narrativas. Está presente em muitas práticas, desde a medicina até as artes dos sertanejos, que conseguem entender e prever o tempo, seja pelo comportamento das formigas, dos cupins ou de outros indícios, como a observação da vegetação, a posição da lua e das estrelas, o comportamento e o canto dos pássaros, o vento, a cor do sol e das nuvens e tantos outros sinais que a ciência positivista não incorpora, não valorizam (MONTENEGRO, PIMENTEL, 2007, p. 182).

A partir de interpretações de Cabrera (2012), constatamos que o desenvolvimento do paradigma indiciário deve-se muito a Carlos Ginzburg, que estudou três grandes nomes na história da humanidade: Morelli, o detetive Sherlock Holmes – personagem do autor Arthur Conan Doyle – e Freud. Segundo Cardoso (2009), em suas leituras de Ginzburg, no final do século XIX o paradigma indiciário foi reconhecido fora do campo da medicina, como um método de pesquisa, graças às investigações nesses três estudiosos mencionados.

Moreli foi o responsável por investigar e desenvolver um método que revelasse os verdadeiros artistas, de obras, que estavam em condições precárias de conservação, ou que não se identificavam a partir de assinatura e, dessa forma, era possível saber quem era o verdadeiro artista da obra, assim como diferenciar o original da cópia. O do meio, conforme Cabrera (2012), a partir de leituras de Ginzburg (1989), realizou um paradigma indiciário, baseado no de Morelli e levou em consideração fatos simples que para muitos não tinham importância. Por fim, Freud fez uma aproximação entre o método indiciário e a psicanálise, prova disso é que esse psicanalista declarou que os reconhecimentos das doenças, diagnosticadas na psicanálise, estavam em função de características não levadas muito a sério, por diversas pessoas. Sendo assim, para Cabrera (2012, p. 944), “o paradigma indiciário trata do individual, de características peculiares, únicas, irrelevantes, que por vezes passam despercebidos aos olhos de muitos, mas que carregam informações relevantes e essenciais”.

É de conhecimento de todos que a maioria das profissões perpassou grandes transformações no decorrer do tempo. Conhecimentos empíricos considerados essenciais para determinados profissionais foram passados de geração a geração, isso fez com que determinadas áreas se desenvolvessem exponencialmente, por exemplo, a medicina. Contudo, para Ginzburg (1989), interpretado por Cardoso (2009), essa área evoluiu graças aos trabalhos dos curandeiros, das parteiras e dos cirurgiões-barbeiros. Em resumo, com base nas investigações de um caçador, de um sacerdote religioso, de um médico, de um detetive e de um crítico da arte foi comprovado, através de comparações entre os métodos de pesquisa, que cada um recorria a um *método clínico*, isto é, a produção do saber devia-se a constatações de

possíveis *sintomas*. Por exemplo, os médicos recorriam a esse método para observar quaisquer irregularidades, a fim de chegar aos sintomas de determinada doença.

Conforme Ginzburg (1989), interpretado por Cardoso (2009), através dos procedimentos médicos, tais como observações de indícios e sintomas para descobrir certos tipos de doenças, pode-se concluir que eles incorporaram um método de pesquisa, a ser muito utilizado nas ciências humanas e na história, denominado por Ginzburg (2003) de *paradigma indiciário*.

O paradigma indiciário proposto por Carlos Ginzburg contribuiu para nossa pesquisa. Garnica (1999) o reconheceu e considerou uma ferramenta extremamente relevante, pois viu nele uma boa ideia para realizar pesquisas em Educação Matemática.

Essa pesquisa levou em conta o que encontramos nos trabalhos de Cabrera (2012, p. 945), o qual compreende que, a partir de suas leituras em Montenegro e Pimentel (2007), “cabe ao professor estar atento aos indícios que os alunos apresentam no processo de aprendizagem, pois são esses indícios que apontarão na direção de uma nova postura, criadora, emancipadora, crítica”. Cardoso (2009) reforçou que uma doença pode se manifestar de formas diferentes, dependendo de cada pessoa. Analogamente, devemos prestar atenção aos alunos, pois eles podem aprender, a partir de diversas formas, uns construindo conceitos, procedimentos, ou atitudes mais rápido do que outros. Destarte:

Observar a atitude dos alunos durante o trabalho com o conteúdo, sua postura frente ao emprego da metodologia, suas construções elaboradas por meio da avaliação, seus gestos, silêncios exige de nós uma escuta atenta aos indícios. Eles é que poderão nos direcionar na construção de uma outra cultura escolar [...] que valoriza o risco e a criação, a criatividade e a transgressão de novos olhares e novas formulações, na medida em que estudar propicia relacionar os conhecimentos com a realidade de sua vida, seu meio social. Para isso, é preciso que o educador esteja atento (MONTENEGRO e PIMENTEL, 2007, p.190).

Cardoso (2009) citou Garnica (1999, p. 60), no que diz respeito ao escutar do professor. Para o último teórico, o paradigma indiciário pode ser visto como um modelo para definir Educação Matemática, ou seja, “a prática do auscultar detalhes do ensinar e do aprender Matemática”. Essa atitude também pode ser considerada uma forma de obtenção do saber, isto é, através dos ínfimos detalhes expressos pelos alunos e que o professor de Matemática deve ter a sensibilidade de observar na sua aula.

Durante as atividades propostas, aos alunos do 5º do Ensino Fundamental, seguimos alguns procedimentos, do paradigma indiciário, pois, conforme Cardoso (2009, p. 22), “neste

paradigma, o pesquisador descreve o que vê, o que percebe. E o que ele percebe é um detalhe que lhe chama a atenção, um pouco diferente do que está acostumado, isto é, as pequenas diferenças que são muitas vezes negligenciadas por serem ínfimas”. Nesse caso, centramos esforços para não desprezarmos quaisquer comportamentos, que os aprendizes expressaram.

Diante do que foi exposto, para efeitos de esclarecimentos, acompanhamos as sugestões de Garnica (1999), no que diz respeito ao entendimento de professor e pesquisador. Aliás, para Garnica, não existe, nessa área de conhecimento, professor de um lado e pesquisador de outro, o que deve ser concebido é a ideia de professor-pesquisador. Dito com outras palavras, tanto na academia, quanto na Escola Básica desenvolvem-se pesquisas, que precisam alcançar o cotidiano escolar. Concordamos com Cardoso (2009, p. 25), quando diz que professor-pesquisador é “aquele que pesquisa ao mesmo tempo em que ensina”. Assim, levamos, para nosso campo de pesquisa, a sala de aula, essa concepção.

A postura reflexiva que adotamos contribuiu para lidarmos com situações, nas quais algumas atividades não produziram os efeitos que desejávamos. Nesse contexto, foi preciso atitudes de um professor-pesquisador, pois este, conforme Cardoso (2009, p. 25) “é aquele que reflete sobre sua prática e re-elabora constantemente em função de sua reflexão. O movimento vai da prática reflexiva para a reflexão e retorna à prática, com novas propostas de ações, esclarecimentos de fatos, explicitações de concepções”.

Em nossa pesquisa, inserimo-nos, na sala de aula, e propomos atividades para os alunos, contudo, foi preciso que, antes, fizéssemos reflexões, acerca das potencialidades e limites dos materiais didáticos propostos. Após os encontros, exercitamos outros questionamentos sobre o que deu certo e o que deu errado. Assim, estávamos em condições de (re)-significar nossa prática, retornando para a sala de aula com outra metodologia. Isso aconteceu, quando repensamos o planejamento de alguns encontros.

Em síntese, acreditamos que desenvolvemos pesquisa, em sala de aula, pois investimos na observação de detalhes, em todo o contexto, na rejeição de algum aluno em determinada atividade, na expressão de dúvida, quanto a determinados conceitos, nos registros escritos, sob a forma pictórica, ou escrita, que aprendizes produziram, mesmo que sendo os mais simples, nos depoimentos orais e na postura dos estudantes, quando oportunizamos momentos, para que pudessem expressar seu pensamento matemático, já que em outras situações isso lhe é negado. Dessarte, cumprimos o que Cardoso (2009, p. 25) entendeu por pesquisa, ou seja, “é seguir os vestígios da prática docente e científica”.

4.5 Descrições dos episódios

Nesta seção, estão descritas as atividades que denominamos *de episódios*. Esse termo foi utilizado pelo motivo que ele representa, um conjunto de fatos ocorridos, que formam uma produção teatral, um filme ou uma novela e, em nosso caso, eles forneceram elementos essenciais à análise de dados. Os episódios foram realizados durante nossa intervenção, com os alunos do 5º ano, do Ensino Fundamental. O primeiro *episódio* denominado *Percepção tátil* foi adaptado da dissertação de Barbosa (2011). O segundo foi reestruturado a partir da dissertação de Almeida (2011). O terceiro foi denominado de *Construindo esqueletos de poliedros e poliedros de Platão* e elaboramos, a partir de nossas experiências, com a utilização de diversos materiais, para a construção de sólidos geométricos.

O quarto denominado *Eu vou para a escola*, foi estruturado com base nas leituras dos trabalhos de Pires et. al. (2000) e Barbosa (2011) e o quinto²², *episódio*, denominado *Um cão chamado Bob* foi destinado à exploração de itinerários. Resolvemos inseri-lo devido às recomendações dos documentos nacionais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais e diversas pesquisas, que tanto defendem, quanto aplicaram intervenções desse tipo. Por exemplo, os trabalhos de Barbosa (2011), Kazanowski (2010), Silva (2006) entre outros. Diante disso, concordamos que

É importante estimular os alunos a progredir na capacidade de estabelecer pontos de referência em seu entorno, a situar-se no espaço, deslocar-se nele, dando e recebendo instruções, compreendendo termos como esquerda, direita, distância, deslocamento, acima, abaixo, ao lado, na frente, atrás, perto, para descrever a posição, construindo itinerários (BRASIL, 1997, p. 49).

Essas orientações são proferidas no sentido de orientar os professores, quanto às atividades destinadas ao primeiro ciclo. Em nosso caso, trabalhamos com o segundo ciclo, contudo, Brasil (1997) recomenda que os temas abordados no primeiro segmento devam ser estendidos para o segundo, para isso é preciso que seja feito um trabalho mais detalhado. O próprio documento apresenta como objetivo para o segundo ciclo a “descrição, interpretação e representação da movimentação de uma pessoa ou objeto no espaço e construção de itinerários”. Inclui-se também desenvolver trabalhos em que os discentes possam representar

²² Atividade adaptada do site: http://area.dgfdc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/026_Sequencia_OrientacaoEspacial_TP_1c3.pdf

o espaço, por meio de maquetes. Enfim, esses episódios encerraram nossa investigação acerca dos conceitos geométricos espaciais.

A segunda etapa foi constituída por episódios referentes à geometria plana, cumprindo, dessa forma, as recomendações propostas nesse trabalho, isto é, partir de uma geometria sensível e empírica à plana. Sendo assim, ao sexto *episódio* denominamos *Diferenças entre figuras planas ou espaciais* e foi adaptado do livro *Geometria na era da imagem e do movimento* (LEITE e NASSER, 1996). Nosso sétimo, *episódio*, teve como título *Estudo de quadriláteros a partir da faixa de Möebius* e foi adaptado da coleção Formação de Professores – Laboratório de ensino de geometria (RÊGO, RÊGO e VIEIRA, 2012). Por fim, o último, *episódio*, foi uma exposição da imagem de Escher, bem como exploração dela para revisar os conteúdos vistos nos episódios anteriores e verificação deles no tocante ao desenvolvimento do pensamento geométrico, dos alunos, que participaram da pesquisa. A seguir, encontramos a classificação dos episódios assim como o calendário²³ de cada um.

Episódios	Data	Descrição
Primeiro	23/02/15	Percepção tátil
Segundo	03/03/15	Decomposição de sólidos em figuras planas
Terceiro	10 e 17 de Março	Construindo esqueletos de poliedros
Quarto	18 e 25 de Março	Eu vou para a escola – explorando itinerários
Quinto	26/03/15	O cão <i>Bob</i> e seu itinerário
Sexto	27/03/15	Diferenças entre figuras planas ou espaciais
Sétimo	04/05/15	Estudo dos quadriláteros a partir da faixa de Möebius.
Oitavo	08/05/15	Avaliação – Imagem de Escher

O primeiro, segundo e quinto *episódios* foram organizados de modo que, cada equipe, recebesse um caderno de atividades, para transcrição de produções textuais, desenhos, colagens, entre outros, registros necessários. Esse material foi produzido pelo professor-pesquisador.

²³Quadro 1: Calendário das intervenções que foram realizadas no 5º ano do Ensino Fundamental.

Figura 2: Caderno de atividades das equipes



Fonte: Arquivo do autor (2015).

Nos *episódios* Decomposição de sólidos em figuras planas, Construindo esqueletos de poliedros e poliedros de Platão, Eu vou para a escola, Diferenças entre figuras planas ou espaciais e Estudo dos quadriláteros a partir da faixa de Möebius, cada equipe recebeu uma caixa, confeccionada pelo professor-pesquisador, contendo todo material necessário, ao desenvolvimento do *episódio*, figura 3.

Figura 3: Caixas contendo o material necessário para cada episódio.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

4.5.1 Primeiro episódio – Percepção tátil

Nosso primeiro episódio teve o caráter de verificação, dos conhecimentos geométricos, prévios dos alunos. Assemelhando-se a um questionário prévio, os estudantes

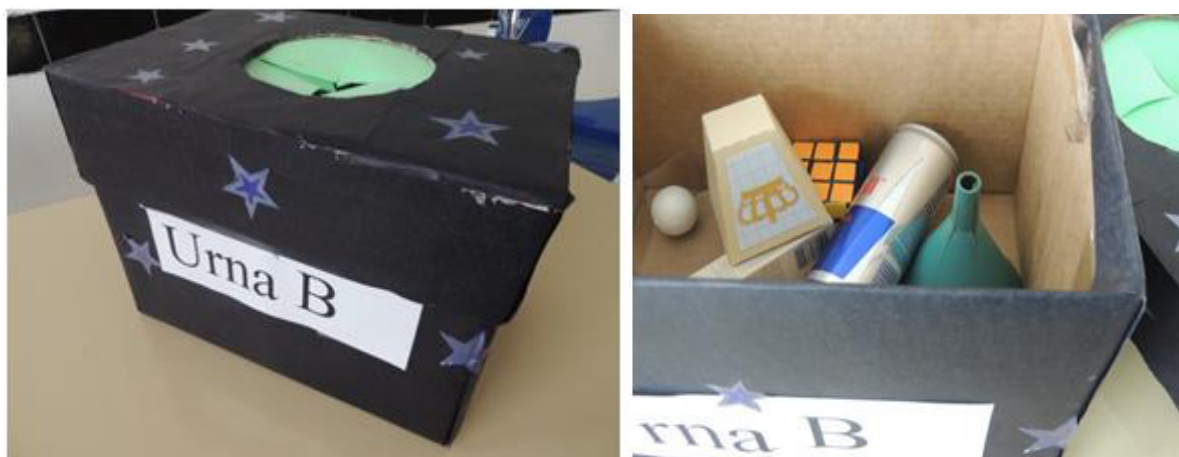
foram avaliados, à medida que participaram das atividades propostas. Além disso, fizemos análises dos roteiros de atividades das equipes, para que pudéssemos verificar alguns conceitos geométricos, que os alunos possuíam. O objetivo foi detectar esses conhecimentos, a partir das atitudes que os mesmos apresentaram, durante o decorrer da proposta.

Nossa pretensão, com esse momento inicial, foi proporcionar o estudo da geometria a partir do aspecto concreto, para alcançar o abstrato. Uma possível saída para isso é a possibilidade de estudar os sólidos geométricos, pois eles permitem que os estudantes possam migrar do aspecto prático para o teórico. Além do mais, os PCNs (BRASIL, 1997, p. 127), declaram que os objetos são reconhecidos “pela sua forma e sua aparência, na sua totalidade e não por suas partes ou propriedades”. Desse modo, acreditamos que os alunos tiveram uma visão global, das representações e características, de alguns sólidos geométricos, ao possibilitarmos um contato com embalagens dos mais variados formatos, a partir da percepção tátil. Pretendíamos oportunizar subsídios, para que, nas próximas atividades, os estudantes pudessem perceber que essas embalagens eram apenas representações. Essa foi uma preocupação na investigação de Kazanowski (2010), quando percebeu a relevância de expor isso para o grupo de professoras, que participava de sua pesquisa. Foi exposto que as representações dos sólidos em forma de embalagens não contêm algo em seu interior, sendo assim, não é um sólido, no sentido conceitual de sólido geométrico, esse fato também pode ser verificado para os cilindros, esferas e cones.

Esse episódio denominado de *Percepção tátil* tinha como objetivo que os alunos identificassem diversas embalagens, dentro de urnas, a partir do sentido do tato, isto é, eles não puderam visualizar os objetos que tinham formatos de alguns sólidos geométricos. Pretendíamos, com essa atividade, identificar objetos, com formatos variados através do tato, trabalhar a ideia de imagem mental e representação, observar se os educandos conseguiram visualizar os objetos, mesmo na sua ausência, representar esses objetos observados, por meio de desenhos e características, que os definissem, diferenciar as planificações dos sólidos geométricos, espelhando-se nas embalagens que os representavam e classificar os objetos manipulados, a partir da percepção tátil, em corpos que rolam e os que não rolam.

Inicialmente, confeccionamos seis urnas que foram identificadas da seguinte forma: A, B, C, ..., F, (Figura 4). Antes da aplicação, dessa atividade, sobreposmos algumas embalagens, dentro de cada uma das urnas. Esses objetos foram inseridos propositalmente, isto é, apresentando formatos de cilindros, cones, esferas, pirâmides e prismas.

Figura 4: Exemplo de uma urna confeccionada para o episódio Percepção tátil



Fonte: Arquivo do autor (2015).

Em seguida, as urnas ficaram dispostas em um local visível, de modo que todos pudessem visualizá-las. Como os alunos estavam organizados em seis grupos, de quatro integrantes, sendo que cada equipe foi denominada da mesma forma em que as urnas foram identificadas, isto é, A, B, C, ..., F, os representantes de cada grupo tinham que manipular os objetos das urnas, que apresentavam a mesma identificação de sua equipe, ou seja, (grupo A, urna A). Cada equipe elegeu dois membros, que fizeram a identificação, a partir da percepção tátil, e um relator, que transcreveu as reflexões de seu grupo. Para o desenvolvimento, deste episódio, foram necessários três momentos, que explicaremos logo a seguir.

No primeiro, os membros escolhidos, em cada grupo, foram um de cada vez, às urnas, colocaram suas mãos, manipularam alguns objetos e escolheram apenas um para tentar, a partir do tato, verificar características de tal objeto. Em seguida, esses alunos retornaram aos seus grupos e fizeram a socialização dos objetos, para que a equipe pudesse, a partir disso, identificar qual embalagem tinha sido manipulada, ou expor algumas caracterizações dela. No momento da manipulação, foram oportunizadas algumas dicas, para que os relatores pudessem fazê-la, de uma forma orientada, e conseguissem transmitir, aos alunos de sua equipe. Por exemplo, o objeto manipulado é pequeno, ou grande, redondo, ou comprido, tem pontas, bicos, é flexível, ou rígido.

Por último, cada equipe fez suas conclusões e, em companhia com o relator, deixou isso por escrito e através de desenhos. Em seguida, os outros membros, de cada dupla, fizeram o mesmo procedimento. Isso se repetiu quatro vezes, a partir de revezamento, entre os integrantes, de cada dupla. Assim, oportunizamos o contato com, no mínimo, quatro representações de sólidos geométricos, para cada grupo.

No segundo momento, o professor-pesquisador imprimiu imagens, de algumas embalagens, (Figura 5), que estavam dentro, ou não das urnas, e fez colagem delas em folhas de cartolina, que ficaram expostas na lousa. As embalagens que não estavam dentro das urnas apresentavam os mesmos formatos, ou características, daquelas que estavam. Em seguida, foi questionado, aos grupos, um de cada vez, sobre quais dos itens, manipulados por eles, tinham semelhanças com alguns expostos na lousa. As equipes observaram as características que colocaram, a respeito de cada objeto, para responder o questionamento. Em síntese, determinado grupo poderia ter respondido que o objeto 1 apresentava semelhança com a imagem de uma casquinha de sorvete. Isso aconteceu, até o quarto objeto.

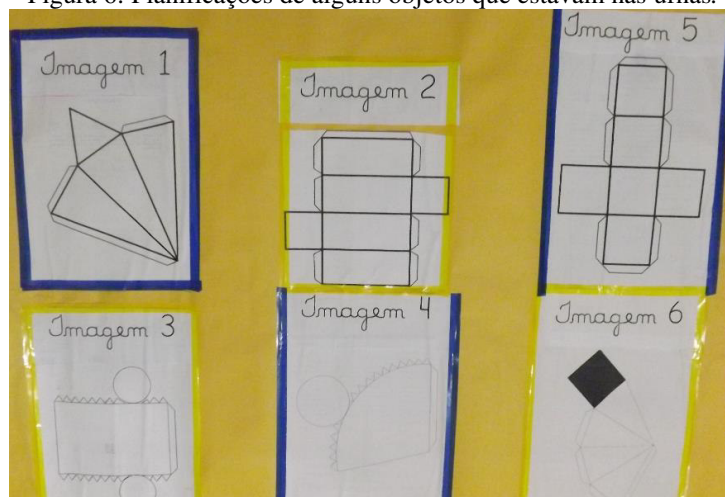
Figura 5: Imagens de objetos para o segundo momento do episódio Percepção tátil.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

Ainda no segundo momento, o professor-pesquisador imprimiu planificações, (Figura 6), dos mesmos sólidos que estavam dentro das urnas, exceto objetos em formatos de esferas, em seguida aquelas foram coladas em cartolina e fixadas na lousa da sala de aula, para que as equipes pudessem visualizar. As planificações eram identificadas da seguinte forma: imagem 1, imagem 2, ..., imagem 6. Essa etapa foi realizada antes da revelação dos objetos, que os alunos manipularam, dentro das urnas. Fizemos o seguinte questionamento: “Se esse objeto 1 fosse desmontado, ficaria mais parecido com qual dessas representações na lousa?” Os alunos responderam esse questionamento para o primeiro, até o quarto objeto, manipulado.

Figura 6: Planificações de alguns objetos que estavam nas urnas.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

Em seguida, no terceiro momento, o professor-pesquisador expôs alguns objetos, que estavam em sua caixa e apresentavam os mesmos formatos daqueles dentro das urnas. Depois fizemos o questionamento: “Quais dos objetos manipulados apresentam semelhanças com esses, que estão em cima da mesa?” Os alunos responderam em seus cadernos de atividades: “O objeto 1, manipulado na urna parece, por exemplo, com o funil, que está em cima da mesa, do professor. Isso aconteceu até o quarto objeto. Eles poderiam chegar a conclusões, a partir das anotações iniciais, a respeito de cada objeto manipulado.

Ainda no terceiro momento, o professor-pesquisador, com os objetos expostos em cima da mesa, pediu que as equipes assinalassem, em seus roteiros de atividades, quais das embalagens foram manipuladas. Por exemplo, se a equipe concluiu que manipulou um funil, ela deveria assinalar funil, e ao lado da palavra, escrever a identificação do objeto, cujas características o grupo definiu anteriormente. Isso fez com que o professor-pesquisador, a partir das análises, nos cadernos de atividades, das equipes, pudesse inferir que o grupo fez analogia adequada, entre o objeto manipulado, inicialmente, e o assinalado, no término do episódio. Todos os questionamentos, feitos às equipes, encontram-se nos cadernos de atividades, entregues a cada uma.

Enfim, no término desse episódio, o professor-pesquisador apresentou duas caixas grandes, denominadas caixa A e caixa B, no centro da sala de aula. A partir disso, recomendou que os alunos fizessem observações de todos os objetos, que estavam em cima da mesa, para, em seguida, depositá-los nas caixas. Contudo, sugerimos aos aprendizes que depositassem em uma mesma caixa somente objetos que apresentavam similaridades. O procedimento obedeceu às seguintes regras: O grupo A deslocou-se às duas caixas, fez a separação dos objetos, e, no mesmo momento, o relator escreveu os nomes deles, em um

quadro específico, disponível no caderno de atividades. Em seguida, o grupo retornou ao seu lugar e respondeu a questão 13. O mesmo ocorreu para o grupo B, e assim por diante, até o grupo F. Em síntese, essa fase final tinha como objetivo fazer com que os alunos reconhecessem os corpos, que rolam, e os que não rolam.

4.5.2 Segundo episódio – Decomposição de sólidos em figuras planas

Inicialmente, o professor-pesquisador providenciou embalagens de chocolate, sabão em pó, medicamentos, leite condensado, pintura para cabelo, perfumes, creme de leite, ervilha, milho verde, creme dental, dentre outras. Posteriormente, fizemos o planejamento da atividade, que foi realizada com seis equipes, de quatro alunos. O propósito de termos trabalhado em grupos foi a oportunidade de possibilitar trocas de ideias, entre os integrantes. A escolha das embalagens levou em consideração apenas os prismas retangulares, ou quadrangulares, isso porque eles exigem menor esforço para suas planificações.

Pretendíamos, com esse episódio, descrever relações entre a geometria plana e a espacial, verificar quais figuras planas compõe o sólido geométrico planificado, ordenar as figuras planas, de acordo com suas dimensões, identificar a planificação de prismas, com formatos variados e relacionar o conceito de lado ao de face.

Sugerimos que, cada equipe, elegeisse um relator, para fazer as transcrições, das reflexões discutidas, no decorrer do episódio. No entanto, esse membro tinha que ser diferente dos demais escolhidos, na atividade anterior, isso porque nossa pretensão foi oportunizar, a todos os indivíduos, o ofício da escrita. Além do mais, tentamos impedir que o grupo deixasse todas as responsabilidades do episódio a critério dos relatores.

No dia da intervenção, o professor-pesquisador entregou duas embalagens para cada grupo e pediu que ele fizesse manipulações e observações, das características desse objeto. Por exemplo, sugerimos que as equipes ficassem atentas, quanto ao número e tamanho das faces, assim como o tipo de embalagem. Em seguida, pedimos que os grupos fizessem anotações, de suas conclusões, em seus roteiros de atividades. Lembramos que nesse momento, não exigimos a nomenclatura convencional. Esse cuidado tinha que ser tomado, pois não tínhamos a pretensão de que os alunos aprendessem esses termos de imediato.

Posteriormente, orientamos às equipes para que fizessem uma pré-visualização, de cada uma das duas embalagens recebidas e desenhassem, uma de cada vez, nos espaços destinados ao desenho 1 e desenho 2. Para isso, o grupo tinha que desenhar a caixa como se

estivesse completamente aberta, porém, sem desmontá-la. Pretendíamos verificar como os alunos visualizavam e antecipavam, através de desenhos, ou características, as embalagens que foram planejadas. Esse procedimento foi feito pelas equipes, para as duas embalagens. Logo depois, os grupos desmontaram cada uma das duas caixas recebidas, de modo que não ficassem danificadas. É importante lembrar que aquelas partes da caixa, que não aparecem, foram recortadas, isto é, as rebarbas, ou saliências deveriam ser descartadas.

Quando as embalagens estavam desmontadas, pedimos que os grupos fizessem o contorno delas, nos cadernos de atividades, nos espaços contorno 1 e contorno 2. Tomamos cuidado para que as equipes não apagassem a pré-visualização feita das embalagens, em seus cadernos de atividades. Esse procedimento repetiu-se para as duas embalagens. Pretendíamos que as equipes fizessem comparações, entre suas planificações preliminares e o contorno de suas embalagens. Assim, motivamos as equipes para que transcrevessem comentários, sobre as possíveis diferenças identificadas, entre as duas planificações. As anotações foram feitas em forma de textos, nos cadernos de atividades, pelos relatores, juntamente com seus grupos, que fizeram isso, para as duas embalagens, nos espaços texto 1 e texto 2.

Logo após, propomos que recortassem todas as faces, que formavam os sólidos, de modo que fosse decomposto, em figuras planas. Esse procedimento objetivou que os educandos percebessem quais seriam as figuras planas, que constituíram as faces desses sólidos, pretendíamos também que fizessem a quantificação do número de faces e ordenassem, conforme suas dimensões. Em um momento posterior, o professor-pesquisador propôs alguns questionamentos a respeito da atividade desenvolvida, anteriormente, e as equipes responderam em um questionário, disponível no caderno de atividades. Os questionamentos foram os seguintes: “Quantas faces (lados) tem o sólido?” “Quais são as figuras planas, que formam esse sólido?” “Organize os lados, conforme o tamanho de suas medidas.” “Quantas figuras planas, de mesma medida, podem ser encontradas, na embalagem?” “Observando as características, que essas figuras planas possuem, em comum, como elas poderiam ser chamadas?”

Esse episódio tinha a pretensão de superar dificuldades, em relação à nomenclatura dos sólidos geométricos, pois, conforme diversos autores, os estudantes, muitas vezes, denominam certos sólidos geométricos, levando em conta, apenas, suas faces. Por exemplo, como a face de um cubo é quadrada, o sólido é classificado como se fosse um quadrado.

4.5.3 Terceiro episódio – Construindo esqueletos de poliedros

Esse episódio terminou a etapa, envolvendo o estudo dos sólidos geométricos. A partir dela, fizemos sugestões de intervenções, que abordassem noções iniciais da geometria plana. Entretanto, lembramos que os episódios propostos, anteriormente, já trabalharam alguns desses conceitos.

Nossa pretensão foi que, ao término dessa terceira intervenção, os alunos pudessem compreender as noções de vértices e arestas; quantificar o número de vértices, arestas e faces, dos sólidos geométricos; classificá-los em poliedros e poliedros de Platão; apontar as características dos poliedros de Platão; verificar a rigidez dos triângulos; deduzir a Relação de Euler; classificar os sólidos geométricos, em prismas e pirâmides. Para isso, abordamos os seguintes conteúdos: poliedros e seus elementos – vértices, arestas e faces; poliedros de Platão – relação de Euler, classificação de prismas e pirâmides e rigidez dos triângulos.

Quanto à rigidez dos triângulos, salientamos que essa atividade proposta foi proposital, uma vez que diversos sólidos não ficaram rígidos, por exemplo, cubos e prismas quadrangulares. Contudo, há outros materiais que se utilizados, para confeccionar essas representações, deixam-nos, também, flexíveis, é o caso do papelão, cartolina, entre outros. Sobre as atividades, utilizando palitos de churrasco, para produção de poliedros, Detoni (2012) também aplicou, em sua intervenção de doutorado, e investigou as potencialidades delas. Para o pesquisador:

Uma noção interessante que aparece nessa atividade, e que normalmente não está presente no ensino usual, é a propriedade físicogeométrica de, em geral, os poliedros não serem rígidos. Essa propriedade abre uma interessante e inadiável constatação – já que algumas construções ficam molengas, por exemplo, o cubo -, que deve ser discutida e conduzida à questão básica de que só a face triangular é rígida. A rigidez é um forte exemplo de que materiais implicam rumos epistemológicos distintos; sólidos feitos a partir de faces de papelão não resultam em atividades na qual a rigidez se manifesta como questão (DETONI, 2012, p. 197).

Quanto ao desenvolvimento, desse episódio, inicialmente, as equipes foram as mesmas, que realizaram as atividades anteriormente. Cada uma delas confeccionou um, ou dois sólidos geométricos, de modo que, ao término da confecção, tínhamos um prisma de base triangular; outro de base quadrada; uma pirâmide de base quadrada, apresentando todas as faces idênticas; uma pirâmide de base quadrada, com a face da base menor; um octaedro; um tetraedro; um hexaedro; um icosaedro e uma pirâmide de base triangular. Dessa forma,

englobamos os poliedros de Platão, os prismas e as pirâmides. Todos esses sólidos foram construídos, utilizando-se palitos de churrasco e junções apresentando formato de X, feitas com garrote (produto encontrado nas farmácias, e vendido por metro, além disso, é utilizado, quando da aplicação de injeções intravenosas). No que diz respeito ao dodecaedro, aproveitamos os que já faziam parte do acervo do LEM.

As equipes receberam caixas com sua identificação, contendo os seguintes materiais: planificação do sólido impressa, quantidade de junções, palitos de churrasco, necessárias para a confecção e duas tabelas para dedução da fórmula de Euler, bem como separação entre poliedros e poliedros de Platão. A partir dessas informações preliminares, explicamos os quatro momentos do episódio.

O primeiro foi destinado para as equipes confeccionarem os sólidos geométricos. No segundo, proporcionamos questionamentos, de modo que fossem construídas as noções de vértices, arestas e faces. Para isso, organizamos todos os poliedros, montados pelos alunos, em uma mesa, e numeramos de 1 a 5, os de Platão, numerando os demais em sequência.

Nessa etapa, recolhemos um sólido confeccionado, por determinada equipe, e fizemos uma discussão breve, sobre as noções de pontas, quinas, retas e palitos de churrasco. Essa discussão abrangeu os questionamentos: “Que outro nome deve receber essas pontas, quinas ou junções?” “Os palitos de churrasco podem receber outro nome?” “Qual?”

Em seguida, denominamos os lados de faces: os palitos de churrasco, de arestas e as junções/quinas/pontas, de vértices. Por fim, ainda nesse primeiro momento, orientamos as equipes para que preenchessem os espaços – número de vértices, número de arestas e número de faces, em uma tabela, disponível no caderno de atividades. Disponibilizamos esse material em slides, para que pudéssemos dar orientações, acerca de como preencher a tabela. Esse procedimento ocorreu gradativamente, isto é, à medida que estávamos expondo cada sólido geométrico. A contagem do número de vértices, faces e arestas ocorreu coletivamente, na qual exibíamos um sólido e os alunos contavam oralmente, fazendo anotações em suas tabelas.

No terceiro momento, construímos juntamente com as equipes as compreensões, acerca dos poliedros e poliedros de Platão. Para isso, dispomos de um tetraedro, confeccionado pelos alunos. Em nossas mãos, apontamos para as suas faces, questionando o formato delas. Por exemplo, é um quadrado? Um triângulo? Um retângulo? Posteriormente, pedimos que às equipes respondessem isso nos cadernos de atividades.

Logo depois, propositalmente, exibimos aos grupos dois sólidos geométricos, um contendo apenas faces idênticas, enquanto o outro não. No primeiro caso, um poliedro de

Platão e no segundo, um poliedro qualquer. Logo após, questionamos: “nesse primeiro sólido, todas as faces são iguais?” “E nesse?” Isso foi registrado, no caderno de atividades.

Em seguida, sistematizamos a relação existente, entre o número de faces do sólido e seu respectivo nome. Diante das dificuldades, encontradas, decidimos fazer analogias, envolvendo o número de títulos, de um time de futebol, e a denominação recebida, por essa quantidade. Posteriormente, juntamente com os alunos, classificamos os poliedros de Platão.

Ulteriormente, questionamos os grupos: “Quantos e quais dos sólidos geométricos, confeccionados, que apresentavam todas as faces iguais?” Pedimos que os grupos separassem os sólidos, que apresentavam as faces idênticas, deixando-os em um lugar reservado. Esses sólidos, que apresentavam as faces congruentes, podiam ser reunidos, em apenas um grupo? E aqueles que não têm, em outro grupo?

No quarto momento, exploramos a classificação de prismas e pirâmides. Ele foi conduzido por alguns questionamentos, feitos às equipes. “Observando esses sólidos, que não apresentam todas as faces idênticas, quais deles têm somente duas iguais?” Uma de um lado e outra do outro. Pedimos que os alunos organizassem, em algum lugar de suas mesas. A intenção era que as características dos prismas fossem reconhecidas. Para a compreensão das caracterizações das pirâmides, fizemos a seguinte interrogação: “Quais as características, daqueles sólidos geométricos, que ficaram sem classificação?”

Por fim, sistematizamos para que houvesse uma diferenciação, entre prismas e pirâmides. Para isso exibimos, aos alunos, um prisma e uma pirâmide e, aproveitando o momento, foram feitos alguns questionamentos, para que os alunos explicassem o porquê de alguns sólidos não terem ficado rígidos.

4.5.4 Quarto episódio – Eu vou para a escola – Explorando itinerários

Adotamos os seguintes procedimentos: apresentação dos arredores da escola, no *Google Maps*, depois, os educandos fizeram observações, das principais ruas, avenidas, praças e o entorno da escola, em que estudam.

No segundo momento, nos fundamentamos em Pires et. al. (2000), quando recomendou ser extremamente importante que os alunos tenham oportunidades de representar o itinerário do caminho de casa, até a escola. Empregamos os seguintes procedimentos: realização de uma sondagem escrita, com os alunos, abordando temas acerca do trajeto realizado, da residência de cada um até a escola. Na ocasião, induzimos a utilizarem um

vocabulário conveniente, para a situação deparada, assim como oferecemos condições, para descrever o trajeto realizado, em forma de texto, ou desenho.

Os alunos receberam, individualmente, uma folha de papel ofício e outra de quadriculado, na primeira, eles descreveram, em forma de texto, o percurso realizado, de sua casa até a escola; na segunda, fizeram o mesmo procedimento, só que em forma de desenhos.

Enfim, no terceiro momento, foi feita a confecção e análise de uma maquete, da sala de aula. O episódio foi desenvolvido, envolvendo quatro grupos de cinco alunos. Cada equipe recebeu uma caixa de papelão, com altura de dez centímetros, sem a tampa, cinco caixas de fósforos, representando a quantidade mesas escolares dos alunos, da turma, embalagens, que representavam os birôs e móveis da sala e alguns *bonecos mirins*, representando os alunos e a professora.

Exemplificamos, em slides projetados pelo computador, alguns modelos de maquetes. Informamos que uma maquete é a representação de algo real em um espaço menor, porém, preservando os detalhes. Comunicamos que a atividade consistiria em confeccionar uma maquete, da sala de aula, deles, utilizando caixas de papelão, grandes, para representar o espaço e algumas embalagens, para simbolizarem os utensílios.

Sugerimos que os aprendizes observassem a sala de aula. Por exemplo, posições dos objetos, alto, ou baixo, esquerda ou direita, frente, ou atrás, perto, ou longe, dentro, ou fora. Em seguida, observamos, juntamente com eles, as representações das formas geométricas, presentes no ambiente escolar, assim como, as posições onde cada um sentava-se e os objetos, presentes no espaço. Diante disso, os educandos tiveram condições de transpor dimensões da sala de aula para a maquete.

Para instigar os aprendizes, quanto ao momento da transposição, foi preciso que eles investissem em criatividade e imaginação, no sentido de observar posições das carteiras, birôs, armários, lousas, entre outros. Essa preocupação estava em função de que a realidade deveria ser retratada, na maquete. Do que foi exposto, até aqui, foi possível a construção da maquete, para isso foi preciso devidas colagens e os últimos ajustes. Por fim, organizamos um momento para exposição das maquetes.

4.5.5 Quinto episódio – O cão Bob e seu itinerário

Este episódio teve, por finalidades: explorar itinerários, a partir da ligação entre dois pontos e a sua representação, numa malha quadriculada; compreender a noção de pontos equidistantes e diferenciar círculo de circunferência. Proporcionamos condições, para que os

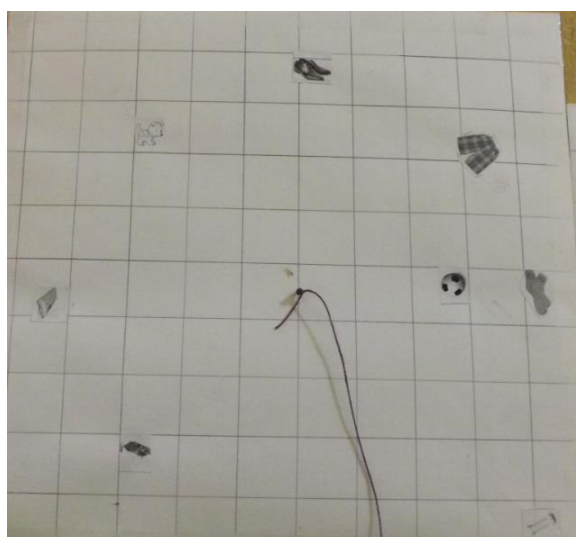
discentes, ao término da intervenção, pudessem identificar, numa malha quadriculada, pontos equidistantes, de um dado ponto; realizar, representar e comparar diferentes itinerários, ligando os mesmos pontos (inicial e final); utilizando pontos de referência, expressar ideias matemáticas, oralmente, utilizando linguagem e vocabulário próprios; representar informação e ideias matemáticas, de diversas formas.

O episódio foi dividido em três momentos, que explicitaremos logo a seguir. Cada um deles está contido no caderno de atividades, que as equipes receberam.

No primeiro momento, a partir de uma malha quadriculada, contendo a representação de alguns objetos e a de um cão chamado Bob, os estudantes identificaram o caminho mais curto, para que ele, o cão, pudesse buscar os objetos. Imediatamente, responderam alguns questionamentos, contidos no caderno de atividades.

Posteriormente, no segundo momento, as equipes receberam um tabuleiro (Figura 7), em forma de malha quadriculada, onde estava a representação do cão e um barbante, representando a coleira fixa, em determinado ponto da malha. Os alunos fizeram movimentos circulares, com Bob, e observaram quais objetos ele podia alcançar, à medida que passavam pelos pontos mais distantes, do centro. Possibilitamos, aos aprendizes, que pudessem perceber que a união desses diversos pontos originaria a representação de uma circunferência, e que eles estavam equidistantes, do centro, onde estava fixada a coleira do cão.

Figura 7: Tabuleiro para o episódio - *O cão Bob e seu itinerário*.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

Por outro lado, colocamos alguns objetos acessíveis para Bob recolher, pois eles nos apoiaram, no sentido de diferenciar circunferência de círculo, já que alguns itens estavam inseridos neste.

Enfim, no caderno de atividades, destinado ao terceiro momento, estava contido um tabuleiro, exibindo a representação de alguns objetos e o cão Bob, uma folha representando a malha quadriculada, e uma folha de papel ofício. A intenção era que cada equipe transcrevesse a posição dos objetos, em relação a Bob, para isso foi utilizado um vocabulário conveniente, para redigir a informação. Em seguida, essas mensagens foram trocadas entre as equipes. Posteriormente, a partir de uma malha quadriculada vazia, cada equipe transcreveu o trajeto de Bob ao objeto recolhido. Por fim, os itinerários feitos foram comparados com as respectivas informações prestadas, por equipe, sendo que, quando determinadas divergências foram encontradas, isso estava em função de uma interpretação equivocada, da informação, em forma de texto, ou de uma informação prestada, pelos alunos, que não correspondia à realidade das posições do cão e dos objetos recolhidos por esse, ou a equívocos, no momento da representação do itinerário na malha quadriculada.

4.5.6 Sexto episódio – diferenças entre figuras planas ou espaciais

Esse episódio teve por objetivos promover uma diferenciação entre figuras geométricas, as planas das espaciais, ou entre figuras de mesma natureza. Foi um momento oportuno, para a realização dela, uma vez que os aprendizes finalizaram as propostas, referentes à geometria espacial, e já estavam em condições de estudar alguns conceitos da geometria plana.

Inicialmente, providenciamos doze cópias, em tamanho ampliado dos pares de figuras planas, ou espaciais. Tivemos a pretensão de que fosse observada a representação de um retângulo, e um prisma, com faces laterais retangulares, de dois paralelogramos, em posições diferentes, de um triângulo e um pentágono, em formato triangular, de um triângulo retângulo e outro escaleno, de um quadrado e um hexaedro, de uma pirâmide triangular e um triângulo e de um hexaedro e um tetraedro.

No dia da intervenção, propomos aos quatro integrantes, de cada grupo, que se desmembrassem e formassem duas duplas de aprendizes, para a realização do episódio. Em seguida, entregamos para cada dupla, uma cópia dos pares de figuras planas, ou espaciais, assim como uma cópia da folha de registro e, a partir daí, os alunos foram orientados para observarem os pares de figuras.

Logo depois, as equipes, por intermédio de nossas orientações fizeram observações, na folha de registro, acerca das semelhanças e diferenças, entre os pares de figuras. Foi importante a observação da linguagem, utilizada pelos alunos, no desenvolvimento da atividade. Em seguida, sistematizamos essas duas categorias. Além disso, foi relevante nesse momento priorizar os termos geométricos convenientes, para que os alunos pudessem, progressivamente, abandonar a linguagem informal, verificada no início da atividade.

4.5.7 Sétimo episódio - Estudo dos quadriláteros com a faixa de Möebius

Este episódio teve por objetivos verificar as características de alguns quadriláteros; classificar as principais figuras planas, em quadrado, losango, retângulo e paralelogramo; investigar as propriedades dos quadriláteros, apresentados anteriormente e, compreender os conceitos de perpendicularismo e inclinação.

Os procedimentos e estratégias utilizadas foram as seguintes: providenciamos quarenta e oito folhas de papel ofício, colorido, sendo que, em cada folha, produzimos cinco tiras, para a produção da faixa de Möebius, perfazendo um total de duzentas e quarenta tiras, nas cores verde, azul, amarelo, branco e róseo. No dia da intervenção, foi sugerido que as equipes, compostas por quatro integrantes, desmembrassem em duas duplas de alunos. Seguidamente, elas receberam seus materiais, dentro de uma caixa, composta por quatorze tiras, de cores variadas, no tamanho grande, três de tamanho médio e uma de tamanho pequeno; cola; tesoura.

O episódio foi dividido em dois momentos, a saber: no primeiro, os grupos construíram a faixa de Möebius; no segundo, cada dupla formou uma figura geométrica plana quadrangular, retangular, um paralelogramo e um losango, de modo que, essas figuras planas, foram confeccionadas utilizando a faixa de Möebius com apenas dois anéis. Ao término de cada construção, o pesquisador encarregou-se de alguns questionamentos, propostos aos alunos, com intuito de que esses deduzissem a nomenclatura, adequada, para figuras planas. Houve também, a sistematização oral, demonstrando as características e semelhanças, entre cada figura geométrica.

Enfim, mostramos representações, de alguns sólidos geométricos, e fizemos analogias de suas faces, com as figuras planas produzidas, através da faixa de Möebius. Objetivamos deixar claro que elas representavam, apenas, uma das faces, de um determinado sólido.

4.5.8 Oitavo episódio – Avaliação – Observação da imagem de Escher

Nesse episódio, a intenção foi retomar elementos, vistos nas intervenções anteriores, foi um diálogo, envolvendo professor-pesquisador, discentes e o conhecimento geométrico trabalhado. A imagem escolhida adéqua-se a nossa proposta, para o segundo ciclo, da Educação Básica, em que desenvolvemos a pesquisa, ou seja, propomos uma geometria empírica, sensível e vinculada ao cotidiano dos alunos para, em seguida, a partir dessa, explorar conteúdos da geometria plana. O propósito desse trabalho dissertativo pode ser comparado à imagem de Escher (Anexo A), quando esse retrata os répteis, em um plano tridimensional (representações desses animais) e, em seguida, migra para o bidimensional (mosaico, onde as estampas são os répteis). A analogia feita, entre essa pesquisa e a produção de Escher, é uma leitura feita por nós, não temos certeza se a pretensão realmente foi essa.

Por outro lado, o artista gráfico Escher também retrata em sua obra o caminho inverso, isto é, partindo do bidimensional, onde os lagartos ganham vida, e saem de um mosaico, onde as estampas são esses próprios animais, chegam ao mundo empírico, e retornam à posição estática, em que se encontravam inicialmente, porém, eles não ficam em apenas um estado, isto é, movimentam-se em forma de ciclo, em que, ora estão no plano bidimensional, ora no tridimensional, não importando a ordem em que iniciam.

Embora estejamos em busca de uma proposta, em que se inicie com a geometria espacial para, em seguida, a partir dela, explorar os conteúdos da plana, acreditamos que se desenvolvermos um trabalho planejado e coerente, para o nível do ciclo da Educação Básica, em que estamos imersos, essa ordem é irrelevante, pois, sob esse ponto de vista, não importa de onde partimos, mas, é preciso oferecer condições para que os alunos possam transitar de uma geometria para outra.

Enfim, esse episódio foi desenvolvido a partir da exibição, dessa imagem em *slides*. Inicialmente, motivamos os educandos a fazerem observações, por um determinado tempo, levando em conta aspectos da geometria estudados e, em seguida, pediu que eles relatassem o que haviam entendido, acerca da obra. À medida que eles comentavam, íamos fazendo um aprofundamento do conteúdo, através de outros questionamentos. Por exemplo, se os discentes falassem que estavam visualizando os poliedros, que estudamos, nós, imediatamente questionávamos sobre os elementos desses sólidos geométricos, isto é, forma das faces, assim como, a quantificação de vértices, arestas e faces. Se os educandos informassem que visualizavam um pentágono, perguntávamos a quantidade de lados, vértices e ângulos. Na ocasião, esperamos para ver se eles informavam que o pentágono era o lado do dodecaedro.

Em determinados momentos, os alunos não mencionaram o que queríamos. Diante disso, fizemos intervenções, de tal modo que eles chegassem ao que desejávamos. De modo geral, nossos questionamentos foram proferidos verbalmente, e isso estava em função da participação dos discentes. Mesmo assim, estávamos com um roteiro, que nos auxiliou nesse episódio:

- Relatem o que vocês percebem de geometria nessa imagem;
- Se alunos falassem que visualizavam um pentágono, explorávamos, a partir de sua resposta;
- Se os discentes mencionassem que visualizam poliedros, nós, interrogávamos, sobre os seus elementos;
- Chegando nesses elementos, interrogávamos sobre a relação entre eles;
- Vocês visualizam algum poliedro de Platão, nessa imagem?
- Há outras representações geométricas, na imagem que vocês manipularam?
- Os répteis estão saindo de onde? Para onde eles migram? Qual o seu destino?

5. Sobre a coleta e a análise de dados

Aproveitamos esse espaço para reforçar outra característica da pesquisa qualitativa, no que diz respeito ao processo de coleta de dados. Essa etapa foi caracterizada pela obtenção de informações, a partir de variados instrumentos que, posteriormente, foram interpretados pelo pesquisador. Diante disso, surgiu uma preocupação, com relação à exposição dos envolvidos, na investigação, ou seja, textos, áudios, imagens e fotografias, daqueles mereceram cuidados, pois em nosso caso, recolhemos dados de crianças, para isso foi necessário termos específicos de autorizações.

Seguindo este pensamento, organizamo-nos no sentido de providenciar o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), (Apêndice B), para que os pais, ou responsáveis pelos alunos, nessa referida pesquisa, pudessem estar cientes da possível participação de seus filhos, caso estivessem de acordo. Esclarecemos que as imagens registradas, em forma de filmagens, bem como fotografias, poderiam ser expostas na pesquisa. Essas preocupações estão em consonância com o que diz Creswell (2014), quando afirma que um bom estudo qualitativo deve ser ético, e isso não envolve apenas pedidos de autorizações, de instituições,

ou outros quaisquer. É preciso garantir o anonimato, dos integrantes do projeto, não revelando nomes próprios e adotando pseudônimos caso seja preciso.

É necessário deixar claro que, de acordo com ideias de Bogdan e Biklen (1994), na pesquisa qualitativa, o mais importante são os relatos, que recolhemos das pessoas envolvidas, e não sua identidade. Estamos interessados em saber quais são os motivos de determinados fenômenos, presentes na rotina de vida desses sujeitos, seja ela pessoal, ou profissional. Porém, isso não permite que o pesquisador saia divulgando a biografia deles, a não ser que receba autorização para isso, e se isso for relevante para a pesquisa.

Enveredando por esse caminho, estamos em conformidade com Creswell (2014), quando alerta que as questões éticas não se inserem somente no processo de coleta de dados, elas devem permanecer no decorrer da pesquisa, e isso vai ampliando à proporção que o investigador estar mais sensível às necessidades dos participantes. De forma sintética, outras questões éticas já foram elucidadas, nessa dissertação.

O levantamento dos dados foi obtido, a partir da observação das intervenções no 5º ano do Ensino Fundamental, dos comportamentos das equipes, da realização do episódio preliminar, denominado percepção tátil, bem como das demais intervenções, que foram propostas, e da análise das transcrições dos grupos, nos cadernos de atividades, durante a intervenção do pesquisador. Essa interpretação dos manuscritos, dos educandos, foi de extrema importância, isso porque, de acordo com Lamonato e Passos (2012, p. 260), “os registros dos alunos, em primeira instância, constituem material para a tomada de decisões, pois constituem um acesso aos seus conhecimentos, aos modos pelos quais eles revelam o que aprenderam”.

No que diz respeito às transcrições dos alunos participantes, nos cadernos de atividades, quer seja em forma pictórica, quer seja em texto, pretendíamos romper com o paradigma de que nas aulas de Matemática, não há produção textual, isto é, para Ponte e Serrazina (2000, p. 2): “[...] de um modo geral, a produção escrita dos alunos tende a ser muito limitada, reduzindo-se com frequência à simples realização de cálculos necessários para obter a solução dos exercícios e problemas”. Por isso:

[...] produzir textos nas aulas de matemática é desenvolver a habilidade de comunicação escrita, dividindo, assim, um espaço constantemente predominado pela comunicação oral. Apenas a oralidade não garante atingir os objetivos que traçamos em nossos planos de aula; por isso, partindo do desenvolvimento de outra habilidade de comunicação, é possível integrar duas disciplinas: língua portuguesa e matemática, de maneira significativa para os alunos. [...] Assim, ao aluno é dada uma função para o texto que

deverá produzir, pois ele deve ter ciência de que toda escrita pressupõe um leitor e que uma produção mal-elaborada pode levar o leitor ao não entendimento da mensagem que se deseja transmitir (NACARATO et. al, 2009, p. 114).

Em quase todas as atividades propostas houve produção de textos, principalmente aquelas que objetivavam desenvolver habilidades espaciais. Por exemplo, na intervenção, que visou à construção de itinerários e trajetos, os alunos tiveram de informar textualmente qual o percurso desenvolvido de suas casas até a escola, além disso, comunicaram-se entre os membros de suas equipes, sobre a posição de determinado objeto, numa malha quadriculada, utilizando-se para isso um vocabulário conveniente.

No decorrer do processo de recolha de dados, seguimos as sugestões de Bogdan e Biklen (1994), quando dizem que o pesquisador da investigação qualitativa observa os detalhes, por mais simples que sejam, pois poderão nos fornecer pistas valiosas que enriquecem o objeto de estudo. Dessa forma, levamos em consideração atitudes e posturas dos aprendizes, durante nossa intervenção, para isso descrevemos as percepções deles, diante das atividades propostas, comportamentos tais como, repúdio, empolgação, ou dificuldades, no tocante aos conceitos trabalhados, assim como, algum comentário, após a realização dos encontros. Isso contribuiu-nos em repensar nas atividades, que estavam sugeridas, para as próximas sessões.

Valorizamos os processos, ao invés do resultado, ou dos produtos, isso porque, conforme Bogdan e Biklen (1994, p. 49), “os pesquisadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos”. Além disso, analisamos nossos dados de forma indutiva, ou seja, “as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando” (1994, p. 50). Assim, acreditamos nos autores, quando defendem que o processo, de análise dos dados, pode ser compreendido como se fosse uma montagem de um quadro “que vai ganhando forma, à medida que se recolhem e examinam as partes” (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 50). Nesse contexto, cada uma dessas partes referiu-se a toda informação, que conseguimos extrair, durante o desenvolvimento das atividades.

Recorremos aos inúmeros instrumentos, para o levantamento de nossos dados, no entanto, conforme Bogdan e Biklen (1994), nenhum deles pode ser considerado mais importante que o investigador, pois, a partir desse, os outros podem, ou não serem eficientes. Para Creswell, (2014, p. 50), “os pesquisadores qualitativos reúnem múltiplas formas de dados, como entrevistas, observações e documentos, em vez de se basearem em uma única

fonte de dados”. Mas, de todos eles, o pesquisador é o carro-chefe, pois é ele que está se relacionado com os participantes da pesquisa, é ele que está sentido as impressões repassadas, pelos envolvidos no projeto, é ele que pode decidir, sobre quais instrumentos utilizar, a partir de suas necessidades e do objeto de estudo. Assim, o pesquisador é responsável pela operacionalização das ferramentas, que decidiu utilizar, para recolher os dados, enfim, “a espinha dorsal da pesquisa qualitativa é uma ampla coleta de dados, provenientes de múltiplas fontes de informação” (CRESWELL, 2014, p. 55). Por isso, os dados recolhidos foram produzidos a partir do diário de bordo, das filmagens, das fotografias e dos cadernos de atividades, propostas às equipes.

O diário de bordo justificou-se nessa pesquisa, porque, conforme Fiorentini e Lorenzato (2009), é possível registrar observações de fenômenos, descrever pessoas, ambientes, episódios, ou até mesmo retratar diálogos. Além disso, complementa as entrevistas e os questionários. Ao defender esse instrumento, Bogdan e Biklen (1994) fizeram comparações com o gravador e reforçaram que esse não tem um dispositivo, que capte a visão, os cheiros, as impressões e os comentários extras, que ora são ditos antes, ora depois da entrevista.

O diário de bordo, conforme os autores, é um dispositivo, que possibilita perceber impressões faciais, gestos, utilizando as mãos, olhares de aprovação, ou reprovação, entre outros fatores. Diante do exposto, tomamos as notas de campo, antes mesmo das intervenções, assim como após elas. Esse cuidado foi levado em consideração, para que o pesquisador não se esquecesse de detalhes, que podiam ser importantes, posteriormente. No primeiro caso, relatamos possíveis expectativas do pesquisador, quanto ao momento a ser realizado; no segundo, caso, evidenciamos fatos, que ficaram implícitos nas filmagens, mas que não puderam ser verificadas com elas. Assim, foi possível fazer o confronto dos apontamentos feitos antes dos episódios.

O processo de análise de dados possibilita que o investigador qualitativo divulgue sua investigação ao meio acadêmico, assim como ao campo, onde se realizou a pesquisa. No último caso, consideramos relevante a exposição dos resultados encontrados, acerca da pesquisa, além disso, é o momento em que são feitas recomendações, para solucionar possíveis anomalias encontradas. São todas as técnicas utilizadas na recolha das informações, que as tornam subjetivas em objetivas. Contudo, a interpretação dos dados não é um trabalho simples, ele requer muita dedicação e perseverança. Ele envolve, conforme Bogdan e Biklen (1994, p. 205), “organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões,

descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros”.

Tudo isso tem que está em função da questão norteadora e, para tanto, é preciso que façamos constantemente escolhas sobre o que queremos analisar, caso contrário, estaremos recolhendo muita informação, que talvez não seja preciso. Com os dados recolhidos temos que decidir a forma que os trataremos, nesse caso, a solução encontrada foi a partir da análise de conteúdo.

O processo de análise, segundo Bogdan e Biklen (1994), pode ocorrer tanto durante o recolhimento dos dados, quanto após, no entanto, os autores destacam que os investigadores experientes raramente adotam o segundo caso, dessa forma, quando o trabalho no campo estiver terminando, a análise também estará em fase final. Em nosso caso, investimos na produção dos dados e, à medida do possível fizemos interpretações das informações recolhidas, pois de acordo com os autores (1994, p. 206) “alguma análise tem de ser realizada durante a recolha dos dados. Sem isto, a recolha de dados não tem orientação; se assim não o fizer, os dados que recolher podem não ser suficientemente completos para realizar posterior análise”.

Em se tratando da análise mais formal, deixamos para realizá-la após o recolhimento de todos os dados. Os autores citados, anteriormente, recomendam que deixar para interpretar os dados, após um bom descanso pode trazer sérios problemas, para o investigador, por exemplo, ele terá que retornar ao campo de pesquisa, para obter mais dados. Sendo assim, seguiremos essas recomendações.

Na análise fizemos a categorização. Ela, conforme Fiorentini e Lorenzato (2009), classifica ou organiza as informações, levando em conta aquelas que apresentam as mesmas características, inserindo-as em subgrupos, com uma expressão que defina cada um deles. Os autores sugerem princípios para a categorização, “o primeiro deles é que o conjunto de categorias deve estar relacionado a uma ideia ou conceito central capaz de abranger todas as categorias” (FIORENTINI E LORENZATO, 2009, p. 34).

Conforme Bogdan e Biklen (1994), as categorias poderão ser construídas ao longo do processo de interpretação dos dados. Para esses autores, isso é possível, pois à medida que o investigador fizer leituras, em seus dados, poderá perceber repetições de palavras, padrões de comportamento, atitudes dos participantes e acontecimentos imprevistos. Em nossa pesquisa, estabelecemos as categorias após o término do trabalho de campo, isto é, durante o processo de análise, contudo, isso não impediu que à proporção que obtivemos os dados, criássemos uma, ou mais categorias.

Podemos fazer analogia entre o processo de categorização e o de interpretação de um determinado texto. Por exemplo, no segundo caso, fazemos a leitura de um, ou mais parágrafos e, a partir daí, estaremos em condições de definir um tópico frasal, ou seja, a principal ideia defendida; já no primeiro caso, conforme Bogdan e Biklen (1994), o investigador deve fazer uma procura em seus dados, por regularidades, padrões, ou ideias, que se repetem e, após isso, é possível definir uma palavra, ou frase que represente essas noções, citadas anteriormente.

QUINTO CAPÍTULO – ANÁLISE DOS DADOS

Reservamos para esse capítulo as análises feitas, acerca dos dados expressos, de diversas formas, durante os oito episódios, realizadas com a turma investigada. Apesar dessa divisão, em que definimos cada um deles, levando em conta suas especificidades, não faremos as análises sequencialmente, ao invés disso, preocupamo-nos em sintetizá-los, através da elaboração de categorias, isso contribuiu para que não fôssemos redundantes, caso tivéssemos feito discussões de cada episódio, cronologicamente, além disso, teríamos um texto descritivo e extenso que ocasionaria uma leitura cansativa. Nossa intenção foi proporcionar uma visão analítica de todos os episódios, evidenciando as intersecções entre eles.

5.1 Informações preliminares acerca das análises

Na pesquisa de campo, propomos oito atividades, conforme verificado no quadro 1. A maioria delas foi aplicada, ora a cada semana, ora a cada quinze dias. Elas foram denominadas de *episódios*. Houve casos em que necessitamos de dois encontros, para a realização de determinados episódios. A justificativa refere-se ao fato de que algumas atividades dividiram-se em três, ou quatro etapas e, muitas vezes, não as finalizamos, para evitarmos exceder o tempo destinado, para cada episódio, situação essa, ocorrida com alguns.

As categorias utilizadas, para as análises dos dados, foram criadas, após a pesquisa de campo, especificamente, durante o processo de transcrição dos dados coletados, assim como, no decorrer de leituras exaustivas e detalhadas deles. Para isso, levamos em consideração as interações advindas entre aluno-aluno, aluno-professor, aluno-conhecimento, geométrico e, por vezes, professor-conhecimento, geométrico. Muitos aspectos, discutidos em determinadas categorias, também foram incluídos em outras, isso dependeu dos elementos comuns entre ambas às categorias, sendo assim, verificamos intersecções entre elas, isso é admissível, haja vista que, investigamos a relação obtida entre os alunos e o conhecimento geométrico, detectando possíveis obstáculos deles e, propondo algumas soluções plausíveis, através das atividades.

Para elaborarmos as categorias, consideramos os elementos detectados, em quase todos os episódios, expressados de diferentes formas, mas que, ao serem analisados, globalmente, possibilitaram-nos agrupá-los, em expressões chaves, que se tornaram possíveis identificá-las. Logo em seguida, expomos cada uma dessas categorias:

- Primeira categoria: Sólidos geométricos, a partir do formato de suas faces;
- Segunda categoria: Conhecimento cotidiano, associado ao saber geométrico;
- Terceira categoria: Memória visual e imagens mentais;
- Quarta categoria: Transitar da geometria espacial para a plana, e vice-versa;
- Quinta categoria: Diferenciação entre corpos redondos e não redondos;
- Sexta categoria: Localizar-se no próprio espaço de sua vivência, deslocar-se nele, descrever a posição de um objeto, ou pessoa, construindo itinerários.

No decurso das transcrições e interpretações dos dados, adotamos nomenclaturas, para identificarmos as equipes, assim como, seus representantes. Como a pesquisa foi desenvolvida, abarcando seis equipes, de quatro alunos cada, elas receberam as seguintes identificações, A, B, C, D, E e F. Dessa forma, os discentes foram diferenciados, levando em

conta a identificação de seu grupo. Por exemplo, na equipe A, tínhamos os alunos, A1, A2, A3 e A4 e, assim sucessivamente, para os outros grupos. Enfim, quando nos reportarmos ao aluno B3, estaremos direcionando-o ao grupo B, da mesma forma com os demais.

Registramos a importância de nossa colaboradora²⁴, responsável pelas filmagens da pesquisa de campo, pois, durante a socialização, entre os participantes de cada grupo, fez diversas interpelações, sobre as atividades com os alunos. Consideramos relevante essa interação. Por outro lado, acreditamos que teria sido melhor se tivesse o conhecimento de todas as etapas dos episódios.

Essa parceria teve uma relevância extraordinária, pois, em inúmeras ocasiões não podíamos estar presente, em todos os grupos, simultaneamente. Sob outra ótica, acreditamos que, em algumas intervenções, fazia-se necessário a presença dessas filmagens, ao passo que, houve momentos, nos quais estávamos, em determinado grupo e, nossa coadjuvante, registrava diálogos entre alunos de outras equipes. Fato ocorrido em quase todos os episódios.

5.2 Bastidores de alguns episódios

Ressaltamos que, no início de cada episódio, especificamos como eram estruturadas as etapas da atividade, em que estávamos propondo. Fizemos isso em forma de plenária para todos os participantes da pesquisa. Nossa intenção era minimizar a quantidade de tempo, que gastaríamos, caso fôssemos fazer esse detalhamento, para cada equipe. Porém, ao término dessas informações, certos grupos convocavam-nos para re-explicar o que tínhamos abordado. Acreditamos que isso atrapalhou o andamento de nossos trabalhos, pois, ao invés de fazermos discussões, acerca dos conceitos geométricos, re-explicamos o que já tinha sido dito.

No que diz respeito ao primeiro episódio, ao término da manipulação de cada objeto/embalagem, os representantes dos grupos retornaram aos seus lugares e fizeram as socializações, entre os demais e, em seguida, registraram, nos cadernos de atividades, por meio de textos e desenhos. Os discentes não sabiam quais objetos estavam sendo tocados, sendo que, as características expressadas foram citadas, levando em conta o tato.

A motivação para utilizarmos textos nas aulas de matemática é corroborada por Nacarato et. al. (2009), as autoras apontam que produções dessa natureza, nessas aulas possibilitam o desenvolvimento da habilidade de comunicação escrita, pois somente a oralidade não garante o cumprimento de todos os objetivos, traçados para nossas aulas. Com

²⁴ Agradecemos a colaboração de nossa amiga Flávia Aparecida Bezerra da Silva (Licenciada em Matemática, membro do LEEMAT) que se encarregou de filmar todos os episódios, além disso, contribuiu constantemente oportunizando dicas durante a intervenção que nos fez refletir.

esse pensamento, em quase todos os episódios, sugerimos que os discentes produzissem textos.

Os objetos manipulados nos episódios tiveram como pressupostos representações de alguns sólidos geométricos (prismas, pirâmides e corpos redondos). Suas manipulações possibilitaram que os discentes tivessem oportunidades de explorar uma das faces do conhecimento geométrico, denominada de percepção.

Nossa inquietação era oportunizar um ensino de geometria, pautado primeiro nas manipulações dessas representações, conforme defendido por Fonseca et. al. (2011), Lopes & Lasser (1996) e Romanatto e Passos (2012). Além disso, proporcionamos momentos de diferenciação, entre sólidos geométricos, que rolam e os que não rolam. Isso é tempestivo, pois os PCNs aconselham para o segundo ciclo, essa distinção. Possibilitamos um ensino de geometria, utilizando-se objetos, que tornam possível uma apropriação de conceitos geométricos (PAIS, 1996).

No quadro 2, disponibilizamos a lista das embalagens, manuseadas pelos discentes, no dia do primeiro episódio, assim como, as analogias, que fizeram, entre as embalagens manuseadas e algumas imagens expostas, em cartazes, após a manipulação, sendo que, elas apresentaram os mesmos formatos dos objetos, inseridos nas urnas.

Quadro 2: Lista das embalagens manipuladas e suas analogias feitas pelos alunos de cada equipe.

Grupo	Objeto 1 e sua paridade	Objeto 2 e sua paridade	Objeto 3 e sua paridade	Objeto 4 e sua paridade
A	Dado/hexaedro <i>Pufe</i>	Rolo de linha/cone <i>Cascão de sorvete</i>	Enfeite de natal/esfera <i>Bola de futebol</i>	Lata de milho/cilindro <i>Lata de refrigerante</i>
B	Tronco de pirâmide <i>Cascão de sorvete</i>	Cubo mágico/cubo <i>Dado</i>	Caixa de perfume/prisma <i>Caixa de medicamentos</i>	Bola de isopor <i>Bola de pingue-pongue</i>
C	Pirâmide de sabão <i>Casca de sorvete</i>	Bola isopor/esfera <i>Bola</i>	Caixa de sabonete/prisma <i>Caixa de remédio</i>	Aroma de ambientes <i>Lata de refrigerante</i>
D	Lata leite/cilindro <i>Lata refrigerante</i>	Rolo de linha <i>Casca de sorvete</i>	Bola de isopor <i>Bola de futebol</i>	Caixa de remédio <i>Caixa de remédio</i>
E	Prisma triangular <i>Banquinho</i>	Embalagem/creme <i>Caixa de pasta</i>	Hexaedro <i>Caixa de remédio</i>	Rolo de linha/cone <i>Casca de sorvete</i>
F	Caixa de sabão <i>Caixa de sabão</i>	Lata de refrigerante <i>Lata de refrigerante</i>	Caixa de perfume/prisma <i>Perfume</i>	Rolo de linha/cone <i>Casca de sorvete</i>

No apêndice D, encontramos um quadro completo, constando todos os objetos colocados em cada uma das urnas. As informações expressas, no quadro 2, assim como os demais, auxiliou-nos na interpretação dos dados e produção das análises.

5.3 Aspectos comportamentais, relacionais e hegemônicos entre os educandos

Antes de deter-nos, nas análises dos episódios, propriamente dita, ponderamos algumas ocorrências, consideradas relevantes, de posturas e expressões faciais, corporais, ou gestuais, identificadas nos discentes, no decurso dessa pesquisa. Conquanto, não nos aprofundaremos nelas, por considerarmos extrapolar os objetivos dessa investigação, uma vez que, nosso propósito não é perscrutar detalhadamente o significado dessas atitudes.

Os comportamentos identificados foram significativos, no sentido de fornecer-nos pistas, acerca de como estava ocorrendo a receptividade dos episódios, por parte dos educandos. Essas constatações foram perceptíveis, durante a primeira atividade, denominada *Percepção Tátil*, na qual, identificamos sentimentos de alegria, curiosidade e desconfiança. Também percebemos que, além do tato, para discernir sobre quais objetos estavam sendo tocados, os discentes utilizaram outros sentidos, por exemplo, em alguns casos, tentaram identificar a partir do olfato, ou até mesmo da audição.

Os adjetivos atencioso, sério e tranquilo foram expressos em grande parte dos discentes, conseqüentemente, engrandeceram alguns episódios. Por outro lado, houve casos de indisciplina, considerados normais do ponto de vista da faixa etária dos alunos, participantes desse estudo.

No que diz respeito às relações interpessoais, durante as socializações dos objetos manipulados, no primeiro episódio, identificamos interações através de diálogos entre os participantes de cada grupo, sendo que, na maioria das vezes, referiam-se às embalagens meneadas. Por exemplo, o aluno B2 fez o seguinte questionamento, com intenção de captar informações, acerca do segundo objeto manuseado: “Tu acha que é o que? Ele tem alguma ponta?” Não captamos possíveis respostas da aluna B3, quanto ao pedido de esclarecimentos.

Em determinadas ocasiões, algumas equipes distraíram-se, falando sobre diversos temas, externos às atividades propostas, isso aconteceu em duas situações, na primeira, durante a montagem dos esqueletos de poliedros, utilizando palitos de churrasco, talvez tenha ocorrido em virtude da ausência de habilidades, para manusear esses materiais, fato ocorrido nos grupos C e F, especificamente; na segunda, quando alguns deles finalizaram suas tarefas e ficaram à espera do professor-pesquisador. Posturas desse tipo foram encontradas em quase todos os episódios.

Por exemplo, no terceiro, as equipes ficaram inquietas, quando finalizaram suas montagens dos esqueletos de poliedros, às vezes, buscaram mais materiais para produzirem outros sólidos geométricos, que estavam a critério dos outros grupos. Isso também ocorreu no

quinto episódio, quando os alunos finalizaram as tarefas, referentes ao primeiro momento, e ficaram à espera do professor-pesquisador. Salientamos que, muitas vezes, os discentes demonstraram dúvidas, no tocante ao desenvolvimento das atividades, mesmo tendo recebido orientações no prenúncio.

Por outro lado, no primeiro episódio, a maioria das conversações entre os discentes aconteceram envolvendo, apenas, o aluno que manipulou cada embalagem e o relator, responsável pelas transcrições. Fato constatado, também, no episódio denominado *Cão Bob*, em que os diálogos, geralmente, ocorreram entre um par de alunos, de cada equipe, na maioria das vezes, um deles encarregava-se de fazer os registros, no caderno de atividades, enquanto o outro contribuía com algumas sugestões. Os demais intervenientes circulavam pela sala de aula. Isso foi diagnosticado, entre quase todos os grupos. Entretanto, notamos interações dos demais integrantes, no decorrer dessa atividade.

Uma plausível explicação, para o comportamento explicitado acima, pode ter sido o fato de as mesas, do Laboratório de Ensino de Matemática, serem compridas, dificultando o diálogo entre os intervenientes de cada equipe. Situações desse tipo, também, foram constatadas nos episódios dois, três e cinco, nos demais, sugerimos aos alunos que aglomerassem suas carteiras, de modo que, ficassem próximas umas das outras.

Analisando sob a ótica da coletividade, não consideramos prolífero, pois queríamos empenho de todos da equipe. Todavia, não devemos nos esquecer, que esse contexto estava apenas em fase preliminar, além disso, os discentes são oriundos de um sistema educativo, que não valoriza o trabalho conjunto, prevalecendo, quase sempre, à opinião do professor, que muitas vezes impede questionamentos sobre os conteúdos em sala de aula.

A maioria das equipes procurou caprichar em seus desenhos, feitos no caderno de atividades, de modo que, ao perceberem algumas imperfeições, em suas produções, tentavam fazer edições, para que ficassem próximas das informações prestadas pelos educandos, que manipularam as embalagens. Em diversos momentos, eles se apropriavam do caderno de atividades, para retocar algumas irregularidades postas, que não condiziam com a realidade, situações desse tipo podem ser vistas em quase todos os episódios.

Os comportamentos dos discentes, nas socializações, foram muitos produtivos, ao passo que, conversaram sobre suas experiências geométricas. Em inúmeras ocasiões, alguns integrantes dos grupos gesticulavam suas mãos, com a intenção de facilitar o entendimento, da embalagem manipulada. Houve casos em que foram feitas representações planas, nas bancas, para deixar perceptíveis o máximo de características disponíveis, sobre cada objeto manuseado. Por exemplo, os grupos B e C, esse último foi um dos que mais se destacou, em

diversos momentos, de interações entre os participantes, conseqüentemente, também sobrelevou no que diz respeito a um maior número de características das embalagens manipuladas, durante o primeiro episódio.

As interações, a partir dos diálogos percebidos e das trocas de informações, entre os membros das equipes, devem ser levadas em consideração, uma vez que Vygotsky (2007) chama atenção para a importância de proporcionar momentos como esses, onde aprendizes, que demonstrem mais habilidades, em determinadas tarefas, possam contribuir com aqueles que estão em um processo mais lento de se adaptar ao contexto. Esse cenário foi detectado em inúmeras ocasiões. Por exemplo, quando avistamos o aluno A3 trocando ideias com os demais integrantes, durante a socialização, do objeto manipulado.

No quesito relações de liderança, percebemos apropriação do caderno de atividades, pelos alunos, que manipularam os objetos nas urnas. Por exemplo, A4, em inúmeras ocasiões realizou certas tarefas, sem interagir com os demais membros de sua equipe. Esses comportamentos foram modificando, à medida que aproximamos dos grupos e fizemos comentários, a respeito das posturas adotadas, por alguns alunos. Isso também ocorreu nas equipes A e C, no segundo episódio. No quinto, as alunas B1 e D3 exerceram a liderança dos seus grupos e iniciaram o processo de visualizar, qual seria o percurso mais curto, para que o cão pudesse alcançar os objetos representados, em um tabuleiro. Na ocasião, B1 reforçou “Tem que ajudar também”, enquanto isso, B3 respondeu “Eu estou ajudando também”.

Esse espírito de liderança foi investigado por Vygotsky, quando em sua obra, fez investigações, acerca das relações de poder e disputa de forças, entre envolvidos de um mesmo grupo, ou entre grupos. Na situação citada, anteriormente, evidenciou-se um comportamento preliminar, uma vez que, no decorrer dos outros episódios, o aluno A4 não demonstrou espírito de liderança, além disso, consideramos esses modos de agir dos educandos natural, principalmente, no início da pesquisa.

No tocante ao grupo B, a ascendência notada pela aluna B1 foi preliminar, ao passo que, após responder uma parcela das questões, repassou o caderno de atividades para B2, que fez o mesmo procedimento e encaminhou para a aluna B4. Percebemos que, implicitamente, os integrantes do grupo já compartilharam da ideia de coletividade, pois, não foi preciso que o professor-pesquisador relatasse a importância da interação, naquele momento, embora, já tivesse feito isso antes. Por outro lado, no sexto episódio, a aluna B1 sempre exerceu uma postura ativa, em que deixava explícita sua liderança, no grupo, e isso foi primordial, para que a atividade fosse iniciada.

5.4 As categorias

Nesta seção, apresentamos as categorias elencadas, anteriormente. Como já mencionamos, elas foram elaboradas, após a pesquisa de campo, ou seja, durante a interpretação dos dados recolhidos. Na ocasião, percebemos intersecções nas informações prestadas, pelos discentes, que se apresentaram através de comportamentos, textos e desenhos, desse modo, pudemos agrupar as categorias, de acordo com expressões caracterizadoras, elaboradas, por nós, acerca da relação, que os discentes tiveram com o conhecimento geométrico. Alertamos que, determinadas situações, envolvendo debates, dos discentes, sobre o conhecimento geométrico, podem ser incluídas em mais de uma categoria, isso pode ser constatado nas diversas ocasiões adiante.

5.4.1 Sólidos geométricos, a partir do formato de suas faces

A tessitura utilizada, para discutirmos pontos dessa categoria, fundamentou-se, inicialmente, nas análises das transcrições dos alunos, quando responderam quesitos, referentes ao primeiro episódio. Através delas, pudemos refletir, sobre alguns pontos destacados, em nossa revisão de literatura. Comentários a respeito dos demais episódios surgiram, naturalmente, no decorrer dessas reflexões. Logo a seguir, disponibilizamos um recorte, das questões propostas, aos discentes, e contidas no caderno de atividades entregue, podendo ser visto no Apêndice C.

- Após vocês terem manipulado o primeiro objeto, utilizando o tato, conversem com seus colegas e registrem, em forma de texto, o que descobriram. Descrevam esse objeto, escrevendo todas as características descobertas, por vocês;
- Esse objeto 1, 2, 3, ou 4, parece com que?
- Se esse objeto 1, 2, 3, ou 4, fosse desmontado, ficaria mais parecido com qual dessas representações, na lousa?
- Quais objetos, que vocês tocaram, parecem com estes, que estão em cima dessa mesa? Objeto 1, 2, 3, ou 4?

Essas questões funcionaram como elementos provocativos, para que os alunos fizessem suas observações, através de distintas formas. Inicialmente, destacamos as representações elencadas abaixo, podendo ser visualizadas no quadro 3. Elas nos fornecem

elementos importantes, sobre a relação que os discentes mostraram ter, com o conhecimento geométrico.




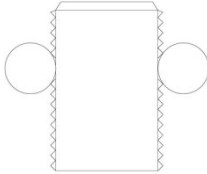
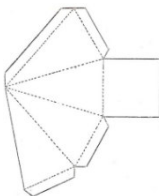
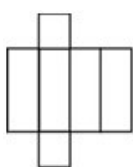



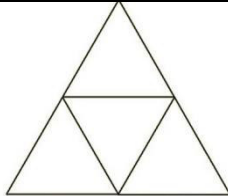
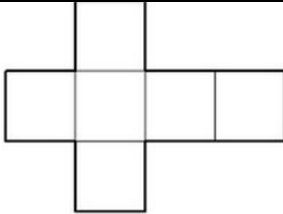
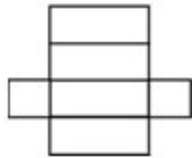

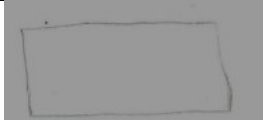

- Grupo A: representação feita pelos alunos, do objeto/embalagem, número *um*;
- Grupo B: representações feitas pelos alunos, dos objetos *um*, *dois* e *três*;
- Grupo C: representações feitas pelos alunos, dos objetos *um* e *três*;
- Grupo D: representação feita pelos alunos, do objeto *três*;
- Grupo E: representação feita pelos alunos, do objeto *um*;
- Grupo F: representações feitas pelos alunos, dos objetos *um* e *três*.

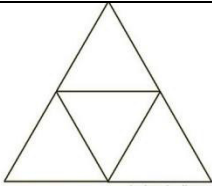
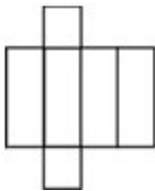
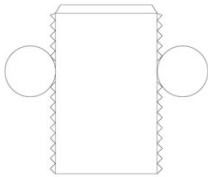



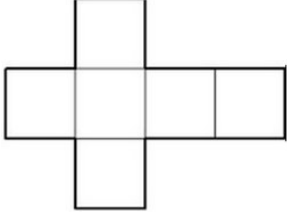
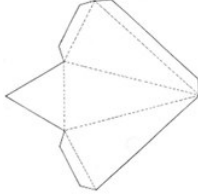
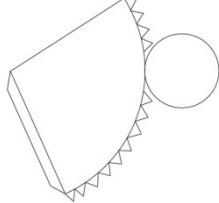



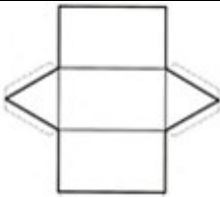

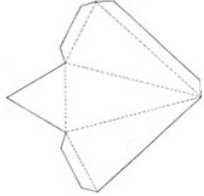



A maioria de nossas discussões está fundamentada, nas representações feitas pelos discentes, elencadas anteriormente. Essas produções revelaram alguns pontos interessantes e oportunos para serem debatidos.

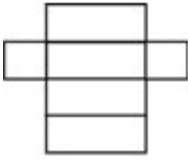
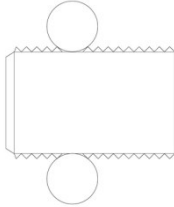
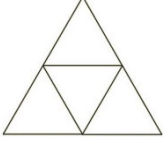
Em virtude de razões metodológicas e econômicas, decidimos apresentar as representações produzidas pelos discentes, em apenas um quadro, obedecendo à sequência do grupo A até F, além disso, consideramos que essa decisão possibilitou visualizar globalmente o episódio *Percepção tátil*, assim como, permitiu que inseríssemos as intersecções dos demais episódios. Dessarte, quando for preciso, retornaremos a esse quadro, à medida que estivermos comentando pontos, que necessitem observá-lo.

No dia do episódio da *Percepção tátil*, os discentes fizeram o reconhecimento, a partir do tato de quatro embalagens, inseridas nas urnas e, em seguida, esquematizaram as supostas representações, dos objetos, através de desenhos e algumas explicações sucintas, essas informações constam no quadro 3, especificamente, na linha denominada *representações de embalagens tocadas e descrições feitas pelos discentes*. Posteriormente, apresentamos cartazes, expostos na lousa, contendo as planificações das embalagens, que estavam dentro das urnas e, pedimos que os alunos imaginassem os objetos tocados, como se estivessem abertos e, logo em seguida, relacionasse cada uma das determinadas imagens, que estavam expostas nos cartazes.

Quadro 3: Representações e descrições das embalagens, tocadas pelos alunos, assim como, as planificações apontadas.

Grupo A	Objeto/embalagem 1	Objeto/embalagem 2	Objeto/embalagem 4
Representações de embalagens tocadas e descrições feitas pelos discentes	 <p><i>Era um dado tenhar umas bolinhas.</i></p>	 <p><i>Parese com um casca d sorvete.</i></p>	 <p><i>Parese com um lata pequena e dura com listras preta.</i></p>
Planificações expostas em cartazes, apontadas pelos alunos			
Grupo B	Objeto/embalagem 1	Objeto/embalagem 2	Objeto/embalagem 4
Representações de embalagens tocadas e descrições feitas pelos discentes	 <p><i>Pareci triangulo e pequeno tem três bico e mole.</i></p>	 <p><i>Ele e grandi e duro tem quatro parte e fechado e parece um quadrado.</i></p>	 <p><i>É pequeno duro é redondu pareci um circulo tem forma bola.</i></p>
Planificações expostas em cartazes, apontadas pelos alunos			
Grupo C	Objeto/embalagem 1	Objeto/embalagem 3	Objeto/embalagem 4
Representações de embalagens tocadas e descrições feitas pelos discentes	 <p><i>Tem ponto em cima é duro tem três pontas liso cheiro sabão parece tiangulo e fura.</i></p>	 <p><i>Retangulo escorregadio quatro lados parece um retangulo bem liso ele se abria dos lados.</i></p>	 <p><i>Ele e grande tem duas bolas aos lados ele e liso ele e metalico tem uma forma redonda.</i></p>

Planificações expostas em cartazes apontadas pelos alunos			
Grupo D	Objeto/embalagem 1	Objeto/embalagem 2	Objeto/embalagem 3
Representações de embalagens tocadas e descrições feitas pelos discentes	 <i>Redondo, duro de metal parese de uma lata ela media.</i>	 <i>E triangular, resistente, duru, parece um cone e aberto em cima e baixo.</i>	 <i>Ele é redondo, aparencia de bola, de gude branca e dura.</i>
Planificações expostas em cartazes, apontadas pelos alunos			
Grupo E	Objeto/embalagem 1	Objeto/embalagem 3	Objeto/embalagem 4
Representações de embalagens tocadas e descrições feitas pelos discentes	 <i>Sabão, cheiroso, retangulo, faz bolhas.</i>	 <i>Dado quadrado e pontudo tem numeros lados 6.</i>	 <i>Parese um casquinha de sorvete.</i>
Planificações expostas em cartazes, apontadas pelos alunos			
Grupo F	Objeto/embalagem 1	Objeto/embalagem 2	Objeto/embalagem 3
Representações de embalagens tocadas e descrições feitas pelos discentes	 <i>Pareci caixa di sabão em pó retangulo e tem um buraco na frente.</i>	 <i>É redondo e tem um buraquinho em cima pareci uma latinha de coca cola.</i>	 <i>Pareci pefume e reto e tem um topo no meio.</i>

<p>Planificações expostas em cartazes apontadas pelos alunos</p>			
---	---	--	---

O primeiro ponto que queremos destacar, diz respeito à predominância, verificada nas representações, feitas pelos alunos, da geometria plana, na série investigada, de forma generalizada, nas séries iniciais, do Ensino Fundamental. Talvez seja por isso que o grupo A tenha representado o dado, *hexaedro*, utilizando, apenas, uma de suas faces, que apresenta formato quadrangular. Esse contexto, também, pode estar em função da linearidade, que a geometria, por muito tempo, foi sendo desenvolvida, nessa ótica, isto é, inicialmente, predominavam-se as noções primitivas, da geometria plana, em seguida, passava-se para os ângulos, quadriláteros e polígonos (FAINGUELERNT, 1995).

Em diversos momentos, durante o episódio da *Percepção tátil*, constatamos situações de diálogos, envolvendo a influência que a geometria plana teve, na vida escolar dos participantes, das equipes. Por exemplo, identificamos situações em que alguns relatores faziam questionamentos do tipo: “Você tocou em um triângulo?” Isso era reportado aos alunos que fizeram as manipulações das embalagens. Eles, na maioria das vezes, confirmaram. Na realidade, a intenção desses questionamentos era saber se algumas das embalagens tateadas apresentavam suas faces triangulares, visto que, no interior das urnas havia objetos dessa natureza.

A equipe B foi uma das que se inseriu, nos relatos acima. Por exemplo, sua produção, acerca da primeira embalagem manipulada, foi a representação plana de um triângulo, conforme quadro 3. Essa produção diz respeito a uma das faces, da representação de um tetraedro, que estava dentro da urna, desse grupo. Os diálogos, onde expressaram conceitos da geometria plana, influenciaram alguns grupos, no decurso da transcrição, para o caderno de atividades, que comprovou o que tínhamos observado, nas conversações. Por exemplo, “Parece um triângulo” e “Parece um quadrado” (grupo B) e, “Parece um retângulo” (grupo C). Isso fundamentou-nos, a afirmar que o currículo de matemática dos anos iniciais, do Ensino Fundamental valoriza conteúdos da geometria plana, ao invés da espacial.

A frase: “parece um triângulo”, finalizou com a afirmação “tem três bicos”, (grupo B), sinalizou uma embalagem, com faces triangulares. Deduzimos que essa expressão poderia estar relacionada à presença de um objeto pontudo, como um tetraedro. A intenção em ter mencionado, “tem três bicos” e “tem quatro parte”, (grupo B), pode estar correlacionada à

presença na urna, de uma representação de sólido geométrico. Por exemplo, tetraedro para o primeiro caso e, hexaedro para o segundo, mostrando evidências de um conhecimento geométrico espacial.

Outra questão, que queremos discutir, diz respeito às experiências que os discentes possuem, envolvendo objetos do cotidiano, representativos de alguns sólidos geométricos. O ensino de geometria na escola, mais precisamente, nos anos iniciais, do Ensino Fundamental, ao que tudo indica, não valoriza esses conhecimentos trazidos do mundo, que está externo aos muros escolares. Maia (2000) sinaliza que há uma grande relação entre os conteúdos de geometria e a realidade. A não valorização desses conteúdos faz com que os estudantes, no decorrer dos anos letivos, possam, dependendo de como os conteúdos de geometria são abordados, passar a classificar a maioria dos sólidos geométricos, levando em conta o formato das faces.

Por exemplo, o hexaedro, na maioria das vezes, é reconhecido como se fosse um quadrado, isso porque sua face é quadrangular. O tetraedro e a pirâmide triangular são denominados em diversas ocasiões de triângulo, os argumentos defendem que suas faces são triangulares, temos evidências disso, no terceiro episódio, que tratava da montagem de esqueletos de poliedros, utilizando palitos de churrasco. Na oportunidade, expusemos a imagem de um tetraedro, em *slides*, e pedimos que os educandos apontassem, apenas, para um que fosse idêntico, dentre uma variedade de poliedros, que estavam em cima de uma mesa. Aqueles responderam que o tetraedro era um triângulo. Por fim, o prisma pode ser confundido com um retângulo, os argumentos proferidos pelos discentes consideram que algumas de suas faces podem ser quadradas, ou retangulares. Essa confusão talvez tenha origem no destaque dado à geometria plana, nos anos iniciais, do Ensino Fundamental.

Por outro lado, levamos em consideração que a maioria dos professores, dessas séries tiveram suas formações iniciais prejudicadas, pela ausência de conteúdos de geometria, em seus cursos, isso ocorreu devido a diversos fatores, discutidos em nosso referencial teórico, por exemplo, o Movimento de Matemática Moderna trouxe consequências não agradáveis, para esse ensino. Sabemos que nessa época havia formadores de professores, que detinham concepções tradicionais, em relação ao ensino de geometria, eles espalharam suas crenças para muitos professores, que ainda estão difundindo, essas ideias, em todo o Brasil e, conseqüentemente, levam suas experiências para as salas de aulas. Por outro lado, nesse período também se destacava professores, que tinham uma visão humanística, do ensino de matemática, e, isso, fez com que gerasse discussões acerca das potencialidades, que o conhecimento geométrico traz para os alunos.

Em nosso trabalho, a confusão relatada, anteriormente, foi constatada desde o primeiro episódio, prosseguindo por um bom tempo, até quando, a partir de algumas intervenções nossas, foi-se descaracterizando, essa concepção inadequada, que os alunos tinham, entretanto, insistimos e aproveitamos algumas situações, onde detectamos hábitos incoerentes, dos educandos. As resistências deles fizeram com que chegassem ao ponto de classificar a embalagem de prisma, corretamente, de acordo com a denominação comercial, porém definindo-a como sendo um retângulo.

Por exemplo, o grupo F, em seu primeiro objeto manipulado, nas urnas, afirmou que a embalagem tinha aparência com uma *caixa de sabão em pó*, contudo, posteriormente, informou que ela era um retângulo, esses esclarecimentos podem ser constatados no quadro 3 (objeto *um*). Esse contexto também foi identificado, no segundo episódio, denominado *Decomposição*. Nele, os alunos da equipe A conversaram entre si, sobre a classificação da embalagem, que apresentava formato de prisma. Uns nomeavam de retângulo, outros de quadrado, é o caso dos alunos A3: “É um quadrado” e A5: “Num é retângulo não?”

Por outro lado, identificamos que a maioria dos grupos fez o reconhecimento correto, das faces laterais, das embalagens de prismas. Salientamos que, em inúmeras ocasiões, foi necessário intervenção nossa, para que os alunos classificassem as figuras planas, adequadamente. Por exemplo, quando questionamos como era a embalagem, os alunos informaram que era um retângulo. Diante disso, perguntamos novamente: “Como são esses lados?” Obtemos a seguinte resposta do aluno B4: “retângulo”.

É notável que, em relação à classificação da embalagem, a maioria dos grupos denominou-a de retangular. Isso pode ser corroborado no seguinte trecho, acerca das características apontadas pelo grupo A: “Ela é retangular, é pequena.” Essa afirmação foi dita para uma embalagem, que tinha a representação de um prisma.

Um dos propósitos do segundo episódio era que as equipes fizessem o recorte das faces, que formavam a embalagem, em formato de prisma. A intenção, através dessa decomposição, da caixa, em três dimensões, para formas em duas dimensões, foi possibilitar aos educandos a compreensão de que as diversas faces, que compõem a embalagem, não eram motivo para denominá-la, levando em conta o formato de suas formas planas.

Machado (2005) considerou que os alunos têm condições de desenvolver sua *visão espacial*. Essa confusão, na denominação de um sólido, levando em conta o formato de suas faces, está relacionada a diversos fatores, entre eles, o autor pondera que não é desenvolvido um trabalho de tal forma, que seja valorizada a capacidade de os alunos representarem. Diante disso, levamos em consideração as ideias do autor e, nesse segundo episódio,

proporcionamos, aos alunos, uma experiência, em que eles foram convidados, a desenharem as embalagens, como se estivessem completamente abertas. Não entraremos em detalhes, acerca dos benefícios alcançados, através dessa tarefa, pois eles serão comentados na categoria *Transitar da geometria espacial para a plana, e vice-versa*.

Narramos, logo em seguida, três situações, consideradas o clímax do segundo episódio. Para a análise da primeira, esclarecemos que as equipes manusearam embalagens, em formato de prismas. Em seguida, visualizaram como se estivessem completamente abertas, e fizeram suas produções, em forma de desenhos.

A princípio, foi perceptível, no decurso das intervenções feitas, para cada equipe, que a maioria delas definiu as embalagens como sendo compostas, apenas, por quatro faces laterais retangulares, esquecendo-se das bases, contabilizadas, somente quando o professor-pesquisador sugeria, para os educandos, que expusessem todas as possíveis posições, para a embalagem, em formato de prisma, conseqüentemente, registravam a informação correta por escrito, no caderno de atividades, conforme verificado, nesse trecho: “Ela e grande, tem seis lado ela tem varias cores”. O ato de visualizar distintas posições de objetos, ou até mesmo de desenhos, contribui para trabalhar a noção de perspectiva, além de evidenciar sua percepção, no espaço. Essas considerações foram verificadas também na pesquisa de Amarilha (2009).

Essa confusão, em computar as faces, que representavam as bases, também foi confirmada no sexto episódio. Nele, os alunos do grupo A, inicialmente, insistiram em afirmar que a caixa, em formato de prisma, era composta, apenas, por quatro faces retangulares. A situação foi resolvida, quando retiramos a tampa da caixa (base), em formato de prisma, e pedimos que os alunos fizessem analogias, envolvendo-a, e, também, a imagem de um retângulo, que estava visível, no caderno de atividade deles. Posteriormente, solicitamos que eles contabilizassem a quantidade de figuras, que apresentavam o formato da tampa, que era necessário, para construir a caixa.

Evidenciamos um trecho do diálogo, realizado com uma das alunas do grupo B, quando foi questionada, sobre a forma, como tinha aprendido a reconhecer a representação de um retângulo:

[PP]: Onde foi que você aprendeu, que isso daí é um retângulo?

[B4]: Foi minha mãe que me ensinou. Porque ela costura.

[PP]: Tua mãe costura?

[B4]: Sim

[PP]: Ela te mostrou como?

[B4]: Ela tava fazendo um tecido.

Após essa afirmação, a aluna movimentou seus dedos, sobre a mesa, expondo o desenho da representação de um retângulo. Logo depois, acrescentou que, em um determinado dia, sua mãe estava cortando um tecido e, ao finalizar, obteve a representação de um retângulo. Segundo a discente, sua mãe proferiu: “Ó, isso daqui é um retângulo”.

Os diálogos relatados, previamente, respaldaram, o que já apresentamos, em momentos anteriores, sobre a riqueza das situações do cotidiano, dos alunos, que, em diversas vezes, podem ser relatadas, aos seus professores, possibilitando a transposição, dessas situações, para os contextos escolares.

No próximo contexto, foi perceptível que os educandos denominaram as bases das embalagens, em formato de prismas de quadrangulares, isto é, as abas das caixas que, em sua grande maioria, apresentavam bases, em formatos retangulares. Os argumentos dos discentes foram os mais variados possíveis. Por exemplo, a equipe C justificou que as dimensões das bases eram menores do que as das faces laterais, enquanto que a E, alegou que as abas, ou aletas poderiam ser denominadas de quadradas, porque elas eram fechadas, ou abertas. Perante esses desconcertos, foi iminente intervir, nos diálogos presenciados, em todos os grupos, que insistiam nessa concepção equivocada, pois, essas partes tinham formatos retangulares. Ressaltamos que o grupo F foi um dos que mais demorou a compreender essa discussão. Vejamos seus argumentos: “Tem um quadrado em cima e em baixo”.

Em nossa intervenção, optamos por mostrar que, na representação de um prisma, duas de suas arestas, de uma determinada face lateral são opostas e congruentes, isso era análogo, para as arestas menores, da mesma face. Fizemos esse procedimento para uma das bases. A intenção foi possibilitar que os alunos percebessem, naturalmente, que as características vistas, nas arestas, das faces laterais, eram análogas as das bases. Por outro lado, intentamos deixar evidente que ambos os lados não apresentavam todas as arestas, de mesmas dimensões, sendo assim, não poderiam ser denominados de quadrado.

Acreditamos que os educandos levaram em consideração o fato de que, as arestas das bases, tinham dimensões menores do que as das faces laterais. Isso pode ser explicado, quando os questionamos, se as características vistas, nas faces laterais, eram as mesmas das percebidas, nas bases. Diante disso, fizemos comparações, entre as arestas de cada face lateral, para que eles deduzissem que elas não eram congruentes, portanto, não podia ser a representação de um quadrado, condição necessária. Uma postura idêntica foi exercida para as faces das bases, isto é, não apresentavam arestas congruentes. Essa mediação foi positiva, pois, uma, das alunas, decidiu fazer aferições, nas arestas das bases e, conseqüentemente,

percebeu que não tinham as mesmas dimensões. Entretanto, a equipe ainda persistiu denominando a base de quadrado.

O recurso utilizado, para solucionar essa situação, surgiu repentinamente, isto é, quando visualizamos a representação de um hexaedro, feita de canudos de refrigerante, que estava exposta na estante do LEM. Deduzimos que o material poderia auxiliar os alunos a compreenderem que a face da base não era um quadrado. A intenção foi possibilitar, aos discentes, a compreensão de que ela apresentava arestas congruentes, no entanto, isso não acontecia para a face da base da embalagem, em formato de prisma.

A decisão, em utilizar esse material didático, além dos que já utilizamos, teve a intenção de possibilitar, aos participantes, a percepção da congruência, entre as faces. O contexto exigiu a mediação desse tipo de material. Almeida (2011) propõe que se o material didático for utilizado, adequadamente, pode auxiliar o trabalho do professor, em sala de aula. Situações desse tipo foram vivenciadas, na pesquisa de Almeida (2011), que se debruçou na investigação das potencialidades dos materiais didáticos manipuláveis, nas aulas de geometria.

De acordo com Pais (1996), os objetos em companhia de suas representações influenciam os processos de raciocínio geométrico, dos alunos. Por exemplo, um hexaedro, construído com quaisquer materiais, possibilita que os educandos compreendam o conceito desse sólido, assim como, explorem conceitos geométricos, a partir de observações e manipulações.

Os discentes fizeram a identificação correta, da classificação das faces do hexaedro, no entanto, persistiram, afirmando que a base da caixa seria um quadrado. Diante disso, foi sugerido que observassem, detalhadamente, a face do cubo e a da base. Desse ponto em diante, começaram a mudar seu discurso, prova disso, foi, quando questionamos novamente a classificação geométrica plana da base, vejamos nosso diálogo com os discentes a respeito do que expusemos anteriormente:

[PP]: Será um retângulo também?

[F2]: Pode ser.

[PP]: Vamos ver?

[F2]: É um retângulo pequeno.

[PP]: Mas num deixa de ser um retângulo né?

[F2]: É

[PP]: Um retângulo pequeno continua sendo um retângulo?

[F2]: É

Esse trecho registra o nível de desenvolvimento alcançado, pelos educandos. Ressaltamos a importância da zona de desenvolvimento proximal, teorizada por Vygotsky, em situações desse tipo, pois foram urgentes, as mediações de uma pessoa mais experiente, para resolver o impasse, nesse caso, o professor-pesquisador. Além disso, a postura da aluna em fazer medições, nas faces das bases, possibilitou que as demais participantes visualizassem que as quatro arestas não eram congruentes.

As contribuições da ZDP, também, podem ser percebidas no episódio da montagem de esqueletos, utilizando palitos de churrasco, nele, os alunos tiveram dificuldades em confeccionar o icosaedro, poliedro, que exige maior concentração e auxílio de uma pessoa, que já tivesse vivenciado a situação. As interações entre alunos-alunos e alunos-professor foram constantemente. Ocorreram várias tentativas, para montá-lo, as primeiras, não produziram efeitos positivos, pelo fato de os discentes terem deixado algumas faces quadrangulares. Diante disso, precisamos intervir.

Em determinado momento, uma das discentes percebeu que algumas faces eram quadrangulares. Consideramos produtiva sua colocação, pois houve inferência, de que o icosaedro apresentava, somente, faces triangulares.

Nas relações, envolvendo polígonos, constatamos que podíamos ter explorado as intersecções, entre as figuras, isto é, que todo quadrado é retângulo, isso era possível, devido às repercussões, que estavam tendo, em relação às faces laterais e as das bases dos prismas. Não obstante, talvez os alunos não tivessem maturidade conceitual, para compreender noções desse tipo.

Após as intervenções, realizadas nas equipes, oportunizamos uma sistematização, em forma de plenária, acerca dos conceitos geométricos discutidos, entre alunos-alunos e alunos-professor. Formalizamos que cada posição, de determinada embalagem de prisma, era denominada de face. Em relação à nomenclatura, das faces laterais, os alunos compreenderam corretamente, porém, quando foram questionados, as das bases, obstinaram-se em continuar com a terminologia, de uma figura geométrica plana, quadrada.

Em face dessa situação, convidamos o grupo F, especificamente, as alunas F1 e F2 para explanarem seus pontos de vista, acerca dessa diferenciação. A decisão em convocá-las esteve em função de elas terem participado de uma das equipes, que mais contribuiu no sentido de dialogar com o professor-pesquisador, a respeito do conhecimento geométrico envolvido, na atividade.

A socialização das alunas, para as demais equipes, levou em conta a nossa intervenção, isto é, elas mostraram que tanto as arestas das faces laterais, quanto as das bases,

não eram congruentes, conseqüentemente, não podiam ser denominadas de quadrados. Em certa ocasião, entregamos a F2 a representação do hexaedro, que tínhamos utilizado nas mediações, feitas em sua equipe. A aluna explicou, de forma concisa, que a face do cubo recebia a nomenclatura de um quadrado, porque todas as suas arestas eram congruentes.

Em seguida, aproveitamos a contribuição dada, pelas alunas, e fizemos nova interrogação às equipes, acerca da nomenclatura de algumas embalagens, que estavam expostas, sobre a mesa, e cujas bases eram retangulares. Notamos algumas dúvidas, prevalecendo entre os alunos, ao percebermos isso, relembramos aos educandos que, no episódio anterior, eles tinham denominado o hexaedro (durante essa socialização, não formalizamos a terminologia do sólido geométrico) de quadrado. Diante disso, interrogamos novamente se eles achavam que aquela embalagem era um quadrado, e recebemos resposta positiva. No entanto, afirmaram que ela era composta por seis faces. Depreendemos disso, que houve compreensão da quantidade de faces e o formato delas, contudo, não levaram em conta que as seis formavam um sólido geométrico.

De acordo com o relato anterior, fizemos intervenções, que não tínhamos planejado antes, porém, as atitudes tomadas, que são relatadas, logo em seguida, produziram bons resultados. Inicialmente, solicitamos a presença da aluna E2 e pedimos que ela apoiasse o hexaedro sobre a lousa, e fizesse o contorno de uma das faces. Todos os alunos compreenderam que o desenho feito por E2 era a representação de um quadrado, e que ele seria apenas uma das seis faces, que formavam o cubo. A situação foi provocativa e, ao mesmo tempo, gerou muitas discussões. Entretanto, quando expusemos o sólido geométrico, aos discentes, e pedimos que eles opinassem, sobre a nomenclatura da embalagem completa, e recebemos, novamente, a resposta de que era um quadrado.

Na segunda, utilizamos uma cartolina, e fizemos o recorte de uma face, em formato quadrangular. Dispondo da representação de um hexaedro, em nossas mãos, soltamos em instantes diferentes, sobre o piso, o recorte de cartolina e a representação do sólido. Em seguida, indagamos acerca das discrepâncias, entre as duas situações. Os discentes informaram-nos que o contorno era *fino* e o hexaedro era *grosso*. Fizemos a exposição desse último e, ao questionarmos se todas as faces dele tinham tocado no piso, eles responderam que não. Nossa intenção era possibilitar que os discentes compreendessem a noção de profundidade. Fizemos o mesmo para o recorte de cartolina, e os alunos confirmaram que todos os seus lados, também, não tocaram no piso.

A postura, daqueles, esteve em função de nossa intervenção, isto é, na realidade vários contornos de cartolina, em formatos quadrangulares, juntos, podem produzir um hexaedro.

Assim, os discentes estavam corretos, quando disseram que nem todos os lados do recorte tocavam no piso, pois, a parte de cima não tinha tocado.

A tese de doutorado, de Nacarato (2000), propôs discussões acerca da diferenciação entre sólidos geométricos feitos de madeira e aqueles confeccionados em papel. Esses, na realidade, representam apenas a casca do sólido, isto é, só a superfície e estão presentes no cotidiano das crianças. A confusão em nossa intervenção ocorreu, quando soltamos um recorte de cartolina, em formato quadrangular, no piso, e questionamos aos alunos se haveria divergências, entre ele e a superfície de um cubo, uma vez que, vários contornos empilhados podem dar a ideia de um sólido geométrico, feito de madeira. Outra situação desse tipo pôde ser visualizada, quando amontoamos diversas moedas congruentes, umas em cima das outras, fazendo com que tivéssemos a representação de um cilindro, totalmente preenchido, em seu interior.

Reiteramos nossos questionamentos, acerca da terminologia do hexaedro, contudo, os alunos insistiram em denominá-lo de quadrado. Em certo momento, a aluna E2 informou que a embalagem completa não era um quadrado. Interpretando as palavras da discente: “foi desenhada uma face quadrangular na lousa e restaram cinco”. No entanto, uma grande parte dos alunos permaneceu informando que o hexaedro era um quadrado. Foi preciso relembrar os discentes que, no primeiro episódio, eles utilizaram a expressão *dado* para referenciar a embalagem, que estávamos investigando. Daí em diante, sistematizamos que esse era um indicativo de que não se tratava de um quadrado. Aproveitamos a presença de E2 e pedimos que ela imaginasse a embalagem, em forma de cubo, desmontada e fizesse o desenho dela na lousa.

A nossa conduta foi baseada na ideia de que fazer uma pré-visualização, da planificação da embalagem, é relevante, uma vez que, ela pode colaborar para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Além disso, certamente, contribui para analisar a atitude dos discentes, durante o desenvolvimento da tarefa, em relação à elaboração de hipóteses e conjecturas, através da comparação de ideias, para convergirem a conclusões significativas (ALMEIDA, 2011).

Um dos equívocos cometidos por E2 foi ter esquecido uma das faces do hexaedro, em seu desenho plano. Percebendo isso, interrogamos a plateia: “Tá faltando alguma coisa pessoal, dá para fechar a caixa?” Uma das alunas respondeu que estava faltando um lado em cima. Imediatamente, a discente E2 corrigiu seu desenho. Após isso, pedimos que os alunos opinassem, se a embalagem em formato de cubo poderia ser fechada. Eles responderam positivamente. Decidimos enumerar as faces, do desenho feito por E2, e questionar sobre a

quantidade de figuras geométricas quadrangulares. Os alunos indicaram que tinham seis quadrados. Então, sistematizamos, informando que esse valor não era motivo, para que a embalagem completa fosse denominada de quadrado, pois essa terminologia se refere a cada uma de suas faces. Embora tenhamos feito essas intervenções, alguns discentes permaneceram em defesa de que o hexaedro era um quadrado.

Diante disso, preferimos finalizar a discussão e afirmar que a embalagem não se tratava de um quadrado, sendo assim, sugerimos que os alunos apontassem uma possível nomenclatura para o sólido geométrico. Em determinado momento, a aluna E4 mencionou a expressão *cubo*. Vejamos um recorte dos diálogos ocorridos entre pesquisador e alunos:

- [PP]: Onde foi que você ouviu falar que isso daqui é um cubo?
 [Alguns alunos]: No livro de matemática
 [PP]: O que é um cubo?
 [Alunos, em silêncio].
 [PP]: Foi a primeira vez que vocês ouviram falar nessa palavra?
 [Alunos]: Não
 [PP]: Qual série vocês estudaram que isso daqui é um cubo? (*Exibimos a representação de um cubo para os discentes*)
 [Alunos]: Terceira.
 [PP]: O livro dizia o que a respeito do cubo?
 [Alunos, em silêncio].

Os alunos começaram a mostrar, timidamente, que o hexaedro não se tratava de um quadrado. Isso ocorreu, a partir do momento em que pedimos que eles expusessem exemplos do cotidiano, onde fossem percebidas representações, semelhantes à embalagem, que estávamos investigando. Os discentes citaram o *monitor de um computador antigo* e um *aparelho de TV*, que estava na sala do LEM, da universidade. Devemos levar em consideração o fato de que a maioria das TVs comercializadas, hodiernamente, não apresenta formato de um hexaedro, isso não foi discutido nesse episódio, no entanto, acreditamos que os alunos, talvez, tenham imaginado TVs mais antigas.

Em relação ao monitor de computador, fizemos o questionamento se no interior dele haveria algo, os discentes responderam que existiam fios. Daí em diante, formalizamos o conceito de hexaedro e informamos que do mesmo modo que era possível inserir algo, no interior de uma TV, também podíamos fazer com a embalagem, entretanto, isso não acontecia com a representação de um quadrado.

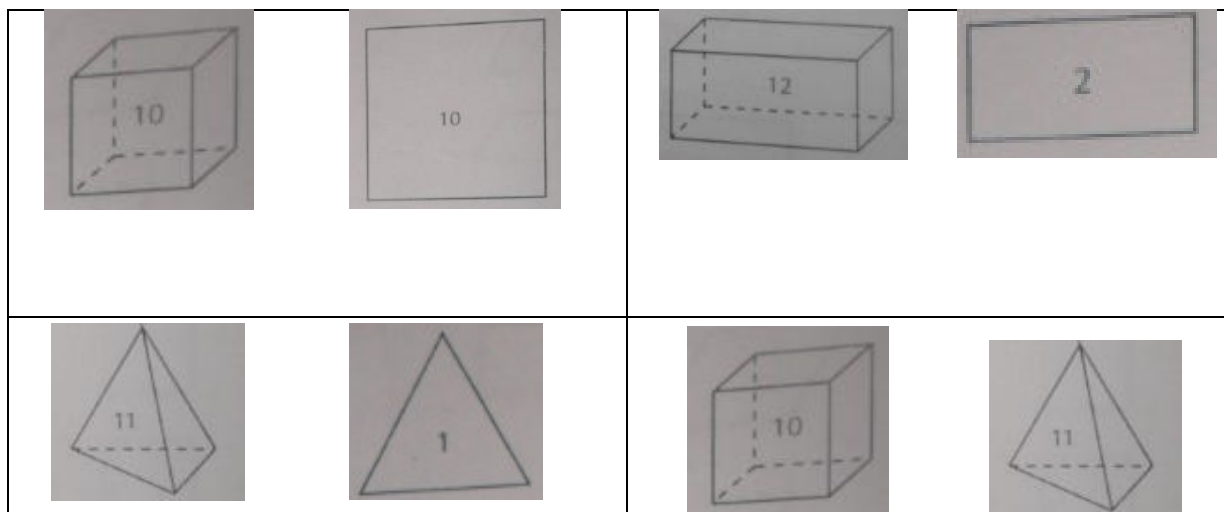
Essa problemática, enfrentada pelos alunos, em denominar um sólido, através do formato de suas faces, identificada em nosso trabalho, também foi constatada nas pesquisas de

Araújo (1994), Vasconcellos (2008), Radaeli (2010) e alguns documentos nacionais, entre eles os PCNs, (BRASIL, 1997).

No episódio Diferenças entre figuras planas, ou espaciais, também tivemos como propósito possibilitar que os educandos diferenciasssem as seguintes representações: um hexaedro de um quadrado, um prisma de um retângulo, uma pirâmide triangular, ou um tetraedro de um triângulo, duas figuras geométricas planas e, assim por diante.

Disponibilizamos, em um quadro, representações de alguns sólidos geométricos, que são confundidos com figuras planas, incluindo essas, que representaram as faces deles. Além disso, cedemos, para as equipes, uma representação de cada sólido, mencionado anteriormente, feita com palitos de churrasco. Dessa forma, os educandos tiveram a sua disposição, tanto a imagem do sólido, quanto sua representação, feita com materiais palpáveis. Logo em seguida, na figura 8, apresentamos um recorte, de algumas representações, de sólidos, juntamente com as figuras geométricas planas, que compõem suas faces, entregues aos alunos, no dia da atividade.

Figura 8: Algumas representações de sólidos geométricos, que são confundidas com o formato de suas faces.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

Tivemos a intenção de possibilitar, aos alunos, a compreensão de que as formas retangulares, quadradas e triangulares eram partes, que formavam os poliedros, cuja denominação dependia do número de faces. Para auxiliar os discentes, entregamos um quadro, dividido em duas colunas, onde cada uma estava reservada, para relatar possíveis diferenças, e semelhanças, entre alguns pares de figuras geométricas planas e espaciais, vistos

anteriormente. Doravante, narramos comentários, relativamente, aos pares de figuras expostos, na figura anterior, não, necessariamente, na ordem em que está posta.

No que diz respeito às representações do tetraedro e do triângulo, exibimos as faces do primeiro, e requisitamos aos discentes do grupo A que classificassem o sólido geométrico. Eles o denominaram, novamente, de triângulo. Perante essa situação, motivamo-los para contar a quantidade de triângulos, da representação do tetraedro, que estava em nossas mãos. Além disso, interpelamos, se era possível inserir algum objeto pequeno, no interior daquele poliedro de Platão, conforme visto na figura 9. Isso foi possível, porque estávamos com um sólido, feito com palitos de churrasco.

Figura 9: Tetraedro com um prisma em seu interior.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

Essa intervenção teve a intenção de fazer com que os alunos compreendessem que era possível, inserir algum objeto, no interior do tetraedro, entretanto, isso não acontecia, em relação a sua face. Assim, obtemos alguns resultados positivos, mas certos discentes não mostraram total entendimento, entre a diferença do tetraedro e de sua face.

No terceiro episódio, uma das alunas do grupo A, ao ter finalizado a montagem, da representação de pirâmide quadrangular, feita com palitos de churrasco, sugeriu que fosse colocado outra representação, desse sólido, com dimensões menores, no interior daquela. Consideramos a participação da discente rentável, ao passo que, foi preciso fazer inferências, acerca de um sólido menor, no interior de outro maior, além disso, a mesma buscou maneiras diferentes, para ter uma visualização diferente, daqueles produzidos nessa atividade.

Já o grupo D obteve êxito, na diferenciação, entre as representações de hexaedro e tetraedro, de uma figura geométrica plana triangular e um tetraedro, de um hexaedro e uma

figura geométrica plana quadrangular. Na imagem abaixo, encontramos as explicações desse grupo, acerca das diferenças e semelhanças, entre essas representações.

Figura 10: Semelhanças e diferenças apontadas pelo grupo D, para representações de alguns sólidos e seus lados.

Pares de figuras	Elementos em comum	Diferenças
2 e 12	12 é uma das faces de 12	12 não tem lados quadrados e 2 não tem
3 e 3	Não tem nada em comum	Os vértices são finos e o outro não.
6 e 6	em cima são triangulares	nas laterais são finos e no outro são retas
7 e 7	as vértices são finas	só que o outro é mais largo
10 e 10	10 são as faces do outro	que um é quadrado e outro é o cubo
11 e 11	10 onze as faces do outro	precisa de quatro faces para fazer outro
12 e 12	Nada em comum	que sempre das faces de um é quadrado e outro são faces triangulares

Fonte: Arquivo do autor (2015).

As representações 2 e 12 dizem respeito a um retângulo e um prisma, 10 e 10 correspondem a um quadrado e a um hexaedro, 11 e 11 a um triângulo e a um tetraedro, por fim, 12 e 12 refere-se a um hexaedro e a um tetraedro. Notamos riqueza geométrica, no discurso do grupo, acerca das semelhanças e diferenças, entre os pares citados anteriormente. Os discentes foram claros, informando, por exemplo, “o 10 são as faces do outro”, isto é, a intenção deles foi deixar claro que a figura geométrica denominada quadrado era, apenas, uma das faces do hexaedro. Em relação ao par 11 e 11, complementaram, que para formar o tetraedro, era necessário quatro formas planas triangulares.

Enquanto isso, a equipe F, quando pedimos aos seus integrantes que observassem a representação de um tetraedro, feito com palitos de churrasco, exposto em nossas mãos, e fizessem analogias, com algumas representações bidimensionais triangulares, respondeu que o sólido era um triângulo. Isso mostra que, ainda, não tínhamos alcançado, os alunos em questão, pois, permaneciam denominando-o de sólido geométrico, levando em conta o formato das faces. Nesse caso, foi necessário intervimos para que eles lograssem êxito.

No que concerne à representação do hexaedro, e uma de suas faces, quadrangular, intervimos de modo que os alunos, do grupo B, percebessem que eram necessárias seis figuras planas, para compor o cubo. Contudo, quando debatemos sobre as afinidades e desigualdades,

entre o hexaedro e o tetraedro, uma das alunas assegurou que o primeiro era um quadrado, enquanto o segundo, um triângulo.

Essa dificuldade, em discernir a nomenclatura do sólido geométrico, adquiriu menor intensidade, em comparação com os primeiros episódios, haja vista que, nem todos os alunos estavam defendendo esse ponto de vista, muitos preferiram manter silêncio. A própria aluna, mencionada anteriormente, corrigiu sua informação. Por outro lado, de vez em quando, nos deparávamos com algumas ocorrências, em que eles designaram um sólido geométrico, se fundamentando na forma plana das faces. Por exemplo, no episódio montagem dos esqueletos de poliedros.

Nele, ostentamos a imagem de uma melancia, em formato de hexaedro, em *slides* e, em seguida, pedimos que os discentes observassem os poliedros, feitos com palitos de churrasco, que estavam em cima da mesa. Logo após, questionamos qual desses apresentava o mesmo formato do cubo. Determinados alunos insistiram em denominá-lo de uma figura geométrica quadrangular, todavia, corrigiram a informação dada, quando perceberam nossa expressão de dúvida, naquele momento.

As intercessões, sucedidas nos grupos C e D, dizem respeito à diferenciação, entre o prisma e uma de suas faces, retangular. Notabilizaram-se contribuições, dadas pelo aluno C4 e D3, (Figura 10), ao passo que, fizeram identificação correta, entre a imagem de um prisma e sua representação, feita com palitos de churrasco, além disso, o primeiro expressou o termo geométrico exato, para os lados do poliedro. Ademais, D3 percebeu que a base do prisma não tinha formato quadrangular.

Na ocasião, nosso propósito era que os discentes compreendessem que, para confeccionar o prisma, foram necessárias seis faces retangulares, ou seja, a representação do retângulo, em forma de imagem, era apenas um sexto da quantidade de faces, para produzir o paralelepípedo, isso ocorreu para a equipe C, pois a D tinha uma embalagem com suas bases quadrangulares.

Parafraseando as respostas dadas pelo discente C4, quando indagado, acerca da quantidade de faces do cubo e do tetraedro, o formato deles, se poderíamos denominá-los de quadrado e triângulo, respectivamente, obtemos os seguintes argumentos: a figura geométrica plana, denominada quadrado, indica o formato das faces do hexaedro; em relação ao tetraedro, o formato de seus lados era triangular; o primeiro era composto por seis faces e o segundo por quatro, por fim, ainda, informou a nomenclatura conveniente para os dois sólidos. O desenvolvimento geométrico alcançado, pelo grupo C, ocorreu, quando chegamos

próximo dos discentes e começamos a intervir, pois, ainda estavam com concepções equivocadas, conforme constatado abaixo.

Figura 11: Semelhanças e diferenças apontadas pelo grupo C, para representações de alguns sólidos e seus lados.

Pares de figuras	Elementos em comum	Diferenças
2 e 12	Que é um retângulo	Que o 2º tem seis faces e o 1º tem uma
3 e 3	Que tem quatro pontos	Um é reto e o outro não é reto
6 e 6	Elas não são triangulares	Um lado dos 6 é igual e o outro tem lados diferentes
7 e 7	Um reto é maior e outro é menor	É um lado é diferente do outro
10 e 10	Um dos 6 é menor e o outro é maior	O 1º tem 6 faces e o maior e o outro é maior
11 e 11	Que os faces tem três pontos	O 1º tem 4 faces e o 2º tem uma
12 e 12	Elas não tem lados iguais	Um é triangular e o outro é quadrado

Fonte: Arquivo do autor (2015).

Mesmo detectando algumas incoerências, entre os pares de representações de sólidos geométricos, e o formato das faces, o grupo conseguiu, antes de chegarmos para fazer mediações, detectar que a forma plana retangular representava uma face da representação de prisma (par 2 e 12), já em relação ao par (12 e 12), informou que o hexaedro era um quadrado e o tetraedro um triângulo.

Por outro lado, essa equipe, após nossas intervenções, destacou-se na diferenciação, em especial, o aluno que fizemos menção. Ele exibiu expressão de felicidade, ao ter percebido que tinha compreendido o que estávamos propondo. Também merece menção os avanços da equipe F, que esteve na mesma direção da C, em se tratando da distinção entre o conceito de hexaedro e o formato de suas faces.

Como falamos, anteriormente, os discentes denominaram os sólidos geométricos em função do formato de suas faces, durante quase todos os episódios. Também registramos esse contexto, no quarto episódio. Nele, no momento em que fazíamos a socialização das maquetes, confeccionadas pelas equipes, sugerimos que os educandos relatassem exemplos de conceitos geométricos, vistos nos encontros anteriores, que podiam ser percebidos em suas produções. Alguns alunos, ainda persistiram, afirmando que certas embalagens, utilizadas para a confecção, eram quadrangulares, lembrando que todas essas caixas apresentavam formato de prismas.

Em quase todos os episódios, essa postura de determinados discentes, aludida precedentemente, só modificava, quando fazíamos intervenção no sentido de que eles mencionassem a classificação correta das embalagens, e não as confundissem, pela forma de sua face. Em relação ao quarto episódio, eles nomearam alguns elementos, que compõe a representação de prisma, porém, denominaram a caixa de papelão, que estava representando a sala de aula de retângulo.

Ao insistirmos se, nas maquetes confeccionadas, haveria outras embalagens, em formatos de prismas, uma das alunas informou que a mesa da professora seria um prisma. Sua explicação foi a seguinte: apontou para os lados paralelos e informou que eles eram iguais, assim como as bases opostas. A postura na resposta da educanda comprova o que a literatura nos diz, isto é, o debate de conceitos geométricos, expressos nas representações utilizadas, possibilita o desenvolvimento da percepção espacial, Portugal (2007).

Esclarecemos que certos conhecimentos geométricos, expressos erroneamente, ocorriam, apenas, com uma parcela dos alunos participantes da pesquisa. Acreditamos que essa conduta, em muitos momentos, influenciou os demais discentes. O relato feito no parágrafo anterior, assim como outros, deixa claro o alcance, obtido em termos de desenvolvimento do conhecimento geométrico, na maioria dos alunos.

É notório que os conhecimentos geométricos, oriundos do mundo sensível dos discentes participantes, dessa pesquisa, foram influenciados desde os primeiros anos escolares, por uma geometria desvinculada do cotidiano deles. Ao que tudo indica, a escola possa ter dado grande relevância, aos conteúdos da geometria plana, o que na realidade deveria ter sido explorado a partir dos conceitos, que envolvem a geometria espacial.

A influência, apontada no item anterior, pode ser verificada em nossas discussões, precedentemente. Por exemplo, os discentes fizeram o desenho, em perspectiva de sólidos geométricos, apoiando-se, apenas, no formato de suas faces. Os diálogos dos discentes, também, revelam o privilégio excessivo que a escola possivelmente possa ter dado a geometria plana, a exemplo de: “você tocou em um triângulo?” e “Parece um quadrado”. Acreditamos que se fosse dada igual atenção, a partir de uma maneira eficaz do professor, no uso de atividades planejadas, às noções bidimensionais e tridimensionais, os discentes teriam condições de informar “você tocou em um objeto em que os seus lados têm formatos triangulares?” e “A embalagem manipulada tem lados quadrangulares”.

Resumidamente, os conhecimentos geométricos empíricos dos estudantes participantes, desse trabalho, foram influenciados ao ponto de, em seu dia a dia, fazerem a classificação coerente de embalagens de creme dental, sabão em pó, perfumes e, entre outros,

utilizando o termo *caixa*. Isso bastava, para poderem atuar na sociedade, levando em conta a faixa etária desses discentes.

Desde que ingressam, nos primeiros anos de escolaridade, da Educação Básica, esses mesmos objetos passam a ser denominados de retângulos, quadrados ou triângulos. Em diversas ocasiões, nessa pesquisa, os alunos mostraram que, ainda, carregam os conhecimentos oriundos de seu cotidiano, a exemplo da situação em que alguns grupos chegaram a denominar, determinada embalagem, de *caixa*, entretanto, em seguida, definiram que essa mesma embalagem era um retângulo.

5.4.2 Conhecimento cotidiano, associado ao saber geométrico

A influência que os objetos do cotidiano, dos alunos, têm para o ensino de geometria é corroborada por diversos pesquisadores. É ressaltado que esse ensino deve ser iniciado pela ação e percepção de objetos, presentes no mundo exterior (FAINGUELERNT, 1999). Os próprios alunos recorreram às suas experiências, para expressar seu conhecimento geométrico. Esse contexto foi verificado, na maioria dos grupos participantes, da pesquisa.

Por exemplo, o grupo A relacionou que o primeiro, segundo e terceiro, objetos manuseados, tinham aparência com um *dado*, uma *casquinha de sorvete* e uma *lata*, respectivamente. O mesmo ocorreu com o grupo D, informando que o primeiro objeto aparentava uma *lata*, assim como, o grupo F indicou que a primeira, segunda e terceira, embalagens manuseadas, tinham aparências com uma *caixa de sabão em pó*, uma *lata de refrigerante* e um *frasco de perfume*, respectivamente.

No caso do grupo A, a capacidade em ter identificado o objeto, através do tato, talvez esteja relacionada a outras experiências, vivenciadas em contextos não formais, certamente, isso tenha acontecido a partir da utilização do *dado*, em diversas brincadeiras. Essa situação deve ser considerada natural, em se tratando do ensino de geometria, nos primeiros anos, do Ensino Fundamental, pois, inicialmente as crianças percebem os objetos, que estão no espaço, em seguida, elas fazem observações, análises e descrições de propriedades verbalmente, só depois, é que é feita uma conceituação (FAINGUELERNT, 1999).

Um dos objetos inseridos, na urna referente ao grupo C, foi uma representação de pirâmide de base quadrangular, feita com sabão em pedra. Após a manipulação, foram elencadas as características da embalagem, ou objeto, através de um texto curto, conforme verificado no quadro 3 (objeto *um*). O relato, expresso pelo grupo, mostra que, em suas mãos,

ficaram resquícios do cheiro, presente nas barras de sabão em pedra. Isso confirma o que tínhamos dito antes, isto é, os discentes utilizaram outros sentidos, além do tato, para identificar qual objeto estava manipulando.

O quesito dois: *Esse objeto 1, 2, 3, ou 4 parece com que?* Teve a intenção de possibilitar, aos grupos, fazerem analogias, entre as embalagens meneadas e algumas representadas, em vários cartazes, expostos na lousa, que ora apresentavam as mesmas embalagens, inseridas nas urnas, ora outras que tinham as mesmas características.

O grupo C fez analogia entre uma *pirâmide quadrangular, feita com sabão em pedra* e uma *casquinha de sorvete* (representação de um cone). Esse equívoco, cometido pela equipe, pode estar em função de não termos deixado expostas algumas imagens de objetos, que demonstravam as mesmas características, daqueles inseridos nos escrutínios, pois faltou a imagem de uma representação de pirâmide quadrangular, embora, tenhamos colocado a de uma pirâmide de base triangular.

A alusão do objeto palpado feito à *casquinha de sorvete* é considerável, diante dos adjetivos explicitados, pelos discentes, uma vez que, a expressão “tem um ponto em cima” pode se referir ao bico da *casquinha de sorvete*, contudo, houve incoerências, quando mencionam “tem três pontas” e “tem um cheiro de sabão”, haja vista que na urna havia, apenas, uma representação de pirâmide quadrangular, feita com sabão em pedra, desse modo, a embalagem manipulada, talvez, não tenha formato de um cone.

Em nossa pesquisa, algumas representações de sólidos geométricos foram confeccionadas, utilizando-se materiais acessíveis, aos alunos. Por exemplo, entendemos que a utilização do sabão, para produzir corpos, que rolam e não rolam, foi um trabalho significativo, haja vista que, esse material é do conhecimento de todos os alunos (MARQUESIN, 2007). Entretanto, comprovamos que, para o episódio da Percepção tátil de nossa pesquisa, não foi uma escolha propícia para a ocasião, tendo em conta que, os alunos utilizaram o sentido do olfato, para identificar qual objeto estava sendo meneado. Todavia, não consideramos isso um ponto negativo.

O episódio do sabão e a ressignificação do conceito figural, de prisma, proposto por Nacarato (2000), em sua tese de doutorado, teve a intenção de diferenciar uma figura plana de outra tridimensional, para isso, a pesquisadora propôs, através de cubos, pirâmides e prismas, feitos de sabão, fazer um corte em um plano paralelo a uma das faces de cada sólido geométrico citado anteriormente. No primeiro caso, a secção foi um quadrado, e no último um retângulo. Os resultados obtidos pela investigadora foram coerentes com o objetivo, inicialmente, proposto por ela.

Enquanto isso, nessa pesquisa, o quesito dois, mencionado anteriormente, teve a intenção de comprovar as informações, prestadas pelos alunos, quando, na fase inicial, fizeram a representação da embalagem manipulada, em forma de desenhos e, em alguns casos, através de um texto curto, posteriormente, apontaram para imagens que coincidiam com as informações, postadas pelos discentes, no caderno de atividades, acerca de cada embalagem manipulada.

As analogias feitas, entre os objetos do cotidiano e alguns conceitos geométricos, que os alunos realizaram, foram encaradas, positivamente, entre nós, ao passo que, de acordo com Montenegro e Pimentel (2007) o ato de estudar torna possível fazer relações, entre conhecimentos e a realidade de vida, de cada um. Por exemplo, as afinidades, percebidas pelo grupo A, em relação ao terceiro objeto manuseado, entre um *enfeite natalino* (bola) e a *bola de futebol*, pode ser explicada nos PCNs, quando dizem que o espaço perceptivo, em que o conhecimento é fruto do contato direto, com os objetos, possibilita no futuro, a construção de um espaço representativo, em que a criança pode representar um objeto, mesmo na sua ausência (BRASIL, 1997).

As crianças têm, desde seus primeiros anos de vida, vastas experiências geométricas, espontaneamente, envolvendo objetos em formato de esfera, entre eles a *bola de futebol*, esse conhecimento cotidiano possibilitou o reconhecimento imediato do objeto manuseado, na urna, *enfeite natalino*. Logo, de acordo com Fonseca et. al. (2011), a partir do momento em que as crianças chegam à escola, apresentam um conhecimento intuitivo, desse espaço perceptivo, explorando-o através dos sentidos. Posteriormente, a exploração sobre os objetos vai se tornando mais organizada, e a criança começa a modificar o espaço ao seu redor, de forma intencional.

Nesta categoria, acreditamos que tenhamos proporcionado condições preliminares, de os discentes transitarem, entre os conhecimentos do cotidiano e da escola, envolvendo geometria espacial. Isso possibilitou-nos dar fundamentos, para cumprirmos um de nossos objetivos específicos, que tinha como propósito analisar, como ocorre a transição entre a geometria do sensível para a plana, isto é, da tridimensional para a bidimensional, a partir das atividades mencionadas. O ato de os estudantes fazerem analogias, entre objetos, ou embalagens, de seu conhecimento, aos que estavam no interior das urnas, foi uma de nossas primeiras ações, para investigar a transição de um tipo de conhecimento para outro, assim como, possibilitou que eles utilizassem a memória visual, discutida na próxima subseção.

5.4.3 Memória visual e imagens mentais

A *memória visual*, conforme Del Grande (2005), citado por Passos (2006), refere-se à habilidade de se lembrar de um objeto, que não está diante de nossa visão, assim como, relacionar suas características com outros objetos, estejam eles diante de nós, ou não. Esse recurso foi muito utilizado, no episódio da Percepção tátil, uma vez que, grande parte dos educandos manipulou objetos, somente, utilizando o tato e, caso necessário, relacionou-os a outros, de seu conhecimento, haja vista que, os inseridos dentro das urnas não podiam ser afirmados, fielmente, apenas, a partir da sensibilidade tátil.

Para exemplificar o uso da *memória visual*, em nossa pesquisa, teceremos alguns comentários, originados através de interpretações, nos dados recolhidos. Em primeiro lugar, ressaltamos que a representação do dado (hexaedro), disponível no quadro 3, feita pela equipe A, não evidenciou a terceira dimensão do sólido geométrico, isto é, houve dificuldade em produzir um desenho em perspectiva. Essa problemática foi investigada por Pais (1996), afirmando que os desenhos de figuras geométricas planas são mais fáceis de serem produzidos, ao invés daqueles da geometria espacial, no último caso, é necessário recorrer ao desenho em perspectiva.

Em relação à *memória visual*, os alunos foram capazes de lembrar-se de um objeto (pufe), não visível, naquele momento, e relacionar suas características com o dado (*hexaedro*), que também não estava presente na situação. A *memória visual* possibilita às crianças lembrar-se de um objeto tridimensional, visto em outros momentos e, para que depois, possa representá-lo, sob a forma plana, ou até mesmo fazer o reconhecimento dele em outro objeto.

Por outro lado, embora o grupo não tenha mostrado essa ideia, em seu desenho, podemos reforçar, como foi dito anteriormente, que houve criações de imagens mentais, dos objetos manuseados e, em consequência disso, reprodução deles, por meio de desenhos. Esse fato também foi constatado, na pesquisa de Barbosa (2011), onde uma das professoras participantes, a partir do tato, descobriu qual objeto estava sendo manipulado, criou uma imagem mental dele e, em seguida, fez sua representação.

Em relação às embalagens *dois* e *quatro*, visualizadas no quadro 3, o mesmo grupo fez duas representações, uma de embalagem de ervilha (figura 12), representação de um *cilindro* e outra de um rolo de linha (figura 15), *tronco de cone*. Podemos inferir que elas foram mais uma das produções dos discentes bem elaboradas. Além disso, tiveram a preocupação em dar uma ideia de profundidade, no desenho.

Figura 12: Produção do grupo A acerca da representação da embalagem de ervilha.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

Também merecem destaque as produções visualizadas abaixo, e que estão no quadro 3, do grupo E, pois, dos quatro objetos tocados, *dois* apresentam a terceira dimensão. É o caso da representação de prisma, referenciado como se fosse uma *caixinha de remédio* e da representação de tronco de cone, aludido a uma *casquinha de sorvete*.

Figura 13 a e b: Representações de um prisma e tronco de cone feito pelo grupo E.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

Embora tenhamos percebido um conhecimento geométrico mais elaborado, no primeiro caso, ele mostrou a presença da geometria plana, enraizada, pois, além do ponto positivo mencionado, houve alusão entre o *dado* e um quadrado. Isso não aconteceu com o grupo B.

Diante do que relatamos, acreditamos que houve criação de imagens mentais, pelos alunos, para as embalagens tateadas. Contudo, se os discentes apresentassem uma percepção melhor, da constatada por nós, na produção de desenhos, em perspectiva, ou leitura desses,

poderia ocorrer, dos participantes, dessa pesquisa, representarem as imagens mentais, criadas de forma mais próxima com a realidade da embalagem.

O emprego de cadernos quadriculados contribuiu para que os alunos fizessem pontilhados e melhorassem a percepção da profundidade do sólido, isto é, possibilidade de representar uma figura geométrica espacial, a partir de suas três dimensões. Isso foi diagnosticado na pesquisa de RADAELI (2010).

Os elementos que influenciam o processo ensino e aprendizagem de geometria plana e espacial, a exemplo das imagens mentais, também foram verificados no episódio da construção de esqueletos de poliedros, empregando palitos de churrasco, em suas composições. Essas representações, de corpos tridimensionais, estimularam a visão dos discentes, a partir de seus modelos concretos e de suas projeções em *slides*, promovendo o processo de construção de imagens mentais (NACARATO e PASSOS, 2003).

Constatamos esses resultados, quando a partir de intervenções, em que exibimos os sólidos feitos de palitos e, os discentes, mostraram ter compreendido que alguns poliedros não apresentavam todas as faces congruentes, conseqüentemente, agruparam aqueles em que suas faces eram congruentes. Além disso, o fato deles terem sido confeccionados, manipulados e visualizados pelos próprios educandos, esteve em conformidade com as recomendações de Nacarato e Marquesin (2011), que apontam a importância, quando se oportuniza a visualização do objeto, para que se crie sua imagem mental. Sumariamente, a conclusão obtida por eles foi motivo para que pudéssemos classificar os sólidos em poliedros não regulares, e poliedros de Platão.

A partir deste momento, informamos que o estudo, inicialmente, limitar-se-ia, apenas, aos poliedros, que em suas composições, apresentavam somente faces idênticas. Posteriormente, induzimos os discentes a observarem a quantidade de arestas, que convergiam para cada vértice. Eles notaram uma regularidade e, isso, se confirmava para todos os cinco poliedros exibidos. Diante disso, sistematizamos que haveria, apenas, cinco poliedros, com essas características, como também, fizemos a classificação deles em função de seus prefixos. E, em seguida, analogias com elementos da natureza, das artes e das edificações. Esses procedimentos estão em conciliação com as advertências dos PCNs, para o segundo ciclo.

É muito relevante, para os discentes, saberem diferenciar as semelhanças e as diferenças, entre as classes de sólidos, além disso, saber o motivo de um determinado sólido ser incluído ou não em determinado grupo (ROMANATTO e PASSOS, 2012). Para diferenciar as pirâmides dos prismas, adotamos a mesma postura, utilizada para agrupar os poliedros de Platão, isto é, recorrendo às construções feitas de palitos de churrasco, já que, os

objetos, ou desenhos contribuem com a formação de boas imagens mentais. Além disso, os discentes, quando estão em processo de conceituação recorrem às representações, através de objetos, ou desenhos (PAIS, 1996).

No quarto episódio, destinado à construção de itinerários e de maquetes da sala de aula, também identificamos a formação de imagens mentais. No que diz respeito às maquetes, foi um momento descontraído, ao passo que, os alunos circulavam pela sala do LEM, espontaneamente, observando as produções de outros grupos, por isso, os deixamos à vontade, para confeccionar suas produções, de acordo com a criatividade de cada equipe.

Assim, como nos demais episódios, os alunos tiveram a oportunidade de manipular uma diversidade de objetos, sendo que, foi possível perceber a forma, cor, textura e as dimensões. Isso possibilitou que as imagens mentais, deles, pudessem ser construídas, além disso, oportunizamos, aos discentes, que pudessem visualizar esses objetos, mesmo que eles estivessem ausentes, como também, produzir sua representação através de modelos concretos ou desenhos (KALEFF, 1998).

As criações das maquetes surpreenderam-nos, pela diversidade de detalhes que os educandos conseguiram representar. Na imagem abaixo, visualizamos uma produção de um dos grupos, participantes da pesquisa. O modo como montaram as bancas escolares foi uma criação dos alunos, assim como, os cadernos, ou livros, que estão sobre as mesas. Em determinadas situações, fizeram transcrições, nas folhas desses, para indicar que se tratava de seus cadernos. Isso pode ser verificado nas figuras 14 a e b.

Figura 14 a e b: Algumas maquetes da sala de aula.



Fonte: arquivo do autor (2015).

Conforme a nossa fundamentação teórica, Pais (1996) investiga os aspectos intuitivos, experimentais e teóricos do conhecimento geométrico. O intuitivo pode ser concebido como uma forma de conhecimento imediato, de tal modo que, explicações não requerem o uso da dedução racional. O experimental refere-se ao uso de objetos, adequadamente, nas aulas, para ensinar conteúdos e, o teórico deve ser entendido, por exemplo, recorrer a uma demonstração sem uso de desenhos, ou intuições.

Aproveitamos para referenciar o aspecto experimental, como também, uma das faces da construção do conhecimento geométrico, teorizada por Machado (2005), ou seja, a construção. Ambos estão relacionados à elaboração e manipulação de objetos, destinados ao estudo de conceitos geométricos, ou outros que possam ser explorados.

Estamos convictos de que houve formação de imagens mentais, dos poliedros estudados, pois, todos os alunos tiveram oportunidades de confeccionar, manipular e agrupá-los, de acordo com suas propriedades. Também percebemos que foram poucas as demonstrações, acerca de experiências anteriores, sobre esses conceitos geométricos propostos, daí a importância da aquisição de boas imagens mentais.

Esta categoria perpassa três objetivos específicos, de nossa pesquisa. Em relação ao primeiro, um ensino de geometria, desvinculado do cotidiano dos discentes, pode acarretar deficiências, na formação de imagens mentais, pois, possivelmente eles tiveram poucas oportunidades, de trabalhar conteúdos de geometria, através de atividades, que as relacionassem com objetos. Nessa investigação, os estudantes demonstraram dificuldades na elaboração dessas imagens, ao passo que, a maioria das produções, desse tipo, esteve voltada para figuras geométricas planas, isto é, representaram apenas uma das faces, das representações de sólidos geométricos. Por outro lado, nas passagens textuais, contidas no caderno de atividades, os discentes mostram, em se tratando do primeiro episódio, ter reconhecido, a partir do tato, qual embalagem foi manipulada.

No que concerne ao segundo objetivo, não somente nessa categoria, como nas demais, as atividades propostas contribuíram para a construção de conceitos geométricos, de ordem tridimensional, assim como na elaboração de imagens mentais. Por exemplo, no episódio Construindo esqueletos de poliedros, os educandos tiveram contato com representações, de sólidos geométricos, feitas com palitos de churrasco, isso pode ter influenciado a produção de desenhos, em perspectiva, conseqüentemente, na formação de imagens mentais, adequadas, possibilitando que os estudantes pudessem transitar de uma geometria para outra, propósito de nosso terceiro objetivo.

5.4.4 Transitar da geometria espacial para a plana, e vice-versa

As considerações, postas a seguir, dizem respeito às produções das equipes, no tocante ao quesito três: *Se esse objeto, 1, 2, 3, ou 4, fosse desmontado, ficaria mais parecido com qual dessas representações na lousa?* Nele, queríamos saber em que nível encontrava-se o raciocínio dos alunos, em relação ao ato de fazer uma visualização mental, de um objeto, em seguida imaginá-lo, completamente aberto, e representá-lo, na forma planificada. Também incluímos, aqui, reflexões sobre o segundo episódio, especificamente, o momento em que as equipes receberam as embalagens, em formato de prismas, e tiveram que imaginá-las abertas, para depois fazerem o desenho delas.

No episódio *Percepção tátil*, o universo das embalagens manipuladas, pelos grupos, totalizou vinte e quatro, sendo que, cada um dos alunos manuseou quatro. As análises no quadro 3 faz-nos declarar que, desse total, apenas seis planificações foram relacionadas corretamente, com suas respectivas embalagens, isso ocorreu com as equipes B, (embalagem 2); C, (embalagens 3 e 4); E, (embalagem 3) e F, (embalagens 1 e 2). Em relação ao episódio *Decomposição*, todas elas tiveram formatos de prismas.

No que diz respeito ao dado, *hexaedro*, primeiro objeto tocado pela equipe A, sua planificação foi relacionada à de um cilindro. Essa dificuldade foi explicada, na pesquisa de Barbosa (2011), quando percebeu obstáculos sentidos por muitos em relação às transformações, que certos objetos sofrem, quando migram de uma representação tridimensional para outra bidimensional, ou vice-versa.

Nessa pesquisa, essas barreiras foram nítidas, para os demais grupos, envolvendo quase todas as embalagens tocadas. Além disso, esses estorvos enfrentados podem ser explicados em Pais (1996), quando investiga a complexidade do uso da perspectiva, pelos alunos, para representar a terceira dimensão dos objetos, que devem ser produzidos em forma de desenho, ou até mesmo na leitura dele. Enfim, a representação em forma de desenho pode conter um nível de dificuldade maior do que aquela em forma de um objeto.

Sobre a possível imagem planificada do rolo de linha (Figura 15), *tronco de cone*, o grupo A registrou por escrito, no caderno de atividades que, se fosse possível desmontarem o objeto, ele poderia ser relacionado a uma pirâmide, de base quadrangular. Compreendemos a intenção dos discentes em deixar evidente a noção de redondo, pois esse sólido geométrico, do ponto de vista deles, pode ter forma aparentemente arredondada, talvez, seja por isso que a equipe tenha relacionado à planificação da pirâmide com a de um tronco de cone. Além disso, aquela, em sua forma plana, para os alunos, pode ter semelhanças.

Figura 15: Desenho de um rolo de linha (tronco de cone) feito pelo grupo A.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

No desenho anterior, percebemos que houve preocupação, em evidenciar a profundidade, isso pode ser visto nos prolongamentos das linhas, dando a entender que são espirais. Estamos querendo oferecer uma explicação, para convencermo-nos do equívoco, cometido pela equipe, quando indagada sobre a planificação do rolo de linha.

De acordo com Vygotsky (2007), as crianças, quando desenhavam objetos complexos, não o fazem pelas partes, que o compõem, mas pelas qualidades gerais, como, por exemplo, a impressão de redondo. Complementando esse pensamento, Brasil (1997) revela que as crianças reconhecem objetos observando forma, aparência e totalidade, desprezando suas partes, ou propriedades.

Notamos, explicitamente, a dificuldade em identificar a representação geométrica planificada, dos objetos manuseados. Uma das maiores disparidades ocorreu, quando o grupo A fez analogia, entre a representação do cilindro, *embalagem de ervilha*, e a planificação do paralelepípedo. Por outro lado, o desenho da embalagem de ervilha, produzido pelo grupo também nos deu a ideia de profundidade que foi constatada na tampa da embalagem.

A profundidade, nos desenhos, também pode ser retratada, nas produções dos grupos C e D, quando em seu desenho, acerca da embalagem manipulada quatro (embalagem de aromatizante de ambientes, representação de cilindro), no primeiro caso e, um e dois (embalagem de leite em pó e rolo de linha, representações de cilindro e cone respectivamente), no segundo caso.

Em se tratando da planificação do primeiro objeto manipulado (tronco de pirâmide), a equipe B considerou em seus manuscritos que ele era um triângulo. Diante disso, a projeção plana, dessa embalagem, não fazia sentido, uma vez que, o grupo já tinha definido, anteriormente, que o objeto manipulado seria uma figura geométrica plana. Conseqüentemente, a equipe fez analogias com uma imagem de tetraedro planificado, que estava exposto, na lousa, juntamente com outras planificações. As observações foram feitas, apenas, na imagem de modo geral, não se atentando para os detalhes, isto é, a união dos três vértices, do triângulo, produziria um tetraedro.

Em concordância com o que foi narrado antes, Brasil (1997) respalda que o desenvolvimento do pensamento geométrico inicia-se pela visualização, desta forma, as crianças reconhecem as figuras geométricas por sua aparência física, e não por suas partes. Isso pode ter ocorrido com o grupo B, pois, ele, imediatamente, assimilou que o objeto manipulado tinha sido um triângulo, e fez analogia dele, com a planificação do tetraedro.

Analisando sob outro ponto de vista, a imagem planificada do tetraedro, escolhida por nós, pôde ter contribuído para confundir os alunos, uma vez que, eles visualizaram, globalmente, e relacionou a planificação do tetraedro ao suposto triângulo manipulado.

Inserimos algumas embalagens, em formato de esfera, nos escrutínios, porém, do ponto de vista discutido, nesse trabalho, levamos em consideração que o termo planificação, para esse corpo redondo, não seria exibido. Diante disso, não tomamos esse cuidado na elaboração da atividade, pois, à medida que alguns grupos manipularam objetos, em formato de esfera, respondiam aos mesmos questionamentos, propostos para as embalagens, que podiam ser decompostas em representações planas. Não compreendemos o motivo que levou a esse grupo B associar uma bola de isopor (quadro 3, objeto 4) a uma representação plana de um paralelepípedo. Por outro lado, sabemos que toda pergunta feita, pelo professor, em sala de aula, deve ter, necessariamente, uma resposta. Logo, como apresentamos representações de sólidos geométricos, e perguntamos quais planificações correspondiam, necessariamente, todos eles têm seus correspondentes. Assim, a esfera também tem que ter um.

Em referência a representação da pirâmide de base quadrangular, feita com sabão em pedra, (grupo C, embalagem 1), sua planificação foi aludida, como se fosse a de um tetraedro. Possivelmente, isso esteja relacionado ao fato de os discentes terem conjecturado que a união dos três vértices, da planificação do tetraedro, estava sendo referenciada, ao ponto, mencionado por eles, quando expuseram as características da representação da pirâmide.

Apenas o grupo E, em seu terceiro objeto manipulado, conforme podemos verificar na figura 14, disponível nas páginas anteriores, e também no quadro 3 (embalagem 3), conseguiu

fazer uma produção de um desenho, em perspectiva com maiores detalhes, representando a imagem mental, que foi criada do hexaedro, além disso, fez identificação, corretamente, de sua planificação. Em relação às demais equipes, essa indicou, de forma mais nítida, a potencialização de seu pensamento geométrico, uma vez que, demonstrou a capacidade de partir do espaço sensível (experiências com embalagens diversas, em formato de prismas), às representações, em perspectiva do prisma retangular e, por fim, alcançou as ideias contidas na geometria plana (planificação do prisma retangular).

Essas considerações proferidas fundamentaram nosso trabalho, uma vez que estávamos à procura de evidências, que certificassem a linha de pensamento, defendida por nós, isto é, propor um ensino de geometria, que tenha como ponto de partida as experiências que estão no cotidiano para, em seguida, abordar conceitos da geometria plana.

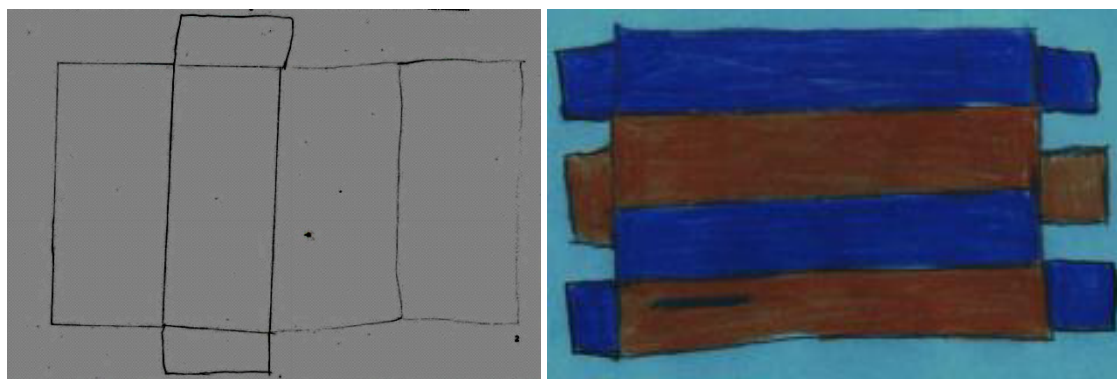
Depreendemos que a identificação das planificações, das embalagens manuseadas, estava em função do formato das faces dos objetos, isto é, quando os discentes manusearam um prisma retangular, relacionaram sua planificação a de um prisma triangular, que tinha faces laterais retangulares. Em ambos os casos, as planificações são distintas. Por outro lado, isso deu certo em algumas situações. Por exemplo, o segundo objeto tocado, pelo grupo B, foi um cubo mágico, a figura geométrica plana, que o representou foi quadrangular, apesar disso, a planificação do hexaedro ocorreu de forma correta. Isso pode ser verificado no quadro 3.

Em anexo ao que discutimos, anteriormente, essas considerações talvez estejam relacionadas ao que já reportamos nesse trabalho, isto é, muitos alunos denominaram alguns sólidos geométricos, a partir de observações no formato das faces.

As faces da construção do conhecimento geométrico (percepção, construção, representação e concepção), investigadas por Machado, foram relevantes, em nossa pesquisa. Nesse momento, abrimos espaço para a representação, pois os discentes fizeram produções em forma de desenhos e, isso tornou possível a exploração dessa face.

No segundo episódio, a produção de planificações, de embalagens em formato de prisma, ocorreu no ato em que as equipes as receberam, isto é, tiveram que supô-las, como se estivessem completamente abertas para, em seguida, reproduzir em forma de desenhos. Alguns grupos revelaram-se por terem obtido êxitos, nessa tarefa. Por exemplo, as equipes C e E, antes mesmo de recortarem a caixa, fizeram as seguintes planificações:

Figura 16 a e b: Planificações de embalagens de prismas das equipes C e E.



Fonte: arquivo do autor (2015).

Notamos, nas representações, a presença das faces laterais e das bases. No caso do grupo C, fizeram a planificação sem levar em conta as abas, ou aletas da caixa, isso não ocorreu na equipe E. Independentemente disso, conseguiram obter a forma plana das embalagens, conseqüentemente, mostraram capacidade em migrar do aspecto sensível para o abstrato. Isso também ocorreu com a equipe F, porém, não registramos por considerarmos que segue a mesma linha de pensamento debatida até aqui.

Fonseca (2002) recomenda que a passagem de um sistema ao outro, isto é, as relações entre as figuras planas e sólidas (suas planificações) contribuem para compreendermos o espaço tridimensional em que vivemos.

Os quatro elementos, que influenciam o processo de ensino e aprendizagem, de geometria euclidiana plana e espacial são: objeto, desenho, imagem mental e conceito (PAIS, 1996). Abrimos espaço, nesse momento, para a utilização de objetos. Em nosso caso, a pesquisa foi fundamentada nesse pilar. No episódio, que estamos discutindo, exploramos a habilidade da produção de representações desses objetos, por meio de desenhos, para o estudo de geometria. De acordo com Pais (1996), isso contribui, imensamente, para o raciocínio dos alunos, conseqüentemente, para a construção de seu conhecimento geométrico. Esse teórico pondera que os desenhos são aliados para a representação de conceitos geométricos.

Posteriormente, as equipes desfizeram-se das formas tridimensionais e recortaram suas respectivas embalagens, de modo que não as danificassem. Na ocasião, recomendamos que retirassem as aletas em excesso, das caixas, pois, em diversas embalagens havia duplicidade dessas partes, estratégia das indústrias, para possibilitar a colagem delas e, conseqüentemente, fechar a caixa. Porém, muitos grupos fizeram esses recortes incorretos, produzindo contornos esquisitos, se comparados com o modelo geométrico plano, da embalagem de prisma. Além disso, esqueceram as linhas, demarcando a divisória de uma face para outra. Os próprios

grupos relataram isso, quando foram questionados acerca das diferenças entre o desenho inicial e o contorno da embalagem. Por outro lado, quando pedimos que fizessem esse contorno, não alertamos que incluíssem essas divisórias, até porque, nesse tipo de tarefa não podemos exigir esses elementos.

Figura 17: Contorno das embalagens feitas pelos grupos C e D, em ordem.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

Em se tratando do grupo C, que produziu seu desenho inicial, corretamente, quando fizeram o contorno da embalagem desmontada, percebemos que recortaram as aletas centrais e as do lado direito, deixando apenas as do lado esquerdo, em consequência disso, obtiveram uma representação não muito vista, no caso das planificações de prisma, nem por isso está incorreta, pois, foi possível fechar a caixa. Esse é um contexto significativo, em nossa investigação, do ponto de vista da possibilidade de oportunizar vários modelos planos, para um mesmo sólido geométrico, porém, não fizemos discussões entre as equipes, nesse sentido. Acreditamos que se tivéssemos aberto espaço para discussões, desse tipo, teria repercutido favoravelmente, em prol de nossa pesquisa.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (PORTUGAL, 2007) recomenda, como objetivos específicos para o 3º e 4º anos, a investigação das distintas planificações do hexaedro, assim como a confecção de um hexaedro, a partir de uma planificação dada. Essas considerações também devem ser válidas, para o 2º ciclo, uma vez que, esse deve ser articulado com o primeiro.

A transição de uma geometria para a outra é possível, a partir de proposição, de propostas de atividades planejadas, por exemplo, o episódio *Diferenças entre figuras planas e espaciais*, possibilitou, aos discentes, perceberem que para formar uma representação geométrica, de um hexaedro, foram necessárias seis formas planas quadrangulares. Também fizeram isso para as demais representações de sólidos. Os discentes do grupo D explicaram que “o onze são as faces do outro”. Nesse momento tiveram a intenção de validar que a figura

geométrica de número 11, denominada triângulo, era o formato das faces da representação de um tetraedro, também, de identificação 11, isso pode ser constatado, quando os alunos dizem “precisa de quatro para fazer o outro”.

Essas idas e vindas, também, foram potencializadas, quando propomos o segundo episódio, classificado de *Decomposição*. Nele, os discentes tiveram a oportunidade de manusear diversas embalagens, em formato de prismas e, em seguida, visualizá-las, como se estivessem completamente abertas, para, posteriormente, fazer o desenho plano. Por outro lado, quando os participantes foram motivados, no primeiro episódio, para apontar a planificação de cada embalagem, que havia sido manipulada, apresentaram enormes dificuldades, poucos grupos conseguiram fazer isso, a exemplo do grupo B (embalagem 2), C (embalagem 3), E (embalagem 3) e F (embalagem 1). Concluímos, disso, que o ato de ver a imagem de uma planificação, de determinado objeto para, posteriormente, apontar a embalagem, que se trata a referida forma plana, apresenta nível de complexidade maior do que manipular uma embalagem e, em seguida, produzir o desenho dela, como estivesse desmontada.

A preocupação, que alguns grupos tiveram, em deixar evidente a profundidade, em seus desenhos, acerca das embalagens manipuladas, a exemplo do rolo de linha e da lata de ervilha, pode ser um indício de que eles estavam em processo de aperfeiçoamento, da produção de desenhos, em perspectiva, conseqüentemente, migrarem da geometria espacial para a plana. No caso do grupo E, que conseguiu representar um desenho, em perspectiva de um prisma, pôde indicar, para a pesquisa, o nível em que se encontrava a *visão espacial* dos integrantes da equipe, necessitando refinar essa habilidade, através de atividades adequadas, e planejadas pelo professor.

Mais um recurso, que teve efeito positivo, no sentido de investigarmos, como ocorre a transição de uma geometria para a outra, foi a oportunidade, que concedemos, aos discentes, em poderem manipular a representação de um hexaedro e, em seguida, sugerir que fizessem o contorno de uma das faces, na lousa, para observarem que esse sólido era composto por seis representações, idênticas, ao desenho exibido, no quadro. Essa intervenção possibilitou que a maioria deles classificasse, corretamente, a figura geométrica plana, denominada quadrado, assim como, constatar que, para fechar a casca do sólido geométrico, seriam necessárias seis figuras geométricas planas, semelhantes à que estava sendo representada, na lousa. Mediações desse tipo são recomendações de Pais (1996), além disso, está em conformidade com a nossa investigação, isto é, partir de uma geometria empírica para, em seguida, estudar conceitos da geometria plana.

Para finalizarmos a intervenção mencionada, precedentemente, destacamos a habilidade de uma integrante do grupo E, em ter desenhado, na lousa, a planificação da representação do hexaedro, esquecendo-se apenas de uma das faces. Isso nos permite afirmar que a ação de transitar de um mundo tridimensional para outro bidimensional é enriquecida, quando se oportuniza atividades desse tipo.

Enfim, essa atividade, também, se enquadra em um de nossos objetivos específicos, quando propomos algumas atividades coerentes, para os alunos do quinto ano do Ensino Fundamental, utilizando material concreto, para introduzir conceitos geométricos, de ordem tridimensional, assim como, o estudo dessas noções, a partir da composição e decomposição de representações de sólidos geométricos, que foi outra finalidade desse trabalho.

5.4.5 Diferenciação entre corpos redondos e não redondos

No término do episódio, Percepção tátil, disponibilizamos duas caixas (A e B), onde os alunos visualizaram uma diversidade de embalagens e depositaram certa quantidade, em cada um dos recintos, levando em conta o critério estabelecido por nós, isto é, inserir em cada caixa, embalagens, que apresentavam similaridades. Intentamos que a distinção entre corpos redondos e não redondos fosse criada, naturalmente, a partir dessa ação planejada.

Alguns objetivos do primeiro ciclo, da Educação Básica, são estendidos para o segundo, nesse, devemos envolver os estudantes em situações planejadas, de modo que, eles adquiram condições de diferenciar os sólidos, que rolam daqueles, que não rolam (BRASIL, 1996). Nesse sentido, nossa conduta condiz com as recomendações proferidas, pela revisão de literatura. Assim, redigiremos considerações, acerca dessa oportunidade concedida aos alunos.

Elencamos as regras em forma de plenária, de modo que todos pudessem opinar, ou questionar. Em seguida, convidamos cada grupo para dar início à classificação. Não detalharemos as ações, que os estudantes realizaram, acerca da inserção, ou retirada de embalagens, nas duas caixas. Isso porque, houve mudanças, que estavam em função das intervenções, do professor-pesquisador. Acreditamos que esse relato tornava o texto repetitivo, uma vez que, teríamos de mencionar a identificação da equipe, do integrante, do objeto e do local, onde foi depositado.

Verificamos que algumas atitudes tomadas, por nós, foram incoerentes, com a situação proposta. Por exemplo, quando percebíamos que determinado aluno estava colocando embalagens representativas de cilindros, ou com formato de prismas, em uma mesma caixa,

fazíamos intervenções, indagando se a atitude seria correta. Acreditamos que teria sido mais proveitoso se tivéssemos sugerido que fossem colocados os objetos, que achassem convenientes e, em seguida, fizessem observações acerca deles, para decidirem se estavam nas caixas corretas, levando em conta o critério estabelecido, por nós, no início da atividade.

Foram percebidas diversas posturas dos discentes, no ato de inserir, determinada embalagem, na caixa apropriada. Essas atitudes compõem um processo natural, quando levamos em conta estudantes, que estão aprendendo, isto é, observam os comportamentos, ou respostas de seus colegas e, em consequência, disso, mudam, constantemente, de opiniões, até chegarem a uma resposta considerada correta, por eles.

De modo geral, os alunos iniciavam a inserção de embalagens, nas caixas apropriadas, de acordo com o critério, *corpos redondos ou não redondos* (esse critério não foi informado no dia do episódio), mas, no decorrer da atividade, não refletiam sobre as divergências entre esses dois critérios. Na maioria das vezes, os discentes eram influenciados pelas embalagens, que já estavam dentro das caixas adequadas. Nossas intervenções também foram levadas em conta, pois, à medida que intervimos, eles começavam a fazer a classificação adequadamente.

Quando determinado aluno depositava embalagens de corpos redondos, em uma caixa, e outro aluno depositava embalagens, que não rolam, na outra caixa, definia cada uma das caixas, levando em conta os dois grupos, de sólidos geométricos.

Percebemos interações entre os participantes de cada equipe. Por exemplo, quando determinado aluno desfazia o que o outro fazia, quer para corrigir um equívoco, quer para misturar embalagens, de natureza distinta, em uma mesma caixa. Em outras ocasiões, quando recolhíamos as embalagens, misturadas nas caixas e, em seguida, fazíamos exposições e questionávamos, se elas apresentavam as mesmas semelhanças, os discentes percebiam que tinham feito à classificação equivocada e, logo depois, faziam a distribuição correta.

Notamos dificuldades, das equipes, no início da etapa de classificação, porém, à medida que fazíamos as devidas intervenções, os alunos iam classificando as embalagens, corretamente. Alguns deles tiveram graus de dificuldades elevados, em comparação com outros. Evidenciamos que, em determinados momentos, certos discentes manipulavam as embalagens, em suas mãos. Depreendemos, disso, que houve entendimento por parte deles, acerca de objetos, que rolavam, com mais facilidade, de que outros. Enfim, identificamos expressões do tipo “não, esse objeto fica na caixa B, porque ele é deitado”, isto é, alguns alunos compreenderam que os sólidos geométricos, que rolam, são aqueles, que podem ficar deitados.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a habilidade de diferenciar corpos redondos, de não redondos, é um requisito para os estudantes do primeiro ciclo, da Educação Básica, podendo ser estendido. Por outro lado, nosso trabalho dissertativo envolveu discentes do 5º, do Ensino Fundamental, mesmo assim, constatamos que esses indivíduos ainda não conseguem fazer essa distinção, isso não poderia estar ocorrendo. Isso mostra que, na escola, eles não tiveram experiências, suficientes, de uma geometria, vinculada à realidade, deles. Diante disso, deixamos registrado que o nosso segundo objetivo específico foi elaborado, de tal modo, que, ao chegarmos ao campo, a ser investigado, poderíamos nos deparar com situações, desse tipo. Desse modo, era urgente propor atividades planejadas, envolvendo materiais concretos, de modo que pudessem suprir essas lacunas.

5.4.6 Localizar-se no próprio espaço físico, de sua vivência, deslocar-se nele, descrever a posição, de um objeto, ou pessoa, construindo itinerários

Nessa categoria, incluímos os episódios “Eu vou para a escola – explorando itinerários” e “o cão Bob e seu itinerário”. No entanto, isso não impediu que inseríssemos comentários, acerca de outros momentos ocorridos, na pesquisa. Para propor essas atividades, levamos em consideração às recomendações dos PCNs e de alguns investigadores, que se debruçam em pesquisar as contribuições, que o conhecimento geométrico pode trazer, para os alunos, de modo geral.

Por exemplo, Farias (2008) aponta a importância em propor atividades de geometria, em que os alunos possam localizar-se, no próprio espaço físico, de seu conhecimento, isso inclui cidade, residência, escolas etc. De modo geral, esse episódio teve a intenção de oportunizar, às crianças, condições de aperfeiçoarem a habilidade de localizar-se, e identificar a localização e a movimentação de outras pessoas, ou objetos, no espaço.

No quarto episódio, tivemos, como tarefa preliminar, a apresentação dos arredores da escola, em que os alunos participantes, da pesquisa, estudam. Utilizamos, como metodologia, a exposição do mapa, através do serviço de pesquisa, e visualização de mapas e imagens de satélite, da terra, *Google Maps*, diretamente da *Web*, apresentado em *slides*. Os discentes se empolgaram com a sofisticação tecnológica, do ponto de vista deles. Demonstraram expressões de surpresa, quando perceberam ser possível visualizar ruas, praças, avenidas, prédios e sua escola, em três dimensões.

Exibimos, para os alunos, imagens em três dimensões, do alto da Praça João Pessoa, do cruzamento, que dá acesso às rodovias, com destinos às cidades de Zabelê – PB, Sumé – PB e Sertânia – PE, dos arredores do açude público, e do bairro Alto São Vicente, todos localizados, na cidade de Monteiro – PB. Em relação à praça, sugerimos que observassem qual imagem podia ser visualizada, quando prestamos atenção ao mosaico, no piso dela. Figura 18.

Figura 18: Imagem do alto da Praça João Pessoa, Monteiro-PB.



Fonte: Google Maps.

Eles pronunciaram diversos termos, até quando, determinado aluno, indicou que estava visualizando um peixe, após isso, passamos para as demais discussões. Antes disso, queremos justificar que esse momento foi importante, ao passo que, a praça é um ponto turístico, da cidade, além de ser um local de encontro, das famílias, que residem nesse município, e estar localizada em uma avenida, que fica de frente da escola, onde eles estudam.

Em se tratando desse episódio, as reações dos alunos foram imediatas e, conseqüentemente, empolgaram-se, com aquele momento, adotando posturas interrogativas e sugestivas. Nessa ocasião, aproveitamos para orientá-los, quanto à necessidade de utilizar os termos corretos, tais como à direita, à esquerda, para cima, para baixo, siga em frente, para trás, entre outros. Esses esclarecimentos, também, foram feitos, no quinto episódio, momento em que os discentes tinham de informar qual o caminho mais curto, em um tabuleiro, para o cão recolher determinados objetos.

Nessa etapa inicial, fizemos o reconhecimento de localidades, conhecidas por todos, tais como: arredores da escola, igreja, e alguns pontos de referência. Através da seta do

aplicativo do *Google Maps* é possível entrarmos em ruas, avenidas, entre outros. Para isso, basta exercermos os comandos necessários. Destarte, os discentes começaram a pronunciar os termos convenientes. Em algumas ocasiões, os alunos sugeriam que entrássemos virtualmente em determinadas ruas, porém, sempre questionávamos, qual o sentido, e a direção delas. Eles respondiam imediatamente, utilizando os termos corretos. Além disso, alguns faziam gestos, com suas mãos, indicando que deveria ser à direita, ou à esquerda.

É indiscutível, o poder que a tecnologia oportunizou-nos, nesse momento. Essa ferramenta, aplicada em sala de aula, só foi possível devido à experiência que temos com as tecnologias, principalmente, aquelas voltadas para o trabalho, em sala de aula.

Podemos incluir, nessa categoria, elementos discutidos, nas demais. Por exemplo, a importância de propor atividades, que possibilitem os discentes transitarem de uma geometria intuitiva, empírica, vinculada ao cotidiano, dos alunos, para uma plana, ou vice-versa, isto é, partir dos conceitos da geometria espacial para, em seguida, estudar os da plana. Também incluímos a necessidade de os alunos terem condições de ir e vir, compreendendo conceitos geométricos, voltados para suas respectivas séries.

Daí, a relevância em se trabalhar as geometrias plana e espacial, de forma adequada, pois, independentemente, de onde iniciarmos, seja pelos conceitos da geometria espacial, que estão mais nítidos, no cotidiano das crianças, ou de situações da geometria plana, surgirão contextos, semelhantes às experiências, que tivemos, quando decidimos expor os arredores da escola, utilizando o *Google Maps*.

Cabe incluir, nesse espaço, a discussão, que fizemos com os alunos, sobre a imagem de Escher. Concebemo-la, nessa pesquisa, conforme nossos esclarecimentos, anteriores, nas descrições dos episódios, como uma analogia, com essa investigação. Pois, embora, defendemos que o ensino de geometria tenha como ponto de partida, a geometria espacial, para explorar os conteúdos da plana, sabemos que, independentemente, por onde começarmos, é preciso que as atividades sejam bem planejadas.

Perscrutando o episódio medrado, acerca da construção de poliedros, utilizando palitos de churrasco, identificamos composturas, dos discentes, que cumprem os requisitos sugeridos, no parágrafo anterior. No ensejo, requisitamos que os alunos mencionassem o propósito da atividade, envolvendo *Composição e Decomposição de embalagens*. Eles comentaram, timidamente, que tinham recebido caixas e, a partir delas, deveriam obter suas formas planas.

Diante dessa explanação, reforçamos que, previamente, tínhamos partido das embalagens para, em seguida, construirmos suas planificações. Por outro lado, o objetivo desse novo episódio era fazer um caminho inverso, ou seja, a partir dessa imagem

(apontarmos para uma planificação, de sólido geométrico) e chegarmos ao sólido. Isto é, através de planificações, de poliedros, entregues aos discentes, montaram-se os sólidos, utilizando palitos de churrasco.

No episódio, *Eu vou para a escola – explorando itinerários*, os educandos visualizaram carros, casas, ruas e praças, contendo diversos elementos tridimensionais, através de imagens projetadas, em uma tela plana, isto é, as tecnologias detêm essa peculiaridade, em projetar formas tridimensionais, utilizando recursos, das formas bidimensionais. Portanto, não podemos menosprezar a potencialidade da geometria plana, pois, de onde quer que se inicie, teremos que retornar, aos seus preceitos. Exibições desse tipo, também foram feitas, no episódio, que teve a intenção de confeccionar maquetes, da sala de aula, dos alunos participantes, da pesquisa. Na ocasião, apresentamos outras, de edifícios, em slides, projetados pelo computador.

Logo depois, concedemos uma sondagem escrita, para que os educandos pudessem visualizar o mapa, da escola, no *Google Maps*, e responder aos questionamentos propostos, tomando como base, o que podia ser percebido, no aplicativo, apresentado em slides. Na imagem exibida, logo abaixo, registramos as respostas da aluna A1. De modo geral, elas foram idênticas, para quase todos os discentes, divergindo, apenas, o endereço. Ainda assim, surgiram três situações, que não tínhamos pensado nelas.

A primeira diz respeito ao fato de alguns educandos residirem na zona rural, desse modo, eles argumentaram que o percurso feito, no papel, seria grande. Sugerimos que tomassem como referência a casa de um parente, que eles visitavam, frequentemente, ou iniciassem o trajeto, a partir do momento em que entravam na zona urbana.

Na segunda situação, a rua de determinados alunos não apareceu, na imagem, do aplicativo. Nesse caso, eles tiveram que citar outra, que estivesse próxima, ao seu endereço. Fato importante, pois lhe impulsionou a localizar-se e, ao mesmo tempo, encontrar a movimentação de outras pessoas, ou objetos, no espaço (FARIAS, 2008). É o caso da aluna A1:

Figura 19: Respostas da aluna A1, sobre as observações, no mapa, dos arredores da escola.

1) Em que rua a nossa escola se localiza? gentilino saques.

2) A sua rua aparece nesse mapa? Qual o nome dela? Caso sua rua não esteja representada no mapa indique outra que seja próxima. Não, Rua Mariano de concelão.

3) A Rua Gilverson de Araújo fica localizada em que bairro? Observe no mapa.
Alto de São Vicente.

4) Escreva o nome de uma rua que dá acesso ao cemitério partindo de nossa escola?
José Galdina da Silva

Fonte: Arquivo do autor (2015).

Por fim, a última situação referia-se aos alunos, os quais suas ruas estavam representadas, no mapa, é o caso da aluna E2:

Figura 20: Respostas da aluna E2, sobre as observações, no mapa, dos arredores da escola.

1) Em que rua a nossa escola se localiza? getulho vargas

2) A sua rua aparece nesse mapa? Qual o nome dela? Caso sua rua não esteja representada no mapa indique outra que seja próxima. sim, Rua Paulo tomaz de Queiroz

3) A Rua Gilverson de Araújo fica localizada em que bairro? Observe no mapa.
alto não Vicente

4) Escreva o nome de uma rua que dá acesso ao cemitério partindo de nossa escola?
José Guandino da Silva

Fonte: Arquivo do autor (2015).

Na sequência, solicitamos que os discentes fizessem, em forma de um texto, o percurso, realizado por eles, desde suas casas até a escola. Aconselhamos que especificassem os principais pontos de referências, assim como, utilizassem termos adequados, tais como, à direita, à esquerda, siga em frente, para trás, entre outros. Cumprimos as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que proferem que a movimentação de pessoas, ou objetos, no espaço, seja efetuada “com base em diferentes pontos de referências e algumas indicações de direção e sentido” (BRASIL, 2001, p. 73).

Notamos a ausência desses elementos, na produção da aluna A1, embora tenha informado seu endereço correto, na figura anterior, e enumerado os pontos de referências, por onde passa. Ela os listou de forma sequencial, isto é, apontou as localidades, partindo de sua casa, até a escola. Sabemos que as informações prestadas por ela são verídicas, uma vez que,

residimos na mesma cidade, em que a aluna, também, reside, entretanto, isso não seria possível, para outro receptor, que desconhecesse o município. Os demais alunos, com exceção de dois, também agiram da mesma forma, especificada anteriormente.

Eu moro na rua da cagepa, eu passo por: O mercado, o Hospital pelo Samu e também divéz enquanto passo por a casa da minha avo anunciada. E depois eu passo por a casa de drol e pela farmácia e passo pela uma loja e ai vem o acude e passo por uma borracharia e depois por outra loja e ai que eu chego na escola, eu vou estuda. Fim. (Texto da aluna A1, apontando o itinerário feito, de sua casa até a escola).

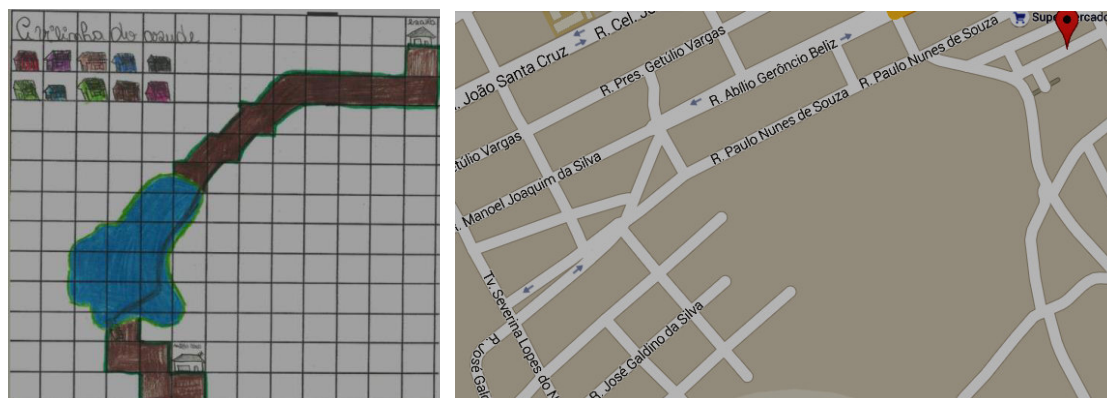
As informações prestadas, pela aluna D1, disponível logo abaixo, e A4 foram as mais próximas, no sentido de mencionar os termos corretos. Por outro lado, alguns tópicos ficaram obscuros, por exemplo, a discente mencionou que todos os dias o ônibus circulava pela Rodovia Federal, entretanto, não informou sua identificação, nem indicou um ponto de referência fixo, que ficasse próximo de sua residência, uma vez que, a mesma reside na zona rural.

Percorremos a pista pegamos à direita passamos por muitas casas. Passamos pela uma oficina, pelo um mercado. Dobramos à direita o ônibus para no na parque das águas atravessamos a rua e chegamos à escola. (Texto da aluna D1, apontando o itinerário feito, de sua casa até a escola).

Consideramos rica, a produção da discente, uma vez que ela teve a intenção de transmitir a informação o mais fiel possível, isso pode ser constatado, quando disse: “dobramos à direita o ônibus para no na parque das águas”.

Essas vicissitudes estão em comum acordo com os PCNs, quando advertem que a construção de itinerários, através de instruções dadas, previamente, é um trabalho significativo. Além disso, consideram produtivo que os alunos possam relatar, oralmente, o trajeto realizado, de suas casas até a escola, ou até mesmo em forma de desenhos. Também investimos, nesse último caso, isso ocorreu, quando os discentes terminaram suas produções textuais, logo após, pedimos que reproduzissem o percurso feito por eles, de suas casas até a escola, através de desenhos, como pode ser averiguado adiante.

Figura 21 a e b: Itinerário, entre a casa e a escola da aluna E2 e o mapa dessa localidade.

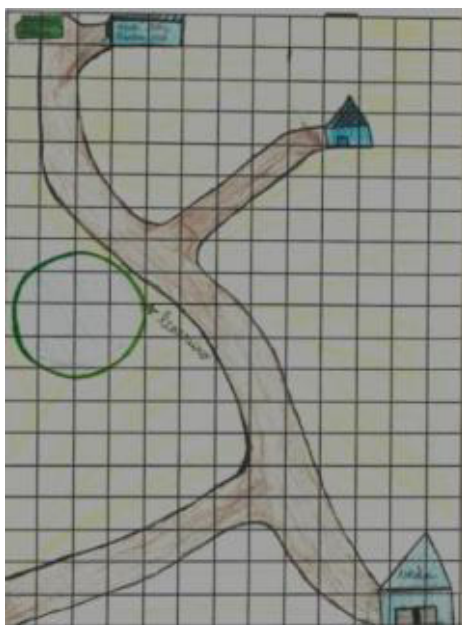


Fonte: Arquivo do autor e Google Maps.

A título de certificação, também exibimos, na imagem acima, da direita, o mapa, evidenciando os arredores da residência (em vermelho), e da escola, em que a aluna E2 estuda. Em seu desenho, podemos verificar a riqueza de detalhes, apresentados pela participante. Nele, encontramos o trecho de azul, que ilustra o açude público da cidade, localizado próximo, tanto da escola, quanto da casa da educanda. Isso é comprovado no mapa, na parte onde não temos ilustrações de ruas, vielas, avenidas, entre outros. Ela também registrou o povoado, localizado às margens do lago, conhecido, popularmente, como *açude público da cidade*.

O produto seguinte é de autoria da aluna E3, que reside na zona rural da cidade de Monteiro-PB. Optamos em registrá-lo em nossas discussões, por ele não apresentar informações, acerca das coordenadas, que indicam o endereço da educanda. Contudo, é uma produção bem elaborada e, com acabamento arrojado, ilustrando alguns detalhes, que fazem parte do cotidiano, da discente, por exemplo, o lago simbolizado por uma circunferência, quase que perfeita, de cor verde.

Figura 22: Itinerário da aluna E3 que reside na zona rural da cidade de Monteiro – PB

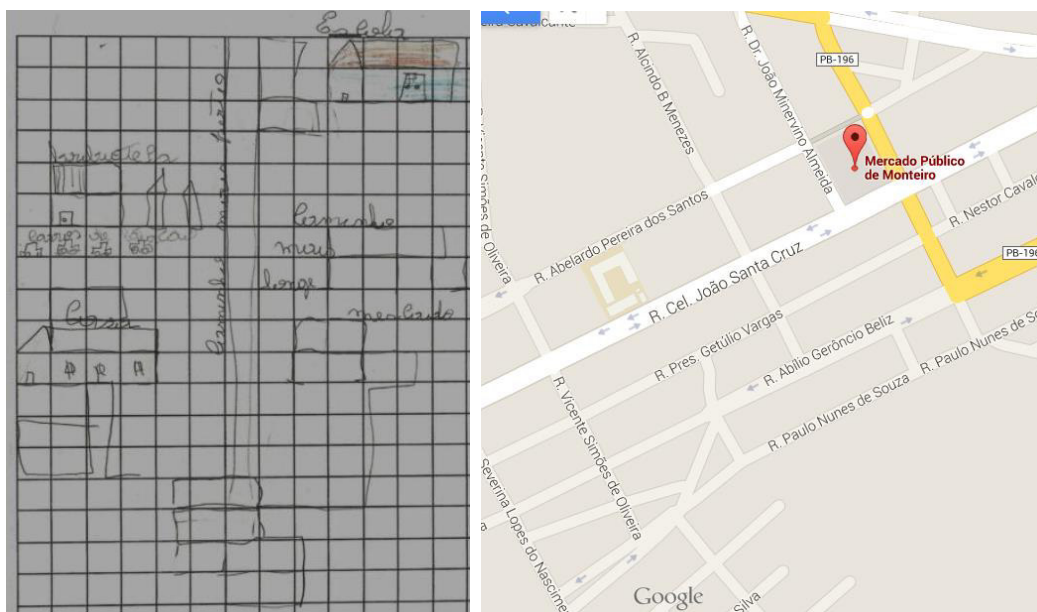


Fonte: Arquivo do autor (2015).

A ausência de casas, praças e avenidas, no desenho, de E3, pode estar em função dela ter moradia fixa, em um sítio, do município de Monteiro-PB. Por outro lado, a aluna deveria ter incluído a paisagem natural, de sua localidade, isto é, árvores, cercas, lavouras, entre outros elementos.

Finalmente, no itinerário da aluna F1, figura 23, é possível notarmos uma diversidade de informações relevantes, que nos conduzem a um entendimento, sobre o percurso, que ela realiza, de sua casa até a escola. Algumas delas dizem respeito ao mercado público, da cidade, à biblioteca do SESI, localizada na Praça Nilo Feitosa, e a alguns automóveis. Assim como os demais alunos, aqui, também não encontramos esclarecimentos, acerca dos movimentos, tais como, à direita, à esquerda, siga em frente, entre outros, que a discente realiza, para chegar a escola. Ao lado da figura 23, deixamos registrado, a critério de verificação, o mapa dos arredores, entre a escola, que a aluna estuda, e sua residência.

Figura 23: a e b: Itinerário entre a casa e a escola da aluna F1 e o mapa dessa localidade.



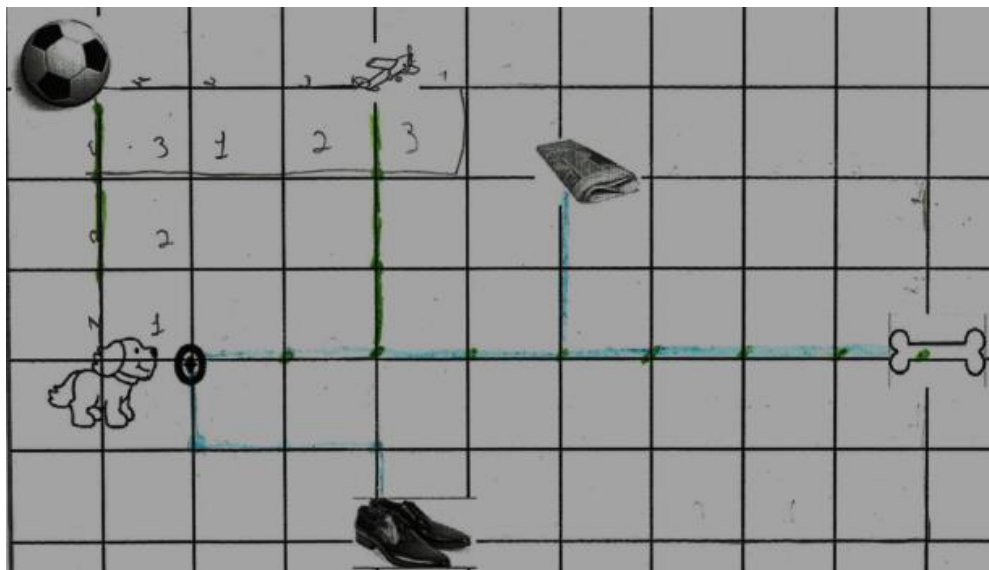
Fonte: Google Maps.

As semelhanças, entre o desenho da aluna e o mapa, dos arredores da casa, de seu parente, que frequenta, quando vem para zona urbana, assim como o da escola, são visíveis. O ponto em vermelho representa o mercado público, de Monteiro. Ele foi utilizado como referência pela educanda, que mesmo não residindo, na zona urbana, informou-nos um endereço de seu familiar, em que sempre o frequenta. Ela disse que essa casa ficava próxima à biblioteca do SESI, além disso, indicou dois caminhos, que convergem à escola, em que estuda: um mais curto e outro mais distante.

Essa habilidade para escolher, entre diversas opções, um percurso, que minimize o tempo de viagem gasto e o esforço físico utilizado é a prova que o conhecimento matemático influencia o cotidiano dessa aluna. A construção de itinerários pode contribuir para aperfeiçoar essas noções intuitivas, pois os alunos terão a sua disposição inúmeros percursos a serem utilizados, para chegar à escola, entretanto, sempre optará pelo mais curto.

A exploração de itinerários, também, foi abordada no quinto episódio: *Um cão chamado Bob*. Nossa intenção era que os discentes ajudassem o cão a recolher alguns objetos, de seu interesse. A representação desse personagem, assim como os itens, que ele deveria buscar, podia ser visualizado em um tabuleiro, feito de madeira, coberto com uma folha de papel quadriculado, contendo a representação de um cão e alguns objetos. Vejamos na imagem seguinte as produções do grupo F.

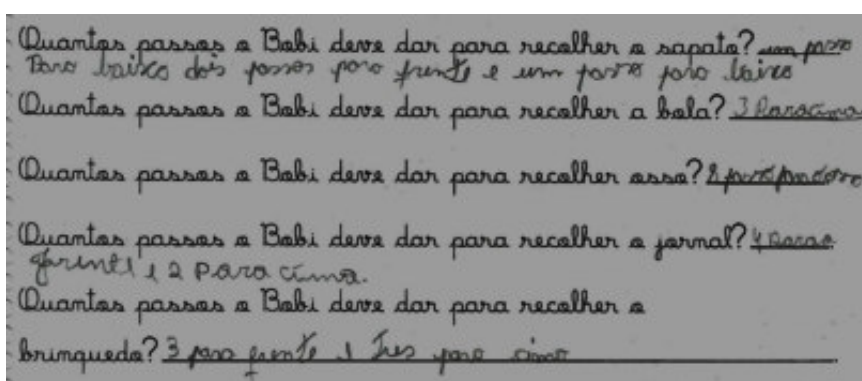
Figura 24: Produção do grupo F, acerca do caminho mais curto, feito pelo cão, para recolher os objetos.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

Notamos a preocupação do grupo, em informar a quantidade de passos, que o cão deveria dar, assim como, a organização, no que diz respeito ao trajeto feito, para recolher cada objeto. Em relação à bola, ao avião, ao osso, ao sapato e ao jornal, a equipe indicou os termos convenientes, para recolhê-los:

Figura 25: Utilização de termos convenientes, para dar orientações, acerca de endereços.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

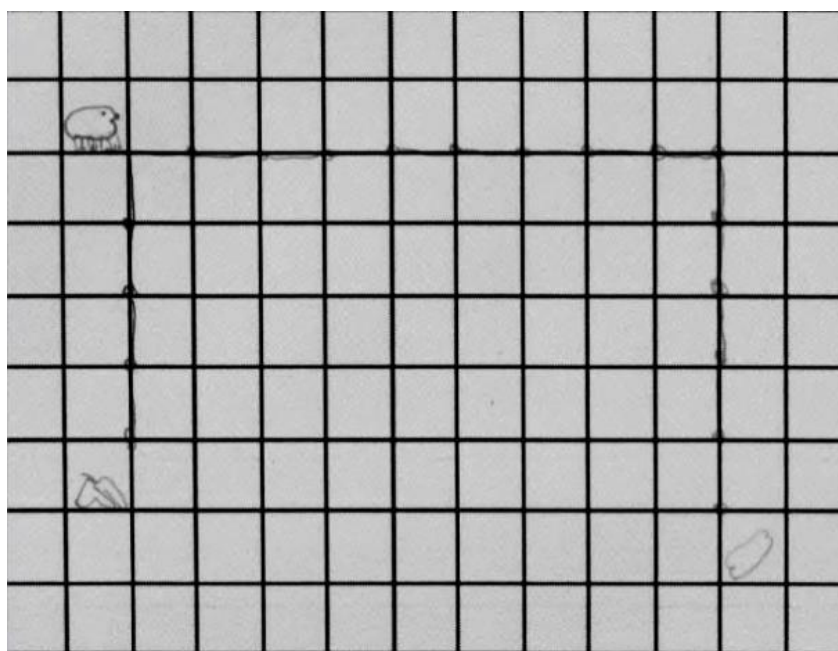
Essa especificação, utilizando os termos convenientes, foi adotada por todos os grupos. Isso mostra o grau de desenvolvimento, que os alunos obtiveram, no que diz respeito à compreensão das noções de lateralidade. Além disso, ressaltamos que esse episódio ocorreu

após a construção de itinerários, da escola, até as residências, de cada um. Fato que pode ter contribuído para o êxito, no quinto episódio.

Outro momento significativo foi, quando pedimos para que as equipes observassem as posições de dois objetos, e o cão, que estavam representados, no tabuleiro, e fizessem uma mensagem, acerca dessas informações. Em seguida, sugerimos que os grupos trocassem essas mensagens. Nossa intenção foi possibilitar que determinada equipe representasse, em uma folha de papel quadriculado vazia, as posições dos objetos e do cão. O grupo A trocou mensagem com o grupo B. “Sapato: cinco passos para baixo.” “Osso: nove para frente e cinco para baixo” (mensagens do grupo A, acerca da localização de dois objetos, recolhidos pelo cão). Enquanto isso, o grupo B registrou: “Sapato: 6 para baixo e 1 para esquerda.” “Osso: 1 para baixo e 10 para a direita” (mensagens do grupo B, acerca da localização de dois objetos, recolhidos pelo cão).

A partir de análises feitas, no caderno de atividades, constatamos que a mensagem, produzida pela equipe A, foi decodificada corretamente, pela equipe B, tanto que esta fez a representação fiel, às informações prestadas, por A. Por outro lado, os alunos desta não conseguiram representar os dados, fornecidos pela equipe B, em forma de trajeto, na malha quadriculada. Essas conclusões podem ser verificadas nas produções disponíveis, logo abaixo:

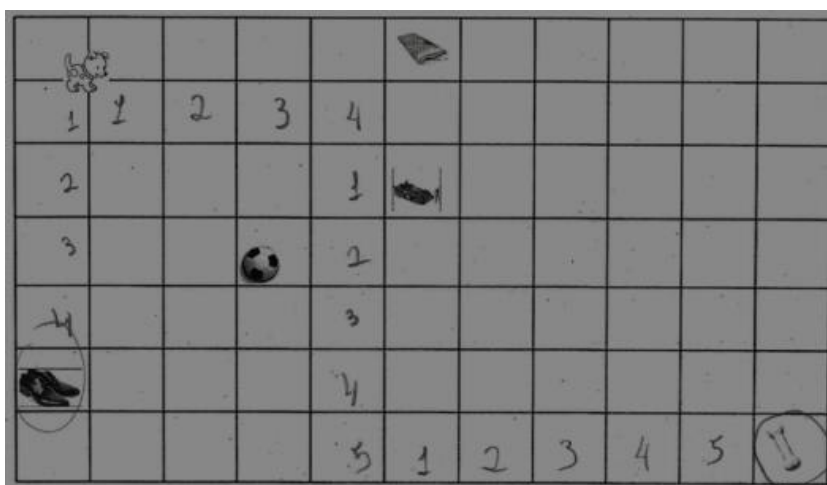
Figura 26: Posição de alguns objetos representados na malha pela equipe B em função de informações prestadas pelo grupo A.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

A figura anterior, produção do grupo B, é condizente, com a informação prestada, pela equipe A. Disso concluímos que o grupo B fez a representação correta, dos dois objetos, recolhidos pelo cão *Bob*, sapato e osso. No primeiro caso, a posição informada era cinco passos, para baixo e, no segundo, caso, nove, para frente, e seis para baixo. Não nos aprofundaremos, nessa etapa, pois consideramos que a maioria dos grupos obtiveram êxito, nela. Apesar disso, julgamos pertinente, exibir a produção, feita pelo grupo F, por considerarmos rica, em detalhes, e conter informações explícitas, para qualquer receptor, que fosse desafiado, a representar, em forma de desenhos o que encontrou.

Figura 27: Produção do grupo F, acerca do percurso, realizado pelo cão, para recolher o sapato e o osso.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

A produção anterior, do grupo F, condiz com a mensagem, acerca da localização, do sapato e do osso: no primeiro caso, “4 passos, para baixo” e, no segundo, “4 passos, para a direita, 5 para baixo e 5 para direita”.

Diante das construções idealizadas, pelo grupo F, podemos perceber que os alunos conseguiram pôr, em sua prática, os termos, referentes à lateralidade. Sendo assim, cumprimos as recomendações dos PCNs, quando diz que é importante propor atividades, de modo que, os discentes, compreendam esses termos, e que saibam dar, ou receber instruções, no espaço em que vivem. Além de terem possibilidades de aperfeiçoarem seu vocabulário, contendo termos geométricos, essenciais, para dar, ou receber informações, acerca de determinado endereço.

As faces, da construção do conhecimento geométrico, investigadas por Machado (2005), foram retomadas, em todos os *episódios*. Em se tratando dos dois, que abordaram

construções de maquetes, e explorações de itinerários, a face denominada representação foi muito explorada, uma vez que, os discentes, fizeram desenhos, acerca do percurso, que realizam de suas casas, até a escola.

Na construção das maquetes, os discentes tiveram oportunidades, para observar e manipular, os materiais concretos (embalagens diversas, em formato de prismas e corpos redondos), que foram entregues, no dia do episódio, e eram representativos, de bancas e birôs escolares, janelas, lousas, armários, entre outros. Além disso, fizeram o reconhecimento das principais características, dessas formas. Situações desse tipo enquadram-se, na face perceptiva, que está relacionada, ao ato de realizar atividades empíricas.

Os discentes utilizaram materiais diversos, para confeccionarem as maquetes, da sala de aula. Por exemplo, eles próprios adaptaram caixas de fósforos, utilizando cola quente, para representar as bancas escolares, (conforme próxima figura), como o birô da professora e o armário, ambos do ambiente escolar. Diante disso, desenvolveram umas das faces, do conhecimento geométrico, denominada construção.

Figura 28: Produção de uma equipe, acerca da banca escolar e a representação do aluno.



Fonte: Arquivo do autor (2015).

Enfim, elencamos três faces, da construção do conhecimento geométrico, que foram exploradas, nesse *episódio*, restando a face conceitual, trabalhada mais nos anos finais, do Ensino Fundamental. Entretanto, nessa investigação, tivemos a oportunidade de oferecer alguns momentos, em que essa última face foi aguçada, a exemplo do *episódio Construindo*

esqueletos de poliedros, já relatado, nas páginas anteriores. Acreditamos que essa categoria tenha convergências, com dois, dos quatro objetivos específicos, dessa pesquisa, ou seja, analisar como ocorre a transição, da geometria tridimensional para a bidimensional, assim como, a proposição de atividades coerentes, que possibilitassem a exploração de conceitos geométricos planos, a partir da geometria espacial. No primeiro caso, as faces teorizadas, por Machado (2005), já oferecem condições de explicar como ocorre essa transição. No último, os PCNs recomendam atividades desse tipo, por defenderem que isso contribui para o aluno localizar-se, no espaço, e dar a localização, de outras pessoas, ou objetos.

CONCLUSÃO

Esta seção finaliza as reflexões deste trabalho, embora acreditamos que elas não se esgotam aqui. Nossa pretensão é provocar os leitores, a partir das discussões anteriores, e dar continuidade à construção da teia iniciada. Retomamos algumas discussões, realizadas brevemente, como também refletimos acerca dos rumos tomados por essa pesquisa, como forma de responder à questão norteadora.

Com base em nossas leituras, partimos do pressuposto de que o caminho escolhido, para o ensino de geometria nos anos iniciais, do Ensino Fundamental, produziria efeitos significativos, em que os estudantes envolvidos, pudessem expressá-los sob diversas formas, conseqüentemente, desenvolvessem o pensamento geométrico, de tal modo que, a partir desse progresso, pudéssemos fazer aferições, em termos qualitativos, sobre as vantagens do percurso que adotamos. Apoiando-se nessas ideias, estruturamos e desenvolvemos nosso trabalho, norteado pela seguinte questão norteadora:

Quais são os efeitos produzidos, por uma série de atividades planejadas, que privilegiem a exploração de uma geometria sensível, para, em seguida, abordar noções da geometria plana, com alunos do quinto ano, do Ensino Fundamental? Em que medida essa intervenção, em sala de aula, guiada pelas recomendações, no tocante ao ensino de geometria, para o segundo ciclo, do Ensino Fundamental, contribuirá para a construção de conceitos da geometria plana, a partir da exploração de atividades, que envolvam a composição e decomposição de algumas representações de sólidos geométricos?

A geometria, como relatado no primeiro capítulo, nasce atrelada às necessidades do homem. O desenvolvimento dela ocorreu a partir da busca incessante do ser humano para resolver conflitos, como demarcação de terras, escolhas adequadas para um sistema de medidas, para as relações comerciais, de soluções referentes à inundações, de meios eficazes para medir o tempo, entre outros. Ou seja, era uma geometria vinculada ao cotidiano, isso não mudou, porém, hoje necessitamos de soluções para outros problemas da modernidade, e o estudo de geometria é uma das saídas para esse labirinto. Diante disso, compete a todos nós oportunizarmos condições, para que os estudantes percebam essa aplicabilidade, mas, a responsabilidade maior é da escola.

Nos episódios realizados, buscamos identificar os efeitos (positivos, ou negativos), em se tratando da construção de conceitos geométricos de ordem tridimensional e bidimensional. Para isso, invertemos a lógica aplicada pelas escolas, isto é, iniciamos a intervenção através da proposição de atividades envolvendo materiais concretos, e sistematizando os conhecimentos geométricos trazidos pelos alunos para, em seguida, estudar os conteúdos da geometria plana. Como desenvolvemos um trabalho metucioso e planejado, esperávamos, com base em nossa fundamentação teórica, que essa inversão causaria efeitos positivos, o que foi corroborado pelos resultados apresentados.

Em relação à confusão, na classificação de representações, de sólidos geométricos, percebemos, nas primeiras intervenções que os discentes participantes, também, apresentavam essas dificuldades, isto é, nomeavam esses elementos levando em conta o formato das faces. Por exemplo, hexaedro (foi denominado de figura geométrica plana quadrangular), prisma (foi denominado de figura geométrica plana retangular) e pirâmide (foi denominada de figura geométrica plana triangular).

Nesse sentido, nossas tarefas procuraram desmistificar essas concepções, a exemplo do episódio da *Decomposição*, o qual, em alguns momentos, possibilitou que os alunos desmontassem embalagens e caracterizassem as partes, quanto ao seu formato, quantidade de lados, entre outros. Em um momento posterior, entregamos uma representação de hexaedro e pedimos que os discentes fizessem o contorno de uma das faces na lousa, em seguida, qualificassem o formato da representação e verificassem a quantidade delas, para compor novamente a embalagem.

O episódio da *Diferenciação entre figuras geométricas planas ou espaciais*, também, teve essa preocupação. Nesse, os discentes já mostraram compreender a distinção entre a nomenclatura do sólido geométrico e a de sua face. O fato de termos possibilitado representações de poliedros, feitas de palitos de churrasco e figuras geométricas planas contendo faces congruentes às dos sólidos geométricos em questão, contribuiu imensamente para essa diferenciação. Desse modo, ao longo do estudo, percebemos um crescimento, por parte dos alunos, assim como das equipes cada uma em seu ritmo, e a seu modo. Enfim, os episódios propostos produziram efeitos desejáveis para enterrar esses conhecimentos errôneos, acerca da classificação dos sólidos geométricos.

No processo de desenvolvimento, das equipes, o trabalho em grupo foi relevante, no sentido de que os discentes puderam construir e socializar conhecimentos geométricos, oriundos do cotidiano, de cada um, relacionando-os com o saber geométrico pretendido para cada episódio. Além disso, no decorrer da intervenção, os participantes mais habilidosos

contribuíram com os que apresentaram dificuldades, tanto para compreenderem determinados conceitos geométricos, quanto para execução de algumas tarefas. Esse contexto justifica a Teoria Sociocultural de Vigotsky nessa pesquisa, mais precisamente o conceito de zona de desenvolvimento proximal.

Por outro lado, essa metodologia de estudo em grupo causou estranheza aos alunos participantes da investigação. Acreditamos que isso tenha acontecido em função de não terem oportunidades desse tipo, nas salas de aulas. No primeiro episódio, quase todos os alunos, que manusearam as embalagens, quando retornavam a sua equipe, para fazer a socialização, apossavam-se do caderno de atividades tentando realizar as tarefas no isolamento. Posturas desse tipo prosseguiram, de forma minimizadora, pois, à medida que percebíamos situações dessa natureza, dialogávamos com os educandos, para que trabalhassem coletivamente.

Os efeitos alcançados, ao propormos atividades planejadas, envolvendo materiais concretos (embalagens diversas e objetos para estudar conceitos geométricos, produzidos pelos alunos), para abordar conteúdos da geometria espacial e, em seguida, explorar os da plana, a partir da investigação nos conceitos vistos acerca da geometria das formas não-planas, foram satisfatórios, pois, as atividades estruturadas previamente oportunizaram o trabalho em grupo e a socialização de conhecimentos geométricos prévios, como também aqueles que desejávamos.

No ensino de geometria, assim como de outra área qualquer, acreditamos que é papel do professor promover atividades que desenvolvam o pensamento geométrico dos alunos. Entretanto, é necessário que ele saiba como fazê-lo. Diante disso, julgamos que os episódios foram coerentes, no sentido de mostrarem, aos discentes, a possibilidade de estudar conteúdos de geometria, de uma maneira diferente, mais significativa.

Analisando as implicações dessa investigação para o desenvolvimento profissional do pesquisador, é possível verificar ganhos inegociáveis, tanto em função de uma fundamentação teórica consistente, na área, quanto na proposição de atividades planejadas, e embasadas, em teóricos, que se debruçam, há um bom tempo, na investigação dos benefícios, oportunizados pelo conhecimento geométrico, aos alunos. Enfim, o caminho escolhido, por nós, trouxe efeitos benéficos, também, para o pesquisador, pois ele adquiriu uma mudança de postura, em sala de aula, refletindo durante o planejamento das atividades com material didático, na proposição deles aos discentes e, após sua aplicação, isto é, constatando *erros e acertos*.

O desenvolvimento de um trabalho de geometria, pautado na exploração dos conceitos tridimensionais para, posteriormente, estudar conteúdos de geometria plana, contribuiu, na medida em que, essa surgiu, naturalmente, no discurso dos discentes, uma vez que eles

mostraram possuir um repertório, de noções geométricas planas, e atribuíram nomenclaturas da geometria plana, para entes tridimensionais. Dessa forma, restava a diferenciação entre uma geometria e outra, pois não evidenciaram essa compreensão, embora acreditemos que ela possa se manifestar, com o passar do tempo, desde que tenham oportunidades semelhantes, às que proporcionamos.

Em todos os episódios, oportunizamos, aos discentes, o manuseamento de embalagens diversas, a compreensão deles, acerca dos conceitos geométricos, que podem ser explorados, a partir da investigação de regularidades, nesses objetos, a produção de materiais, para o nosso próprio estudo e a representação deles, por meio de desenhos. Pais (1996) defende que esses objetos e suas respectivas representações, através de desenhos, contribuem para os procedimentos de raciocínio, do aluno, durante a construção de seu conhecimento geométrico.

Essas habilidades adquiridas, pelos discentes, estão em conformidade com as quatro faces da construção do conhecimento geométrico, teorizadas por Machado (2005), quais sejam: percepção, representação, construção e concepção. Essa última foi aguçada, no episódio da *Construção de esqueletos de poliedros*, quando, a partir de mediações do professor-pesquisador, os participantes observaram os poliedros, feitos de palitos de churrasco e, em seguida, distribuíram em três grupos: prismas, pirâmides e poliedros de Platão. Com relação aos últimos, perceberam, a partir de nossas intervenções, que eles apresentam faces congruentes e, em cada vértice, convergem o mesmo número de arestas. Como também, notaram a existência de uma relação, entre o número de vértices, faces e arestas, fato possibilitado, em função de nossos questionamentos propostos.

Diante do exposto, um dos efeitos desejáveis, provocados por nossa proposta, refere-se ao fato de os discentes terem recebido oportunidades que possibilitaram transitar, entre as três primeiras faces, da construção do conhecimento geométrico e, em alguns casos, a face conceptiva, como relatamos anteriormente.

O caderno de atividades, entregue a cada equipe, possibilitou a produção de registros escritos, ou pictóricos. No primeiro caso, os aprendizes tiveram a chance de aperfeiçoar sua escrita, nas aulas de Matemática, recurso que, talvez, achassem não ser possível, ou, possivelmente, nunca realizaram tal prática. Acreditamos que esse contexto tenha estimulado o desenvolvimento, da habilidade de comunicação, nas aulas de geometria. Com ela, os discentes têm condições de ler, interpretar e comunicar-se, corretamente, de forma oral, ou escrita, usando a linguagem matemática, adequadamente (MANOEL, 2012).

Perante as considerações anteriores, o caminho escolhido, nessa investigação, para a promoção de atividades planejadas, envolvendo a geometria, das formas não-plana às planas,

trouxe efeitos, que são investigados, e recomendados por pesquisadores, da área de Educação Matemática, isto é, o recurso da leitura e escrita nas aulas de matemática. De acordo com Nacarato et. al (2009), somente a oralidade não garante o cumprimento dos objetivos, propostos nos planos de aula, sendo necessário o desenvolvimento, também, da escrita.

Esta dissertação levou em conta recomendações de outros pesquisadores, a exemplo de Almeida (2011), que sugeriu a continuidade de estudos, semelhantes aos que ele desenvolveu, ou seja, um processo empenhado, a ser realizado, acerca da utilização de Materiais Didáticos, no ensino de geometria, confeccionados pelos alunos, trabalhando em grupos, com a mediação do professor.

Chegamos ao término desta investigação, com a sensação de que ela, ainda se encontra inacabada. Tenho o presentimento de que é preciso fazer mais, estamos conscientes, da necessidade de um acompanhamento, que deveria ser realizado, pós-pesquisa. A solução, para isso, pode estar em trabalhos multiplicadores, a exemplo da dissertação de Barbosa (2011), que desenvolveu um estudo, envolvendo professoras, dos anos iniciais, do Ensino Fundamental, com o propósito de estudar conteúdos de geometria. Acreditamos que, dessa forma, teremos condições de oportunizar um ensino de geometria, de qualidade, nos anos iniciais, do Ensino Fundamental. Sabemos da necessidade e urgência de intervenções, dessa natureza, nas escolas. Só assim, acreditamos que a universidade terá mais condições de aproximar-se, cada vez mais, do Ensino Básico.

Algumas extensões podem ser originadas de nossa pesquisa. Talvez elas possibilitem o preenchimento de certas lacunas que deixamos. Por exemplo, propomos um caminho inverso para o ensino de geometria, isto é, partir das formas não-planas para as planas, sendo que essas foram exploradas através de determinados conteúdos iniciais da geometria espacial. Uma sugestão pode ser desenvolvida uma investigação em que isto se dê a partir de obras de arte em telas, como a imagem do artista gráfico holandês Escher (Anexo A). Essas produções podem possibilitar um caminho com dois sentidos, envolvendo as geometrias plana e espacial, lembrando que os discentes devem ter a liberdade de transitar livremente nas duas mãos. Nossa intenção é dar continuidade às discussões provocadas pelo oitavo episódio, exposição da imagem de Escher, pois consideramos que não houve aprofundamento nas potencialidades que esse momento poderia provocar.

Uma segunda sugestão é prosseguir com esse caminho defendido por nós para o ensino de geometria, contudo voltado para os anos finais do Ensino Fundamental, ou Ensino Médio. Nesse caso, a ideia é investigar qual a concepção que os discentes têm de espaço, sob a ótica da geometria espacial e como ocorre a transição dessa a um espaço que armazena

imagens, áudios, vídeos e arquivos em geral, isto é, objetos tridimensionais guardados em um espaço denominado por nós de *virtual* ou *nuvens*. Essa problemática surge em nossa pesquisa quando proporcionamos os episódios referentes às construções de itinerários e maquetes, pois na ocasião os discentes visualizaram um mundo tridimensional a partir de uma tela plana (*slide* projetado pelo computador).

Enfim, também acreditamos que o estudo sobre os conceitos científicos e espontâneos investigados por Vygotsky poderiam fornecer elementos implícitos que talvez não tenham sido percebidos. Nos responsabilizamos em acrescentar ponderações sobre essa temática em pesquisas posteriores, bem como fazemos um convite para refletirmos sobre a inserção dessas reflexões percebidas tardiamente.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Lurdes; OLIVEIRA, Isolina. **A Matemática na Educação Básica**. Lisboa: Mec, 1999. 130 p.

ALMEIDA, José Joelson Pimentel de. **Gêneros do discurso como forma de produção de significados em aulas de Matemática**. 2012. 256 f. Tese (Doutorado). Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana e Universidade Estadual da Paraíba.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **O nascimento da Matemática: A neurofisiologia e a pré-história da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2013. 292 p.

ALMEIDA, André Ferreira de. **Repercussões do uso de materiais didáticos manipuláveis em aulas de geometria**. 2011. 176 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

ANDRADE, Edelaine Cristina. **Análise de uma proposta aplicada em sala de aula sobre geometria com foco na demonstração**. 2011. 148 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Londrina.

ARAÚJO, Maria Auxiliadora Sampaio. Por que ensinar Geometria nas séries iniciais de 1º grau. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 2, n. 3, p.12-16, 1994.

BARBOSA, Cirléia Pereira. **O pensamento geométrico em movimento: Um estudo com professores que lecionam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG)**. 2011. 186 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/3074>>. Acesso em: 17 fev. 2015.

BARRANTES, Manuel; BLANCO, Lorenjo J.. Estudos das recordações, expectativas e concepções dos professores em formação sobre ensino-aprendizagem da geometria. **Educação Matemática em Revista**, Rio de Janeiro, v. 11, n. 17, p.29-39, dez. 2004. Semestral.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, SariKnopp. **Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto, 1994. 337 p. Maria Teresa Estrela e Albano Estrela.

BELO HORIZONTE. Discutindo o ensino de geometria. **Cadernos de Educação Matemática**. Belo Horizonte: Secretaria Municipal de Educação, v. 2, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997, 142 p.

_____. Guia do Livro Didático 2007. Programa Nacional do Livro Didático: Matemática: Brasília: MEC/SEF, 2007, 262.

_____. Educação para jovens e adultos: ensino fundamental: proposta curricular – 1º segmento. São Paulo: Ação Educativa; Brasília: MEC, 2001.

BUKOWITZ, Natecia de Souza Lima. Uma abordagem geométrica à compreensão dos números racionais. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, V. 13, p. 7-14, Jun. 2008. Semestral.

CABRERA, Mônica Almeida. **O paradigma indiciário e as representações sociais dos professores dos anos iniciais do ensino fundamental acerca de seu papel**. In: COLLOQUIUM HUMANARUM, 9., 2012, Presidente Prudente. Anais... . Presidente Prudente: Fct/Unesp, 2012. v. 9, p. 941 - 948. Disponível em: <[http://www.unoeste.br/site/enepe/2012/suplementos/area/Humanarum/Ciências Humanas/Educação/o paradigma indiciário e as representações sociais dos professor es dos anos iniciais do ensino fundamental acerca de seu papel.pdf](http://www.unoeste.br/site/enepe/2012/suplementos/area/Humanarum/Ciências%20Humanas/Educação/o%20paradigma%20indiciário%20e%20as%20representações%20sociais%20dos%20professores%20dos%20anos%20iniciais%20do%20ensino%20fundamental%20acerca%20de%20seu%20papel.pdf)>. Acesso em: 18 Fev. 2015.

CARDOSO, Virgínia Cardia. **A cigarra e a formiga**: Uma reflexão sobre a educação matemática brasileira da primeira década do século XXI. 2009. 212 f. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009. Disponível em: <www.fe.unicamp.br/hifem/_i/Cardoso_VirginiaCardia_D.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2015.

COMENIUS, J. A. S. **Didática Magna**. Tradução de: Ivone Castilho Benedetti. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2002. 390 p.

CRESWEL, John W. **Investigação qualitativa e Projeto de pesquisa**: escolhendo cinco abordagens. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2014. 341 p. Sandra Mallmann.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Orgs.). **O planejamento da pesquisa qualitativa**: teorias e abordagens. Tradução Sandra Regina Netz. 2.ed. Porto Alegre: Artmed, 2011.

DETONI, Adlai Ralph. A geometria se constituindo pré-reflexivamente: Propostas. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 6, n. 2, p.187-202, nov. 2012. Disponível em: <<http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/viewFile/358/197>>. Acesso em: 17 fev. 2015.

DOUGLAS, J. **Investigative social research**. Beverly Hills, C.A: Sage, 1976.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004. 843 p. Hygino H. Domingues.

FAINGUELERNT, Estela K. O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus. **Educação Matemática em Revista**, Rio de Janeiro, v. 4, p.45-52, jan. 1995. Semestral.

_____. **Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria.** Porto Alegre: Artes Medicas Sul, 1999.

FARIAS, Kátia Sebastiana Carvalho dos Santos. Tendências das orientações didáticas para o ensino dos sólidos geométricos nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Reunião Anual da Anped**, Caxambu, v. 31, p.1-17, 2008. Disponível em: <<http://31reuniao.anped.org.br/1trabalho/GT19-4972--Int.pdf>>. Acesso em: 17 fev. 2015.

FONSECA, Maria da Conceição et. al. **O Ensino de Geometria na Escola Fundamental: Três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. 127 p.

FONSECA, Maria C.F.R. e DAVID, Maria M.M.S. Luzes e sombras: objetivos, possibilidades e limites do ensino de Geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental. **Cadernos Ensinar**, Belo Horizonte, n.2, p.33-55, outubro, 1995.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática: Percursos teóricos e metodológicos.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009. 228 p. (Coleção Autores Associados).

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias.** 217 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, 2000.

GERDES, Paulus. **Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico.** Curitiba: Editora da UFPR, 1992.

GUIMARÃES, Henrique. Por uma matemática nova nas escolas secundárias: perspectivas e orientações curriculares da matemática moderna. In: MATOS, J. M.; VALENTE, Wagner Rodrigues. **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos.** São Paulo: Pmmpb, 2007. p. 21-45.

IVIC, Ivan. **Lev Semionovich Vygotsky.** Recife: Massangana, 2010. 140 p. (Fundação Joaquim Nabuco). José Eustáquio Romão. Disponível em: <<http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me4685.pdf>>. Acesso em: 18 fev. 2015.

KALEF, Ana Maria M.. **Vendo e entendendo poliedros: Do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos.** 2. ed. Niterói: Eduff, 1998.

KAZANOWSKI, Denise Vieira. **Ensino de geometria nas séries iniciais em Minas do Leão: Algumas reflexões.** 2010. 138 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio

Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em:
<<http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/29350>>. Acesso em: 17 fev. 2015.

LAMONATO, Maiza; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglioni. “Siga os exemplos” dos alunos: aprendizagens em aulas exploratório-investigativas no 4º ano do ensino fundamental. **Revista Eletrônica em Educação**, São Carlos, v. 6, n. 1, p.243-265, maio 2012. Disponível em:
<<http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/viewFile/406/176>>. Acesso em: 17 fev. 2015.

LAURO, Maria M.. **Percepção – Construção – Representação – Concepção**: Os quatro processos do ensino da Geometria: uma proposta de articulação. 2007. 396 f. Dissertação (Mestrado). Universidade de São Paulo/faculdade de Educação, São Paulo, 2007. Disponível em: <www.teses.usp.br/teses/.../48/.../DissertacaoMairaMendiasLauro.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2015.

LOPES, Maria Laura M.; NASSER, Lilian. **Geometria na era da imagem e do movimento**. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 4, p.3-13, jan. 1995. Semestral.

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e Didática**: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005. 320 p.

MAIA, Lícia de Souza Leão. O ensino da geometria: analisando diferentes representações. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 7, n. 8, p.24-33, jun. 2000. Semestral.

MANOEL, Wagner Aguilera. Por que Ensinar Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental? In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2012, Canoas. **Anais... . Canoas**: Universidade Luterana do Brasil, 2012. v. 16, p. 12 - 21. Disponível em:
<http://matematica.ulbra.br/ocs/index.php/ebrapem2012/xviebrapem/paper/view/493/286>. Acesso em: 17 fev. 2015.

MARQUESIN, Denise Filomena Bagne. **Práticas compartilhadas e a produção de narrativas sobre aulas de Geometria**: o processo de desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática. 2007. 243 f. Dissertação (mestrado). Universidade de São Francisco.

MIGUEL, A.; VILELA, D. S. **Práticas Escolares de Mobilização de Cultura Matemática**. Cad. Cedes, Campinas, v. 28, nº 74, p. 97-120, jan./abr. 2008.

MONTENEGRO, Zilda Maria C.. PIMENTEL, Edna Furukawa; Aproximações do paradigma indiciário com o pensamento freiriano: uma construção possível? **Periódicos UESB**, São

Paulo, v. 3, p.181-194, 2007. Disponível em:
<periodicos.uesb.br/index.php/praxis/article/view/355/387>. Acesso em: 18 fev. 2015.

NACARATO, Adair Mendes. **Educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação: currículo em ação de um grupo de professoras ao aprender ensinando geometria.** 2000. 323 f. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas.

_____. O ensino de geometria nas séries iniciais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...** . Belo Horizonte: Sbem, 2007. p. 1 - 18. Disponível em: <<http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais>>. Acesso em: 17 fev. 2015

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009. (Tendências em Educação Matemática).

NACARATO, Adair Mendes; MARQUESIN, Denise Filomena Bagne. A prática do saber e o saber da prática em geometria: análise do movimento vivido por um grupo de professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamenta. **Zetetiké**, São Paulo, v. 19, n. 35, p. 103-137, Jun. 2011.

NACARATO, Adair Mendes; PASSOS, Carmém Lúcia B.. **A Geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores.** São Carlos: Edufcar, 2003. 151 p.

NACARATO, Adair M; ANDRADE, José A; **Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs.** SBEM. Ano. 11. Nº 17. 2004.

NEVES, Aniceh Farah. **Em busca de uma vivência geométrica mais significativa.** 1998. 225f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual de São Paulo, Marília, 1998.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. Sobre diferenças individuais e diferenças culturais: o lugar da abordagem histórico-cultural. In: AQUINO, J. G. (org.) **Erro e fracasso na escola: alternativas teóricas e práticas.** São Paulo, Summus, 1997. pp. 45-61.

PAIS, Luis Carlos. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 6, p.65-74, 1996. Disponível em:
<<http://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2664>>. Acesso em: 17 fev. 2015.

PASSOS, Cármem Lúcia Brancaglione. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a Geometria na sala de aula.** Tese (Doutorado em Educação) - UNICAMP, Campinas, 2000.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino de geometria.** 1989. 196 f. Tese (Doutorado) - Curso de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

_____. **Geometria: atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais.** In: Anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática. Curitiba: 2001, p. 172- 183.

PIRES, Célia Maria Carolino; CURI, Edda e Campos; MENDONÇA, Tânia Maria. **Espaço e forma: A construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries do Ensino Fundamental.** São Paulo: Proem, 2000.

PORTUGAL. **Programa de Matemática para o Ensino Básico.** Disponível em: <http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/ProgramaMatematica.pdf>. Acesso em: 20 Jun. 2015.

RADAELLI, RosibelKunz. **A investigação e ação docente no ensino de geometria em anos iniciais do ensino fundamental.** 2010. 131 f. Dissertação (Mestrado). Centro Universitário Univates, Lajedo, 2010.

RÊGO, Rogéria G. do; RÊGO, Rômulo M. do; VIEIRA, Kleber M.. **Laboratório de ensino de geometria.** Campinas: Autores Associados, 2012. 142 p. (Formação de Professores).

ROMANATTO, M. C ; PASSOS, C. L. B. **A Matemática na formação de professores dos anos iniciais: um olhar para além da aritmética.** São Carlos: EdUFSCar, 2012. v. 2.

SILVA, Sônia Ferreira Nunes da. **Geometria nas séries iniciais: Por que não: A escolha de conteúdos – Uma tarefa reveladora da capacidade de decidir dos docentes.** 2006. 230 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

SOUZA, E.R. et. al. **A Matemática das sete peças do Tangram.** 3. ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 2003.

SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria Ignez.; CÂNDIDO, Patrícia. **Jogos de matemática de 1º ao 5º ano.** Porto Alegre: Artmed, 2007.

TERRA, Márcia Regina. **O desenvolvimento Humano na Teoria de Piaget.** Disponível em: <<http://www.unicamp.br/iel/site/alunos/publicacoes/textos/d00005.htm>>. Acesso em: 17 fev. 2015.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Osvaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, Paraná, v. 8, n. 25, p.583-613, 2008. Disponível em: <www2.pucpr.br/reol/pb/index.php/dialogo?dd1=2435&dd99;>. Acesso em: 17 fev. 2015.

_____. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930**. São Paulo: Annablume/FAPESP, 1999.

_____. Quem somos nós, professores de matemática?. **Cadernos Cedes, Campinas**, v. 28, n. 74, p.11-23, jan. 2008. Disponível em: <www.cedes.unicamp.br>. Acesso em: 17 fev. 2015.

_____. **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil**. Brasília: UnB, 2004.

VALENTE, Wagner Rodrigues et. al. práticas de ontem e de hoje: heranças do Movimento da Matemática Moderna na sala de aula do professor de matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais... .** Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. p. 1 - 12. Disponível em: <www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/.../MC26580527072T.doc>. Acesso em: 17 fev. 2015.

VASCONCELLOS, Mônica – O ensino da geometria nas series iniciais: a aprendizagem dos alunos da 4ª série e o ponto de vista dos professores. **28ª 29 reunião ANPED - GT :19**, 2005. Acesso em: 02 fev. 2015.

_____. A diferenciação entre figuras geométricas não planas e planas: o conhecimento dos alunos das séries iniciais do ensino fundamental e o ponto de vista dos professores. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 30, p.77-106, jul. 2008. Disponível em: <www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/download/2516/2275>. Acesso em: 17 fev. 2015.

VYGOTSKY, L. S. **A Construção do Pensamento e da Linguagem**. São Paulo: Martins, 2001. 496 p. Paulo Bezerra.

_____. **A formação Social da mente**. São Paulo: Martins, 2007. 220 p.

_____. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2008.

**APÊNDICE A – Autorização requerida à direção escolar para fins de realização da
pesquisa de mestrado**

AUTORIZAÇÃO²⁵

Eu _____ abaixo
assinado, _____ responsável
pela _____ autorizo a
realização da pesquisa: Ensino de Geometria destinado aos alunos do 5º ano do Ensino
Fundamental a partir de materiais concretos, a ser conduzido pelos pesquisadores abaixo
relacionados. Fui informada pelo responsável do estudo sobre as características e objetivos da
pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

Esta instituição está ciente de suas co-responsabilidades como instituição co-participante do
presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar
dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infra-estrutura necessária para a garantia
de tal segurança e bem-estar.

Monteiro, 16 de Janeiro de 2015.

Assinatura e carimbo do responsável pela instituição

Assinatura do Pesquisador

²⁵ Termo adaptado e disponível em:
<http://www.pucpr.br/pesquisacientifica/comitespesquisa/cep/documentos.php>.

**APÊNDICE B – Termo de autorização destinado aos pais dos alunos
participantes da pesquisa**

**AUTORIZAÇÃO²⁶ REQUERIDA AOS RESPONSÁVEIS PELOS ALUNOS
MENORES DE IDADE**

AUTORIZO o mestrando ANDRÉ FERREIRA DE LIMA, regularmente matriculado no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, a utilizar, parcial ou integralmente, anotações, gravações em áudio ou vídeo, das falas ou imagens do aluno (a): _____, matriculado no 5º ano A do Ensino Fundamental, turno manhã, para fins de pesquisa relacionada ao mestrado, podendo divulga-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que seja garantido o meu anonimato no relato da pesquisa.

Dados dos pais ou responsáveis preenchidos pelo pesquisador:

NOME DO PAI OU RESPONSÁVEL: _____

RG: _____

TELEFONE: _____

E-MAIL: _____

Assinatura do responsável

Assinatura do orientador

Monteiro, _____ de Fevereiro de 2015.

²⁶ Adaptado da dissertação de Andrade (2011) cujo título é: Análise de uma proposta aplicada em sala de aula sobre geometria com foco na demonstração.

APÊNDICE C – Modelo do caderno de atividade utilizado pelos grupos referente ao primeiro episódio

Alunos (as):

Grupo F

1) Após vocês terem manipulado o primeiro objeto utilizando o tato, conversem com seus colegas e registrem em forma de texto o que descobriram. Descrevam esse objeto, escrevendo todas as características descobertas por vocês.

Objeto 1

2) Esse objeto 1 parece com que _____

3) Se esse objeto 1 fosse desmontado, ficaria mais parecido com qual dessas representações na lousa? _____

Objeto 2

2) *Esse objeto 2 parece com:* _____

3) *Se esse objeto 2 fosse desmontado, ficaria mais parecido com qual dessas representações na lousa?* _____

Objeto 3

2) *Esse objeto 3 parece com:* _____

3) *Se esse objeto 3 fosse desmontado, ficaria mais parecido com qual dessas representações na lousa?* _____

Objeto 4

2) *Esse objeto 4 parece com:* _____

3) *Se esse objeto 4 fosse desmontado, ficaria mais parecido com qual dessas representações na lousa?* _____

4) *Quais dos objetos que vocês tocaram parecem com estes que estão em cima dessa mesa?*

Objeto 1 parece com: _____

Objeto 2 parece com: _____

Objeto 3 parece com: _____

Objeto 4 parece com: _____

3) Assinalem com um X os possíveis objetos que vocês tocaram. Em seguida responda ao lado se é o objeto 1, 2, 3 ou 4.

1 – latão de refrigerante _____	12 – Embalagem/bom ar. _____
2 – Dado _____	13 – Caixa/sabonete. _____
3 – Caixa de celular _____	14 – Cubo mágico. _____
4 – bola de isopor _____	15 – Embalagem/creme dental _____
5 – funil _____	16 – Lata de leite. _____
6 – Embalagem de perfume _____	17 – Frasco de perfume em vidro. _____
7 – Embalagem de redbul _____	18 – Caixa de creme de barbear. _____
8 – Caixa de sabão em pó _____	19 – Embalagem de tênis pé. _____
9 – Ralador de cenoura _____	20 – Embalagem de creme/cabelo. _____

10 – Rolo de linha vazio _____

11 – Enfeite de árvore de natal _____

21 – Ralador de cenoura _____

4) Temos duas caixas grandes aqui. Caixa A e caixa B. Quero que vocês prestem atenção aos objetos, para em seguida, depositá-los nessas caixas, de modo que, os objetos que apresentam características em comum fiquem em uma mesma caixa. **Orientações:** O grupo A deverá se deslocar as duas caixas, fazerem a separação e na mesma hora o relator escreverá os nomes dos objetos no quadro abaixo. Em seguida, o grupo retornará ao seu lugar e responderá a questão 13. O mesmo ocorrerá para o grupo B.

<i>Caixa A</i>	<i>Caixa B</i>

--	--

5) *Porque vocês separaram esses objetos assim? Quais foram os critérios que utilizaram?*

APÊNDICE D – Quadro contendo a listagem de todas embalagens inseridas nas urnas referente ao primeiro episódio

OBJETOS EMBALAGENS INSERIDAS NAS URNAS DE A ATÉ F					
A	B	C	D	E	F
1 Lata milho/cilindro	1 funil/cone	1 bom ar/cilindro	1 bola isopor/esfera	1 bola isopor/esfera	1 refrigerante/cilindro
1 dado/hexaedro	1 Cubo mágico/hexaedro	1 bola isopor/esfera	1 perfume biografia/prisma	1 caixa/Bozano/prisma	1 cubo
1 Caixa/celular/prisma	1 Caixa/perfume/prisma	1 Caixa/sabonete/prisma	1 lata/leite/cilindro	1 tênis pé/cilindro	1 bola/isopor/esfera
1 enfeite natal/esfera	1 rede bul/cilindro	Dado/hexaedro	1 cubo	1 cubo	1 caixa/sabão/prisma
1 rolo de linha/cone	1 bola/isopor/esfera	1 rolo de linha/cone	1 rolo de linha/cone	1 rolo de linha/cone	1 rolo de linha/cone
1 corta tempero/pirâmide	1 caixa/tronco pirâmide	Pirâmide quadrangular de sabão	Pirâmide quadrangular de sabão	Prisma de base triangular	Embalagem de perfume – prisma triangular
			Prisma de base triangular		

APÊNDICE E – Modelo do caderno de atividade utilizado pelos grupos referente ao segundo episódio

Texto Introdutório

Espaço reservado para a equipe produzir o texto 1. Escrevam fatos que acharam interessante nestas duas embalagens que receberam. Observem os lados, tamanho de cada lado, tipo de embalagem, o que elas têm em comum e outras coisas mais. Sejam criativos!

Desenho1

Espaço reservado para o desenho da embalagem como se ela estivesse desmontada.

Contorno 1

Espaço reservado para o contorno da primeira embalagem que foi desmontada pela equipe.

Usem lápis grafite e sejam organizados!

Texto 1

Neste espaço escrevam de maneira bem detalhada as diferenças ou semelhanças entre o desenho 1 que vocês fizeram e o contorno dele.

Desenho 2

Espaço reservado para o desenho da segunda embalagem como se ela estivesse desmontada.

Contorno 2

Espaço reservado para o contorno da segunda embalagem que foi desmontada pela equipe.

Usem lápis grafite e sejam organizados!

Texto 2

Neste espaço escrevam de maneira bem detalhada as diferenças ou semelhanças entre o desenho 2 que vocês fizeram e o contorno dele.

Questionário

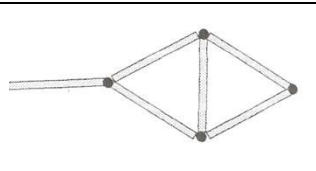
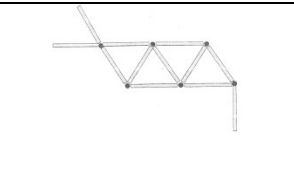
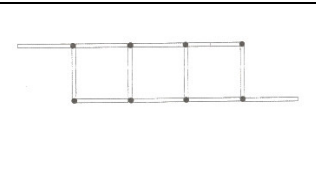
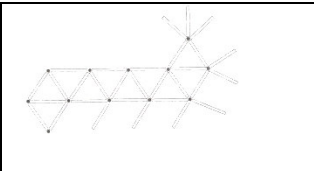
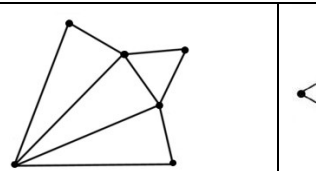
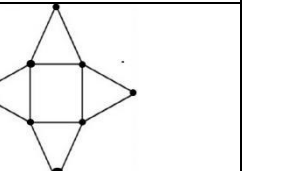
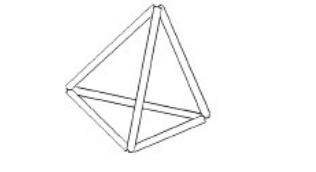
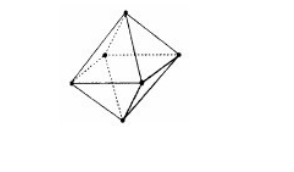
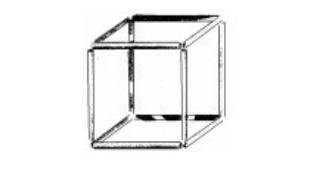

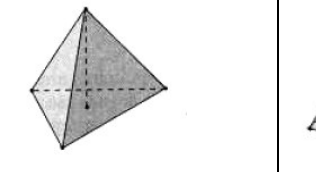
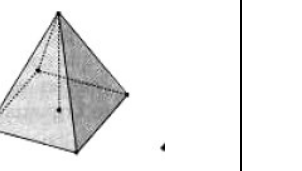
1) Quantas faces (lados) tem o sólido?

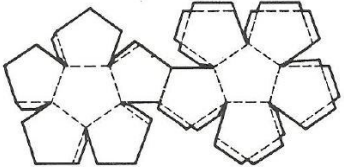
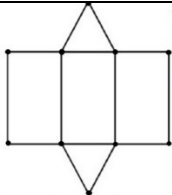
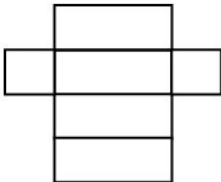

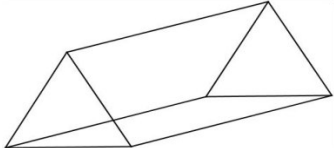
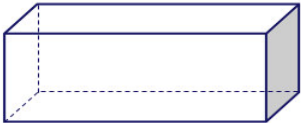
2) Quais são as figuras planas que formam esse sólido?

3) Organize os lados conforme o tamanho de suas medidas. Quantas figuras planas de mesma medida podem encontradas na embalagem?

4) Observando as características que essas figuras planas possuem em comum. Como elas poderiam ser chamadas?

APÊNDICE F - Modelo do caderno de atividade utilizado pelos grupos referente ao terceiro episódio

ANALISANDO POLIEDROS						
PLANIFICAÇÃO						
DESENHO DO POLIEDRO						
NOME						
Nº DE VÉRTICES						
Nº DE ARESTAS						
Nº DE FACES						
QUAL A FORMA DAS FACES?						
TODAS AS FACES SÃO IGUAIS?						
RELAÇÃO DE EULER						

PLANIFICAÇÃO			
DESENHO DO POLIEDRO			
NOME			
Nº DE VÉRTICES			
Nº DE ARESTAS			
Nº DE FACES			
FORMA DAS FACES			
TODAS AS FACES SÃO IGUAIS?			
RELAÇÃO DE EULER			

APÊNDICE G – Modelo do caderno de atividade utilizado pelos grupos referente ao quinto episódio

Primeiro Momento

Questões da atividade um cão chamado Bob

Quantos passos o Bob deve dar para recolher o sapato?

Quantos passos o Bob deve dar para recolher a bola?

Quantos passos o Bob deve dar para recolher osso?

Quantos passos o Bob deve dar para recolher o jornal?

Quantos passos o Bob deve dar para recolher o brinquedo?

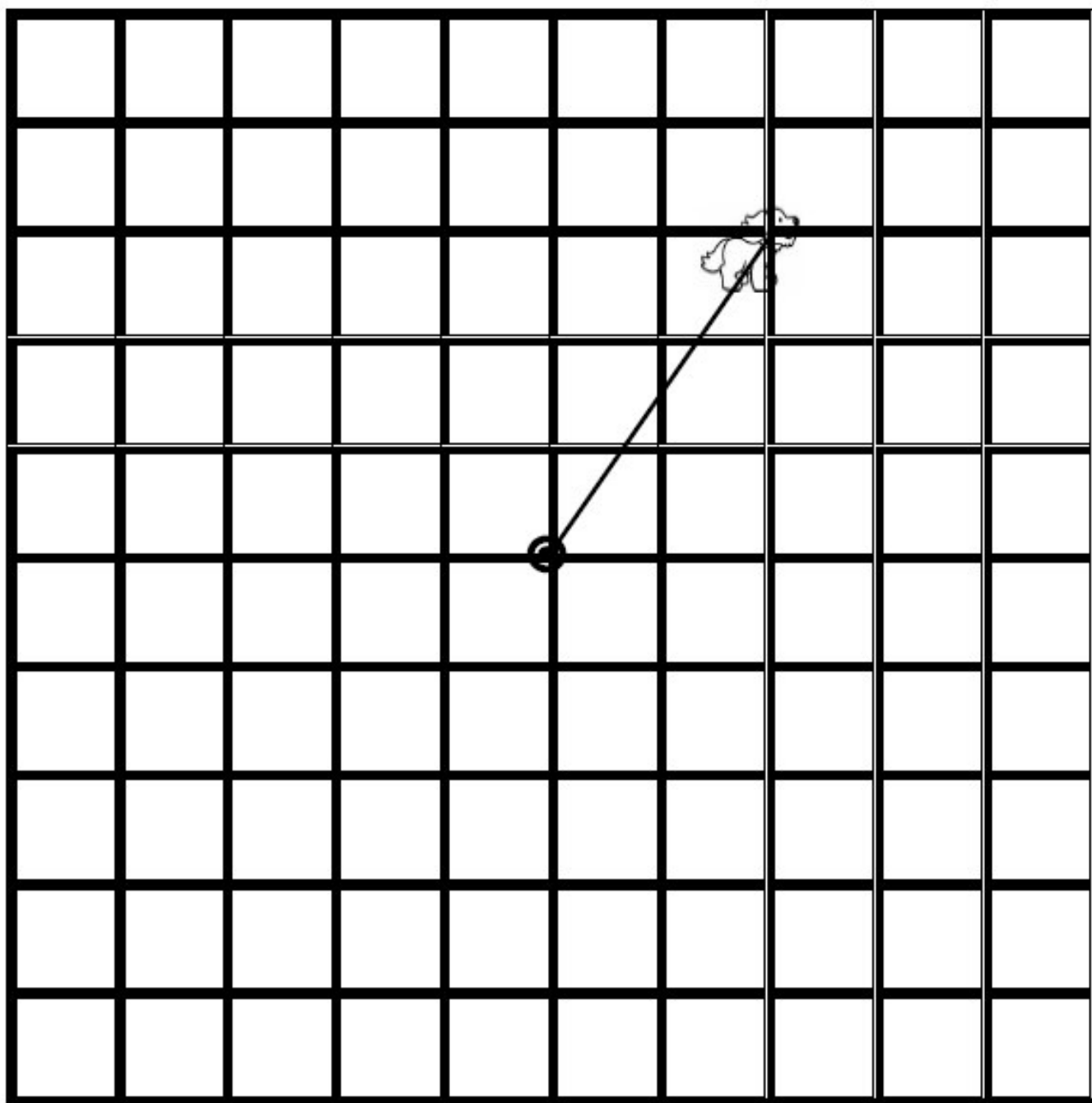
Qual o objeto que está mais longo do Bob? E o mais perto

Quais pares de objetos estão numa mesma distância do Bob?

Que distância é essa?

Observe a distância entre o Bob e o jornal. Agora desenhe um objeto que esteja em outro lugar diferente daquele do jornal, mas com uma mesma distância.

Segundo Momento

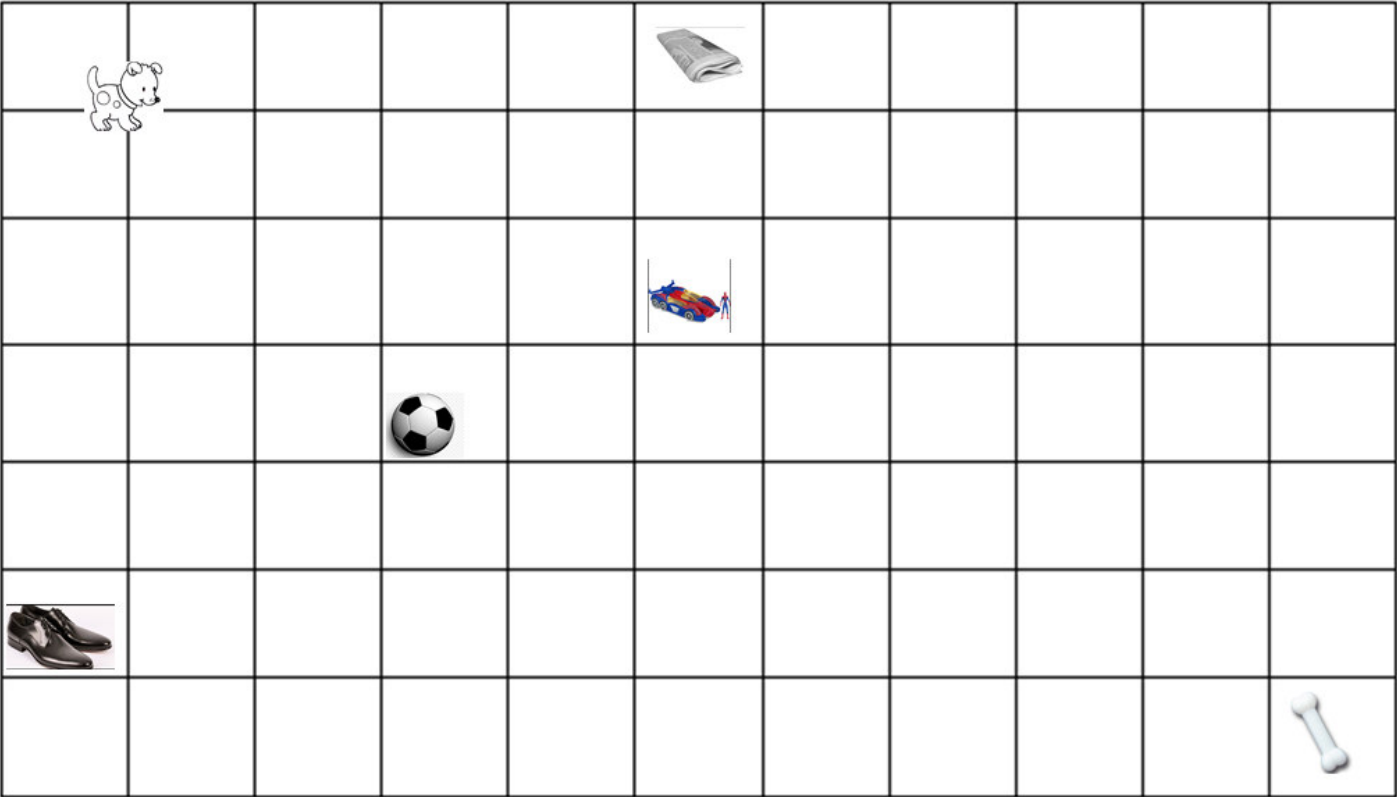


Após ter ajudado o Bob percorrer e alcançar alguns objetos responda essas duas questões abaixo:

1) Levando em consideração o ponto onde se encontra fixa a corrente do Bob. Quais objetos Bob consegue alcançar? _____

2) Fazendo uma ligação entre todos os objetos que Bob alcançou. Qual figura obtém? _____ Ficou algum objeto que o cão não alcançou? _____. Quais? _____. Quais objetos Bob teve facilidade para recolher? _____.

Terceiro Momento



APÊNDICE H – Modelo do caderno de atividade utilizado pelos grupos referente ao sexto episódio.

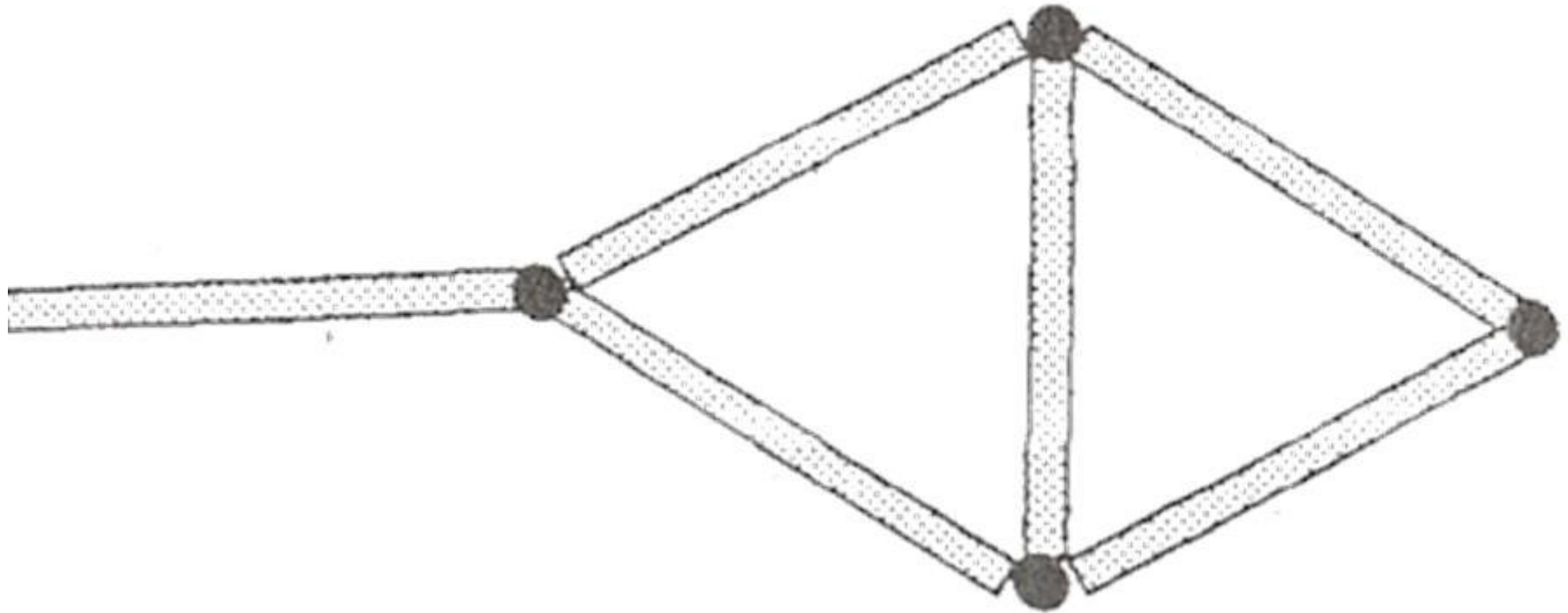
Folha de Registro

Equipe: _____

PARES DE FIGURAS	ELEMENTOS EM COMUM	DIFERENÇAS
2 e 12		
3 e 3		
6 e 6		
7 e 7		
10 e 10		
11 e 11		
12 e 12		

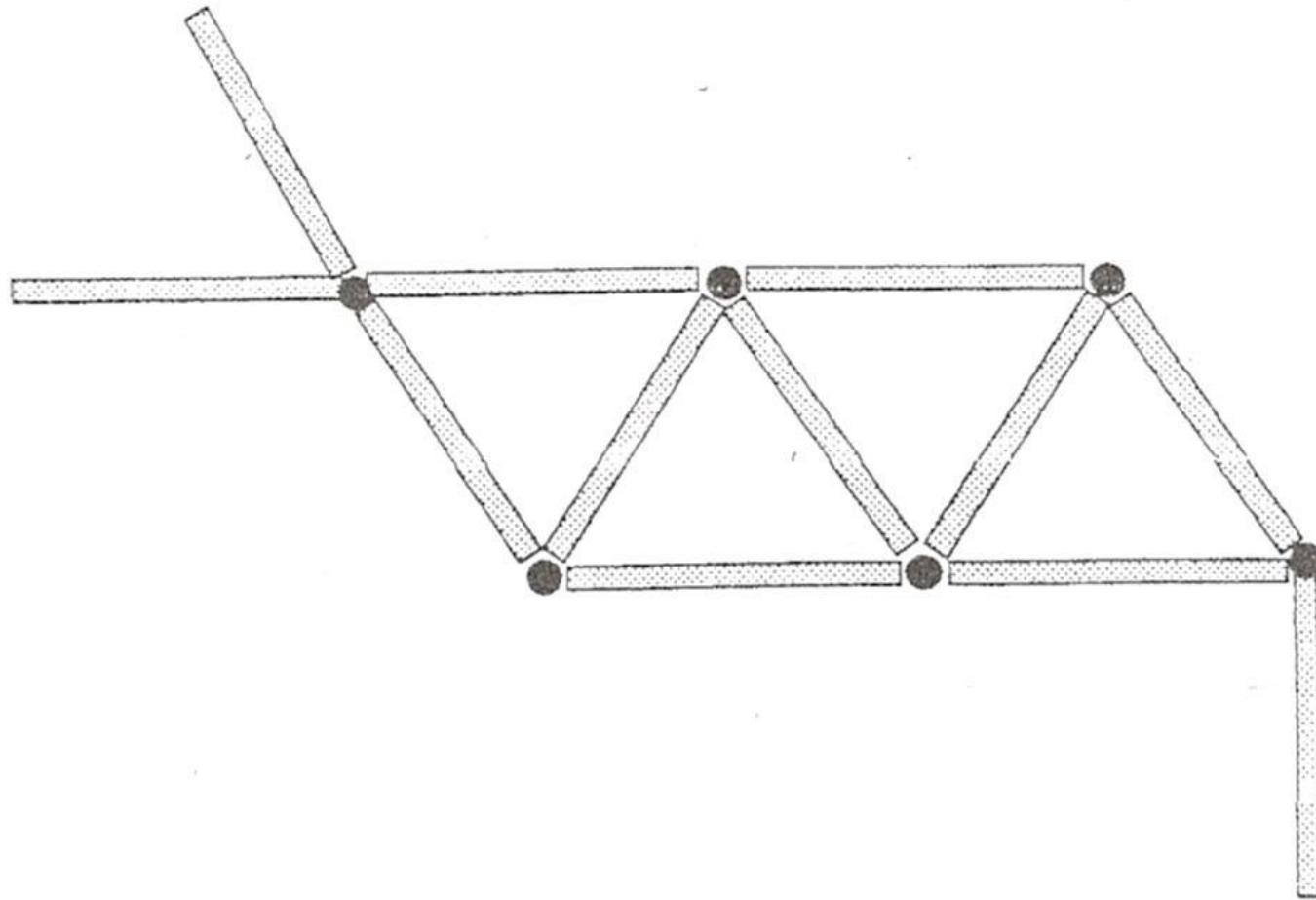
APÊNDICE I – Planificações de poliedros entregues às equipes no dia do terceiro episódio

PALITOS DE CHURRASCO



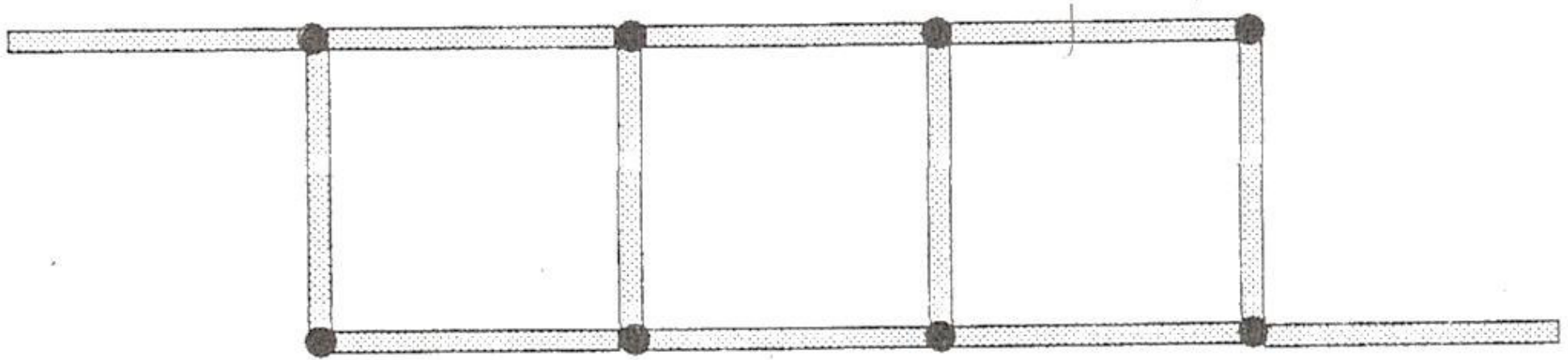
06 palitos e 04 junções de três pontas.

PALITOS DE CHURRASCO



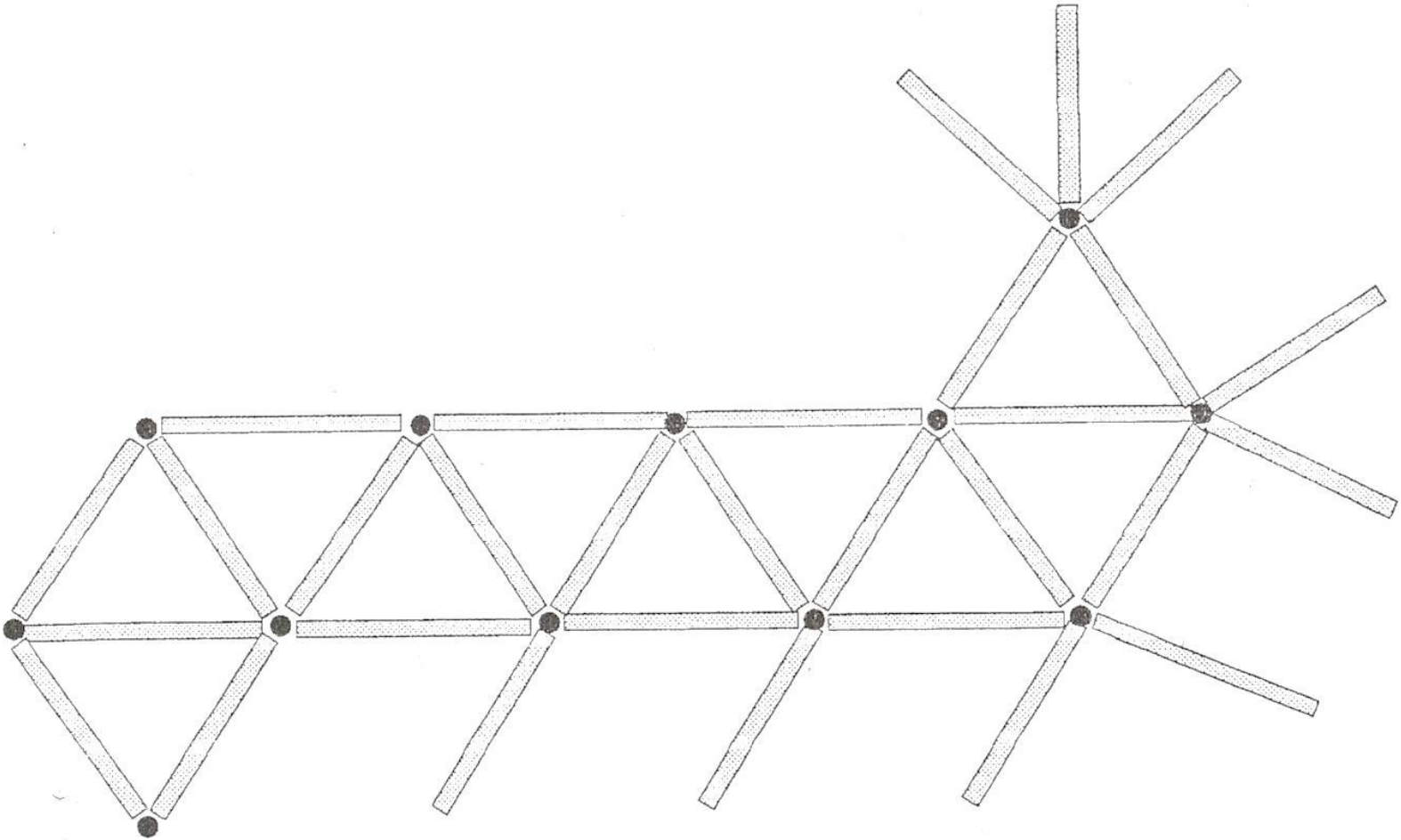
12 palitos e 06 junções de 04 pontas

PALITOS DE CHURRASCO



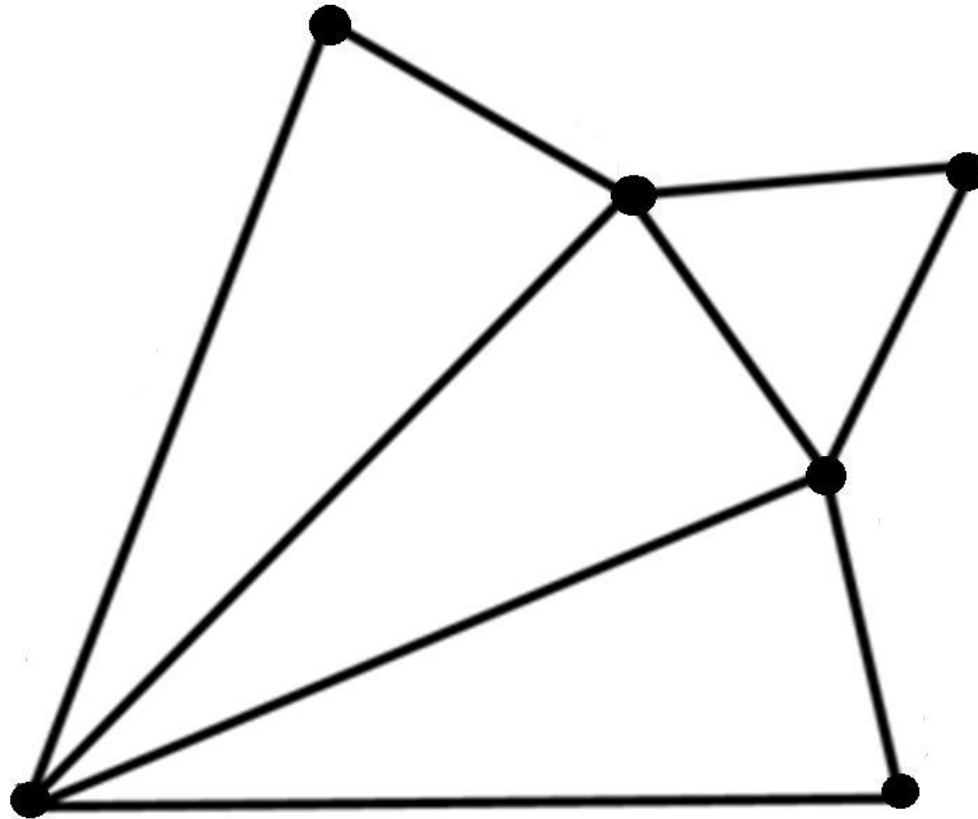
12 palitos e 08 junções de três pontas.

PALITOS DE CHURRASCO



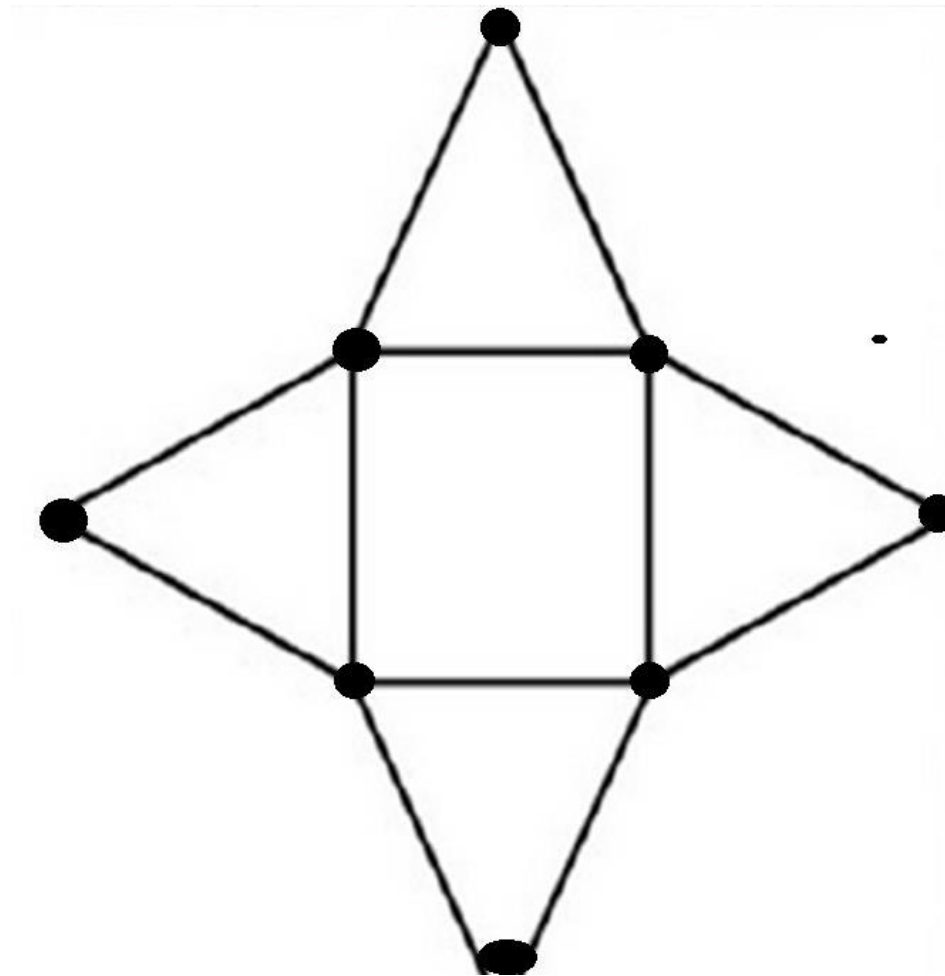
30 palitos e 12 junções de cinco pontas

PALITOS DE CHURRASCO



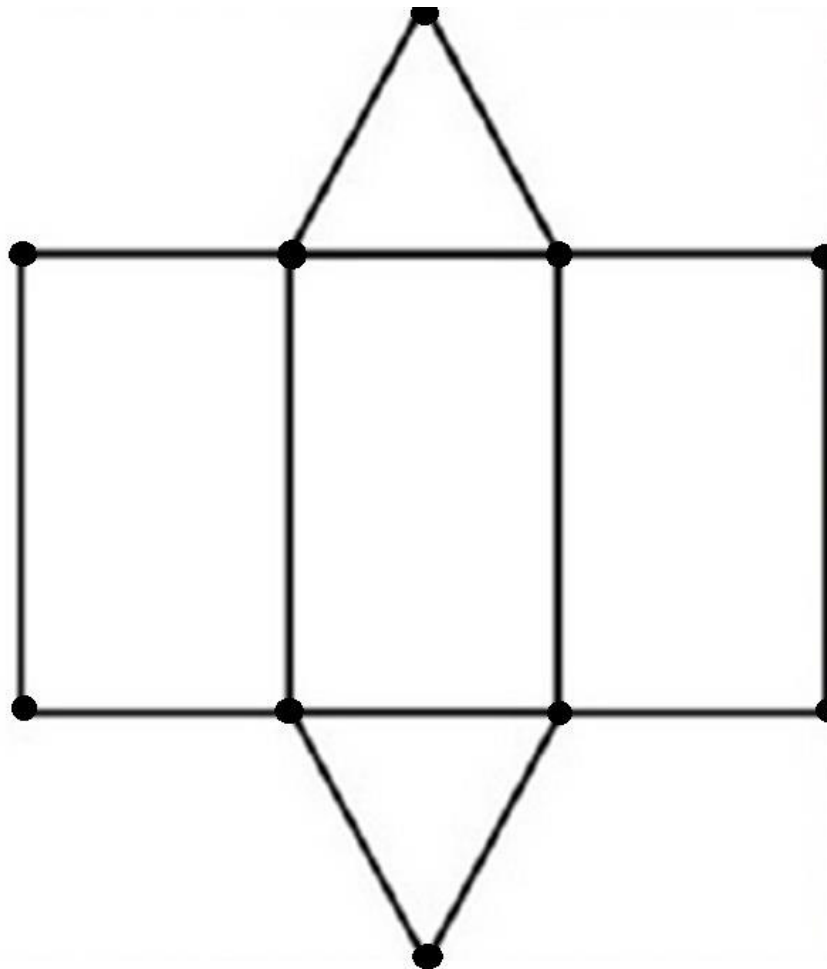
03 Palitos grandes, 03 palitos pequenos e 04 Junções.

PALITOS DE CHURRASCO



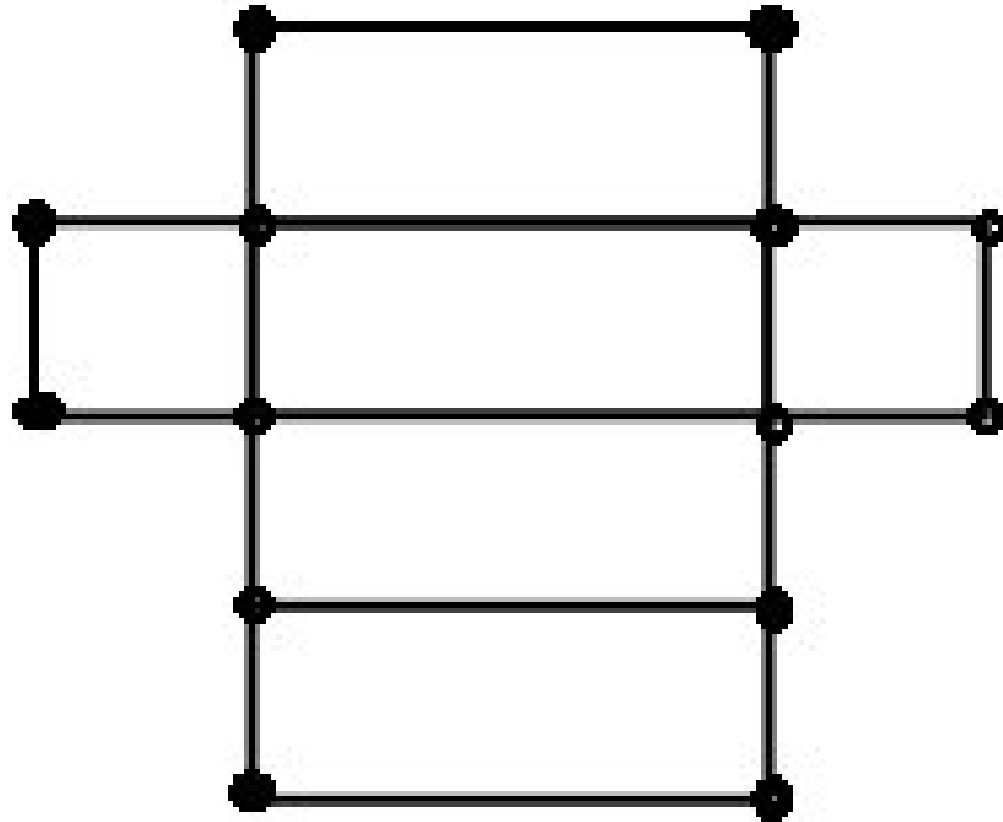
8 palitos e 08 junções

PALITOS DE CHURRASCO



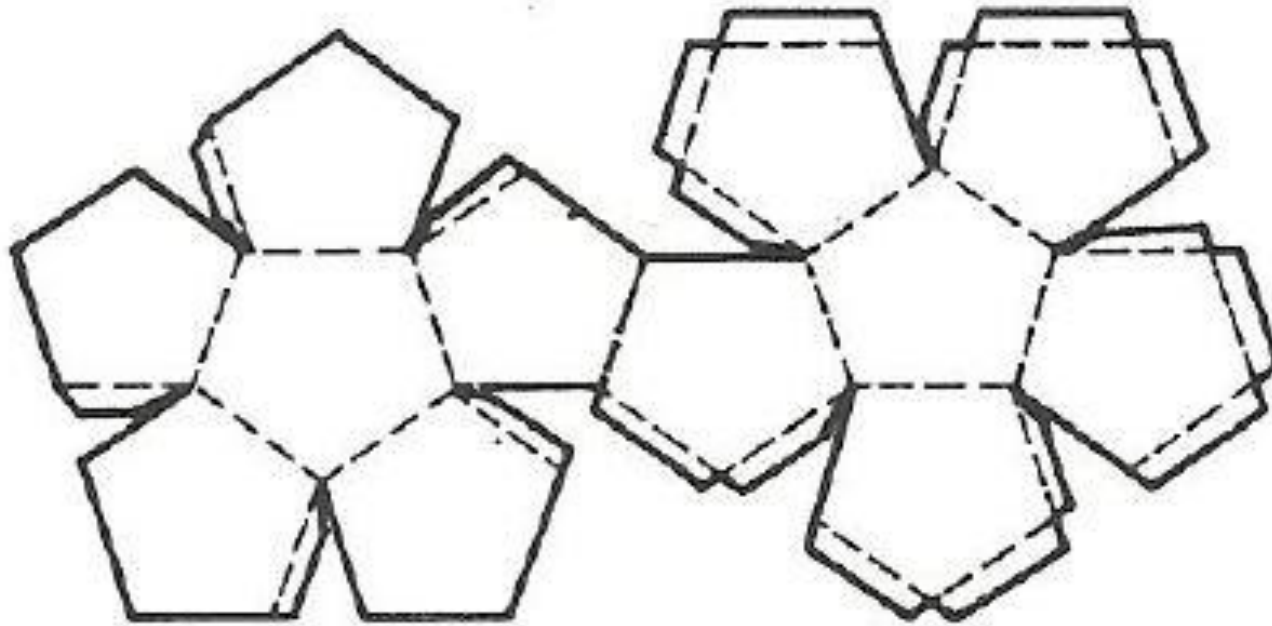
03 palitos grandes, 06 palitos pequenos e 10 junções.

PALITOS DE CHURRASCO



08 palitos pequenos, 09 palitos grandes e 08 junções.

CARTOLINA



ANEXO A – Imagem de Esher apresentada aos alunos no último episódio

