



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

JEFFERSON DAGMAR PESSOA BRANDÃO

ENSINO APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO ATRAVÉS DA
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E REPRESENTAÇÕES
MÚLTIPLAS

CAMPINA GRANDE – PB

2014

JEFFERSON DAGMAR PESSOA BRANDÃO

**ENSINO APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO ATRAVÉS DA
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E REPRESENTAÇÕES
MÚLTIPLAS**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração em Educação Matemática, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

Campina Grande – PB

2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

B817e Brandão, Jefferson Dagmar Pessoa.
Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas [manuscrito] / Jefferson Dagmar Pessoa Brandão. - 2014.
210 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa".

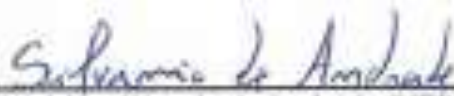
1. Resolução de problemas. 2. Função matemática. 3. Representações múltiplas. 4. Sala de aula. 5. Educação Matemática. I. Título. 21. ed. CDD 372.7

JEFFERSON DAGMAR PESSOA BRANDÃO

**ENSINO APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO ATRAVÉS DA
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E REPRESENTAÇÕES
MÚLTIPLAS**

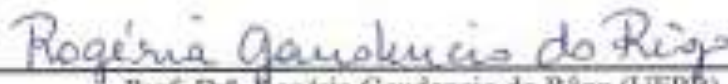
Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração em Educação Matemática, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovado em 29 de setembro de 2014



Prof. Dr. Silvanio de Andrade (UEPB)

Orientador



Prof. Dr. Rogéria Gaudencio do Rêgo (UEPB)



Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida (UEPB)

Dedico a meus pais, Ademar Pereira Brandão e Eliane Pessoa Brandão; a minha esposa, Alcilene Ataíde Alves; a meus filhos, Angelina Ataíde Alves Pessoa e Nicolas Ataíde Alves Pessoa e a minha irmã, Jéssica Magnany Pessoa Brandão.

AGRADECIMENTOS

Nesta página muito especial gostaria de agradecer a algumas pessoas dentre as muitas que me ajudaram a realizar o trabalho.

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, que iluminou o meu caminho durante esta caminhada; sem Ele nada conseguiria, a Ele devo tudo.

Agradeço a minha esposa, Alcilene que, de forma especial e carinhosa, me deu força e coragem, apoiando-me nos momentos de dificuldade. Quero agradecer também a meus filhos, Angelina e Nicolás que, embora não tivessem conhecimento do que isso representa ilumina de maneira especial os meus pensamentos. Não deixando de agradecer, de forma grandiosa a meus pais, Ademar e Eliane, pelo cuidado e dedicação que sempre me deram forças para seguir e cuja presença sempre me serviu de esteio, segurança e a certeza de que nunca estarei sozinho. Agradeço a minha irmã, Jéssica Magnany, pela torcida infalível em todas as conquistas; enfim, a minha família que, com muito carinho e apoio, não mediu esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida. Amo todos vocês!

À Universidade Estadual da Paraíba, por ter oportunizado o horizonte que alcanço hoje.

Agradeço especialmente ao professor Dr. Silvanio de Andrade, por ter aceitado meu projeto de pesquisa por inteiro, ajudando-me a buscar, nas leituras e em todo o contexto da pesquisa, aquilo de que eu precisava para desenvolver meu trabalho. Obrigado por me incentivar sempre e me ter direcionado através das orientações inteligentes, pacientes e sinceras.

Aos professores da Banca, Dr^a. Rogéria Gaudêncio do Rêgo e Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, pela aceitação do convite e pelas ótimas contribuições que deram na qualificação, as quais ajudaram na conclusão do trabalho.

Aos professores do Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática da UEPB, principalmente aos Dr. Silvanio de Andrade, Dr. Rômulo Marinho do Rêgo, Dr^a. Kátia de Medeiros e Dr^a. Filomena Moita.

À professora Dr^a. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque, pelas contribuições na elaboração do projeto e durante a disciplina Ensino Aprendizagem de Função da Especialização em Educação Matemática da UEPB.

Aos colegas da turma 2012.1 do Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pelas partilhas valiosas em sala de aula, principalmente aos da área de concentração em Educação Matemática – Erick, Janaina, Marconi, Andréa, Alex, Gilmara, Isaias e Doriedson.

Aos colegas do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-modernidade (GEPEP), os primeiros a ouvir nossa proposta de pesquisa.

Aos gestores da Escola Estadual em que a pesquisa foi realizada, pelo espaço cedido e, em particular, ao professor titular da turma que a disponibilizou, o que possibilitou o estudo.

A todos os alunos do 1º Ano do Ensino Médio, turma 2013, que me auxiliaram a obter as informações para esta pesquisa.

Ao Departamento de Agroecologia e Agropecuária do Campus 2 da UEPB, por todo o apoio quando do meu afastamento do trabalho para me dedicar à pesquisa.

Meus agradecimentos a todos os meus amigos que sempre no incentivo fizeram parte da minha formação e que vão continuar fazendo parte de minha vida.

A todos que fazem parte da Comunidade São Maximiliano Kolbe – Sítio Araticum, por estarem sempre rezando por mim.

A todas as pessoas não mencionadas porém não esquecidas que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação acadêmica.

“Não nasci marcado para ser professor assim (como sou). Tornei-me, desta forma, no corpo das tramas, na reflexão sobre a ação, na observação atenta a outras práticas, na leitura persistente e crítica. Ninguém nasce feito. Vamo-nos fazendo aos poucos, na prática social de que nos tornamos parte” (Paulo Freire).

BRANDÃO, Jefferson Dagmar Pessoa. **Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática). Campina Grande: UEPB, 2014.

RESUMO

O presente trabalho analisa as dificuldades e possibilidades da metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, aliada ao trabalho com as representações múltiplas, visando à formação do conceito de função em sala de aula. Toma-se com base as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função propostas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), a saber: o conceito de função; covariação e taxa de variação; família de funções; combinação e transformação de funções e representações de funções. Faz-se, também, uma revisão bibliográfica de algumas pesquisas nacionais que abordaram, como tema, o conceito de função, cujo olhar se voltou para aquelas que possuem correlação com a nossa pesquisa a fim de compreender o que essas investigações tratam sobre o tema função, conseqüentemente, fazendo um aprofundamento. Optou-se pelo trabalho em sala de aula por utilizar a resolução, proposição e exploração de problemas, razão por que dedicamos algumas páginas para discutir seus aspectos. A metodologia de pesquisa é de cunho qualitativo na modalidade de pesquisa pedagógica na qual o professor pesquisa sua própria prática em sala de aula. A pesquisa foi aplicada em uma escola Pública da cidade de Lagoa Seca, PB, com uma turma de primeiro ano do Ensino Médio. Dentre os resultados detectados, o trabalho com as diferentes representações de funções fez com que os alunos conseguissem ver mais detalhes do conceito de função permitindo uma compreensão mais consistente; observou-se que o uso da metodologia de resolução de problemas permitiu que os alunos se envolvessem com as atividades e se sentissem mais motivados a estudar o conteúdo.

PALAVRAS CHAVE: Resolução de problemas. Função. Representações múltiplas. Sala de aula. Educação Matemática.

BRANDÃO, Jefferson Dagmar Pessoa. **Function teaching and learning through problem solving and multiple representations.** Thesis (MA in Teaching Science and Mathematics Education). Campina Grande: UEPB, 2014.

ABSTRACT

This paper analyzes the difficulties and possibilities of mathematics teaching and learning through problem solving, coupled with multiple representations, viewing the formation of the function concept in the classroom. It becomes the basis of the five big essential ideas for the development of the concept of function proposed by Cooney, Beckmann and Lloyd (2010), namely, the concept of function, covariation and rate of change, family of functions, combination and transformation of functions and representations of functions. Also becomes a literature review of some Brazilian research that addressed the concept of function, whose gaze turned to those who have correlation with our research in order to understand what these investigations deal on it. We opted for the work in the classroom by using the problem solving, posing and exploration, which is why we devote a few pages to discuss it. The research methodology is a qualitative approach in the form of teacher research in which the teacher researcher tries to look his own practice in the classroom. The survey was conducted in a public school in the Lagoa Seca city, Paraíba State, Brazil, with a high school first year classroom. Among the detected working with function different representations was realized that the students were able to see more details of the concept of function allowing a more consistent understanding this, it was also observed that the use of problem solving, posing and exploration methodology allowed the students to get involved with the classroom activities and feel more motivated to study the contents.

KEYWORDS: Problem Solving. Function. Multiple Representations. Classroom. Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representações múltiplas de funções, segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) _____	40
Figura 2: Preenchimento da tabela do grupo 6 referente à atividade 1 _____	60
Figura 3: Representação tabular do grupo 1 referente à atividade 2. _____	67
Figura 4: Representação tabular do grupo 8 referente à atividade 2. _____	67
Figura 5: Disposição das variáveis na tabela feita pelo grupo 1 referente à atividade 2.	68
Figura 6: Resposta do grupo 1 ao item (a) da atividade 2. _____	69
Figura 7: Resposta do grupo 1 ao item (a) referente à atividade 2. _____	69
Figura 8: Resposta do grupo 6 ao item (a) referente à atividade 2. _____	70
Figura 9: Resposta do grupo 4 ao item (a) da atividade 4. _____	79
Figura 10: Resposta do grupo 4 para o item (b) da atividade 4. _____	79
Figura 11: Resposta do grupo 6 para o item(b) da atividade 4. _____	80
Figura 12: Resposta do grupo 6 para o item (c) da atividade 4. _____	81
Figura 13: Tabela preenchida pelo grupo referente à atividade 5. _____	85
Figura 14: Tabela preenchida pelo grupo 2 referente à atividade 5. _____	85
Figura 15: Recorte da resolução do item (c) do grupo 5, referente à atividade 5. ____	86
Figura 16: Representação pictórica do grupo 1 referente ao item (a) da atividade 6. _	90
Figura 17: Representação pictórica do grupo 10 referente ao item (a) da atividade 6. _	90
Figura 18: Representação pictórica do grupo 3 referente ao item (a) da atividade 6. _	91
Figura 19: Recorte da resolução do item (b) do grupo 6 referente à atividade 6. ____	91
Figura 20: Recorte da resolução do item (a) do grupo 9 referente à atividade 10.____	103
Figura 21: Recorte da resolução dos itens (b) e (c) do grupo 1, referente à atividade 10. _____	104
Figura 22: Representação tabular do grupo 6 referente ao item (f) da atividade 14. _	117
Figura 23: Representação tabular do grupo 7 referente ao item (f) da atividade 14. _	118
Figura 24: Recorte da resolução do grupo 3 referente à atividade 18. _____	130
Figura 25: Proposição de problema feita pelo aluno 1. _____	132
Figura 26: Proposição de problema feita pelo aluno 2. _____	133
Figura 27: Proposição de problema feita pelo aluno 3. _____	133
Figura 28: Proposição de problema feita pelo aluno 4. _____	134

Figura 29: Proposição de problema feita pelo aluno 5. _____	135
Figura 30: Proposição de problema feita pelo aluno 6. _____	136
Figura 31: Recorte da resolução do grupo 3 referente à atividade 19. _____	141
Figura 32: Recorte da resolução dos itens (d) e (e) do grupo 7 referente à atividade 20. _____	152
Figura 33: Recorte da resolução dos itens (a) do grupo 3 referente à atividade 26.____	158
Figura 34: Recorte da resolução dos itens (c) do grupo 2 referente à atividade 27.____	163
Figura 35: Recorte da resolução dos itens (c) do grupo 3 referente à atividade 27.____	164
Figura 36: Recorte da resolução dos itens (c) do grupo 2 referente à atividade 27. _____	164

SUMÁRIO

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE O PRESENTE ESTUDO	12
2. MAPEAMENTO DE ALGUMAS PESQUISAS QUE TRATAM DO ENSINO APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO NO BRASIL	16
3. AS IDEIAS ESSENCIAIS DE FUNÇÃO E A RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS	29
3.1 Ideias Essenciais do Conceito de Função.....	29
3.2 Resolução, proposição e exploração de problemas	42
4. DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS DADOS	54
4.1 Conhecendo o ambiente da pesquisa	55
4.2 Primeira seção: uma introdução do conceito de função	56
4.3 Segunda seção: representação gráfica de função.....	113
4.4 Terceira seção: formalização de função.....	154
4.5 Seção extra: trabalho com função afim.....	161
CONSIDERAÇÕES FINAIS	179
REFERÊNCIAS	185
ANEXOS.....	190

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE O PRESENTE ESTUDO

O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática e apresenta grande aplicabilidade; desta forma, sua compreensão e formação pelo aluno são, portanto, fundamentais. Além disto em termos curriculares o conteúdo funções é pré-requisito para o estudo de vários outros conteúdos do Ensino Médio, por exemplo, os conteúdos da Geometria, sem contar que em praticamente toda a vida estudantil o aluno tem contato, seja de forma intuitiva ou formal, com o conteúdo de função.

De modo geral, o contato do aluno com esse conceito se dá por uma sequência que consiste, inicialmente, da apresentação da definição formal seguida de exercícios resolvidos e exercícios propostos considerando-se primordialmente, a forma algébrica, apesar de existirem outras formas de representá-la, como tabelas, gráficos e outros. A partir de nossa experiência em sala de aula este tipo de abordagem não gera, no aluno, a devida compreensão e o mesmo chega ao final do Ensino Médio sem saber o que é uma função.

Observamos que os alunos encontram grandes dificuldades em compreender este conceito, o que nos motiva ainda mais a realizar tal pesquisa.

Trabalhamos com a hipótese de que, para o ensino aprendizagem de função ocorra de forma compreensiva pelo aluno, o ensino aprendizagem deve, inicialmente, partir de uma forma mais intuitiva considerando as ideias essenciais para este conteúdo e fazer com que o aluno perceba as várias maneiras através das quais representamos uma função.

Quanto às representações múltiplas, acreditamos que quando expressamos uma função por meio de uma tabela, de um gráfico, de uma regra verbal ou de uma expressão algébrica fazendo com que essas representações se associem entre si, geramos uma compreensão mais abrangente do conceito.

Para realizarmos este estudo nos apoiamos nas grandes ideias essenciais para a aquisição do conceito de função, destacadas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), que apresentam cinco grandes focos, que são: o conceito de função; covariação e taxa de variação; família de funções; combinação e transformação de funções e representações de funções

Ao final do trabalho pretendemos responder à seguinte questão: quais as possíveis dificuldades e possibilidades da metodologia de resolução de problemas, aliada ao trabalho com as representações múltiplas para a formação do conceito de função, em sala de aula?

Consequentemente, nosso objetivo foi identificar as dificuldades e possibilidades da utilização da metodologia de resolução de problemas e do uso das representações múltiplas, durante a formação do conceito de função.

A metodologia utilizada foi de cunho qualitativo cuja modalidade é a pesquisa pedagógica, em que o pesquisador pesquisa sua própria sala de aula. A metodologia escolhida para a aplicação das atividades em sala de aula foi a de resolução, proposição e exploração de problemas, desenvolvida com a aplicação de uma sequência de atividades em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, localizada na cidade de Lagoa Seca, interior da Paraíba.

Segundo Richardson (2012, p.79-80) na pesquisa qualitativa existe “a busca por uma compreensão detalhada dos significados e características situacionais dos fenômenos”. Procura investigar os aspectos subjetivos dos fenômenos, não tem a preocupação com dados estatísticos e o ambiente natural é a fonte direta de coleta de dados.

A modalidade de pesquisa pedagógica envolve profissionais; no nosso caso, professor pesquisando sua própria sala de aula. Conforme Lankshear e Knobel, (2008, p. 13-14), há dois aspectos que são consenso em relação à pesquisa pedagógica: “a pesquisa pedagógica está confinada à investigação direta ou imediata das salas de aula e o principal pesquisador em qualquer trabalho de pesquisa pedagógica é o professor cuja sala de aula está sob investigação”.

Os mesmos autores afirmam que a pesquisa pedagógica tem, como objetivo, fazer com que o professor melhore sua prática pedagógica e sua identidade de professor, de vez que vai investigar e fazer reflexões sobre sua própria prática, fazendo, desta forma, com que haja uma melhora nos aspectos que envolvem a sala de aula.

Na pesquisa pedagógica a investigação visa entender como as coisas acontecem. Para Lankshear e Knobel (2008, p. 19):

Um pesquisador sério não está meramente interessado em algo que funcione mas em entender como e por que funciona e/ou como precisa ser adaptado para funcionar em outras circunstâncias ou se aplicar a outros casos.

A pesquisa foi realizada em uma turma do 1º ano do Ensino Médio, no turno da tarde, em uma Escola Pública da rede Estadual da Paraíba, localizada na cidade de Lagoa Seca; trata-se de uma Escola de médio porte com aproximadamente 1500 alunos distribuídos em três turnos, onde funcionam as modalidades de Ensino Regular e EJA, ambos com Ensino Fundamental e Médio. É composta de 15 salas de aula, laboratório de informática, biblioteca, sala dos professores, secretaria, diretoria, cozinha, quadra esportiva não coberta, dois sanitários e o pátio.

A escolha da escola ocorreu pelo fato de ser uma escola pública que enfrenta dificuldades, como qualquer outra; por oferecer a série que pretendíamos pesquisar; por nela já termos lecionado e por residirmos no Município no qual a Escola está inserida.

A escola que fica localizada no centro da cidade é a única no Município que oferece o Ensino Médio, por esta razão atende a alunos que moram em diferentes locais da cidade, Zonas Urbana e Rural, e a alunos de diferentes classes sociais; enfim, trata-se de uma escola bastante heterogênea quanto aos aspectos sociais, culturais, econômicos e com relação aos conhecimentos prévios dos alunos.

Formulamos e aplicamos atividades com a finalidade de fazer com que os alunos compreendessem o conceito de função e, desta forma, melhorassem no entendimento das famílias de função. As atividades faziam uso das representações verbal, tabular, algébrica e gráfica, sempre tentando fazer as articulações entre elas.

O trabalho de sala foi realizado, na maioria das vezes, em grupos de três alunos. Optamos por grupos por acreditarmos que tal situação favorece a interação, formulação e comunicação de estratégias entre os alunos. A escolha dos grupos ficou por conta dos próprios alunos; só interferíamos nos lugares em que deveriam ficar. Esses grupos podiam ser os mesmos em todas as aulas mas os alunos poderiam mudar, caso desejassem. Cada participante do grupo recebia uma cópia da atividade, a qual deveria ser devolvida ao término da abordagem da referida atividade.

O professor-pesquisador assumiu o papel de mediador do processo, sempre colocando o aluno como agente ativo, protagonista da aula.

A intervenção foi desenvolvida no período de 08 de maio de 2013 a 29 de agosto de 2013; Destaca-se que esta pesquisa foi desenvolvida em 23 encontros, geralmente de duas aulas de 40 minutos cada uma, com exceção de um encontro em que houve três aulas, e do último, que foi apenas em uma aula. A turma nos foi cedida pelo titular da disciplina de Matemática da escola e a assumimos desde o início do ano letivo. As aulas da turma ocorriam nas quartas e quintas-feiras - nas quartas-feiras 2ª e 3ª aulas,

iniciando-se às 13h40min e com término às 15h00min enquanto nas quintas-feiras 5ª e 6ª aula, iniciando-se às 16h00min e terminando às 17h10min.

A turma era composta de 28 alunos, sendo 16 meninas e 12 meninos, do 1º Ano do Ensino Médio do turno da tarde, com idade variando entre 14 e 18 anos, alunos esses que não trabalham, apenas estudam.

Os dados foram coletados em nossas aulas, através de notas de aulas, análises das descrições das aulas e produção dos alunos. Tentamos, sempre que possível, trazer as falas dos alunos para as nossas descrições porém temos certeza de que muitas falas foram perdidas devido à impossibilidade de estarmos em todos os grupos ao mesmo tempo.

Não fizemos uso de filmagem nem gravação, porque acreditamos que as ações dos alunos poderiam perder sua naturalidade.

O texto do trabalho está organizado em três Capítulos:

No Capítulo 1 apresentamos uma revisão da literatura de algumas pesquisas brasileiras que trataram do tema função e concentramos nosso olhar para seus objetivos, metodologias utilizadas e resultados encontrados.

Desenvolvemos, no Capítulo 2, um estudo referente às grandes ideias consideradas essenciais para a compreensão do conceito de função, segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) e os aspectos da resolução, proposição e exploração de problemas como metodologia de sala de aula.

No Capítulo 3 apresentamos o texto relativo à nossa intervenção em sala de sala, na qual são feitas as descrições de cada encontro e suas análises, feitas com base nas discussões dos Capítulos 1 e 2.

Para finalizar também explicitamos o alcance de nossa pesquisa em relação ao que propomos, trazendo os principais resultados alcançados e que foram observados durante a aplicação de nossa intervenção.

2. MAPEAMENTO DE ALGUMAS PESQUISAS QUE TRATAM DO ENSINO APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO NO BRASIL

Acreditamos que um dos passos importantes para o desenvolvimento de uma pesquisa é examinar o que outros autores já produziram a respeito do tema. Neste capítulo temos, como propósito, identificar o que as pesquisas e os pesquisadores têm tratado sobre o processo de ensino aprendizagem de função e, ainda, analisar até que ponto tais estudos podem ser usados para esclarecer, modificar, ampliar e aprofundar nossa visão a respeito do conceito, tal como servirá para mediar nossa análise.

Constatamos, através da nossa busca por trabalhos que têm, como tema, o conceito de função, que são inúmeras as pesquisas que tratam desta temática, todas com sua devida pertinência e relevância.

Nesta direção destacamos a pesquisa de mestrado concluída em 2008, na Pontifícia Universidade Católica (PUC) de São Paulo, do autor Marcos José Ardenghi, a qual tem, como título, “Ensino aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil”. Nela foi realizada uma pesquisa do tipo estado da arte para compreender dificuldades de alunos sobre o conceito de função. O autor mapeou 46 pesquisas desenvolvidas no Brasil – Teses e Dissertações – no período que vai de 1970 a 2005.

Pela leitura da dissertação percebemos grande crescimento de trabalhos que envolvem a temática função; percebemos, também, muita pertinência no estudo de Ardenghi (2008). Devido à abrangência do seu trabalho acreditamos que não seja necessário em nossa pesquisa, fazer uma revisão de literatura detalhada, haja vista que o tema função se encontra bem mapeado no trabalho de Ardenghi (2008). Limitamo-nos, portanto, a trazer cinco pesquisas de mestrado e doutorado, em virtude de acreditarmos que elas tenham uma relação maior e semelhança com a nossa pesquisa, metodologicamente falando.

Para tanto, selecionamos pesquisas que tratem do conceito de função e, sobretudo, que tenham preocupações com ensino aprendizagem e que foram desenvolvidas no cotidiano da sala de aula. Nesses estudos observamos os objetivos, os

aspectos metodológicos, quais fundamentações teóricas foram usadas, algumas conclusões apresentadas e aspectos, que possam ajudar a desenvolver nossa pesquisa.

O primeiro trabalho aqui destacado é da autora Nanci de Oliveira e tem, como título, “Conceito de função: uma abordagem do processo de ensino-aprendizagem”. O texto constitui a versão final de uma dissertação concluída em 1997, na Pontifícia Universidade Católica (PUC) de São Paulo.

A dissertação de Oliveira (1997) objetivou construir situações problemas que fizessem com que os alunos avançassem em sua compreensão sobre o conceito de função. Apoiou sua pesquisa na didática que tem influência dos pesquisadores franceses e em algumas teorias da Psicologia Cognitiva. Da didática francesa ela usou a noção de obstáculo e contrato didático, de Guy Brousseau (1983, 1986, 1988); a transposição didática de Yves Chevallard (1982, 1991) e ainda o jogo de quadros e dialética ferramenta, objeto de Régine Douady (1993). Da Psicologia Cognitiva apoiou-se na teoria construtivista de Piaget e na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990).

Em referência à metodologia utilizada, a autora fez um estudo da história, epistemologia, da transposição didática do conceito de função e ainda elaborou, aplicou e analisou uma série de atividades com alunos do curso de engenharia. A característica da pesquisa é experimental, ocorreram algumas realizações didáticas em sala de aula a fim de fazer com que os alunos evoluíssem em suas concepções sobre o conceito de função.

Foi feito um levantamento das concepções dos professores sobre o conceito e constatado que prevalece o entendimento para a qual as ideias de funções são voltadas mais para a concepção dos algebristas; também foram encontrados alguns professores relatando a importância de definir função por meio da dependência ou correspondência entre grandezas ou variáveis.

Ainda com relação às concepções dos professores encontramos em Oliveira (1997), a partir de sua pesquisa feita com professores, a afirmação de serem a definição e a representação gráfica de uma função os mais difíceis de ensinar para os alunos.

De acordo com os depoimentos dos professores, as maiores dificuldades encontradas pelos alunos para a compreensão do conceito de função, são: a transposição do problema para a expressão; transferi-las para a realidade; o domínio da função; análise de gráficos; representação gráfica; associarem grandeza variável; a abstração, com rigores matemáticos dos conceitos; a simbologia; a lei de correspondência; a definição abstrata e as diversas representações de função.

Identifica que os alunos costumam fazer confusão entre variável dependente e independente; confundem função com equação; incluem a noção de continuidade a este conceito; não compreendem função dada por mais de uma expressão algébrica; fazem confusão entre função constante e contínua; entendem que a existência de uma expressão algébrica ou gráfica é suficiente para afirmar que estas representam uma função.

Durante a aplicação da atividade prévia com os alunos sujeitos da pesquisa que tinham como objetivo identificar quais eram as concepções e dificuldades dos alunos com o conceito de função, constatou-se que a representação mais lembrada pelos alunos foi a de função por meio de fórmula, seguida de gráficos. Oliveira (1997) conclui que isto ocorre em virtude dos professores trabalharem mais o registro de representação algébrica, seguindo de registro gráfico.

Oliveira (1997) ainda sugere que, para minimizar as dificuldades dos alunos, seja trabalhada na apresentação do conceito, a passagem da linguagem escrita para tabelas e gráficos e vice-versa; que sejam propostas situações problemas nas quais haja a necessidade de distinguir domínio de contradomínio; propor gráficos e tabelas que representem função; propor a mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa.

Para a autora, a sequência fez com que os alunos avançassem em suas concepções sobre o conceito em estudo, pois ficou patente que os alunos conseguiram relacionar aspectos de variação de uma função, correspondência e dependência entre variáveis; para ela, os alunos perceberam que algumas funções correspondem a situações da realidade e que podemos utilizar várias representações.

O próximo trabalho destacado é do autor Edelweiss Benez Brandão Pelho e tem, como título, “Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis”. Compõe a versão final de uma dissertação de mestrado defendida no ano de 2003, na Pontifícia Universidade Católica (PUC) de São Paulo.

A dissertação de Pelho (2003) teve como meta introduzir o conceito de função por meio da compreensão das variáveis dependentes e independentes e da relação entre elas; ele usou como fundamentação teórica a teoria de registros de representação de Raymond Duval (1988).

A sua metodologia consistiu em fazer um breve estudo histórico do conceito de função, e das propostas governamentais para o ensino de função. O autor elaborou uma sequência didática que abordou aspectos funcionais entre variáveis; esta sequência

apresentava diferentes formas de representação do conceito de função, em separado, bem articuladas umas com as outras, aplicadas em uma turma do segundo ano do Ensino Médio, em uma escola particular.

A sequência didática foi trabalhada em sala de aula com o uso do software Cabri-Géomètre II. Para o autor, este software permite fazer com que os alunos percebam o gráfico de uma forma dinâmica, fazendo com que ocorra uma compreensão melhor das variáveis de uma função e da relação entre elas; no fim da pesquisa foi constatado, pelos comentários dos alunos, que o software os motivou e empolgou, fazendo com que o estudo de função se tornasse mais interessante.

Para o processo experimental e análise dos resultados foi utilizada a engenharia didática de Michèle Artigue (1988).

Pelho (2003), afirma que, apesar do cotidiano dos alunos estar repleto de situações que envolvem o conceito de função como situação de dependência esta é abandonada e, conseqüentemente, a compreensão do conceito de função se torna prejudicada por sua introdução através de definições diretas e formais.

O autor analisou quatro livros já bastante usados nas escolas públicas brasileiras e constatou que na maioria das obras analisadas, quando se definiu função, foi quase que totalmente eliminada a dependência funcional sendo as definições quase todas feitas por meio de relação entre dois conjuntos.

Conjectura que muitas das dificuldades encontradas pelos alunos na aquisição do conceito de função são devidas ao formalismo existente, o que se faz necessário emergir o caráter dinâmico do conceito e, para ele isto se torna possível através de uma abordagem que permita ao aluno compreender o conceito de variável, expressar a dependência de uma variável em relação à outra e identificar variável dependente e independente.

Quanto ao uso do software, afirma que o mesmo facilitou a introdução do conceito de função, possibilitou a compreensão das variáveis e do relacionamento entre elas e ainda permitiu a conversão entre os diferentes registros de representação de função.

Foi notório que os alunos têm dificuldade em usar a linguagem natural e preferem responder às questões com expressões algébricas ou relações numéricas.

O autor conclui que os alunos que participaram das seções de trabalho apresentaram um crescimento em seus desempenhos em relação à compreensão do conceito de função. Portanto, para Pelho (2003) a abordagem envolvendo a

compreensão das variáveis dependentes e independentes, suas relações e as devidas articulações entre os diferentes registros de representação de função utilizando um ambiente computacional, fazem o aluno compreender o conceito de função.

O terceiro trabalho que analisamos é da autora Renata Rossini que tem, como título, “Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxeologias”; trata-se de uma Tese de doutorado concluída em 2006, na Pontifícia Universidade Católica (PUC) de São Paulo.

A tese de Rossini (2006) apresenta, como objetivo, fazer uma investigação e reconstrução do conceito de função em um grupo de professores da Rede Pública Estadual de Ensino de São Paulo. Esta reconstrução se deu após o desenvolvimento coletivo – em uma formação continuada - e aplicação em turma de 8º série de uma sequência didática. A tese ainda tinha outro objetivo, que era contribuir para a formulação de diretrizes com vista à formação continuada do professor de Matemática.

Sua fundamentação teórica é apoiada na Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard (1999), a qual permite abordar a complexidade que envolve a prática profissional docente. Utilizou a tipologia de conhecimento de Shulman (1986) para analisar a aprendizagem dos professores.

A metodologia usada na pesquisa é a pesquisa-ação, pois a pesquisadora se introduz no ambiente a ser estudado não apenas como observadora mas também como participante, com o objetivo de melhorar as práticas docentes. Rossini constituiu um grupo com professores voluntários no qual foi preparada uma sequência de atividades; durante este processo a pesquisadora sempre esteve desempenhando papel ativo no grupo tendo acompanhado, também, a aplicação da sequência nas salas de aula.

A autora faz um estudo histórico do conceito de função e das sugestões dadas pelos documentos oficiais sobre seu ensino; faz uma análise de como função é anunciada nos livros didáticos brasileiros; ainda completa fazendo uma revisão de literatura das pesquisas que estudam somente alunos e apenas professores; por fim, faz um embasamento sobre a formação continuada de professores.

Rossini (2006) percebeu ao observar a aplicação das atividades que os alunos possuem resistência para uma transmissão do conceito de forma estrutural. Segundo ela, eles preferem uma abordagem operacional na qual a função é vista como processo para calcular um valor a partir de outro.

Rossini (2006) sugere que o conceito de função seja introduzido a partir da relação entre dois conjuntos; afirma que, para conceituar função, é preciso que os alunos

compreendam e identifiquem as variáveis. Segundo a autora, a não identificação das variáveis pode levar o aluno a uma atitude mecânica quando for construir o gráfico pois, ao não compreender as variáveis, o aluno fica limitado a colocar x na horizontal e y na vertical.

Afirma que o professor está totalmente desconectado das pesquisas atuais em Educação Matemática e que, inicialmente, as decisões tomadas pelos professores quanto ao que ensinar e como ensinar, eram baseadas nas próprias concepções de ensino de Matemática.

Diz que o enfoque dado à representação algébrica por um número grande de professores e pelos livros didáticos, pode ser a causa de os alunos se sentirem mais seguros no contexto algébrico e menos no gráfico.

Confirma a importância do uso de tabela e acrescenta que seria importante que o tema fosse discutido em um estudo detalhado tendo em vista que foram encontradas várias dificuldades na realização de sua pesquisa sobre leitura e interpretação deste recurso.

A formação continuada que ocorreu durante a pesquisa permitiu que os professores construíssem um saber docente sobre o conceito de função e conseqüentemente, permitiu que os professores reconstruíssem e ampliassem seus conhecimentos pedagógicos sobre o conteúdo permitindo a elaboração da seqüência didática para o ensino aprendizagem de função.

Construir e aplicar uma seqüência didática, segundo a autora, é um árduo desafio para os professores porém, ao final da experiência, os professores afirmaram que, ganharam segurança para tratar função em sala de aula e ficaram satisfeito em ter conseguido criar atividades. Desta forma, Rossini (2006) acredita ter contribuído para o desenvolvimento profissional dos professores participantes e conclui dizendo que a construção e a organização didática dos professores durante a preparação de uma seqüência didática para o ensino aprendizagem de função permitiram a reconstrução de seus saberes.

O trabalho que analisamos, a seguir, se trata da dissertação de mestrado concluída em 2010 no Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, no Rio Grande do Sul, cuja autora é Sandra Bestris Zatti, com o título “Construção do conceito de função: uma experiência de ensino aprendizagem através da resolução de problemas”.

A dissertação de Zatti (2010) objetivou analisar as possibilidades que a resolução de problemas oferece para o processo de ensino aprendizagem e a construção do conceito de função em aulas de Matemática do 1º ano do Ensino Médio.

A fundamentação teórica se limita a falar da importância do conceito de função tomando, como referência principal, os documentos oficiais. Traz também, no mesmo capítulo, a resolução de problemas, fundamentando-se nas indicações dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Faz um resumo histórico sobre a resolução de problemas trazendo Andrade (1998) e Polya (1995) - deste último cita os quatro passos para resolver um problema – e, por fim, coloca a definição de problema baseado em Dante (2005) e Allevato e Onuchic (2004).

A metodologia utilizada em sala de aula foi a Resolução de Problemas. Para a autora é possível, através de problemas, construir conceitos, estabelecer relações entre os saberes da sala de aula e os rotineiros, criar estratégias e desenvolver habilidades, entre outros. O desenvolvimento das atividades seguiu os passos propostos por Onuchic (1999). A pesquisa foi desenvolvida em uma turma noturna de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Santa Maria, no Rio Grande do Sul; enfim, a intervenção foi desenvolvida em 10 horas aula.

A autora relata as dificuldades encontradas para realizar sua pesquisa: a falta de interesse dos alunos; que o turno da noite tem diversas limitações; os alunos estão mais acostumados com a metodologia tradicional.

No fim, conclui que a metodologia de resolução de problemas se revela positiva pois contribui para que os alunos construam o conhecimento e compreendam o conteúdo.

O último trabalho que apresentamos nesta revisão de literatura é do autor Ledevande Martins Silva que tem, como título, “Compreensões de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas”. A pesquisa constitui a versão final de uma Dissertação concluída em 2013, na Universidade Estadual da Paraíba, em Campina Grande.

O objetivo da pesquisa de Silva (2013) foi investigar as compreensões e ideias essenciais do conceito de função e analisar as contribuições da metodologia de ensino aprendizagem de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, aliada às representações múltiplas.

A fundamentação teórica de sua pesquisa traz as representações múltiplas na opinião dos autores Goldin, Shteingold (2001) e Friedlander, Tabach (2001); é discutido

o ensino aprendizagem com o uso de representações e suas vantagens e desvantagens. Com relação ao conceito de função, é feita uma discussão sobre suas ideias essenciais na visão de Cooney, Beckmann e Loyd (2010), em que são discutidas as cinco grandes ideias consideradas essenciais para o desenvolvimento do conceito de função; ainda tratando do conceito de função, é feita uma discussão sobre o conteúdo de função no currículo escolar, com base em Kilpatrick, Izsák (2008) e nos documentos oficiais.

No texto, Silva (2013) ainda reserva algumas páginas para fazer um levantamento bibliográfico no qual destaca a abrangência das pesquisas em álgebra escolar, sobretudo com o uso das representações múltiplas e softwares computacionais. Escreve sobre a resolução, proposição e exploração de problemas colocando para o leitor as contribuições que a metodologia pode oferecer para o ensino aprendizagem de um conceito.

A metodologia de pesquisa é de cunho qualitativo na modalidade de pesquisa pedagógica, no qual o autor era o professor titular de uma turma do 1º ano do Ensino Médio, de uma escola pública na qual foi feita a intervenção da pesquisa. Na intervenção foram aplicadas atividades em que o autor pode trabalhar os conceitos introdutórios de função, função afim, função quadrática e função exponencial, totalizando 27 encontros.

O autor conclui que a maior dificuldade na compreensão do conceito de função é a identificação do domínio, do conjunto imagem e da regra de associação, além, também, da existência de diferentes tipos de representação de funções.

Silva (2013) acredita que a representação numérica foi a mais espontânea para os alunos. A representação algébrica causou dificuldade fazendo com que os alunos sentissem a necessidade de ajuda quando tinham que fazer alguma generalização da lei de formação. Para ele, uma das maiores dificuldades percebidas nos alunos foi com relação à representação gráfica e à sua conversão para outras representações, fato superado por meio da mediação do professor, através das atividades.

Sobre a resolução, exploração e proposição de problemas, conclui que esta metodologia de ensino fornece possibilidades de desenvolver compreensões de funções e também contextos mais abrangentes da promoção humana.

Após o estudo de cada uma das pesquisas para melhor categoriza-las, segundo alguns aspectos, elaboramos uma tabela resumo evidenciando o autor, o ano, o objetivo, a metodologia e a fundamentação teórica empregada pelos seus autores.

Quadro 1: Resumo das pesquisas analisadas

AUTOR – ANO	OBJETIVO	METODOLOGIA DE SALA DE AULA	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA
OLIVEIRA, Nanci de (1997).	Construir situações problemas que fizessem com que os alunos avançassem em sua compreensão sobre o conceito de função.	Sequência didática.	Brousseau – Noção de obstáculo e contrato didático; Chevallard – Transposição didática; Douady - Jogo de quadros e dialética ferramenta objeto Piaget – Construtivismo; Vergnaud – Campos conceituais.
PELHO, Edelweiss Benez Brandão (2003).	Introduzir o conceito de função por meio da compreensão das variáveis dependentes e independentes e da relação entre elas.	Sequência didática; Engenharia didática.	Duval - Registros de representação.
ROSSINI, Renata (2006)	Fazer uma investigação e reconstrução do conceito de função em um grupo de professores da Rede Pública Estadual de Ensino de São Paulo; Contribuir para a formulação de	Pesquisa ação; Sequência didática.	Chevallard - Teoria Antropológica do Didático; Shulman - Tipologia de conhecimento.

	diretrizes para a formação continuada do professor de matemática.		
ZATTI, Sandra Beatriz (2010).	Analisar as possibilidades que a resolução de problemas oferece para o processo de ensino aprendizagem e a construção do conceito de função em aulas de matemática da 1ª série do Ensino Médio.	Resolução de problemas; Sequência didática.	Documentos oficiais – Importância do conceito de função; Andrade, Allevato e Onuchic, Dante e Polya – Resolução de problemas.
SILVA, Ledevande Martins (2013).	Investigar as compreensões e ideias essenciais do conceito de função e analisar as contribuições da metodologia de ensino aprendizagem de matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, aliada às representações múltiplas.	Resolução, proposição e exploração de problemas.	Goldin, Shteingold, Friedlander e Tabach – Representações múltiplas; Cooney, Beckmann e Loyd – Ideias essenciais do conceito de função. Kilpatrick, Izsák e documentos oficiais – Conceito de função no currículo escolar.

Das cinco pesquisas estudadas percebemos que o objetivo de quatro delas está voltado para dar significado aos alunos sobre o conceito de função; já a outra se preocupa com a formação do professor que ensina função porém fica claro, nas pesquisas, a preocupação dada às representações múltiplas de função e a ideia de covariação e taxa de variação, muito embora aprofundemos em nosso trabalho, as ideias de representação múltiplas de função e de covariação e taxa de mudança, explicitando suas importâncias para a formação de conceitos e ideias.

Todas as pesquisas por nós analisadas optaram pela elaboração e aplicação de uma sequência didática ou experimentação didática. Entre as cinco pesquisas que utilizaram a sala de aula em suas pesquisas quatro foram aplicadas no Ensino Médio e uma no Ensino Fundamental.

Percebemos, indiscutivelmente, a diversidade de abordagens dos autores; no entanto, fica evidente a preferência por pesquisadores da linha francesa da didática da Matemática: três trabalhos tiveram influência dos autores franceses.

Os autores, segundo suas próprias declarações, alcançam o objetivo proposto em suas pesquisas.

Ao fazer uma síntese desses trabalhos percebemos que Oliveira (1997) sugere que sejam trabalhadas as representações múltiplas nos dois sentidos e propostos problemas que façam distinguir domínio e contradomínio.

Nossa pesquisa tem alguns pontos em comum com a de Oliveira (1997), visto que ambas têm a finalidade de usar uma sequência de atividades e fazer com que os alunos avancem na compreensão do conceito de função. As duas pesquisas enfatizam o uso das diversas formas para representar uma função, inclusive propondo que as atividades objetivem usar as representações nos dois sentidos. Uma diferença entre as pesquisas é que Oliveira (1997) foi além do trabalho com os alunos e investigou as concepções dos professores sobre função. Já Pelho (2003) afirma que é necessário ensinar função com caráter mais dinâmico e que esta abordagem pode ser feita ao levar o aluno a compreender o conceito de variável, a dependência de uma variável em relação à outra e identificar as variáveis.

As similaridades entre nossa pesquisa e a de Pelho (2003) começam quando o autor já defende, em seu objetivo, que a introdução do conceito de função deve ser feita por meio da compreensão das variáveis; o nosso referencial teórico refere-se a isto como sendo uma das ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função. Pelho (2003) também faz uso de uma sequência de atividade e enfatiza o uso das

diferentes representações. Apesar de termos a intenção de trabalhar com o uso de algum software, para trabalhar a representação gráfica, não tivemos a possibilidade de fazê-lo, mas Pelho (2003) afirma que a utilização da informática facilita a introdução do conceito de função.

Rossini (2006) indica que função seja introduzida pela relação entre dois conjuntos, que o aluno compreenderá função na medida em que compreenda e identifique as variáveis. Ainda afirma que os professores estão totalmente desatualizados sobre as tendências atuais em educação matemática.

A tese de Rossini (2006) apesar de ser um trabalho cujo objetivo principal é investigar as concepções dos professores sobre o conceito de função, apresenta algumas semelhanças com nossa investigação. Rossini também trabalha com uma sequência de atividades com alunos da Educação Básica; apesar de não ser este seu objetivo principal, pode perceber como os alunos aprendem função durante a aplicação da sequência. A autora defende, assim como nossa pesquisa, que o ensino aprendizagem de função deva partir da compreensão das variáveis e da relação entre elas.

Zatti (2010) mostra que a metodologia de Resolução de Problemas favorece ao aluno a compreensão do conceito de função.

Com referência ao trabalho de Zatti (2010) percebemos, como convergência principal, seu foco na metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problema. Também acreditamos que a metodologia de ensino usada favorece a compreensão do conteúdo trabalhado com alunos.

Por fim, Silva (2013) acredita que seja necessário repensar o ensino de funções levando em consideração as ideias essenciais de funções e as metodologias alternativas que foram empregadas no seu trabalho.

Percebemos que nossa pesquisa dá continuidade aos estudos de Silva (2013), uma vez que usamos o mesmo referencial teórico e metodologia de sala de aula; entretanto, percebemos diferença durante a abordagem em sala de aula, uma vez que demos maior ênfase para o desenvolvimento introdutório do conceito de função; acreditamos que a aprendizagem das famílias de funções possa ocorrer mais facilmente e rapidamente se há uma boa compreensão do conceito de função em um nível introdutório, fato este evidenciado ao compararmos a quantidade de encontros para desenvolver o conceito de função e da função afim. Por conta disto percorremos, em nosso trabalho, 18 encontros para trabalhar os conceitos introdutórios de função.

Outra diferença que encontramos se refere ao uso das representações múltiplas. Apesar de termos visões parecidas, tanto no nosso trabalho como no de Silva (2013), as representações múltiplas foram trabalhadas nos dois sentidos; contudo, não colocamos todas as representações de uma só vez; neste sentido, a história de como foi desenvolvido o conceito de função nos ajudou, pois nela as representações múltiplas surgem ao longo do tempo em uma ordem cronológica; sabemos, por exemplo, que a linguagem verbal e as tabelas, ainda na Antiguidade, foram as primeiras representações utilizadas seguidas das formas analítica e gráfica, no período da Idade Média e só depois de construídas todas as representações de função é que surgem suas definições formais; optamos, portanto, por trabalhar as representações de forma gradativa.

De maneira geral, percebemos similaridade com as pesquisas citadas nesta parte da pesquisa; com nosso diferencial é que desenvolvemos o trabalho em sala de aula, de forma minuciosa, levamos em consideração os aspectos das representações múltiplas como sendo essenciais para o melhor entendimento do conceito de função e enfatizamos bastante os aspectos do ensino aprendizagem, através da resolução de problemas.

3. AS IDEIAS ESSENCIAS DE FUNÇÃO E A RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS

Neste Capítulo apresentamos nossa fundamentação teórica tomando como base para nossa pesquisa:

Algumas ideias essenciais de funções na visão de Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), prevalecem as ideias desses autores, por considerarmos que seja o que temos de mais atualizado a nível internacional, ao tratar o tema função mas também percebemos que tomando como base a fundamentação desses autores já existem pesquisas que se aprofundam em suas perspectivas: é o caso do trabalho de Silva (2010) e no próprio NCTM foi lançado um livro¹ em 2014, que trata, na prática, as ideias essenciais de Cooney, Beckmann e Lloyd (2010).

Também apresentamos nossa proposta de trabalho em sala de aula, baseada na resolução, proposição e exploração de problemas, como metodologia de ensino aprendizagem, trazendo as contribuições de pesquisadores brasileiros e internacionais.

3.1 Ideias Essenciais do Conceito de Função

O conceito de função é considerado um dos mais relevantes da Matemática e apresenta grande aplicabilidade; desta forma, a compreensão e a formação do conceito de função pelo aluno são, portanto, fundamentais; além disto, em termos curriculares o conteúdo funções é pré-requisito para o estudo de vários outros conteúdos do Ensino Médio.

Devido à sua relevância para tantos outros temas matemáticos e seu papel na matemática de nível universitário, funções constituem um dos temas mais importantes na Matemática do ensino secundário. Eles fornecem um meio de pensar, quantitativamente, sobre os fenômenos do mundo real e um contexto

¹O livro em questão tem como título *Putting Essential Understanding of Functions into Practice in Grades 9–12*. Publicado em Reston pelo NCTM, no ano 2014, cujos autores são: Robert N. Ronau, Dan Meyer e Terry Crites.

para estudar as relações e mudanças (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 7, tradução nossa).

Campitelli e Campitelli (2006) afirmam que quando se fala em ideia central da matemática são inúmeras as que existem mas, provavelmente, nenhuma é tão abrangente como a de função. Para esses autores função atende a questões de espaço e tempo, examina quantificações e classificações e ainda nos ensina a medir e a contar.

Apesar de ser um conceito de suma importância, os alunos encontram grande dificuldade em compreendê-lo, o que nos motiva a estudar esta temática. Ainda com relação à aprendizagem do conceito de função pelos alunos, Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) afirmam que, muitas vezes eles, têm uma visão estreita de funções. Para esses autores, os alunos tendem a abordar função como equações ou regras ordenadas. Campitelli e Campitelli (2010) atestam que o ensino de função deve articular as diversas formas de representação desenvolvendo, desta maneira, sentido ao que se ensina.

Acreditamos que, para compreender o formalismo matemático do conceito de função, o aluno deve ser colocado em um ambiente que inclua a experiência do dia a dia, exemplos concretos, vários tipos de representação e, em linhas gerais, seguindo o percurso semelhante ao historicamente construído fazendo com que o aluno forme a estrutura conceitual com compreensão.

A publicação de 2010 do NCTM - ²Developing Essential Understanding of Functions Grades 9-12, dos autores Cooney, Beckmann e Lloyd, apresenta o que os autores consideram como sendo as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função. Para eles há outras inúmeras ideias primordiais no conceito de função mas como ideia essencial para as series equivalentes no Brasil, do nono ano do Ensino Fundamental ao Terceiro Ano do Ensino Médio, destaca: O conceito de função; Covariação e taxa de variação; Família de funções; Combinação e transformação de funções e Representações de funções. Cada grande ideia dessas é subdividida em ideias mais específicas as quais, os autores chamam, no livro, de entendimentos essenciais, na literatura internacional é o que encontramos de mais atualizado, quando se trata do conceito de função.

A primeira grande ideia considerada essencial é “O conceito de função”.

O conceito de funções é intencionalmente largo e flexível, permitindo que seja aplicável a uma ampla variedade de situações. A noção de função abrange

² Desenvolvendo as compreensões essenciais de funções do 9º ao 12º Ano.

muitos tipos de entidades matemáticas além de funções "clássicas" que descrevem quantidades que variam continuamente. Por exemplo, as matrizes e as sequências aritméticas e geométricas podem ser vistas como funções (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 7, tradução nossa).

O conceito de função é bastante pertinente para os alunos pois o mesmo possui muitas aplicações, por ser um conceito amplo. As aplicações ocorrem tanto em contextos sociais como dentro da própria Matemática, como no caso das matrizes, das sequências e de vários conceitos geométricos (as fórmulas para calcular a área das figuras planas, entre outros); além de possuir aplicação em outras ciências como a Física (o cálculo feito para encontrar a velocidade média de um automóvel é dado através de uma função).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) corroboram com esta ideia, apresentando a importância que o conceito de função possui, tanto na Matemática como em outros campos do conhecimento:

O estudo das funções permite, ao aluno, adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática (BRASIL, 2006, p.121).

Enxergamos o conceito de função para além de um conteúdo da Matemática; este tem uma utilidade multidisciplinar. São diversos os campos da Matemática, das profissões, do cotidiano da vida real que usamos e em que percebemos a utilidade do conceito de função. Ronau, Meyer e Crites (2014) afirmam que função é essencial em todos os campos da Matemática Aplicada e citam alguns exemplos:

[...] são úteis para o estatístico que implanta um conjunto de funções de probabilidade que diz se determinada observação periférica é significativa ou esperada. O climatologista tem um valor único do conjunto de determinado ano para a temperatura média global do mesmo ano. Contabilistas do governo têm mapeamentos de valor único de um dado ano para o valor da receita que o governo deve esperar para tomar em política fiscal atual. Em ambos os casos, se o climatologista ou o modelo de contabilista para temperatura ou receita retornou mais de um valor para o determinado ano, não seria uma função e não seria muito útil (RONAU, MEYER E CRITES, 2014, p. 11 – 12. Tradução nossa).

Temos a percepção, através de nossa prática de que o ensino de função no Ensino Médio brasileiro ainda segue um formato tradicional seguindo rigorosamente, muitas vezes a sequência proposta pelo livro didático, em que cada família de função é tratada isoladamente, sem conexões. Percebemos, por exemplo, que a função afim é

estudada no 1º ano do Ensino Médio enquanto que a Progressão Aritmética é aprendida apenas no 2º ano do Ensino Médio. Portanto, apesar de as Progressões Aritméticas serem um caso particular de função afim, são tratadas sem nenhuma ligação.

A grande ideia 1 possui, segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), três entendimentos essenciais, classificados como entendimentos essenciais 1a; entendimento essencial 1b e entendimento essencial 1c.

Entendimento essencial 1a. Funções são associações de valor único de um conjunto, o domínio da função para outra, a sua imagem.

Entendimento essencial 1b. Funções aplicáveis a uma vasta gama de situações. Elas não têm que ser descritas por qualquer expressão específica ou seguir um padrão de regularidade. Aplicam-se a outros casos além dos de variação contínua. Por exemplo, as sequências são funções.

Entendimento essencial 1c. O domínio e imagem de funções não precisam ser números. Por exemplo, matrizes de ordem dois por dois podem ser vistos como representando funções cujo domínio e imagem são duas dimensões do espaço vetorial bidimensional (CONNEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 8, tradução nossa).

No entendimento essencial 1a nos parece ser onde está a ideia efetiva do conceito de função pois temos, neste entendimento, a ideia da unicidade de uma função que é tão importante que o aprendiz compreenda onde, para cada elemento do domínio, existe exatamente um único elemento no contradomínio. Entretanto, devemos ter certo cuidado ao definir função visto que muitas vezes somos levados a abordar função através da relação binária, o que limita a um conjunto específico de pares ordenados. Ao apresentar o conteúdo de função para os alunos devemos fazê-lo de forma intuitiva através das ideias de correspondência, dependência e/ou variação entre grandezas. Usando essas ideias torna-se mais compreensível o entendimento para os alunos uma vez que em nosso cotidiano podemos perceber várias relações entre grandezas.

Alguns livros didáticos brasileiros mostram a unicidade de uma função através da representação por diagramas porém devemos perceber que este tipo de abordagem possui suas limitações, ela não permite perceber adequadamente uma função cujo domínio é infinito.

Para Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) muitos alunos têm dificuldade em identificar que uma função constante é uma relação de valor único e que cada x do conjunto domínio se relaciona com a mesma constante do contradomínio.

No entendimento essencial 1b, existem outras possibilidades para trabalharmos com função, além das funções contínuas expressas por todos os números do conjunto

dos números reais. Como função é um conceito bastante amplo, como já citamos, há diversas situações através das quais podemos encontrar funções que não são contínuas.

O estudo de sequência, por exemplo, tanto para Progressão Aritmética como Geométrica, permite uma compreensão clara das funções descontínuas. Percebemos que quando apresentamos, para os alunos, a representação de uma sequência como sendo uma função, fica mais fácil o entendimento de que esta sequência é definida a partir de um domínio discreto com números inteiros.

O entendimento essencial 1b garante que o conceito de função é suficientemente amplo para abranger esses e muitos outros casos que não são das funções clássicas. Os mesmos autores afirmam que a análise de sequências pode ser um ponto de partida para o estudo de outras funções pois, por exemplo, a Progressão Geométrica é uma restrição da função exponencial para números inteiros. Nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio também encontramos que: “As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, função afim e função exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números inteiros”. (BRASIL, 2006, p. 75)

Sobre o entendimento essencial 1c, percebemos que nos documentos oficiais, quanto ao ensino de funções, não se destaca a abordagem do domínio e imagem de uma função fora dos conjuntos numéricos. Domínio e imagem representados por duas dimensões do espaço vetorial, por exemplo, em nível do Brasil, só são vistos em nível superior; desta forma em nossa pesquisa como esta questão não é uma realidade brasileira não tomaremos o entendimento essencial 1c; corroborando com nosso trabalho Brandão (2013, p. 56) afirma que, “Em nível de Ensino Médio só se trabalha com funções nas quais os conjuntos de partida e de chegada são numéricos, não sendo necessário o uso das denominações aplicação e transformação substituindo função”.

É imprescindível destacar a grande variedade de maneiras pelas quais o conceito de função pode ser tratado em sala de aula tendo em vista que para este conceito existe uma infinidade de aplicações. As funções permitem modelar situação que envolve duas grandezas como, por exemplo, a distância versus o tempo de um objeto que se locomove em determinado percurso. Vale citar que é conveniente trabalhar com valores variáveis possíveis para as duas grandezas e não fugir dos valores que a quantidade pode alcançar.

A grande ideia 2, considerada como sendo uma das essenciais, é denominada covariação e taxa de variação.

Funções fornecem um meio para descrever como relacionam quantidades que variam juntas. Podemos classificar, prever e caracterizar vários tipos de relações, compreendendo como a taxa de variação varia com respeito a outra (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p.7, tradução nossa).

Fica claro, para nós, que em nosso cotidiano existem diversas situações que nos permitem descrever como uma quantidade muda quando a outra, com a qual se relaciona, também muda. Ronau, Meyer e Crites (2014, p. 43. Tradução nossa) afirmam que: “Trabalhar em contextos do mundo real pode ajudar os alunos a desenvolver sua compreensão das relações de covariância que envolve continuamente taxas de mudança”. Em uma função, quando o valor da variável independente muda e faz mudar a variável dependente, trata-se da covariação e isto ocorre devido à existência de uma taxa de variação que indica qual valor a variável vai assumir quando o valor da outra mudar.

Quando se trabalha numa perspectiva onde se analisa a covariação, é dada ênfase na mudança que ocorre entre as duas grandezas que estão variando juntas, não é dada tanta importância às regras que associam x a $f(x)$. Acreditamos que seja importante introduzir o conceito de função fazendo com que os alunos compreendam os conceitos de covariação e taxa de variação, mostrando como duas grandezas variam entre si.

A grande ideia 2 está subdividida, segundo Cooney, Beckmann e Lloyd, (2010), em três entendimentos essenciais, classificados como entendimento essencial 2a; entendimento essencial 2b e entendimento essencial 2c.

Entendimento essencial 2a. Para as funções que associam números reais em números reais, certos padrões de covariação, ou padrões de como duas variáveis mudam em conjunto, indicam a associação de determinada família de funções e determinam o tipo de fórmula que a função tem.

Entendimento essencial 2b. A taxa de variação descreve como uma quantidade variável se altera em relação a outro, ou seja, uma taxa de variação descreve a covariação entre duas variáveis.

Entendimento essencial 2c. Taxa de variação de uma função é uma das principais características que determinam que tipos de fenômenos do mundo real a função pode modelar (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 8, tradução nossa).

No entendimento essencial 2a percebemos que é a covariação que vai indicar a qual família a função pertence e como seriam suas representações. É justamente pela covariação que encontramos a expressão algébrica que representa a função.

No entendimento essencial 2b conseguimos perceber, através do valor da taxa de variação, quais os valores que a variável dependente vai assumir e como esta variável vai alterar-se em relação à outra (ação que transforma cada elemento A do domínio em um elemento B do Contradomínio).

Já no entendimento essencial 2c, quando tomamos uma situação do mundo real é pela identificação da taxa de variação que conseguimos modelar a função, ou seja, perceber o padrão que está ocorrendo quando uma variável muda em relação à outra.

Para Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), existe um consenso entre os autores da área para o crescimento da abordagem de covariação. Esta abordagem fornece, segundo esses autores, um primeiro passo para a compreensão do conceito de função. Os The Standards of the National Council of Teachers of Mathematics dos anos de 1989 e 2000, já enfatizaram função como uma relação de covariação ou dependência.

Smith (apud COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010) defende a introdução da abordagem de função em sala de aula usando a ideia de covariação uma vez que esta pode fornecer o desenvolvimento de uma relação de correspondência possível de ser expressa através da observação da covariação, algebricamente.

Na nossa intervenção tentamos levar o aluno a entender função; primeiro, usando a ideia de correspondência entre variáveis e apenas no final do processo é que apresentamos uma definição mais formal do conteúdo, ou seja, buscamos dar menor ênfase às equações e expressões algébricas. Portanto, as atividades que foram trabalhadas com os alunos contemplaram uma experimentação que considerava a ideia de covariação; desta forma, consideramos que as ideias de função surgem naturalmente.

Ao tratar da taxa de variação, Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) chamam a atenção para o cuidado em fazer com que os alunos percebam que se trata de uma taxa e não de uma mudança de valores. Os alunos podem pensar que é apenas uma mudança como, por exemplo, nas situações onde somamos um, a unidade, nas quais é preciso mostrar que o acréscimo de uma unidade corresponde a uma taxa de variação.

Mais um ideia considerada essencial para o conceito de função é a grande ideia 3, que trata das famílias de funções.

As funções podem ser classificadas em diferentes famílias de funções, cada uma com suas próprias características únicas. Famílias diferentes podem ser usadas para modelar diferentes fenômenos do mundo real (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 7, tradução nossa).

Dentro do conceito de função existem várias famílias e cada uma delas possui suas próprias características sendo que as situações do mundo real vão ser modeladas tomando, como referência, uma das famílias, de acordo com a situação particular.

Para os autores Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) a grande ideia 3 se subdivide em sete entendimentos essenciais, cada um deste diz respeito a uma das famílias de funções:

Entendimento essencial 3a. Os membros de uma família de funções compartilham do mesmo tipo de taxa de variação. Esta característica da taxa de variação determina os tipos de fenômeno do mundo real que as funções na família podem modelar.

Entendimento essencial 3b. Função Afim é caracterizada por uma taxa constante de variação. O raciocínio sobre a semelhança de triângulos retângulos permite deduzir que a função afim tem uma taxa constante de variação e uma fórmula do tipo $f(x) = mx + b$ para constantes m e b .

Entendimento essencial 3c. Função Quadrática é caracterizada por uma taxa de variação linear. Pela taxa de variação da taxa de variação (segunda derivada) de uma função quadrática é constante. Raciocínio sobre a forma de vértice de uma função quadrática permite deduzir que a função tem um valor máximo ou mínimo e que os zeros da quadrática são pertencem ao conjunto dos números reais; eles são simétricos sobre a coordenada x do ponto de máximo ou mínimo.

Entendimento essencial 3d. A função Exponencial é caracterizada por uma taxa de variação, proporcional ao valor da função. É uma propriedade da função exponencial em que, quando a entrada é aumentada por uma unidade, a saída é multiplicada por um fator constante. Função exponencial converte multiplicação em adição através da equação $a^{b+c} = (a^b) \cdot (a^c)$.

Entendimento essencial 3e. Funções Trigonômicas são exemplos naturais e fundamentais de funções periódicas. Para ângulos entre 0 e 90 graus, as funções trigonométricas podem ser definidas como as razões dos comprimentos laterais de triângulos retângulos; essas funções estão bem definidas porque as relações de comprimentos laterais são equivalentes em triângulos semelhantes. Para ângulos gerais as funções seno e cosseno podem ser vistas como coordenadas de pontos ou círculos, como a projeção do movimento circular para o eixo x e o eixo y .

Entendimento essencial 3f. Sequências aritméticas podem ser pensadas como funções lineares cujos domínios são os números inteiros positivos.

Entendimento essencial 3g. Sequências geométricas podem ser pensadas como funções exponenciais cujos domínios são os números inteiros positivos (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 9, tradução nossa).

Esses entendimentos essenciais é que compõem as famílias de funções; podemos dizer que elas são “espinha dorsal” do Ensino Médio. No Brasil, as famílias de funções mais comumente exploradas são a função afim, função quadrática, função exponencial e as funções trigonométricas. Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) incluem as sequências aritmética e geométrica como sendo mais duas famílias de funções, mesmo essas duas já estando incluídas dentro das funções afim e quadrática, respectivamente, sendo que as sequências possuem domínios no conjunto dos números inteiros positivos.

Uma forma de fazer com que o aluno perceba as características de uma família de função é levando eles a se familiarizem e identificarem com os padrões de mudanças da situação; irão perceber, com isto, que em uma mesma família de função existe um único tipo de taxa de variação.

Nas Orientações Curriculares Nacionais é recomendado o trabalho com essas famílias de funções; para este trabalho sugere-se que sejam apresentados, para o aluno diferentes modelos, desde que inseridos em variadas áreas do conhecimento: “[...] queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica etc”.

A grande ideia 4 oferece algumas discussões sobre combinação e transformação de funções.

As funções podem ser combinadas através da adição, subtração, multiplicação, divisão, e de sua composição. Funções há, vezes tem inversas. As funções podem ser analisadas muitas vezes visualizando-as como sendo feitas a partir de outras funções (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 7, tradução nossa).

Desta forma, as funções podem ser vistas de diferentes maneiras podendo facilitar o entendimento pelos alunos. Esta técnica é muito usada em toda a Matemática, em que desmontamos e analisamos, por partes, as funções que, por sua vez podem ser combinadas, divididas e transformadas em várias formas diferentes, permitindo fazer uma análise mais detalhada.

Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) subdividem a grande ideia 4 em quatro entendimentos essenciais:

Entendimento essencial 4a. Funções que têm o mesmo domínio e estão associadas aos números reais podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas, ou divididas (podem alterar o domínio).

Entendimento essencial 4b. Sob condições adequadas as funções podem ser compostas.

Entendimento essencial 4c. Para as funções que associam os números reais em números reais compondo uma função com "variação" ou "escala" na forma de mudança de funções, a fórmula e o gráfico são facilmente previsíveis.

Entendimento essencial 4d. Em condições apropriadas as funções têm inversas. As funções logarítmicas são inversas das funções exponenciais. A função raiz quadrada é o inverso da função quadrática (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 10, tradução nossa).

A partir de funções que associam números reais a números reais, podem ser formadas outras funções que são definidas por algumas regras. Quando são feitas as

transformações do entendimento essencial 4a, ficam facilmente visíveis essas transformações nos seus respectivos gráficos, sobretudo quando temos uma função constante.

Ilustrando o entendimento essencial 4a, podemos ver, quando temos duas funções f e g , cujos domínios são os números reais; a partir delas podem ser formadas outras funções, obedecendo às regras seguintes:

$$(f+g)(x)=f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x) - g(x)$$

$$(f.g)(x)=f(x) . g(x)$$

$$(f/g)(x)=f(x) / g(x)$$

Sobre a composição de funções, entendimento essencial 4b, ela nos pode fornecer a função expressa de forma mais simples, passível de facilitar a compreensão; a composição de função consiste na análise de uma função na outra.

O comportamento do gráfico de uma função é facilmente previsível quando são feitas algumas mudanças na função. Sabendo no que implicam essas modificações, o esboço do gráfico se torna bem mais simples de ser feito inclusive esboçando-o de forma rápida e direta sem a necessidade do procedimento que o livro didático apresenta o qual os alunos são levados a fazer.

O cálculo da função inversa nada mais é do que colocar x em termos de y , que consiste apenas na associação $(x,y) \rightarrow (y,x)$ que, no plano, é a simetria em relação à reta $y=x$.

Salienta-se para a função inversa que para dois valores a e b , distintos, tal que $f(a)=f(b)$, não temos, neste caso a inversa, mas teríamos $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(b))$, e para isto a e b não poderiam ser distintos.

A grande ideia 5 explicita as representações múltiplas de funções.

Funções podem ser representadas de várias formas, incluindo a forma algébrica (simbólico), representações gráficas, verbais e tabulares. Ligações entre essas diferentes representações são importantes para estudar as relações e mudanças (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 8, tradução nossa).

Cada uma dessas representações deve ser trabalhada em conjunto, uma com a outra não privilegiando uma única representação. Percebemos que, muitas vezes, o ensino de função na escola tem privilegiado as expressões algébricas em detrimento das outras representações, acarretando um ensino de procedimentos algorítmicos e não levando o aluno a compreender o conceito. Cada uma das representações é apenas uma

maneira diferente de expressar funções, embora de grande importância, pois permite que o aluno desenvolva a compreensão completa desse importante conceito.

Van de Walle (2006) colabora com a ideia e importância das representações múltiplas de funções; vem trazendo, também, que podemos representar função de maneiras distintas, sendo que cada representação desta tem sua característica particular mas que expressa a mesma função.

As funções são as ferramentas usadas para modelar matematicamente todos os tipos de mudança no mundo real. Representar funções em diferentes maneiras pode levar à análise e compreensão daquela mudança. Os alunos na escola média desenvolverão uma compreensão de métodos múltiplos de expressar relações funcionais do mundo real (palavras, gráficos, equações e tabelas). Trabalhando com essas diferentes representações de funções, permitiremos aos alunos desenvolver uma compreensão completa deste importante conceito.(...) As relações funcionais podem ser expressas em contexto real, gráficos, equações algébricas, tabelas e palavras. Cada representação para uma função é simplesmente um modo de expressar a mesma ideia. Cada representação fornece uma visão diferente da função. O valor de uma representação depende do seu propósito (VAN DE WALLE, 2006, p.284, tradução nossa).

Percebemos, pela nossa prática, que a maioria dos livros didáticos enfatiza algumas representações particulares dando-lhes mais destaque, esses livros apresentam a introdução de função através de regras e gráficos.

Segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) a grande ideia 5 se compõe em quatro entendimentos essenciais a que eles chamam de 5a, 5b, 5c e 5d.

Entendimento essencial 5a. As funções podem ser representadas de várias formas incluindo, através de meios algébricos (por exemplo: equações), gráficos, descrições verbais e tabelas.

Entendimento essencial 5b. Mudando a maneira como a função é representada (por exemplo, algebricamente, com um gráfico, em palavras ou com uma tabela) não muda a função, apesar de representações diferentes destacarem diferentes características e algumas podem mostrar apenas uma parte da função.

Entendimento essencial 5c. Algumas representações de uma função podem ser mais úteis do que outros, dependendo do contexto.

Entendimento essencial 5d. Ligações entre representações algébricas e gráficas de funções são especialmente importantes em estudar as relações e as mudanças (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 10, tradução nossa).

No entendimento essencial 5a, os autores apresentam quatro formas diferentes de representar uma mesma função e justificam que o uso dessas múltiplas formas de representar função permite uma análise de diferentes aspectos do conceito, colaborando com uma aprendizagem melhor; além disto, para que situações problema tenham sua interpretação plena, é preciso utilizar várias representações.

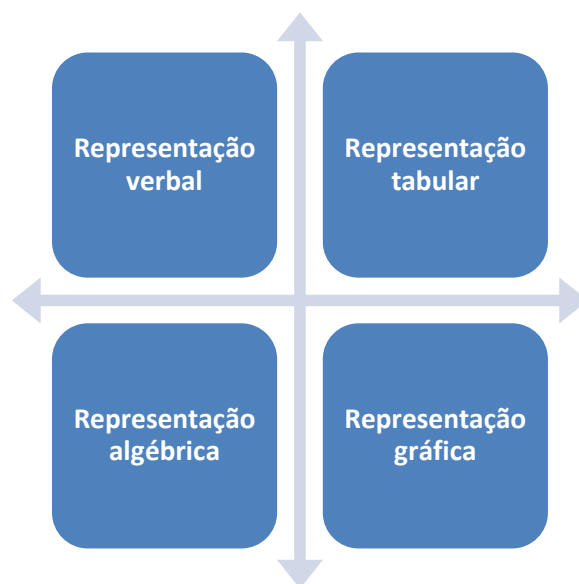


Figura 1: Representações múltiplas de funções, segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010)

Para clarearmos as ideias da importância de cada uma dessas representações, trazemos as vantagens delas segundo a concepção de Friedland e Tabach (2001) para as representações verbal, gráfica e algébrica e a concepção de Brown e Mehilos (2010) para a representação tabular:

- **Representação verbal:** está normalmente associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos, dá ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o cotidiano.
- **Representação tabular:** as tabelas ajudam os alunos a passar do mundo concreto da aritmética, onde os problemas envolvem números específicos, para o mundo abstrato da álgebra, onde as quantidades variam. As tabelas dão aos alunos uma experiência tangível em que as variáveis são números que se alteram e em que o valor das expressões varia como o resultado.
- **Representação algébrica:** esta é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, por vezes é o único método de justificar ou efetuar generalizações.
- **Representação gráfica:** proporciona uma imagem clara de uma função de variável real. É uma forma de representação intuitiva e apelativa para os alunos que gostam de uma análise visual.

Temos, no entendimento essencial 5b, que ao mudar a representação da função ela continua sendo a mesma mas vale citar que determinada representação será mais útil dependendo do contexto (entendimento essencial 5c). Quando se trabalha na perspectiva das representações múltiplas damos a opção para que o aluno faça a escolha da melhor forma de representar a função, levando-o a refletir sobre sua escolha.

Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) sugerem para que o aluno consiga obter a habilidade de escolher qual a melhor representação para a situação dada, que seja feita uma atividade de classificar funções; nela são fornecidos, para o aluno alguns cartões contendo tabela, gráfico, fórmulas e descrições verbais que representam diferentes famílias de funções. O aluno vai classificar cada cartão de acordo com sua família e vendo as características de cada família através de suas representações.

Torna-se importante não privilegiar apenas um tipo de representação, ou seja, devemos trabalhar diferentes representações para uma mesma função e, acima de tudo, estar conectando cada uma dessas representações (entendimento essencial 5d).

Van de Walle (2006) apresenta o objetivo que cada representação importante possui, detalhando com se dá a utilização de cada uma das cinco representações.

A ideia mais importante é perceber que, para uma função, cada uma dessas representações ilustra a mesma relação. O contexto fornece uma incorporação da relação fora do mundo da matemática. A linguagem ajuda a expressar a relação de maneira significativa e útil. As tabelas explicitamente associam elementos selecionados que são emparelhados pela função. A variação conjunta é implícita no emparelhamento dos números. O gráfico traduz os pares de números numa imagem. Qualquer ponto no gráfico da função tem duas coordenadas. A função é a regra que relaciona a primeira coordenada à segunda. A equação expressa a mesma relação funcional com a economia e o potencial do simbolismo matemático (VAN DE WALLE, 2006, 290-291).

As representações múltiplas assumem, portanto, importante papel para o ensino aprendizagem de função, devendo ocupar lugar de destaque no currículo. Sobre isto, o NCTM (2007, p. 160) dedica um texto, no qual considera, como objetivo para o aluno:

- Criar e usar representações para organizar, registrar e comunicar ideias matemáticas;
- Selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
- Usar as representações para modelar e interpretar fenômenos físicos, sociais e matemáticos.

Na nossa pesquisa as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função ajudaram a nos fundamentar e, a partir disto, percebemos detalhes importantes a serem considerados durante a intervenção com os alunos. Reforçamos o que percebíamos sobre a importância do conceito de função; vimos que é mais adequada, para o nível da pesquisa, a introdução do conceito de função considerando os aspectos covariação e taxa de variação; compreendemos que cada família de função tem sua devida aplicação para modelar uma situação cotidiana e que cada uma delas tem características próprias; ainda fortalecemos a ideia de que, quando fazemos algumas combinações nas funções, pode-se facilitar o entendimento dos alunos e, por fim as diferentes representações que uma função pode assumir sem que se mude a função, faz com que a compreensão do conceito se torne mais amplo e adequado.

3.2 Resolução, proposição e exploração de problemas

Acreditamos que um dos aspectos essenciais durante o ensino aprendizagem de matemática é fazer com que o aluno possa aprender a aprender, que ele reflita sobre o que está estudando; para que isto ocorra é preciso colocar os alunos em um ambiente que os favoreça, onde os alunos são levados a pensar sobre o que fazem e não apenas a apreensão de conhecimentos prontos e já definidos. Quando o aluno reflete sobre o que aprende ele é preparado para ser mais crítico e levado a pretender uma sociedade mais justa.

Uma das formas na qual acreditamos que favoreça o aluno a aprender a aprender, é a utilização da metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. Para Ronau, Meyer e Crites (2014) a abordagem de ensino através da resolução de problemas faz com que os alunos se tornem ativos no processo de aprendizagem e consigam avaliar seu próprio trabalho. Diante disto fizemos, para a realização de nossa intervenção em sala de aula opção por esta metodologia e decorremos, a seguir, alguns aspectos sobre esta maneira de trabalhar o conteúdo matemático.

Esta metodologia vem sendo estudada por diversos pesquisadores da área da Educação Matemática. Para chegar às pesquisas atuais em resolução de problemas,

foram várias as mudanças na forma em que se ensina e aprende matemática. Onuchic (1999) faz uma análise dos movimentos de reforma do ensino de matemática no século XX, destacando:

O ensino de Matemática por repetição: início do século, quando se priorizava a memorização e era considerado importante, o professor falava e o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia; no final do processo de ensino a maioria dos alunos se esquecia do que havia memorizado em pouco tempo.

O ensino de Matemática por compreensão: nesta época os alunos deveriam aprender Matemática com compreensão, o aluno deveria entender o que fazia; entretanto, o aluno escutava o professor e repetia, não participando da construção do conhecimento. O professor não estava preparado para trabalhar de forma diferente.

A Matemática Moderna: décadas de 1960 e 1970, apresentava uma matemática estruturada, apoiada em estruturas lógicas, algébrica, topológica e de ordem e enfatizava a teoria dos conjuntos. A aprendizagem da matemática ficava limitada a poucos pois era ensinada com muitos símbolos e de forma complexa; até mesmo o professor tinha insegurança no que falava. Era uma matemática muito abstrata que não levava o aluno a perceber aplicações com a matemática usada fora da sala de aula.

O ensino proposto se fundamentava em grandes estruturas que organizam o pensamento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc. Porém toda esta proposta estava longe da realidade dos alunos principalmente das séries iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 19).

Todas essas tendências não tiveram o sucesso desejado.

A resolução de problemas: passou a receber dos educadores matemáticos sua devida importância. A preocupação com a resolução de problemas é mais recente; somente após a década de 1970 é que os educadores matemáticos passaram a dar mais atenção, como uma ideia que merecia mais destaques.

Destaca-se, como início das pesquisas com resolução de problemas, o trabalho de George Polya em seu livro “A arte de resolver problemas” (1994, 1ª ed. em 1945), no qual propõe um método em quatro etapas para a resolução de problemas: 1º) compreender o problema; 2º) elaborar um plano; 3º) executar o plano e 4º) fazer o retrospecto ou verificação da solução do problema original; cada uma dessas etapas se subdivide em outras.

Na década de 1980 o NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática), entidade norte-americana, apresentou um documento “*An Agenda for Action*” (Uma Agenda para Ação), que trazia que “a resolução de problemas deveria ser o foco da Matemática escolar nesta década” (NCTM, 1980, p. 1). Só foi a partir dessa década que a resolução de problema começou a ser destacada como metodologia de ensino.

Segundo Andrade (1998):

Na metade da década de 1980, Resolução de Problemas passa a ocupar a atenção de quase todos os congressos de nível internacional. É nessa década que o Brasil, de fato, começa a trabalhar sobre Resolução de Problemas. Fiorentini (1994, p. 189) disse que “Os estudos relativos ao ensino de resolução de problemas só seriam iniciados, de modo mais efetivo, a partir da segunda metade da década de 80. Esses estudos se restringem, quase que absolutamente, a trabalhos traduzidos em dissertações de Mestrado e teses de Doutorado” (p. 9).

A década de 1990 foi considerada como sendo a mais produtiva em pesquisas sobre a metodologia de resolução de problema, no Brasil e no mundo. Andrade (1998) afirma que a resolução de problemas é assumida como metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática.

Sobre isto Onuchic (1999, p. 207) enfoca que “[...] problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal; o foco está na ação por parte do aluno”.

Desta forma demos início à intervenção de nossa pesquisa colocando para os alunos problemas antes mesmo de falar e expor para eles a formalização do conteúdo de função. Esses problemas continham um nível que eles eram capazes de resolver, mesmo sem ter visto nada de função mas possuía as ideias essenciais para a compreensão do conceito.

Encontramos uma definição para solução de problemas, que apresenta um panorama sobre a questão de fazer o aluno aprender a aprender, o trabalho com a resolução de problemas habitua o aluno a dar respostas às inquietações que o problema gera.

A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes (POZO, 1998, p. 9).

Não basta apenas ensinar o aluno a resolver problemas; a metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, tem alguns aspectos que consideramos importantes. Primeiramente, defendemos que o problema deva ser o ponto de partida da discussão em sala de aula de determinado conteúdo, o qual acarretará uma exploração e posteriormente a esta exploração pode-se incentivar que o próprio aluno proponha situações problemas partindo de seu cotidiano; estes três aspectos devem estar intimamente ligados com a metacognição. Também é importante que o professor se coloque como mediador do processo e, sempre que possível, faça com que os alunos busquem respostas para as suas próprias indagações. Na resolução de problemas a resposta final tem o valor menor, é mais importante o processo com que se fez chegar a esta resposta.

Para entendermos o que é um problema, é importante citar a diferença existente entre exercício e problema. Segundo Pozo (1998), os alunos, quando resolvem exercício usam, geralmente, uma fórmula que foi aprendida em determinada aula a qual, para o autor, serve para que o aluno consolide o conteúdo aprendido; já o problema exige questionamento, reflexão e tomada de decisão. Acreditamos que tanto o problema como o exercício desempenham papel fundamental, sendo que o professor deve dosar seu uso em sala de aula.

Um problema para Onuchic (1999) é tudo aquilo que não se sabe resolver mas que, de alguma forma, há o interesse em solucioná-lo.

Para Dante (1988), um problema é uma situação onde se procura algo desconhecido e que não reconhece de antemão nenhum algoritmo que garanta a solução de imediato.

Para complementar, trazemos a definição de Lester (1980) do que seria um problema matemático:

Um problema é uma situação em que um indivíduo ou um grupo é solicitado a desempenhar uma tarefa na qual não existe nenhum algoritmo disponível que determine completamente o método de resolução. A realização desta tarefa tem que ser desejada pelo indivíduo ou grupo. De outro modo, a situação não pode ser considerada um problema (p. 287).

Os Parâmetros Curriculares de Matemática (1997b) também trazem uma definição para o que seria um problema matemático:

[...] uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter o resultado, ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução (BRASIL, 1997b. p. 44).

As definições de Onuchic (1999), Dante (1988), Lester (1980) e dos PCN (1997b) convergem; todas elas indicam que só temos um problema quando não temos a solução de imediato, muito embora, tenhamos a vontade de encontrá-la. Percebam que, para determinado indivíduo, certa situação pode ou não ser um problema visto que, para o indivíduo que já sabe o caminho para a resposta, a situação se configura em um exercício.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) encontramos, para os alunos, que resolver um problema é apenas encontrar sua solução.

A prática mais frequente na Resolução de Problemas consiste em ensinar um conceito, um procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com números do enunciado ou aplicar algo que aprendam nas aulas. Desse modo o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, técnicas e demonstrações (BRASIL, 1998, p. 40).

Esta visão que os alunos possuem é um desafio a enfrentar para trabalhar com a metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, pois eles não aceitam, de princípio, que um problema tenha outras coisas a serem exploradas, além de sua solução final. Os alunos podem ter este conceito de problema devido à abordagem que geralmente é feita em sala de aula, e em que os problemas são passados para os alunos depois da abordagem do conteúdo na lousa.

Portanto, o papel central durante o ensino aprendizagem de Matemática não é encontrar a solução do problema que foi sugerido a ser resolvido. Onuchic (1999) defende que o ensino de Matemática através da resolução de problemas é um caminho para a aquisição de novos conhecimentos; para a autora, compreender deve ser o principal objetivo do ensino.

Continuando, Onuchic (1999) afirma que:

Colocando o foco em Resolução de Problemas, defendemos que: o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de

problema e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem (p. 215).

Ao fazer leituras sobre a metodologia de resolução de problemas, vamos perceber que existem diversas concepções, cada qual com sua contribuição, as quais vêm sendo aprimoradas ao longo do tempo; entretanto, destacamos as concepções de Schroeder e Lester (1989, p. 31 – 34): ensinar sobre resolução de problemas; ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas.

A primeira remete ao trabalho de Polya dando ênfase às suas quatro fases.

A segunda concepção dá ênfase na aplicação do que se aprende na resolução de problemas rotineiros.

A terceira concepção é a que adotamos para nosso trabalho em sala de aula. Nesta concepção o problema matemático é tido como ponto de partida que leva o aluno a compreender o conteúdo, o ensino está centrado no aluno; ele é o protagonista, vai construindo seu conhecimento ao decorrer do processo de resolução do problema, cabendo ao professor mediar este processo e formalizar o conteúdo ao final.

De Ronau, Meyer e Crites (2014) trazemos uma síntese de como trabalhamos a resolução de problemas durante a intervenção de nossa pesquisa, também reforçando a terceira concepção de Schroeder e Lester.

Ensinar por meio de resolução de problemas torna as tarefas ou problemas no núcleo do ensino e aprendizagem da matemática. A introdução de um novo tópico consiste em uma tarefa que os alunos trabalham através de, com base em seus conhecimentos prévios ao conectá-lo com novas ideias. Depois que os alunos exploraram a tarefa introdutória (ou tarefas), sua consideração de métodos de solução, as extensões de exclusividade ou de multiplicidade de soluções, e da tarefa de criar ricas oportunidades para a discussão e o desenvolvimento de conceitos e habilidades matemáticas específicas (RONAU, MEYER E CRITES, 2014, p. 6. Tradução nossa).

Percebemos que esta terceira concepção apresenta a resolução como metodologia de ensino de Matemática, a qual nos apresenta um caminho para se ensinar Matemática e não apenas resolver problemas.

O ponto central de nosso interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática (ONUCHIC, 1999, p.208).

Quando se faz opção de usar a metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através de resolução de problemas, o professor deve desempenhar o papel de mediador do processo que os alunos estão utilizando; ele deve fazer com que os alunos pensem e suscitem seus próprios conhecimentos.

O dialogo que apresentamos a seguir, flagrado em nossa intervenção (não apresentada ainda), destaca as opiniões e os conhecimentos sobre o mundo que envolve alunos:

G1: A pessoa vem almoçar em casa?

PP: Para a situação que você está pensando, ela vem almoçar em casa?

G1: Se ele vier almoçar em casa serão pagas quatro passagens; se não, serão duas.

PP: Correto.

G1: Podemos colocar as duas situações?

PP: Podem sim, porém expliquem por que tem duas respostas.

Já neste outro diálogo destacamos os nossos questionamentos como parte da mediação para que os alunos compreendam o que devem fazer durante o processo de resolução do problema:

PP: O que vocês entenderam do enunciado do problema? Quais cálculos devem ser feitos para saber o valor a pagar?

Gs: Devemos multiplicar por um real e cinquenta centavos.

PP: Multiplicar o que?

Gs: A quilometragem da viagem.

PP: Certo; mas no caso é a distância que é medida em quilômetros.

PP: Mas, e a bandeira não conta?

Gs: Como assim, professor:

PP: Esse valor de R\$ 3,80 o passageiro não paga por ele?

Gs: Paga, sim.

PP: E o que fazemos para incluí-lo na expressão? No final da corrida como é calculado esse valor?

Gs: Somando ao 1,5 . p.

PP: Correto. Escreva a expressão agora.

Também é importante que o professor proponha bons problemas para seus alunos; os problemas devem possibilitar a produção de conhecimento, despertando nos alunos o pensar metacognitivo.

Mesmo sendo o ensino de Matemática através da resolução de problemas uma abordagem consistente, que faz o aluno refletir sobre o que aprende, Schroeder e Lester (1989) afirmam que esta metodologia não vem sendo adotada por muito professores, promotores de currículo e autores de livro didático. Isto pode ocorrer pelos obstáculos encontrados para o ensino de Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) destacam, como obstáculos para o ensino de matemática no Brasil, a falta de formação profissional qualificada, as restrições das condições de trabalho, a falta de políticas educacionais que incentivem o professor e o ajudem e, as interpretações equivocadas das concepções pedagógicas.

Segundo Diniz (1991, p. 13), “[...] um único problema pode ocupar várias aulas, seguidas ou não, sendo necessário sacrificar a quantidade de problemas em favor da qualidade do ensino”. Deve ficar claro, para quem faz uso da metodologia em destaque, que seu uso não pode ocorrer com atropelos; é um trabalho que demanda paciência, o professor não pode desprezar o processo que é vagaroso, pois ricos detalhes aparecem e não podem deixar de ser discutidos. Percebemos que esta perspectiva é contrária à ideia tradicional em que o aluno tem que resolver uma lista grande de exercícios para assimilar o conteúdo.

Quando usamos a metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas para trabalhar um conteúdo escolar em sala de aula, isto desafia o aluno a pensar diante de questões que levam a novos conceitos; sobre isto, Charles e Lester (1986) afirmam que para resolver problemas matemáticos é preciso que quem o esteja resolvendo seja capaz de avaliar aquilo que está fazendo. O que nos remete ao desenvolvimento de habilidades metacognitivas no processo de aprendizagem pois ela propicia, ao aluno, refletir sobre seus próprios processos de pensamento, ou seja, a resolução de problemas está intimamente ligada com a metacognição. Em contrapartida, ao se fazer a opção por uma abordagem tradicional a metacognição não é levada em consideração, como afirmam Charles e Silver (1989, p. 96) “[...] a prática educativa tradicional raramente incorpora fatores metacognitivos e contextuais que leve o aluno a refletir e aprender”.

Ao procurar a origem da palavra metacognição, nos deparamos com seu autor, John H. Flavell, o qual se refere ao tema como “é a cognição sobre a cognição”

(FERNANDES, 2012, p. 67). A metacognição permite, ao aluno, perceber que a Matemática é muito mais do que uma ferramenta para resolver os problemas; ela vai ser enxergada como útil em nossa sociedade, deixando o aluno preparado para resolver situações problemas da sua vida pessoal, familiar, profissional e do seu cotidiano e não apenas as atividades escolares. A metacognição faz com que o aluno seja capaz de avaliar a realização de uma atividade fazendo correções e adequações quando for preciso.

Diversos autores fazem a associação entre resolução de problemas e a metacognição e sempre sugerem que os resolvedores façam questionamentos sobre o que estão fazendo; como exemplo, citamos alguns questionamento que Clement e Konold (1989, apud FERNANDES, 2012, p. 59) sugerem: “o que é que eu sei? o que tenho que saber? o que procuro? ter-me-ão dado informações relevantes e eu ainda não as usei? será que há alguma informação útil ‘escondida’ no problema? [...]”. Com isto, o aluno vai construir sua autonomia, monitorar suas aprendizagens e desenvolver competências.

Percebemos ser de extrema importância e vantajoso o uso da metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas e a metacognição; esses dois conceitos devem ser trabalhados juntos pois potencializam a aprendizagem dos alunos, tornando-os capazes de aprender e aprender, por si mesmos, novos conhecimentos, além de fazer com que eles consigam planejar e monitorar seu próprio desempenho

Outro aspecto que vale a pena citar aqui e acreditamos que possa levar o aluno a compreender o conteúdo, é a exploração de problemas.

Segundo Andrade (1998) durante o trabalho com a exploração de problemas inicialmente é dado o problema para os alunos, que realizam o trabalho sobre ele; seguidamente, o aluno e o professor discutem, juntos, o trabalho que o aluno fez em um processo de reflexão podendo, a partir dessa reflexão chegar, à solução do problema, a despertar novos problemas, até resgatar novos conteúdos, levando a outras reflexões e sínteses. O autor constrói o seguinte esquema para caracterizar processo de exploração de um problema: Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-RS).

Acreditamos que a definição mais precisa para a exploração de problemas matemáticos é dada por Andrade (1998):

No trabalho de exploração de problemas, há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola e por isso pode ir outra vez e mais outra vez (p. 33).

Quando se trabalha na perspectiva da exploração de problema, ele é visto como caminho que nunca chega, sempre há algo a ser descoberto, o que permite, ao aluno, perceber novos conceitos. A exploração de problemas privilegia explorar uma questão matemática em diversas direções.

Percebemos em nosso trabalho em sala de aula, que nossa pesquisa vai além da resolução de problemas matemáticos. Na metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, podemos destacar a proposição de problemas. Ernest (1996) considera a proposição de problemas como sendo essencial em sala de aula; em suas palavras: “A matemática escolar para todos deve estar relacionada com a formulação e resolução de problemas” (p. 28).

Pudemos, ao longo de nossa intervenção em sala de aula, levar nossos alunos a propor problemas. Acreditamos que quando o aluno formula seus próprios problemas estamos trabalhando uma atividade matemática que o faz pensar matematicamente.

Segundo English (1997) a proposição de problemas consiste na formulação de novos problemas que dizem respeito a uma situação particular, um conteúdo. Para o autor, a proposição de problemas possibilita, ao professor, perceber como o aluno está compreendendo o conceito e os processos matemáticos e, ainda, notar como se encontra a criatividade do aluno.

Domite (2009) aposta que quando se ensina Matemática e o alunos resolvem questões por eles formuladas, isto os leva a aprender com mais compreensão, e os leva a valorizar e entender a finalidade do conteúdo estudado.

Creemos, que quando o aluno propõe um problema, significa que ele compreende o conteúdo, compreende o que é um problema, compreende que o conteúdo matemático tem aplicação com o seu cotidiano. Durante a formulação do problema o aluno é encorajado a apresentar seu conhecimento, de forma matemática.

Sobre isso, Chica (2001) afirma que quando o aluno cria seus próprios problemas ele precisa organizar tudo o que sabe sobre o conteúdo para que possa, também, comunicar, através do texto do problema. O aluno passa a ter controle sobre o problema, ou seja, vai além de ser apenas o resolvidor.

A proposição de problema em nossa visão leva o aluno a se sentir como agente ativo do processo de aprendizagem pois quando o professor possibilita que o aluno proponha problemas, ele lhe está dando poder.

Percebemos o entusiasmo dos alunos com a proposição de problemas quando tivemos, em nossa intervenção, a oportunidade de trabalhar, com eles, alguns problemas que eles inventaram. Vejam:

Ao entregarmos as atividades, um dos alunos falou: “professor essa atividade aqui é minha, foi eu que elaborei essa das laranjas.” Falei que algumas daquelas atividades tinham sido realmente elaboradas por eles. Depois desta fala notamos que os alunos logo foram ler os problemas e procurar as atividades que tinham elaborado (p. 95).

Durante nossa intervenção em sala de aula, levamos nossos alunos a propor e explorar os problemas matemáticos.

Em Onuchic (1999) encontramos uma explicação que apresenta bem a contribuição que, a metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas oferece. Onuchic (1999) explica que “quando os professores ensinam Matemática através da resolução de problemas eles estão dando, a seus alunos, um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão”.

Com relação às dificuldades que o professor possui para implantar a resolução de problemas em sala de aula como metodologia de ensino, destacamos Onuchic e Allevato (2009) ao relatarem sobre a formação inicial, afirmando que muitas vezes os professores não dominam uma metodologia de ensino que possa favorecer a aprendizagem em sala de aula, o que, para as autoras, seria suprido através de uma formação inicial mais adequada.

Lester (1993) afirma que a partir de suas experiências em sala de aula a maioria dos alunos não são capazes de resolver problemas não rotineiros; para ele, este fato ocorre por três razões que a consideram principais:

[...] (1) a resolução de problemas é uma forma de actividade intelectual extremamente complexa; (2) há falta de acordo no que respeita a saber o que o processo de resolução de problemas envolve; e (3) são dadas muito poucas oportunidades aos alunos para se envolverem realmente na resolução de problemas (p. 3).

Lester (1993) considera que se o aluno não está envolvido em um ambiente que seja mediado pela resolução de problemas, apenas os alunos com talento para a

Matemática vão conseguir se sair bem ao resolver problemas não rotineiros; outro fato é devido ao evento dos alunos não estarem sabendo como ocorre o processo da resolução de problemas.

Com isto concluímos este Capítulo, convictos de que o ensino aprendizagem de Matemática, fazendo uso da metodologia através da resolução de problemas, tenha vários efeitos positivos: faz o aluno pensar matematicamente, auxilia o aluno a aprender a aprender, desenvolver a criatividade e a iniciativa, favorece a exploração e a independência, evidencia as aplicações existentes na Matemática, favorecendo o uso da Matemática no cotidiano dos alunos e ainda faz com que o aluno perceba e dê importância ao processo para chegar à solução e principalmente desenvolver seu espírito crítico. Tudo isto favorece significativamente a compreensão do estudante.

4. DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS DADOS

Neste Capítulo são apresentadas as atividades trabalhadas em sala de aula. Fazemos uma descrição detalhada e as respectivas análises dos 23 encontros que tivemos com a turma pesquisada; por conta disso sentimos a necessidade de construir um texto extenso mas que foi necessário, levando em consideração que para uma pesquisa no cotidiano da sala de aula é oportuno um olhar detalhado e minucioso dos diversos acontecimentos que a envolvem; sentimos, portanto, o anseio de permanecer com a turma da pesquisa por todo esse tempo; não querendo, porém, que o leitor fique entediado com a leitura das descrições e análises, dividimos as atividades em quatro seções as quais podem direcionar o interesse do leitor. Na primeira seção abordamos atividades com o objetivo de introduzir o conceito de função; a segunda seção trata da representação gráfica; na terceira, as atividades que levam à institucionalização (formalização) do conceito de função e a última abordou uma das famílias de função - a Função Afim.

Vejam resumo do que abordamos nas seções que seguem:

- Conhecendo o ambiente da pesquisa
- Primeira seção: uma introdução do conceito de função
(08/05/13 a 06/06/13, 10 encontros, 19 aulas).
- Segunda seção: representação gráfica de função
(12/06/13 a 24/07/13, 6 encontros, 12 aulas).
- Terceira seção: formalização de função
(25/07/13 a 01/08/14, 3 encontros, 6 aulas).
- Seção extra: trabalho com função afim
(08/08/13 a 29/08/13, 5 encontros, 9 aulas).

4.1 Conhecendo o ambiente da pesquisa

Iniciamos os trabalhos com a turma no dia 20 de fevereiro de 2013, apesar do trabalho com função (objeto da pesquisa) só ter começado posteriormente, pois sentimos a premência de acompanhar a turma desde o início do ano letivo, com autorização do professor titular da turma e dos diretores da escola para isto.

Desejamos ingressar na turma desde o início do ano, a fim de que, ao chegarmos ao conteúdo da pesquisa, estivéssemos adaptados à turma; no dia 20 de fevereiro fomos apresentados à turma, pelo professor titular mantendo nosso primeiro contato; após sua fala ele nos deixou sozinhos e em uma breve conversa falamos nosso nome, contamos sobre nossa trajetória acadêmica e depois pedimos para que cada aluno falasse seu nome e onde estudou em 2012.

Após a apresentação falamos o porquê de estarmos no lugar do professor, apresentando nossa pesquisa, momento em que também discutimos algumas normas que seriam imprescindíveis para o bom desempenho de nossas aulas. Ficaram acordados, com os alunos, os seguintes pontos:

- Deveríamos estabelecer uma relação de respeito e confiança mútua;
- Durante a explicação dos conteúdos todos deveriam prestar atenção;
- Se não compreendessem alguma coisa perguntariam e o professor explicaria quantas vezes fossem necessárias.
- Explicamos para eles que a avaliação seria feita de forma contínua e predominantemente qualitativa.

Durante este tempo que precedeu à pesquisa, trabalhamos com os alunos o conteúdo que o professor da escola estava ministrando para as outras turmas de 1º ano da escola. Tratava-se do primeiro conteúdo do livro didático adotado pela escola, cujo título era “Trabalhando com a informação”.

Propomo-nos a introduzir o trabalho com esses alunos já utilizando a metodologia de resolução de problemas para analisar sua receptividade em relação a esta metodologia de ensino. Diante da nossa forma de ensinar sentimos que, a princípio, os alunos, ficaram receosos e falavam sempre que não estavam entendendo o conteúdo chegando alguns alunos, a ir à direção da escola reclamar, alegando que não estavam aprendendo conosco.

Acreditamos que isto tenha ocorrido porque os alunos estão mais acostumados com o professor explicando primeiro o conteúdo e resolvendo exemplos, para só depois propor alguma coisa para o aluno fazer; nossa proposta era contrária a esta; entretanto, no decorrer das aulas fomos conquistando os alunos e os motivando, sempre dizendo que eles estavam aprendendo e sentimos que evoluíram na aceitação da proposta.

4.2 Primeira seção: uma introdução do conceito de função

Nesta primeira seção de atividades trabalhamos as ideias introdutórias necessárias para o entendimento do conceito de função, partindo sempre de uma ideia intuitiva. Trabalhamos as noções de variável, grandezas, relação, proporcionalidade, regularidade, generalização e correspondência. Nesta primeira seção abordamos as representações verbal, tabular, pictórica e a algébrica. A primeira seção teve início no dia 08 de maio de 2013, com término em 06 de junho de 2013, totalizando 10 encontros perfazendo o total de 19 aulas.

1º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 08/05/2013

Antes de começarmos com a aplicação das atividades da pesquisa os alunos cobraram os resultados da avaliação que eles tinham feito na última aula. Entregamos as provas e fizemos alguns comentários sobre seus desempenhos, sobre as questões abordadas e a respeito da falta de compromisso de alguns alunos em estudar em casa. Tentamos então motivá-los com algumas palavras de entusiasmo.

Sentimos a necessidade de explicar como seria desenvolvida nossa pesquisa, já que estávamos neste dia, começando a intervenção. Falamos que estaríamos começando o conteúdo de **função** e que o conteúdo estudado faria parte do segundo bimestre. Pedimos que os alunos anotassem essas informações em seus cadernos para que tivessem um marco da divisão entre o primeiro e o segundo bimestre.

Explicamos para os alunos que:

- Ao fim de todas as aulas as atividades seriam recolhidas;
- Toda anotação sobre a resolução do problema seria feita na folha da atividade;
- Tudo que fosse anotado por eles, mesmo que fosse identificado como erro, não deveria ser apagado;
- A maior parte das atividades seria feita em grupos de três pessoas, algumas podendo ser feitas em dupla ou individualmente;
- Mesmo as atividades sendo resolvidas em grupo todos os componentes receberiam a atividade e deveriam entregá-las no final da aula;
- As atividades que eles iriam receber só conteria o enunciado. Os itens com perguntas iriam ser apresentados no projetor, um por um, ou seja, apresentaríamos o item (a) e só após sua resolução pela maior parte dos grupos é que apresentaríamos o item seguinte, com o intuito de fazer com que todos caminhassem juntos e para que eles sentissem um pouco do que um problema pode ter várias explorações (só usamos este método para as primeiras atividades, pois alguns grupos terminavam mais rapidamente a atividade e ficavam ociosos esperando os próximos enunciados).
- Eles leriam o problema e, se surgissem dúvidas, solicitariam a ajuda do professor.

Após essas explicações pedimos que os alunos formassem grupos com três componentes. Eles se dividiram por afinidade. Devido a isto, um dos grupos havia sido formado por quatro alunos e mediamos sua reconstituição, deslocando um dos alunos para um grupo que só contava com dois membros.

Como havia em sala de aula 28 alunos, foram formados oito grupos com três alunos e duas duplas.

Entregamos o roteiro da Atividade 1 para os grupos e pedimos que eles lessem o enunciado e fizessem o que se pedia. Rapidamente, alguns grupos começaram a solicitar nossa presença; neste momento a pergunta mais comum era se eles haviam preenchido a tabela de forma correta.

Atividade 1³ – Mistura de tinta e água:

³ Atividade retirada e adaptada de Zatti (2010, p. 47-48).

Para preparar suas tintas um pintor costuma dissolver cada 4 latas de tinta concentrada em 8 latas de água. Complete a tabela, relacionando a quantidade de água (litro) para dissolver a quantidade de tinta (litro) dada:

Quantidade de tinta concentrada (litros)	Quantidade de água (litros)
1	
2	
	6
4	8
15	
40	
T	

- Se o pintor usar mais tinta concentrada, o que deverá fazer com a quantidade de água, para manter a mesma concentração?
- Quais as grandezas envolvidas na situação? Elas variam?
- Sabendo a quantidade de tinta concentrada, ele pode usar qualquer quantidade de água? Por que?
- Para cada lata de tinta concentrada, quantas latas de água ele usa?
- É possível escrever uma “fórmula matemática”⁴ para determinar qualquer valor que relacione o número de latas A de água, com o número de T de latas de tinta concentrada.

O objetivo da Atividade 1 era levar os alunos a completar a tabela, identificar as grandezas envolvidas na situação mas sobretudo fazer com que tivessem um primeiro contato com uma situação que envolvesse função.

Um participante do grupo 2 nos perguntou quantos litros havia em cada lata e sugerimos que lesse o problema.

Análise:

Percebemos que, muitas vezes, ficamos esperando determinadas respostas dos alunos e se os mesmos fazem uma pergunta diferente da

⁴ Usamos a expressão “fórmula matemática”, porque acreditamos que a mesma facilite a compreensão do aluno porém no final da atividade expomos para os alunos que o certo seria expressão algébrica e que nas próximas atividades estaríamos usando esta última expressão.

esperada, o professor diz que não é necessária sua indagação naquele momento ou que ele está errado, quando deveríamos questioná-lo para sondar o que ele pensou para dar aquela resposta ou fazer aquela pergunta.

O grupo 1 solicitou nossa presença.

G1: Professor. Não entendemos.

PP: Não entenderam o que?

G1: O que é para fazer.

PP: Já leram o enunciado?

G1: Sim.

PP: Então, leiam novamente pra mim.

PP: O que diz o problema? O que é indicado quando o pintor for usar a tinta?

G1: Que seja misturada com água.

PP: Como é feita essa mistura?

G1: A cada 4 latas de tinta usam-se 8 de água.

PP. Então, olhem para a tabela e digam quantas latas de água são necessárias para dissolver uma lata de tinta.

G1: 2 latas de água.

PP. Entenderam como preencher a tabela? Façam o resto.

G1: Entendemos.

Quando passávamos nos grupos notamos que alguns deles haviam confundido o T, que foi colocado na coluna referente à quantidade de tintas para uma possível generalização da situação, com o total e somaram os valores da segunda coluna. Os alunos não perceberam que a tabela estava sendo preenchida apenas por alguns valores e que em um intervalo, por exemplo, entre 4 latas de tintas e 15 latas, existem outros valores.

Vejam a resolução do grupo 6:

Quantidade de tinta concentrada (litros)	Quantidade de água (litros)
1	2
2	4
3	6
4	8
15	30
40	80
T	130 A

Figura 2: Preenchimento da tabela do grupo 6 referente à atividade 1

Análise:

Observamos que, em um primeiro obstáculo os alunos que o encontram já tendem a desistir de resolver o problema; eles não querem encontrar nenhuma dificuldade mas querem que logo o professor resolva para eles. Nesta primeira atividade percebemos que os alunos têm insegurança nas suas respostas, pois nos chamavam constantemente para olhar se suas respostas estavam corretas; diante de qualquer problema, ou dúvida encontrada, geralmente desistem de resolver o problema e nos procuram para dizer como fazer, Isto também ocorre até quando eles conseguem resolver um problema ou exercício, solicitando que o professor diga se está certo ou errado. Nosso papel foi fazer com que os alunos não parassem nem desistissem mas continuassem tentando resolvê-lo; para tal, questionávamos e sugeríamos caminhos aos alunos porém tentávamos ao máximo não lhes apresentar as soluções.

O item (a) da atividade 1 todos os grupos conseguiram resolver sem a ajuda do professor. Os questionamentos que ocorreram foram referentes a se estavam corretas as respostas dadas por eles.

Respostas do item (a):

G1: Aumentar o volume da água.

G2: Acrescentar mais água.

G3: Se um pintor usa mais tinta concentrada tem que acrescentar mais água.

G4: Acrescentar mais água.

G5: Se usar mais tinta vai aumentar a quantidade de água.

G6: Usar o dobro de água do tanto usado de tinta

G7: Se ele aumentar a quantidade da tinta, ele terá que usar o dobro de água.

G8: Colocar água duas vezes mais que a tinta.

G9: Botar água duas vezes mais que tinta.

G10: Duplicar a água para manter a mesma concentração.

Neste item os alunos dos grupos G6, G7, G8, G9 e G10, já conseguiram generalizar a relação funcional, de forma verbal, ao afirmar que a quantidade de água seria o dobro da quantidade de tinta; as respostas esperadas inicialmente eram as que foram dadas pelos outros grupos.

Análise:

Acreditamos que a simplicidade da atividade possa ter ajudado os alunos a generalizar rapidamente. Identificamos, nas respostas dos alunos, que alguns deles conseguiram perceber que a taxa de variação da situação era igual a 2 (grande ideia 2). A representação verbal tem papel importante para que seja feita a transição para a forma algébrica, quando o aluno consegue generalizar de maneira verbal, esta passagem fica facilitada.

Todos os alunos conseguiram resolver o item (b); apenas o grupo 2 solicitou nossa ajuda - suspeitamos que os demais grupos tenham copiado a resposta do grupo 2 uma vez que ainda não tínhamos falado para eles sobre o que era grandeza.

O grupo 2 chegou á resposta correta após ter tirado algumas dúvidas com o professor. Vejam a discussão:

G2: Quais são as grandezas professor?

PP: Olhando para a tabela, qual a grandeza que você identifica nesta situação?

G2: Como assim?

PP: O que está sendo medido?

G2: Quantidade de água e tinta.

PP: Certo. E como representamos essa medida?

G2: Através do litro?

PP: O litro é a unidade de medida. A unidade de medida é o que representa essa grandeza.

G2: Volume?

PP: Sim.

Os alunos não tiveram dúvida alguma para resolver o item (c). O item (d) também foi resolvido sem qualquer problema; apenas um aluno do grupo 5 nos chamou e falou que não estava entendendo:

G5: professor, explique a letra D.

PP: Leia o que se pede.

G5: Não estou entendendo.

PP: Para cada lata de tinta vão ser colocadas quantas de água?

G5: 8

PP: Olhe na tabela.

G5: Não sei professor.

PP: O que está sendo representado na primeira e na segunda colunas?

G5: Latas de tinta e latas de água.

PP: Então, observem na tabela. Quando forem 4 latas de tinta, serão quantas de água?

G5: 8

PP: E para duas latas de tinta são quantas de água?

G5: 4

PP: E para uma lata de tinta?

G5: Ah, professor, entendi.

Os alunos não conseguiram resolver o item que solicitava a expressão algébrica que representava a situação; é provável que isto tenha ocorrido por ser o primeiro contato no ano da pesquisa, dos alunos com o conteúdo de função. Pedimos para os alunos que já haviam terminado que esperassem um pouco pois iríamos explicar este item no quadro.

Análise:

Nossa intenção, colocando uma situação de fácil identificação da expressão algébrica, se deu por ser o primeiro contato dos alunos com o conteúdo; mesmo assim e apesar de os alunos identificarem facilmente que se tratava do dobro de água, para qualquer quantidade de tinta, pois

expressaram isso através da representação verbal, eles não conseguiram escrever a expressão algébrica.

Quando todos terminaram fomos para o quadro e explicamos que o item solicitava que fosse encontrada uma “fórmula matemática” para poder representar aquela situação. Começamos fazendo o seguinte questionamento:

PP: Quanto de água era preciso para dissolver 150 litros de tinta?

Alunos: 300 (em coro)

PP: A cada quantidade de tinta o que acontece com a quantidade de água?

Alunos: Dobra.

PP: Como poderíamos encontrar uma “fórmula” para esta situação? Tentem encontrá-la e me chamem para que eu possa analisar e orientar.

Pela observação em sala e na análise das atividades, percebemos que, apesar de nossa explicação, apenas os grupos 2, 5 e 6 tentaram resolver este item; o que mais se aproximou da solução foi o grupo 2.

G2: É assim professor? (nos mostrando: $t = 2a$)

PP: Acho que você confundiu. T representa o que?

G2: Quantidade de tinta.

PP: Com essa “fórmula” você consegue obter a quantidade de tinta?

G2: Troquei professor. Espera. É assim? (neste momento o aluno nos apresentou sua nova resposta, ou seja, $A=2t$)

PP. Correto. Mas faça alguns testes com os valores que estão na tabela.

Este grupo conseguiu encontrar a expressão algébrica da situação, porém trocou A por x ($x=2t$) e não fez os testes que solicitamos; os outros dois grupos que tentaram resolver não conseguiram a resposta correta; como percebemos que a maioria dos alunos não estava tentando resolver a questão, decidimos ir mais uma vez ao quadro explicar como poderiam fazer para encontrar a fórmula; fizemos esta explicação buscando as representações verbais que eles apresentaram no item (a). Aproveitamos para motivar os alunos e dizer que eles deveriam ser mais autônomos e não desistir tão facilmente de resolver a atividade.

Por fim, apresentamos para os alunos as definições de grandeza, variável e alguns exemplos delas.

Análise:

Percebemos que os alunos têm dificuldade para interpretar o enunciado da atividade; acreditamos que isto ocorra porque os alunos não têm o hábito de ler nas aulas de Matemática, ou melhor, a aula de Matemática não propicia a prática de leitura. Em geral, os alunos fazem uma leitura rápida e logo em seguida recorrem ao professor.

Falta, ao aluno, certa habilidade metacognitiva. Para Santos (1997), o processo de metacognição é aquele que faz com que o aluno pense sobre seu próprio pensamento; para o autor a metacognição favorece a dinamizar o ambiente da sala de aula, levando o aluno a descrever e explicar os processos que utilizou para, por exemplo, resolver um problema.

Olhando para as representações múltiplas nesta primeira atividade, os alunos fizeram uso das representações verbal, tabular e algébrica. De acordo com Cooney, Beckmann, Lloyd (2010), o aluno tem que saber, além dos fatos e técnicas para resolver problemas sobre função, reconhecer as vantagens e limitações das representações algébricas, tabular e gráfica. Nesta primeira atividade os alunos já utilizaram três representações. Para Andrade e Saraiva (2012), ao trabalhar com diferentes formas de representações de funções, os alunos poderão desenvolver uma compreensão mais aprofundada deste conceito.

A aula ocorreu em um ambiente de diálogo, havendo a interação professor-aluno (em nossa mediação em cada grupo e para a turma toda) e aluno-aluno (entre os grupos). Sobretudo, a aula favoreceu que o aluno tivesse seu primeiro contato conosco com o conteúdo de função.

2º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 09/05/2013

A aula foi iniciada pedindo aos alunos que se dividissem em grupos de três pessoas, que poderiam ser os mesmos da última atividade, mas não tinha problema se quisessem permutar.

Foi entregue o roteiro da Atividade 2 e solicitado que eles lessem o enunciado da questão e tentassem resolvê-la.

Atividade 2⁵ – O preço da passagem de ônibus:

O preço da passagem de ônibus entre as cidades de Lagoa Seca e Campina Grande é, R\$ 2,25. Com base neste dado, construa uma tabela, relacionando o valor a ser pago com o número de passagens.

Agora, responda às seguintes questões:

- a) Quanto uma pessoa pagaria por dia se morasse em Lagoa Seca e trabalhasse em Campina Grande? E em uma semana? E em um mês?*
- b) É possível saber a quantidade de passagens pagas se o valor total pago corresponde a R\$ 54,00?*
- c) Quais as grandezas envolvidas nesta situação?*
- d) É possível estabelecer uma relação matemática que possa expressar esta situação? Qual?*
- e) Em sua opinião, o preço da passagem de ônibus entre Lagoa Seca e Campina Grande é justo? Por que?*

A atividade tinha, como objetivo, fazer com que os alunos construíssem uma tabela que relacionasse as grandezas envolvidas na situação; familiarizando-se, desta forma, com aspectos de correspondência e relação. Na atividade são trabalhadas as representações tabular, algébrica e verbal.

O grupo 4 nos chamou e perguntou se era para fazer a tabela, ao que indicamos que lessem o enunciado.

Outros alunos perguntaram:

⁵ Atividade formulada pelo pesquisador.

G5: Como assim fazer uma tabela?
PP: Lembram da atividade de ontem? Tentem fazer.
G5: Mas, quais os valores irão ser colocados na tabela?
PP: Qual a informação que o enunciado nos fornece?
G5: Valor da passagem.
PP: Em uma das colunas, sim. E na outra coluna?
PP: R\$ 2,25 representa o que?
G5: O valor da passagem.
PP: Este valor corresponde a quantas passagens?
G5: uma.
PP: E por duas quanto pagaria?
G5: 4,50
PP: E três? Entenderam? Coloque agora na tabela.

Outros grupos nos chamaram e fizemos a mesma discussão.

Análise:

Percebemos que, sozinhos, os alunos sentem insegurança em realizar o que se pede, para itens claros e fáceis, como no caso quando se pede para construir uma tabela, os alunos ainda ficam inseguros e perguntam como fazê-la. Portanto, existe forte dependência dos alunos para com o professor; eles perguntam como proceder a cada passo; eles tinham dificuldade de ir adiante na resolução da atividade sem que houvesse consulta ou afirmação do professor. Notamos, nisto, uma falta de um pensar metacognitivo. Sobre esta insegurança, Chevallard, Bosch e Gascón (2001) tratam “[...] os alunos tendem a delegar ao professor a responsabilidade de suas respostas, como se não importasse a eles o fato de serem verdadeiras ou falsas; como se o único objetivo de sua atuação fosse responder às perguntas do professor [...]”.

Ao passar pelo grupo 1, percebemos que colocaram a representação da tabela na ordem contrária dos outros grupos.

Valor a ser pago	Quantidade

Figura 3: Representação tabular do grupo 1 referente à atividade 2.

PP: Não seria melhor trocar a ordem das colunas?

G1: Porque professor?

PP: Não que esteja errado da forma que vocês fizeram, com a ordem trocada também dará certo, mas para manter um padrão com toda a turma e vai ser melhor para fazer a relação.

Já o grupo 8 não descreveu o que representa cada coluna.

PP: Dá para saber o que está sendo representado nesta coluna? Não está faltando alguma coisa?

G8: Sim. Vamos colocar agora.

Eles colocaram a descrição no final da coluna.

Tabela do Grupo de passagem Campina Grande A Lagoa Seca	
1	R\$ 2,25
2	R\$ 4,50
3	R\$ 6,75
4	R\$ 9,00
5	R\$ 11,25
Quantidade	Valor

Figura 4: Representação tabular do grupo 8 referente à atividade 2.

Vários grupos nos chamaram questionando quantos valores deveriam ser colocados na tabela; falamos que ficava a critério de cada um.

Todos os grupos colocaram os valores que correspondiam à quantidade de passagens, em sequência; apenas o grupo 1 dispôs outros valores porém no final da tabela somaram os valores, mesmo tendo sido feita por nós a observação, no encontro anterior, que este T não significava total. Vejam a tabela do grupo 1:

Passagem	V. a ser pago
1	2,25
2	4,50
3	6,75
4	9,00
8	18,00
30	22,50
20	45,00
40	90,00
T	198

Figura 5: Disposição das variáveis na tabela feita pelo grupo 1 referente à atividade 2.

Notamos que as variações feitas com a quantidade de passagens e o valor a ser pago, ficaram limitados a situações cotidianas; poderíamos pensar em valores como 62, 96 etc, independentemente da situação cotidiana.

Com relação à resolução do item (a) os alunos não tiveram problemas mas ocorreram várias discussões. O primeiro questionamento, que foi feito por quase todos os grupos, foi se a pessoa trabalhava os sete dias da semana ou os cinco dias úteis. Explicamos que seriam eles que decidiriam como seria. Na análise das respostas dos grupos detectamos que foram usadas as duas possibilidades, sendo que o grupo 1 usou as duas.

Análise:

Quando se trabalha com problemas que fazem parte do cotidiano dos alunos, os mesmos se sentem mais envolvidos na situação. Notamos grande envolvimento dos alunos nas discussões que o problema gerou; parece-nos que quando os alunos estudam uma situação que faz parte de

seu cotidiano eles se sentem mais envolvidos e participativos provocando, neste caso, autonomia.

Outros elementos interessantes estiveram presentes nas discussões:

G1: A pessoa vem almoçar em casa?

PP: Para a situação que você está pensando ela vem almoçar em casa?

G1: Se ele vier almoçar em casa serão pagas quatro passagens; se não serão duas.

PP: Correto.

G1: Podemos colocar as duas situações?

PP: Podemos, sim, porém expliquem por que tem duas respostas.

a) - Se for pelo manhã e voltar a noite é 4,50. Mas se vier almoçar em lagoa será 6,75. Com uma semana

Figura 6: Resposta do grupo 1 ao item (a) da atividade 2.

Apesar de o grupo colocar as duas respostas, foram consideradas apenas três passagens; o correto seria quatro, ou seja, R\$ 9,00 e não R\$ 6,75. Acreditamos que isto ocorreu por falta de atenção dos componentes do grupo. Quando questionamos quanto gastariam de passagem em um dia, os alunos do grupo fizeram para os dois casos; já quando perguntados quanto seria pago em uma semana e em um mês, fizeram apenas se a pessoa almoçasse em casa, porém as respostas estão incorretas.

a) pagaria 4,50 se se vier almoçar ele pagaria 6,75. Se for de manhã e voltar a noite. Com uma semana seria 40,50 se viesse almoçar. Com um mês seria 175,50 se viesse almoçar

Figura 7: Resposta do grupo 1 ao item (a) referente à atividade 2.

O grupo 6 também fez alguns questionamentos sobre a quantidade de dias, transcrito em seguida.

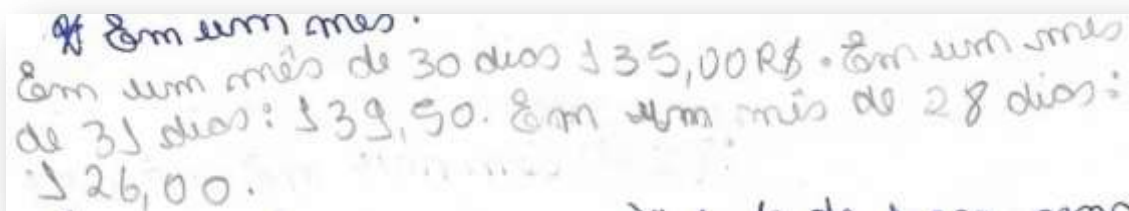
G6: Professor, essa questão está mal elaborada.

PP: Por que?

G6: Um mês pode ter 30 dias, 31 dias e até 29.

PP: Vocês estão corretos, porém para termos uma base façam como se o mês tivesse trinta dias.

Na resposta do grupo 6 foram apresentadas diversas possibilidades.



✱ Em um mês.
 Em um mês de 30 dias: R\$ 35,00. Em um mês de 31 dias: R\$ 39,50. Em um mês de 28 dias: R\$ 26,00.

Figura 8: Resposta do grupo 6 ao item (a) referente à atividade 2.

Acreditamos que, mesmo depois de termos pedido para que eles considerassem um mês de 30 dias, acreditamos pela resposta, que eles continuaram pensando que a atividade estava mal elaborada.

A resposta do item (a) do grupo 7, nos chamou a atenção porque, apesar de estarem trabalhando em dupla, percebemos que responderam de forma diferente. Este grupo foi formado por dois alunos que sobraram após a escolha dos grupos pelas turmas, ou seja, pode ter ocorrido falta de afinidade entre eles fazendo com que não chegassem a um acordo em suas respostas.

Os grupos 2 e 8 consideraram apenas cinco dias da semana dando, como resposta, o valor a pagar R\$22,50 porém quando fizeram quanto seria gasto por mês obtiveram, como resposta, R\$ 90,00, ou seja, consideraram que um mês tem apenas 20 dias úteis, quando, na verdade, tem em média 22.

O item (b) foi respondido sem nenhum questionamento; apenas o grupo 7 não percebeu que se tratava de uma divisão, da operação inversa e fizeram por tentativa e erro; já no item (c) os alunos insistiram que as grandezas eram número e reais. Neste

caso, falamos para os grupos que nos questionaram que reais era a unidade de medida usada, como exemplificado no diálogo com o grupo 2, transcrito em seguida.

PP: Quais as grandezas usadas?

G2: Reais.

PP: Para esta situação temos duas grandezas. Quais são?

G2: Passagem e reais.

PP: Vejam, vocês estão confundindo grandeza com unidades. Lembra-se da atividade de ontem? Qual a unidade e grandezas da atividade de ontem?

G2: Litros e volume.

PP: Correto. E para a situação de hoje. Olhem para a tabela. O que está representado nas duas colunas?

G2: Número de passagens e valor a ser pago.

PP: Ok. Mas teríamos outra palavra para trocar por número de passagens.

G2: Quantidade.

PP: Correto. Então, quais são as grandezas?

Acreditamos que os grupos 5 e 9 não tenham entendido que a situação continha duas grandezas, pois colocaram como resposta “Quantidade de valor”.

O item (e) pedia para que fosse dada a expressão algébrica para a situação. Percebemos que os alunos ainda continuavam com dificuldades em generalizar para um valor qualquer porém vários grupos conseguiram dar a resposta correta mas notamos que eles ainda não conseguem escrever a expressão na forma $F(x) = ax$, as respostas geralmente surgem da seguinte maneira: $2,25.Q$, em que deveria ser $2,25.Q=V$, muito embora este fato tenha persistido, pela maioria dos alunos, até o final de nossa intervenção.

Análise:

Neste item percebemos que, apesar de os alunos não fazerem a representação da forma considerada mais adequada, eles compreenderam a importância que a taxa de variação tem para a construção do modelo. Desenvolvimento da grande ideia 2, sobre a covariação e taxa de variação, principalmente nos entendimentos essenciais 2a e 2b. Colocamos aqui, também, as concepções dos professores no trabalho de Oliveira (1997) sobre ser importante introduzir o conceito de função por meio da dependência ou correspondência entre grandezas ou variáveis,

sobre o uso das variáveis para introduzir o conceito de função; o trabalho de Pelho (2003) também afirma como sendo importante.

Quando percebemos isto, sentimos a necessidade de mais uma vez ir ao quadro e explicar para eles a forma correta. Neste momento já faltavam 10 minutos para o término da aula e sentimos que os alunos ficaram inquietos, arrumando o material em suas bolsas. Ninguém questionou o item (f) e todos começaram a entregar a atividade pedindo para que os liberássemos. Recolhemos as atividades e quando faltavam 5 minutos para o término da aula deixamos que saíssem da sala de aula.

As respostas que encontramos para o item (f) foram as seguintes:

G1: “Não. É muito próximo teria que ser mais barato”. “eu acho que é”. “Eu acho que não pra mim era para ser 1,50 o valor da passagem”. (sic)

G3: “Sim é justo porque o ônibus não anda sem combustível.” “Sim”. (sic)

G4: “Não, por que o salário mínimo já é pouco demais e pra pagar a passagem é muito injusto isso”. “Não, porque o salário mínimo que é o que a maioria das pessoas ganham, é pouco”. “Não, porque o pobre brasileiro ganha pouco e quando chega o final do mês seu salário é muito pouco”. (sic)

G5: “Não porque por dia uma pessoa paga 4,50 R\$ e quando a passagem aumenta o boço vai sentir muito a diferença”. (sic)

G6: “Não é justo, porque há muitas pessoas que não tem condições de pagar pois a ida é 2,25 e a volta 2,25 fica à 4,50 isso no fim do mês faz uma grande diferença no salário”. “Não, porque tem muita gente que não tem condição de pagar. E de pouco a pouco esta aumentando a passagem”. “Não, porque tem muitas pessoas que não podem pagar esse valor todos os dias”. (sic)

G7: “Acho que sim. Porque de Lagoa Seca pra Campina Grande é muito longe”. “Não! Por que paga um valor simbólico pouco, mais o pouco que é pagado não vale 2,25 para CG. Por que a trajetória é pouca”. (sic)

G8: “Sim por que o ônibus anda sem combustível”. “Sim porque é muito perto e muito barato”. (sic)

Os grupos 2 e 9 não responderam a este item.

Alguns dos alunos, mesmo estando trabalhando em grupo, apresentaram respostas diferentes de seus companheiros de equipe, sendo que no grupo 7 seus dois componentes discordaram nas respostas.

Este último item, além de fazer com que os alunos expressassem suas opiniões e serem mais críticos, também nos permitiu perceber que eles compreenderam bem o problema.

Análise:

Nesta atividade os alunos perceberam que uma mesma situação pode possuir mais de uma representação, pois nela pudemos trabalhar com as representações tabular, algébrica e verbal. Há uma facilidade de desenvolver a grande ideia 5 de Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) sobre as representações de funções.

Durante o percurso pelos grupos pudemos perceber que alguns alunos encontram dificuldade em diferenciar o que é grandeza e o que é medida, confundindo ambas.

Os estudantes puderam dar suas opiniões com respeito a uma temática de interesse local gerando, desta forma, julgamento crítico da situação, o que percebemos nas respostas do que achavam sobre o preço da passagem de ônibus entre Lagoa Seca e Campina Grande.

3º ENCONTRO - DIA 15/05/2013 (TRÊS AULAS)

Como nas quartas-feiras tínhamos a segunda e terceira aulas, pedimos previamente ao professor que ministra a primeira aula para nos ceder a turma a fim de aplicarmos uma atividade de recuperação que ainda estava pendente do primeiro bimestre e que o sistema escolar normatiza que seja feita, isto é, deveria ser realizada. O intuito de solicitarmos a aula do professor era poder aplicar mais uma atividade da pesquisa quando os alunos terminassem suas atividades de recuperação. Nossa previsão era que os alunos concluíssem a atividade já na primeira aula, que terminava às 13h40min, porém permaneceram até as 14h10min; só a partir deste momento começamos a desenvolver a atividade da pesquisa.

Alguns alunos nos questionaram falando que estavam cansados e pediam para que os liberassem da aula. Contudo, dissemos a eles que já havíamos combinado que teríamos aula normal neste dia; pedimos então para que se reunissem em duplas. Um

aluno ficou insatisfeito e fez o seguinte questionamento: “Por que vai desmanchar os grupos? Estava tão boa nossa formação”. Expliquei a este aluno e aos demais que estaríamos, nesse dia, trabalhando um jogo e que precisávamos que eles ficassem em dupla. Percebemos que os alunos possuem suas afinidades em sala de aula e quando solicitado que mudem de companheiros, eles não gostam. Desta forma, deixamos, nas atividades que fizemos com três alunos por grupo que a formação ficasse a seu critério.

Em nosso planejamento inicial essa atividade seria a sexta a ser aplicada com os alunos porém, como nas duas primeiras atividades sentimos que os alunos encontraram dificuldade de representar algebricamente as situações, resolvemos antecipá-la.

Comentário:

Por mais bem planejada que seja a aula, o professor deve ter consciência de que este planejamento é flexível visto que imprevistos acontecem; é preciso estar sempre atento e em constante avaliação do processo, medindo como a turma vem avançando para, se preciso, adequar o planejamento.

Acreditamos que este jogo possibilitaria que os alunos conseguissem compreender melhor como fazer a representação algébrica.

O jogo⁶ utilizado envolve a oralidade do aluno e é indicado o trabalho em duplas. Entregamos, às duplas, uma tira de papel contendo as seguintes dez frases: indique o dobro do número; indique o sucessor do número; indique o quadrado do número menos um; indique o triplo do número menos um; indique o número mais cinco; indique o quadrado do número; indique o dobro do número menos um; indique quatro vezes o número, menos um.

As regras do jogo são as seguintes: um aluno da dupla escolhe aleatoriamente uma tira de papel, sem que o outro veja seu conteúdo. O aluno que ficou sem a tira propõe um número qualquer e o outro executa com esse número a operação indicada dizendo apenas o resultado obtido. Isso deveria ser repetido até que fosse descoberta a instrução contida no papel. No passo seguinte o aluno precisa escrever a expressão algébrica correspondente. A seguir, trocam-se os papéis entre as duplas, até esgotar todas as possibilidades entre os alunos. Ganharia o jogo o aluno que acertasse as

⁶ Jogo retirado e adaptado de Rossini (2006, p. 102 – 103).

expressões com menos palpites. Nosso intuito com o jogo era fazer com que os alunos fizessem a passagem da representação verbal para a representação algébrica.

Uma das dificuldades encontradas foi iniciar o jogo. Nós explicamos as regras e fizemos algumas simulações na lousa, pedindo que alguns alunos falassem um número, dispondo-o em uma tabela no quadro com seus respectivos resultados. As expressões que utilizamos foram o “triplo de um número” e “dobro de um número mais 3”. Para identificar verbalmente essas expressões os alunos não tiveram dificuldade alguma; após fazerem esta identificação colocamos, no quadro, as expressões algébricas referentes a essas situações.

Apesar da nossa intervenção, eles falaram que não entenderam como deveriam jogar. Em uma segunda explicação algumas duplas começaram o jogo. Como algumas duplas continuaram a falar que estavam sem entender, decidimos ir a cada dupla, fazer uma simulação de como se jogava e então jogamos a primeira rodada da partida com eles.

Análise:

Percebemos que alguns grupos ficaram bem entusiasmados com a brincadeira; o jogo em sala de aula permite que o aluno se envolva com o conceito de forma mais espontânea e não de forma mecânica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) afirmam, com relação aos jogos no ensino de Matemática, que eles:

[...] Constituem uma forma interessante de propor problemas pois permitem que esses sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações [...] (p. 46).

Algumas duplas, apesar de estarem jogando, não estavam registrando as expressões algébricas nas folhas que entregamos mas estavam apenas adivinhando verbalmente, as expressões.

Análise:

Percebemos que esta abordagem ajudou a maioria dos alunos a compreender melhor como modelar a representação algébrica de uma função; os alunos ficam bastante entusiasmados quando estão trabalhando com brincadeiras.

Apesar de alguns alunos não obterem a expressão algébrica como era o objetivo do jogo, a maioria deles conseguiu fazer a transformação da linguagem verbal para a algébrica. Alguns alunos fizeram o registro verbal, algébrico e ainda testaram alguns valores. Tal como nas duas primeiras atividades da pesquisa, identificamos que os alunos conseguem mais facilmente expressar a situação verbalmente do que algebricamente.

O jogo permitiu que, embora de maneira não formal, os alunos percebessem que quando o valor da variável independente é alterado automaticamente a variável dependente também altera; com isto estávamos desenvolvendo o entendimento essencial 2b que versa sobre isto. Segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) o ensino aprendizagem a partir da ênfase na covariação e taxa de variação fornece indícios para o entendimento do conceito de função.

4º ENCONTRO - DIA 16/05/2013 (DUAS AULAS)

A aula foi iniciada lembrando aos alunos que nas atividades que havíamos feito nas aulas passadas usamos alguns termos, desde que sentimos a necessidade que eles compreendessem. Comentamos e definimos, então, o que era relação e correspondência em Matemática e para exemplificar usamos as Atividades 1 e 2 trabalhadas, respectivamente, nos primeiro e segundo encontros, às quais facilitaram o entendimento dos alunos. Neste momento fizemos uma explanação do que é uma expressão matemática, deixando claro para os alunos a diferença entre expressão numérica e expressão algébrica. Ainda retomamos as expressões algébricas utilizadas nas Atividades 1 e 2 com o objetivo de fazer com que os alunos entendessem bem como se dava o processo para encontrá-las.

Comentamos que havíamos identificado, nas atividades já realizadas, que eles tinham tido facilidade para representar a expressão de forma verbal e que era fácil fazer sua transformação para a expressão algébrica. Utilizamos, como exemplo, a Atividade 2 do segundo encontro e colocamos no quadro a seguinte expressão verbal – “O valor a pagar por dado número de passagens é igual a dois vírgula vinte e cinco, vezes o número de passagens” daí, mostramos como é feita a transformação para a linguagem simbólica. Os alunos falaram que entenderam e não houve nenhum questionamento.

Análise:

Percebemos que, quando se trabalha em um ambiente propondo que os alunos resolvam problemas antes da formalização do conteúdo, ensino de Matemática através da resolução de problemas, esta formalização fica mais fácil de ser feita pois só estamos explicando, de forma matemática, aquilo que o aluno já usou intuitivamente para resolver os problemas. Então, quando colocamos os termos matemáticos em sua linguagem com rigor, quando citamos os problemas resolvidos, eles logo falam que compreenderam o termo em jogo.

Em seguida, fomos trabalhar a Atividade 4. Como neste encontro estavam presentes 24 alunos, pedimos para que eles formassem os grupos de 3 componentes, sendo formados sete grupos de três alunos e duas duplas.

Entregamos a Atividade e pedimos que fizessem a leitura do roteiro.

Atividade 4⁷ – Locomoção pé ante pé:

Para uma pessoa que se locomove pé ante pé, determine a relação entre as medidas dos deslocamentos feitos, em centímetros e em pés, de maneira que a seguinte questão possa ser respondida sem que seja necessário fazer o deslocamento:

- a) *Quantos centímetros a terão percorrido depois de se deslocar 10 pés? E 11 pés? E 50 pés? E 600 pés?*
- b) *Quantos deslocamentos (pé ante pé) são necessários para percorrer 5000 centímetros?*
- c) *Qual a expressão matemática para as duas situações?*

⁷ Retirada e adaptada de Campiteli e Campiteli.(2006, p. 53).

d) Justifique com palavras os procedimentos que você realizou nos itens a, b e c.

O objetivo da atividade era fazer com que os alunos percebessem a relação existente entre o deslocamento pé ante pé e a quantidade de pés, e como fazer uso da representação algébrica e justificar o procedimento que usou para encontrar esta representação.

Na aula anterior havíamos pedido para os alunos que possuíssem trena⁸ em casa levassem para a aula. Perguntamos: quem havia atendido à solicitação, para a qual fomos questionados por um aluno:

Al: Não sabia o que era uma trena. Por que o senhor não falou que era um metro?

PP: Informamos que o nome do objeto é trena, o metro é unidade de medida usada nele.

Esta e outras situações semelhantes nos levaram a perceber que os alunos têm, em geral, receio e timidez de perguntar o que não entendem.

A princípio pensávamos em pedir para que cada grupo medisse o pé de um de seus componentes mas como nenhum aluno tinha levado a trena, sugerimos que eles medissem o pé de uma menina e de um menino da turma, usando a trena do professor. No início se recusaram a permitir que fosse feita a medição até que uma menina se prontificou. Medimos seu pé e o tamanho, de 23 centímetros; logo em seguida um menino de outro grupo deixou que medíssemos seu pé, porém como a medida foi igual à do pé menina, sugerimos medir o pé de outro aluno; neste encontramos a medida de 25 centímetros.

Tomadas essas medidas pedimos que os meninos usassem na atividade, 25 centímetros e as meninas 23. Acreditamos que os alunos se motivaram com essa brincadeira de medir os pés, pois logo foram resolver ao item (a).

Ao caminhar na sala constatamos que o grupo 4 estava fazendo a resolução do item (a) de forma correta porém estava colocando a unidade de medida da variável dependente em pés ao invés de em centímetros. Vejam a resposta riscada pelo aluno:

⁸ Do dicionário Luft: Fita métrica para medições de prédios, terrenos, etc.

$A' 25 \times 10 = 250$ Centímetros
 $B' 25 \times 11 = 275$ Centímetros
 $C' 25 \times 50 = 1250$ Centímetros
 $D' 25 \times 600 = 15000$ Centímetros

Figura 9: Resposta do grupo 4 ao item (a) da atividade 4.

Aproximamo-nos e falamos:

PP: Explique-nos como estão fazendo o item (a)?

G4: Estamos multiplicando 25 pelo número de pés.

PP: Correto. O resultado que vocês estão obtendo significa o que?

G4: Deslocamento.

PP: A unidade de medida desse deslocamento é pés mesmo?

G4: Sim.

PP: Pensem direitinho.

G4: Ah! É em centímetros.

Os alunos realizam, muitas vezes, as atividades de forma mecânica e não dão a devida atenção ao que estão fazendo. Erram coisas simples nas quais, caso tentassem compreender facilmente identificariam os equívocos.

Os grupos 1, 4, 6 e 7, fizeram o item (b) por tentativa, não compreendendo que se tratava da operação inversa, bastando dividir o valor dado por 23 ou 25. Muito embora apenas o grupo 6 deixasse evidente que estavam fazendo por tentativa, os outros colocaram apenas a resposta final, o que nos faz supor que poderiam estar fazendo em um rascunho.

B' buentes deslocamento (Se and RE) São inversas, para encontrar
 5000 centímetros $90 + 90 + 40 + 40 + 40 = 300$
 $25 \times 200 = 5000$

Figura 10: Resposta do grupo 4 para o item (b) da atividade 4.

b) Quantos deslocamentos (pés) são necessários para percorrer 5000 centímetros?

$23 \text{ cm} \times 100 = 2,300$
 $23 \text{ cm} \times 120 = 2,760$
 $23 \text{ cm} \times 150 = 3,450$
 $23 \text{ cm} \times 200 = 4,600$
 $23 \text{ cm} \times 210 = 4,830$

$23 \text{ cm} \times 217 = 4,991$
 $23 \text{ cm} \times 218 = 5,014$

Se for 218 pés passa de 5000 centímetros.
 Se for 217 pés fica abaixo de 5000 centímetros.

Figura 11: Resposta do grupo 6 para o item(b) da atividade 4.

O grupo 7 colocou $23 \times 217 = 4991$, mas como gostaríamos de saber a quantidade de pés para o deslocamento a resposta correta seria 4991 pés mais 9 centímetros, porém o grupo colocou que “falta 9 pés para chegar ao total exato”. Apesar de resolverem corretamente, sentimos que faltou compreensão no que estavam fazendo.

Análise:

Fica claro, na resposta do grupo 7 ao item (b) que, muitas vezes, eles respondem ao problema sem se preocupar em entender o contexto da situação o que, às vezes, leva ao erro. Isso pode ser justificado por acreditarmos que os alunos não estão acostumados com um ensino não tradicional; quando se trabalha na perspectiva de resolução de problemas, não é dada ênfase às questões do tipo “calcule, determine, resolva”; é nisto onde pode estar a causa dos erros de falta de compreensão.

Para o item que solicitava a expressão algébrica, percebemos que os alunos já estavam conseguindo, sem nossa ajuda, encontrá-la. As tentativas dos grupos ficam bem expressas na resposta do grupo 6; vejam:

c) Qual a expressão algébrica que representa a os reduções do Demol
 2b)? Dem a \rightarrow ~~$2m \cdot P = D$~~ $23 \times 10 = 230$ $Em \times P = D$ ou $D = Em \times P$
 $23 \times 10 = 230$ $23 \times 10 = 230$

Dem b \rightarrow $Em \times P = D$ ou $D = Em \times P$

$D = Em \times P$
 $D = 23 \times 10$
 $D = 230$

Figura 12: Resposta do grupo 6 para o item (c) da atividade 4.

O item (d) pedia que justificassem os procedimentos utilizados nos itens anteriores; desta forma, os alunos são levados a defender os procedimentos que eles utilizaram.

Análise:

Já no quarto encontro percebemos bons resultados para compreensão das ideias abordadas mas é lícito acreditamos que um conceito é formado a partir de uma experiência significativa do aluno com o conteúdo em jogo; é preciso que o aluno seja colocado em um ambiente onde possa resolver vários problemas para que se possa, também, familiarizar com o conceito e compreendê-lo.

5º ENCONTRO - DIA 21/05/2013 (DUAS AULAS)

Devido a mais uma paralisação dos professores do Estado, sentimos a necessidade de fazer algo para não perder mais um dia de aula com os alunos. Como não haveria nossa aula na quinta feira, dia 23/05/2013 e soubemos que alguns professores efetivos da escola foram sorteados e estavam participando de uma conferência municipal e não iriam dar aula na turma da pesquisa, contatamos um dos professores e a direção da escola e solicitamos para ministrar aula no dia da conferência, terça-feira (21/05/2013).

Ligamos um dia antes para o professor de Biologia e ele nos autorizou a ministrar a aula em seu horário, pois iria deixar uma atividade para os alunos responderem; no dia da aula, antes de a iniciarmos, pedimos autorização à diretora da escola e ela disse: “Você caiu do céu, pois não sabia o que fazer com os alunos” (sic).

Parece que o professor, mesmo tendo afirmado que deixaria uma atividade para os alunos percebemos, pela fala da diretora e através da observação do comportamento dos alunos quando chegamos à sala de aula, que esta não foi pedida para ninguém aplicá-la.

Ao chegarmos à sala de aula os alunos ficaram surpresos com nossa presença, e logo dispararam alguns comentários:

A1: Que dia é hoje?

A2: O senhor não tem aula aqui hoje.

A3: Cadê o professor de Biologia?

A4: Porque o senhor vai dar aula hoje?

A5: No dia em que a pessoa tem aula vaga aparece esse professor para dar aula, nam. (sic)

Neste momento explicamos que estávamos com o conteúdo atrasado devido as paralisações e feriados estarem ocorrendo nos dias de nossas aulas. Tivemos a impressão de que eles entenderam porém, quando pedimos para formar os grupos, sentimos que eles estavam desmotivados e sem interesse em resolver a atividade mas, quando começamos a andar pelos grupos pedindo que eles lessem o problema, eles se entusiasmaram.

Havia 26 alunos na aula; foram formados 8 grupos de 3 alunos e uma dupla.

O roteiro de Atividade trabalhado foi a seguinte:

Atividade 5⁹ – Caixa d’água:

Em uma caixa de água vazia é aberta uma torneira que despeja 10 litros de água por minuto.

- a) *Construa uma tabela desenvolvendo o volume de água na caixa d’água, em litros, em relação ao tempo, em minutos.*

⁹ Retirada e adaptada de Neto et al (apud MARTINS, 2012, p. 169-170).

- b) *Quanto tempo é necessário para encher uma caixa com capacidade para 1000 litros de água? E 2000 litros? E 1500 litros?*
- c) *Determine a expressão matemática da situação.*
- d) *Se houvessem duas torneiras abertas o que aconteceria com o tempo para encher a caixa?*
- e) *Sabendo que o banho de 15 minutos com o chuveiro ligado gasta em média 120 litros de água, com quantos banhos uma caixa de água com capacidade para 1000 litros de água ficaria completamente vazia?*
- f) *Determine uma expressão matemática para esta situação.*

Um questionamento que surgiu em todas as atividades se refere à construção das tabelas. Notamos que os alunos confundem a representação tabular que usamos para entender o conceito de função com a tabela de distribuição de frequência, estudada por eles no primeiro bimestre.

As perguntas: “Como é esta tabela?” e “O que colocar nesta tabela?” aparecem com muita frequência. Percebemos que a maioria dos alunos não está habituada à busca de entender o problema na sua totalidade, o que ocasiona essas dúvidas.

Vejamos um diálogo que ocorreu em vários grupos, com relação a isto:

G7: Como fazemos esta tabela?

PP: Você já leu o enunciado?

G7: Sim.

PP: E o que você entendeu?

G7: Que é para construir uma tabela.

PP: Vocês estão dizendo o que é para fazer no item (a), leiam o enunciado.

Análise:

Os alunos não fazem uma leitura atenta do enunciado; é preciso, quase sempre, pedir que leiam novamente e fazer alguns questionamentos para então falar alguma coisa sobre os dados do problema. Pensamos que isto ocorria em virtude dos alunos estarem acostumados ao que o professor indica cada passo a seguir.

PP: O que está acontecendo com a caixa d'água?

G7: Está sendo cheia.

PP: Certo. Mas, em um minuto quantos litros de água são despejados na caixa?

G7: 10 litros.

PP: E em dois minutos?

G7: 20 litros.

PP: E em três minutos?

G7: 30 litros.

PP: Agora, vocês têm condições de preencher a tabela?

G7: Sim, temos.

Após todos entenderem como construir a tabela ao andar pela sala, observando as resoluções, notamos que os alunos do grupo 1, como em outras aulas, continuavam a colocar no final da tabela a palavra total. Fizemos alguns questionamentos para saber se esses alunos estavam compreendendo o que estavam fazendo.

PP: Por que vocês estão somando os valores da segunda coluna?

G1: Sei lá professor. Não é o total de todos os valores.

PP: Mas quem garante que o último valor a ser colocado nessa tabela é este que vocês colocaram?

Depois de um tempo sem resposta sentimos que os alunos não conseguiriam compreender sem uma explicação. Falamos para eles que não podiam fazer isso, que eles estavam confundindo com a tabela que tínhamos estudado no bimestre anterior. No da Atividade havia infinitos números naquela coluna e que eles só tinham colocado alguns valores; sendo assim, não tinham a possibilidade de fazer aquele somatório que nem era preciso. Nas atividades seguintes acompanhamos mais de perto esses alunos, para constatar se evoluíram na compreensão.

Análise:

Creemos que, para a representação tabular ajudar mais adequadamente, é preciso que a ordem de apresentação dos dados nas colunas, seja: na primeira coluna, a variável independente e na segunda a variável dependente. Percebemos que alguns alunos trocam esta ordem.

Tabela preenchida pelo grupo 1:

Volume	Tempo
10	1 min
20	2 min
30	3 min
50	5 min
60	6 min
90	9 min
100	10 min
110	11 min
Total	

Figura 13: Tabela preenchida pelo grupo referente à atividade 5.

O item (b) não houve dúvidas para sua resolução; apenas o grupo 3 colocou os cálculos de como conseguiram obter o valor; os demais grupos colocaram diretamente a resposta levando a crer que esses dados são tirados das tabelas construídas no item (a) porém apenas o grupo 2 colocou, na tabelas, os tempos de 5, 6, 25 e 60 minutos. Vejam:

TEMPO	VOLUME
1min	10
5min	50
6min	60
25min	250
60min	600

Figura 14: Tabela preenchida pelo grupo 2 referente à atividade 5.

Quanto ao item (c) observamos que alguns alunos não compreenderam que se tratava da operação inversa, o que pode ter ocorrido por eles não terem feito os cálculos e pegado as respostas do item (b) direto da tabela.

O grupo 5 fez os cálculos usando tentativa e erro, pois detectamos que há vários valores até chegar aos resultados desejados.

Vejam:

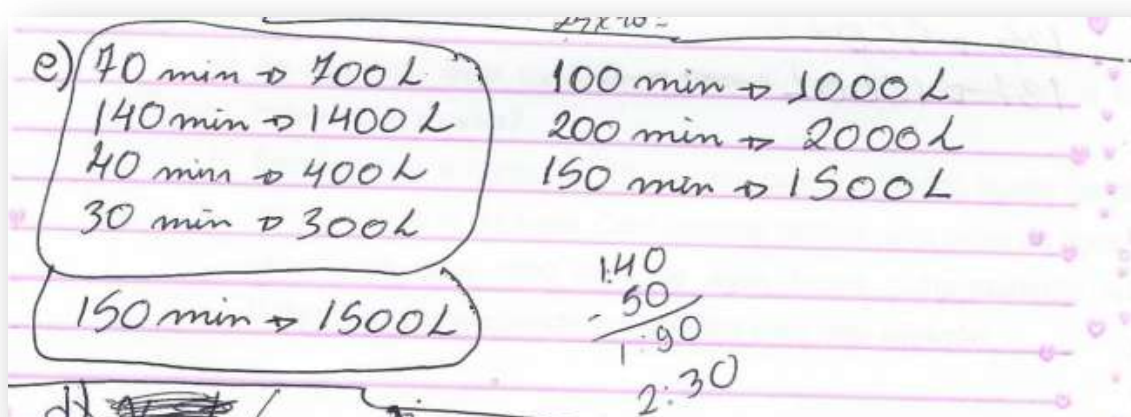


Figura 15: Recorte da resolução do item (c) do grupo 5, referente à atividade 5.

A nossa mediação, caminhou, mais uma vez, para fazer com que eles entendessem o que estava sendo pedido.

Os grupos 1 e 4, não estavam fazendo as conversões de hora para minutos, o que percebemos ainda na aula, apenas no grupo 4; ao dois grupos estavam considerando que 100 minutos é igual a 1 hora.

PP: uma hora são quantos minutos?

G4: 60 min.

PP: E vocês encontraram quanto tempo para 1000 litros?

Isso bastou para os alunos entenderem que precisavam fazer as transformações.

No item em que se solicitava a expressão algébrica, percebemos que alguns grupos não observaram que na situação há um valor fixo, no caso o 10, e acabaram escrevendo a expressão algébrica de forma incorreta, com 3 incógnitas; entretanto, mesmo com este equívoco eles explicaram que a expressão algébrica é dada pela

multiplicação do tempo por um volume, dando o volume total; Este primeiro volume que eles relatam é justamente os 10 litros fixos.

Análise:

Percebemos uma evolução nos alunos; mesmo não identificando a taxa de variação, eles já estão notando que para modelar a situação é preciso que exista uma taxa de variação que, no caso em discussão, eles generalizaram e colocaram o termo volume ao invés de 10 litros.

Apenas o grupo 8 não acertou o item (c), respondendo que o tempo com duas torneiras abertas aumentaria, ao invés de diminuir. Alguns grupos, além de colocar que diminuiria, ainda colocaram que essa diminuição de tempo ocorreria pela metade.

O item que levou mais tempo para ser resolvido foi o (e), quando precisamos intervir em vários grupos para eles compreenderem. Alguns grupos fizeram $120 \times 15 = 1800$. Passamos nos grupos e tivemos o seguinte diálogo, para que eles conseguissem encontrar a expressão algébrica para a situação:\

PP: Qual a capacidade da caixa?

Gs: 1000 litros.

PP: Tomando um banho com quantos litros a caixa fica?

Gs: 880 litros.

PP: Como você fez?

Gs: Subtrai.

PP: Ok. Então, temos $1000 - 120 = 880$. E com dois banhos como fica a capacidade da caixa?

Gs: $1000 - 240$.

PP: Esse 240 podemos escrever como sendo 120×2 ?

Gs: Sim.

PP: E três banhos? E se eu quiser saber para x banhos?

Gs: $1000 - 120.x = V$.

PP: Correto.

Análise:

Acreditamos que nas aulas de matemática o entendimento passa pela mediação do professor, tendo que estar sempre atento para as dúvidas que podem surgir, para que promova provocações que possam

fazer com que os alunos encontrem as soluções para suas dúvidas, momentos esses que devem priorizar a fala dos alunos colocando-os como protagonistas; enfim, ouvi-los com atenção e sempre que necessário fazer as intervenções convenientes. Percebemos que esses diálogos com os alunos, são, sem dúvida, valiosos para o desenvolvimento dos alunos.

Com alguns minutos para o término da aula, perguntamos se alguém gostaria de resolver o item (a) no quadro. Um aluno foi e desenhou a tabela no quadro, com seus valores. A partir disto, fizemos os itens (b) e (c), aproveitando para falar sobre os equívocos que os alunos haviam cometido e explicamos o motivo pelo qual provavelmente eles tinham ocorrido.

Análise:

Como nos trabalhos de Oliveira (1997), Pelho (2003), Martins (2013) nos parece que a sequência de atividade e o ensino através da resolução de problemas fizeram com que os alunos avançassem nas suas concepções; sobre o conceito de função, percebemos que eles estão desenvolvendo bem as grandes ideias 1 e 2 do Cooney, Beckmann e Lloyd (2010). Destacamos que os alunos conseguiram relacionar aspectos da variação de uma função, dependência entre variáveis e generalização da situação.

6º ENCONTRO - DIA 22/05/2013 (DUAS AULAS)

A aula foi iniciada retomando a atividade do encontro passado, em que todos já haviam terminado e achamos conveniente resolver no quadro, junto com eles, para que pudessem sanar alguma dúvida da aula anterior. Falamos que eles estavam evoluindo e que sentimos que estavam conseguindo resolver as atividades de forma mais rápida e de maneira correta.

Pedimos que formassem os grupos; como havia em aula 24 alunos, foram formados 8 grupos; em seguida, entregamos o roteiro da Atividade.

Atividade 6¹⁰ – Dos pregadores:

D. Lurdes lavou as camisas do time de futebol de seu neto, Cacá, e vai colocá-las para secar da seguinte maneira:

- cada camisa é presa por dois pregadores;
- cada camisa é ligada à seguinte por um pregador.

a) Tente fazer um desenho que represente esta situação.

b) Quantos pregadores D. Lurdes usará para pendurar 8 camisas? E 10 camisas? E 11 camisas?

c) D. Lurdes comprou duas cartelas de 12 pregadores cada uma. Este número de pregadores é suficiente para prender as camisas de 22 jogadores? Justifique.

d) Escreva uma expressão que represente o número de pregadores necessários para pendurar um número qualquer de camisas.

e) Se D. Lurdes colocasse dois pregadores exclusivamente para cada camisa, quantos pregadores a mais ela usaria para pendurar três camisas? E para pendurar 8 camisas? E 10 camisas? E 100 camisas?

O item (a) solicitava que os alunos fizessem um desenho que representasse a situação. Como compreenderam bem o problema, quase todos desenharam adequadamente. Alguns alunos questionaram que não sabiam desenhar mas dissemos que não precisava que o desenho ficasse perfeito e que o desenho poderia ajudá-los a resolver os itens seguintes.

Observamos que o grupo 1 não ligou uma camisa à outra, e interferimos:

PP: Posso ver o desenho de vocês?

G1: Lá vem o senhor.

PP: Expliquem-me como fizeram. Mas o enunciado não pede que liguemos uma camisa à outra?

G1: Sim, pede.

PP: E por que não desenharam assim?

G1: Não tem como.

¹⁰ Retirado e adaptado de Tinoco (2004, p. 32)

Esse grupo justificou que não tinha como ligar as camisas porque suas “mangas” não deixavam que se tocassem; os alunos tinham disposto as camisas no varal com a gola para baixo.

PP: Se vocês inverterm a posição da camisa não dá certo?

G1: Dá.

PP: Então façam outro desenho.

Os desenhos de um aluno desse grupo estão apresentados a seguir:

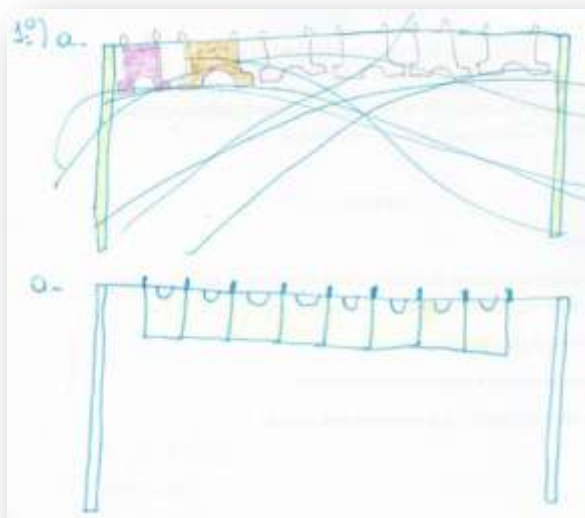


Figura 16: Representação pictórica do grupo 1 referente ao item (a) da atividade 6.

Os alunos gostam de fazer atividades que envolvem desenho e percebemos que muitos dos desenhos são caprichados e ricos de detalhes.

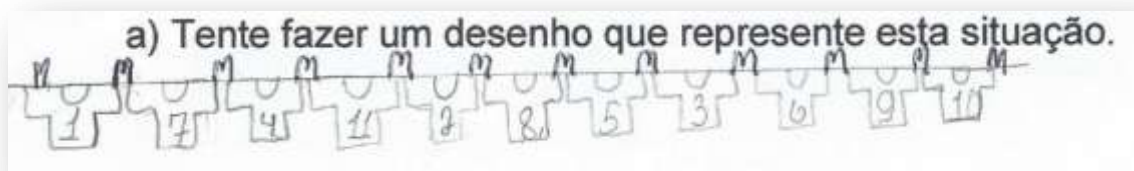


Figura 17: Representação pictórica do grupo 10 referente ao item (a) da atividade 6.

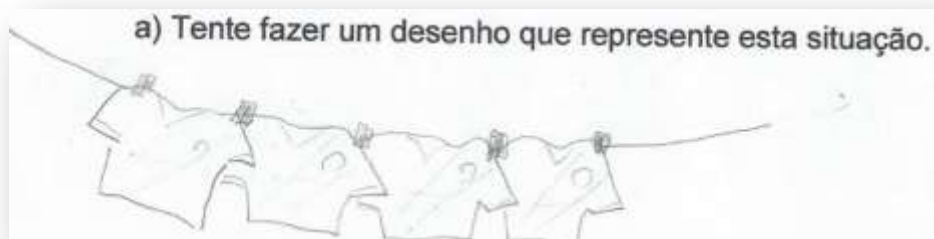


Figura 18: Representação pictórica do grupo 3 referente ao item (a) da atividade 6.

Para o item (b), pedimos, quando surgiu alguma dúvida que olhassem seus desenhos pois esta representação os ajudaria a perceber quantos pregadores usar.

PP: Olhando seus desenhos. Para uma camisa são usados quantos pregadores?

Gs: 2

PP: E para duas camisas?

Gs: 3

PP: Então, o que está acontecendo com o número de pregadores à medida que aumento uma camisa.

Gs: É sempre mais um.



Figura 19: Recorte da resolução do item (b) do grupo 6 referente à atividade 6.

As respostas ao item (c) também foram corretas porém na maioria das atividades não encontramos nenhum cálculo feito; apenas a afirmativa e as justificativas, como indicam algumas respostas.

G2: Sim porque aumenta de um em um pregador se tem 10 camisas são necessários 11 pregadores.

G4: Sim. Porque 24 pregadores para 22 camisas e ainda sobra 1 pregador.

G8: Sim por que em 22 camisa usaram 23 pregadores, pois a cada camisa aumenta um pregador e sobrá um pregador.

G5: Sim, porque se 12 pregadores prende 11 camisas, 23 prenderá 22 camisas, por que é o dobro de pregadores e ainda sobrá 1.

A única atividade em que encontramos algum tipo de cálculo, foi a do grupo 7, cuja a resposta foi: “Sim, porque $12 + 12 = 24$ e sempre aumenta pegador, $22 + 1 = 23$.

Eles disseram que, dobrando a quantidade de camisas, deveriam dobrar a quantidade de pregadores porém após nossa intervenção eles observaram que deveriam subtrair um.

PP: Interessante a resposta de vocês mas acredito que tenham cometido algum equivoco; vamos analisar.

PP: Por que 11 camisas necessitam de 12 pregadores?

G7: Porque é sempre mais um.

PP: Então, por que 22 camisas precisam de 24 pregadores?

G7: Pensávamos que deveríamos dobrar o valor mas, na verdade, é sempre o número de camisas mais um.

Quando pedida a expressão algébrica no item (d), os grupos nos chamavam para auxiliá-los, mas vimos que já estavam conseguindo fazer essa representação; bastava apenas que propuséssemos que olhassem as repostas dos itens anteriores e falassem o que estava acontecendo com a situação; logo falavam a expressão que pedíamos que escrevessem na folha da atividade.

Neste momento, quando percebemos que todos os alunos haviam terminado todas as atividades, pedimos que se direcionassem ao quadro, a fim de fazermos uma plenária e sanar as dúvidas, quando comentávamos todos os itens.

No final da aula comentamos sobre a dependência e independência, mas isto não de maneira formal; apenas para eles compreenderem que para escrever a expressão algébrica é importante saber quem é dependente de quem.

Como ainda havia algum tempo para a conclusão da aula, pedimos que tentassem encontrar uma expressão algébrica para o caso de a situação não estar ligando uma camisa à outra, ou seja, usando dois pregadores para cada camisa.

Análise:

Quando se trabalha na perspectiva da resolução de problemas o planejamento da aula é flexível, durante o processo de resolução de um problema vai sempre surgir a oportunidade de explorarmos outras situações, seja do conteúdo em estudo ou até de outro. No caso deste encontro, depois do trabalho com o problema inicial, inclusive com sua plenária, pudemos propor outros problemas a partir do já resolvido.

Todos os grupos nos chamaram rapidamente para mostrar suas repostas de forma correta. Percebemos que mesmo sem nossa interferência eles fizeram uso da representação tabular.

e) 3 camisas $\rightarrow 3 \times 2 = 6$
 8 camisas $\rightarrow 8 \times 2 = 16$
 10 camisas $\rightarrow 10 \times 2 = 20$
 100 camisas $\rightarrow 100 \times 2 = 200$

$C = P \times 2$

Figura 20: Recorte da resolução do item (e) do grupo 6 referente à atividade 6.

Análise:

Este encontro permitiu que os alunos percebessem a regularidade de uma sequência e generalizassem a situação, através das variáveis. Também destacamos a importância do uso das representações de função, fizeram uso da representação pictórica, quando eles desenharam as camisas, da tabular quando foi generalizar a situação, da verbal a partir de suas justificativas para o que estava ocorrendo na situação e a algébrica. Acreditamos que os alunos evoluíram na percepção de que essas representações têm sua importância para o entendimento do conceito de função. Por essas razões, entendemos que o uso das representações deve ser articulado de forma permanente para a boa compreensão do conceito de função.

7º ENCONTRO - DIA 29/05/2013 (TRÊS AULAS)

Durante a semana encontramos alguns alunos e eles nos disseram que a professora de Português não daria a primeira aula no dia 29 de maio, por isso demos além da segunda e terceira aulas, também a primeira. Esta quantidade de aulas nos permitiu aplicar três atividades - 7, 8 e 9, as quais descrevemos a seguir.

Percebemos que a possibilidade de aplicação de três atividades também se deu pelo fato de os alunos estarem se desenvolvendo bem. Tínhamos em sala 26 alunos, formamos 8 grupos de três alunos e uma dupla, os quais realizaram as três atividades.

Após a formação dos grupos entregamos os roteiros das Atividades 7 e 8 e uma caixa de fósforo para cada grupo e todos começaram a responder às atividades. Chamou-nos a atenção que o grupo 2 iniciou pela atividade 8; questionamos porque não começar pela atividade 7 e eles disseram que não tinham uma justificativa; acreditamos que a atividade 8 possa tê-los atraído visualmente já que a mesma possuía uma imagem.

Atividade 7¹¹ – Triângulo com palitos de fósforo:

- a) Com palitos de fósforo, construa um triângulo. Quantos palitos você usou?*
- b) Forme dois triângulos com 5 palitos, de modo que tenham um lado em comum.*
- c) Usando o mesmo procedimento anterior para formar três triângulos, quantos palitos você usaria? Registre seus resultados. E para formar cinco? E para formar dez? E se quiser formar 65?*
- d) Se alguém quiser saber quantos palitos serão usados para formar um número n qualquer de triângulos, você saberia escrever uma expressão algébrica para ajudá-lo?*
- e) Verifique se esta expressão dá o número de palitos que você usou para fazer os triângulos do item c).*

Alguns grupos terminaram esta atividade sem nos questionar nada mostrando-nos que já estão mais independentes. Alguns grupos nos perguntaram:

¹¹ Retirado de Tinoco (2004, p. 33).

Gs: Para que o palito?

PP: Para ajudar na sua visualização.

Gs: É preciso desenhar?

PP: Caso queira; é bom que vocês desenhem.

Todos os grupos resolveram sem problemas o item (a). Para o item (b) o grupo 1 nos chamou e perguntou:

G5: Pode quebrar o palito?

PP: Por que vocês querem quebrar o palito?

G5: Como vou fazer dois triângulos com 5 palitos, preciso de 6.

PP: Tente fazer com 5 palitos.

Neste momento os alunos tentavam fazer dois triângulos separados. Não tinham dado conta de que o enunciado dizia que era para construir com um lado em comum, ao que reforçamos: Vamos ler o item (b). Além de ter que usar 5 palitos qual a outra informação que o item fornece?

Análise:

Percebemos que alguns alunos não refletem sobre sua leitura, agindo geralmente de forma mecânica, perdendo dados importantes. Mesmo lendo o enunciado, perguntaram o que significava a expressão “lado em comum”; só então constaram que era possível fazer os dois triângulos com 5 palitos. O trabalho com resolução de problemas faz com que os alunos reflitam mais sobre o que estão fazendo, pois estão acostumados com atividades do tipo calcule; em relação as quais, acreditamos que fazem com que os alunos se tornem meros reprodutores de fórmulas, de forma mecânica. A resolução de problemas, pelo contrário, ajuda o aluno a compreender o conceito; como supomos que eles não estejam acostumados com a metodologia de resolução de problemas, acabam sentindo um pouco de dificuldade.

Para responder ao item (c), os alunos usaram a representação numérica, verbal e algébrica. Os grupos 1 e 3 se equivocaram e, quando perguntamos qual a quantidade de

palitos necessária para formar 10 triângulos, escreveram 22, fazendo a seguinte justificativa:

G1 e G3: Fizemos para 5 triângulos e deu 11 palitos, logo se quisermos saber quantos palitos são necessário para formar 10 triângulos basta fazer 11 vezes 2, já que 10 é o dobro de 5, dando como resultado 22 palitos.

PP: Vamos analisar as resposta de vocês. Para dois triângulos necessitamos de quantos palitos?

G1 e G3: 5 palitos.

PP: E para quatro triângulos?

G1 e G3: 9 palitos.

PP: E por que não deu o dobro, já que quatro é o dobro de dois? Tentem descobrir como fazer para encontrar a quantidade de palitos.

Sugerimos que fizessem uma tabela e tentassem perceber o que estava acontecendo com a quantidade de palitos. Com a ajuda da tabela, observaram que para encontrar a quantidade de palitos tinham que multiplicar por dois e adicionar um.

Análise:

O uso da representação tabular favorece a generalização, os alunos conseguem perceber que os dados contidos nas colunas se resumem à última linha; parece-nos claro que esta representação favorece a capacidade de generalizar e construir o modelo da situação, no caso a representação algébrica.

Nossa intenção em perguntar quantos palitos eram necessários para formar 65 triângulos, foi para o aluno sentir a necessidade de ter uma expressão algébrica que generalizasse a situação.

Alguns grupos perceberam:

3 Triângulos	- 7 Palitos	$P = 3 \times 2 + 1$
5 Triângulos	- 11 Palitos	$P = 5 \times 2 + 1$
10 Triângulos	- 21 Palitos	$P = 10 \times 2 + 1$
65 Triângulos	- 131 Palitos	$P = 65 \times 2 + 1$

Figura 21: Recorte da resolução do item (c) do grupo 2 referente à atividade 7.

Os alunos que resolveram toda a atividade sem nos perguntar nada, obtiveram as respostas corretas mas não conseguimos observar como fizeram para encontrar os valores para 65 triângulos.

A resolução do item (c) auxiliou os alunos a encontrarem a expressão algébrica pedida no item (d). Quando os alunos nos mostravam uma expressão algébrica que não representava a situação, pedíamos que testassem os valores encontrados nos itens anteriores.

O grupo 8, por exemplo, generalizou e nos mostrou que a expressão algébrica era $P = 2.T$.

PP: Teste esta expressão para quando tivermos 2 triângulos. Quantos palitos obtiveram?

G8: Quatro.

PP: Corresponde ao que encontraram no item B?

G8: Não, deve ser 5 palitos.

PP: E o que faltou?

G8: Somar um.

PP: Somem um e vejam se dá certo.

G8: Agora deu 5 professor.

Ninguém teve problemas para resolver o item (e) adequadamente. O nosso objetivo com este item foi fazer com que o aluno percebesse que, tendo a expressão algébrica, torna-se mais fácil calcular os valores.

Análise:

Acreditamos que esta atividade fez com que os alunos percebessem a importância da representação tabular e algébrica, dando destaque ao entendimento essencial 5c, que afirma que algumas representações são mais úteis que outras e do entendimento essencial 5b que traz a tese de que uma mesma função pode ser expressa em mais de uma forma.

Atividade 8¹² – Sequência de bolinhas:

Observe a sequência abaixo e responda:



- Desenhe a próxima figura da sequência. Quantas bolinhas ela tem?
- Desenhe a 7ª figura da sequência. Quantas bolinhas ela tem?
- Quantas bolinhas tem a figura que ocupa a 57ª posição da sequência?
- O que fazer para descobrir o número de bolinhas de qualquer figura da sequência?
- Qual a expressão algébrica que representa esta situação?
- Verifique se esta expressão dá o número de bolinhas encontradas nos itens a, b e c.
- Que posição ocupa a figura que possui 10 bolinhas? E qual a posição da figura que possui 99 bolinhas?

Tínhamos, como objetivo, fazer com que os alunos observassem a sequência de figuras e generalizassem. Com relação ao desenho solicitado nos itens (a) e (b), os alunos não tiveram dificuldade. Alguns grupos conseguiram responder o item (c) sem nossa ajuda. Outros grupos precisaram que fizéssemos uma mediação para que eles percebessem o que tinha acontecido com as respostas dos itens (a) e (b) e se havia um padrão. Acreditamos que os alunos tenham percebido qual era o padrão, o que concluímos a partir da resposta apresentada a seguir, que foi frequente em todos os grupos: “ $57 + 3 = 60$ bolinhas”.

¹² Retirado e adaptado de Imenes e Lellis (2012, 223).

O item (d) tinha, como objetivo, verificar se eles perceberam qual era a regra que deveriam usar para qualquer valor e fazer com que os alunos fizessem a representação verbal, como indicado em algumas respostas:

Grupo 4: É sempre acrescentar mais 3.

Grupo 5: É só acrescentar 3 bolinhas.

Grupo 8: Sempre acrescenta mais 3 com a posição.

Grupo 9: Pega a posição da bolinha e soma mais três.

O grupo 3 misturou a representação algébrica com a verbal e colocou: “Posição + 3”. O grupo 5, por sua vez, além de fazer a representação verbal, fez dois teste aos quais chamou de exemplos, escrevendo: “ex: $57 + 3 = 60$; $60 + 3 = 63$. Sempre almenta (sic) + 3”.

Acreditamos que o item (d) tenha ajudado os alunos a escrever a representação algébrica.

Análise:

A representação verbal ajuda o aluno a fazer a passagem do concreto para o abstrato e depois da identificação verbal percebemos que os alunos identificam mias facilmente a representação algébrica da situação.

Apesar da maioria dos grupos conseguir generalizar e encontrar a expressão algébrica, sempre precisávamos estar pedindo para eles perceberem qual o padrão da situação, sendo que em alguns casos pedíamos que construíssem a tabela para ajudar na visualização.

Análise:

Assim como a representação verbal, a tabular também ajuda a fazer a passagem para a representação algébrica. Percebemos que as tabelas fazem com que os alunos notem que as variáveis são números que se alteram.

A intenção do item (f) era fazer com que os alunos percebessem que com o uso da expressão algébrica conseguiríamos encontrar qualquer valor sem fazer muitos cálculos nem desenhos. Os grupos os fizeram colocando a expressão; em seguida, substituindo a variável pela posição que a sequência ocupava, encontrando a quantidade de bolinhas.

Entretanto, no item (g), no qual também esperávamos que os alunos substituíssem a variável dependente pela quantidade de bolinhas para encontrar a posição em que a sequência ocupava, observamos que os alunos fizeram isto não de forma intencional, pois subtraíram a quantidade de bolinhas por três, encontrando a posição. Apesar de ser uma forma correta de resolução, esperávamos que os alunos a fizessem aplicando na expressão. Apenas um aluno do grupo 7 respondeu como esperávamos.

10 Bolinhas $\Rightarrow P = B - 3 \Rightarrow P = 10 - 3 \Rightarrow P = 7$
 99 Bolinhas $\Rightarrow P = B - 3 \Rightarrow P = 99 - 3 \Rightarrow P = 96$

Figura 22: Recorte da resolução do item (g) do grupo 7 referente à atividade 8.

Achamos estranho que, mesmo estando fazendo a atividade em grupo apenas este aluno a fez desta forma, outro aluno sequer a fez de forma correto, vejamos a resposta do aluno: “ $P = 99 + 3 = 102$ ”.

Pela maneira como os outros dois alunos responderam, acreditamos que tenham copiado a resposta de outro grupo e confundiram quando foram copiá-las, ou não confiaram na resposta de seu colega e preferiram obter a resposta com outro grupo.

Atividade 9¹³ - Preço do álcool e da gasolina:

O preço atual por um litro de gasolina no posto Ipuarana, na cidade de Lagoa Seca é de R\$ 2,79 e de álcool é R\$ 2,29.

- Construa uma tabela relacionando a quantidade de litros e seus respectivos valores.*
- Escreva uma expressão algébrica para as duas situações.*

¹³ Atividade formulada pelo pesquisador.

- c) *Qual seria o valor a pagar se abastecessem 10 litros de cada combustível? E 17 litros? E 55 litros?*
- d) *Um carro popular anda em média 12 km com um litro de gasolina e 10 km com um litro de álcool. Nessas condições é melhor abastecer com álcool ou gasolina?*
- e) *Um tanque cheio tem capacidade para 55 litros. Quantos quilômetros o carro percorreria se enchesse o tanque com gasolina? E se enchesse com álcool? E qual o valor pago em cada situação?*

Os três primeiros itens decorreram sem problemas; apenas alguns alunos questionaram se deveriam construir duas tabelas. Quando feita a construção da tabela não encontramos qualquer equívoco para construir a sentença algébrica nem, tampouco, para encontrar as imagens dos domínios dados.

No item (d) deveriam calcular e ver se era mais vantagem abastecer o carro com gasolina ou álcool porém em nenhuma das atividades encontramos os cálculos; eles afirmavam que era mais vantagem abastecer com gasolina porque com um litro andava 12 km e com álcool apenas 10 km e não levaram em conta que o preço da gasolina é mais alto.

Na situação proposta na atividade seria melhor abastecer com gasolina; apenas os grupos 1 e 3 colocaram álcool como resposta. O item (e) também foi resolvido sem nenhuma dificuldade e os alunos apenas reclamaram que tinham feito muitos cálculos.

Comentário:

Nesta aula conseguimos fazer três atividades, o que fez com que adiantássemos na aplicação da nossa sequência visto que nos encontros anteriores só conseguimos fazer uma atividade a cada encontro. Sentimos grande evolução dos alunos na construção do conceito de função, estão conseguindo generalizar com mais facilidade e estabelecendo a noção de correspondência e dependência. O ponto negativo foi que, como foram três aulas, sentimos que na terceira atividade os alunos estavam cansados.

8º ENCONTRO - DIA 05/06/2013 (DUAS AULAS)

Neste encontro trabalhamos as atividades 10 e 11; a primeira com o objetivo de trabalhar a percepção das variáveis dependentes e independentes e escrever a expressão algébrica da situação e a segunda tinha, como objetivo, além dos da primeira atividade, trabalhar a unicidade.

Atividade 10¹⁴ – Viagem entre João Pessoa e o Sertão:

Um profissional viaja periodicamente de João pessoa a uma cidade do Sertão paraibano; sabendo que a distância de uma cidade a outra é de 600 km, responda:

- a) Se a lei permitisse e o profissional fizesse o percurso com uma velocidade média de 200 km/h, quanto tempo ele levaria para fazer a viagem? E a 100 km/h?*
- b) O tempo depende de qual informação (variável)?*
- c) Qual a relação existente entre as variáveis utilizadas para fazer o cálculo?*
- d) Se o profissional fizer o percurso em 4 horas, qual deve ser a velocidade média do automóvel? E em 5 horas?*

A maioria dos grupos não teve dificuldades para resolver esta atividade. Quando os alunos não percebiam que o item se tratava de uma divisão, bastava que os fizéssemos refletir sobre a proporcionalidade que estava ocorrendo na situação e logo eles percebiam que se fizessem o percurso a 200 km/h, gastariam 3 horas; assim, tivemos grupos que fizeram a divisão e aqueles que observaram a proporcionalidade já colocaram direto suas respostas.

¹⁴ Retirada e adaptada de Oliveira (1997).

$600 \text{ km} \rightarrow 200 \text{ km/h} = 3 \text{ horas} \Rightarrow \frac{600}{200} = 3$
 $600 \text{ km} \rightarrow 100 \text{ km/h} = 6 \text{ horas} \Rightarrow \frac{600}{100} = 6$
 $\frac{600}{200} = 3$
 $\frac{600}{100} = 6$
 $\frac{600}{V} = T$

Figura 23: Recorte da resolução do item (a) do grupo 6 referente à atividade 10.

$600 \text{ km} / 200 \text{ km/h} = 3 \text{ horas}$
 $600 \text{ km} / 100 \text{ km/h} = 6 \text{ horas}$
 Para completar o percurso
 $\frac{600}{200} = 3$
 $\frac{600}{100} = 6$
 Percurso

Figura 20: Recorte da resolução do item (a) do grupo 9 referente à atividade 10.

Dois grupos confundiram as respostas do item (b), respondendo que a variável dependente era a distância. Notamos e intervimos da seguinte maneira:

PP: Vocês colocaram que o tempo depende de que?

G6: Dos quilômetros rodados.

PP: Não seria da distância?

G6: Sim.

PP: Vamos analisar suas respostas. No enunciado qual é a distância que é exposta no enunciado?

G6: 600 km.

PP: E no item A essa distância variou?

G6: Não.

PP: E o tempo variou?

G6: Sim. Em um caso foi 3 horas e no outro 6 horas.

PP: Então, o tempo depende da distância?

G6: Não. O tempo vai depender da velocidade. Quanto mais veloz mais rápido chega.

A maioria dos grupos, no entanto, respondeu que a variável dependente era a velocidade.

Análise:

Conforme afirma Oliveira (1997) uma das dificuldades que os alunos apresentam durante a construção do conceito de função, é na identificação das variáveis; segundo a autora, os alunos costumam confundir a variável dependente e independente. Sobre isto, Pelho (2003) concorda mas para ele isto ocorre pelo formalismo dado ao tratamento do conteúdo, podendo ser corrigido oferecendo um caráter mais dinâmico ao conceito, permitindo a compreensão do conceito de variável e identificar as variáveis dependente e independente.

Como a atividade tratava de uma contextualização com a Física, percebemos que os alunos confundiram os itens (b) e (c), trazendo coisas que eles já estudaram naquela disciplina.

Os grupos 1 e 2 escreveram que o tempo dependia da velocidade média; esses mesmos dois grupos, responderam, quando pedido a expressão algébrica da situação no item (c), com a fórmula $\delta T = \frac{\delta S}{v_m}$. Aproveitamos e falamos para os dois grupos que existe uma diferença entre fórmula e expressão algébrica e que na atividade em que estávamos trabalhando o deslocamento, era 600 km, ou seja, este valor era fixo.

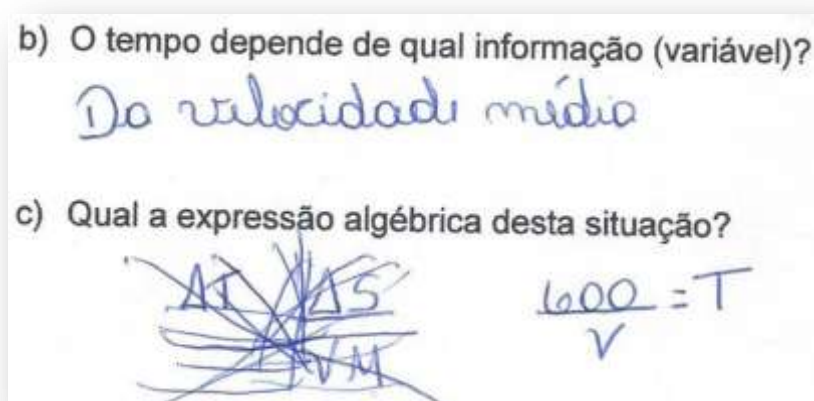


Figura 21: Recorte da resolução dos itens (b) e (c) do grupo 1, referente à atividade 10.

O objetivo do item (d) era fazer com que os alunos respondessem substituindo os valores pedidos na expressão algébrica que eles encontraram e pedimos que explicassem como fizeram; fizemos isto porque detectamos que eles gostam de colocar apenas as respostas e não deixam o cálculo registrado. As explicações dos alunos para este item foram todas voltadas para a divisão da distância pelo tempo.

Alguns grupos nos solicitaram, ao terminar suas resoluções, o roteiro da próxima Atividade mas pedimos que esperassem pois gostaríamos de fazer uma plenária sobre a atividade 10 e explicarmos algumas coisas que pudessem não ter ficado entendidas.

Quando todos os grupos concluíram, fomos à lousa e comentamos todos os itens, chamando a atenção de todos os alunos para os equívocos que citamos na discussão desta atividade. Demos bastante ênfase à expressão algébrica, às variáveis da situação e definimos o que era uma variável dependente e independente.

A outra Atividade deste encontro foi a seguinte:

Atividade 11¹⁵ – Fábrica de cadaço:

Em lagoa Seca existe uma fábrica de cadaço para calçados, cujo custo da produção de uma peça é de R\$ 1,20.

Complete a tabela:

<i>Número de peças</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>
<i>Custo (R\$)</i>	<i>1,20</i>	<i>2,40</i>	<i>3,60</i>					

- A cada quantidade de peças corresponde um único custo em reais?*
- O custo depende de que?*
- Quais são as variáveis?*
- Expresse com palavras o que está acontecendo na situação.*
- Descubra a regularidade e escreva a expressão algébrica que representa esta situação.*
- Qual o custo de 10 peças? E de 50 peças?*
- Com um custo de R\$ 120,00, quantas peças podem ser produzidas?*

¹⁵ Atividade formulada pelo pesquisador.

Durante a aplicação da Atividade 11 percebemos que os alunos conseguiram preencher a tabela sem nenhum erro e em momento algum fomos chamados para esclarecer alguma coisa sobre este procedimento.

No item (a) os alunos tiveram um pouco de dúvida pois não estavam entendendo o que a expressão estava afirmando, sendo necessário ajudá-los na interpretação. Com alguns grupos perguntamos quantos custos temos para duas peças, ao que os alunos responderam que seria um único custo. Reforçamos o raciocínio perguntando se teríamos mais de um custo para certa quantidade de peças, ao que os alunos afirmaram que não; apenas com essas perguntas eles já respondiam dizendo que havia apenas uma correspondência.

O item (c) era sobre dependência e todos os alunos responderam sem qualquer dificuldade; a única observação que trazemos é que os grupos responderam “quantidade de peças” e “número de peças”; quando se trata de grandezas o certo é quantidade e não número, porém acreditamos que tal tipo de falha não comprometa a compreensão da ideia.

Quando perguntamos quais as variáveis, no início alguns grupos nos chamaram dizendo que estavam com dúvidas, mas quando pedíamos para ser lembrada a resposta que eles deram no item (b) da atividade 10, eles conseguiram solucioná-la com independência.

Análise:

Vemos a contribuição que problemas correlatos, resolvidos anteriormente pelos alunos, colaboram na resolução atual. De fato, ao resolver um problema quando aproveitamos alguma coisa de problemas já resolvidos, seja a forma de resolver, seu resultado, o método ou a própria experiência adquirida anteriormente, se tornam mais rápida a resolução.

O item (e) tinha, como objetivo, trabalhar representação verbal, o que levaria o aluno a responder com mais facilidade o item que pedia a expressão algébrica, percebemos que este tipo de abordagem em que trabalhada a expressão verbal, o aluno consegue mais facilmente escrever a algébrica.

Os itens (g) e (h) tinham, como objetivo, fazer com que os alunos descobrissem os valores da imagem e do domínio, aplicando os valores na expressão que eles escreveram.

Análise:

Neste encontro percebemos que os alunos conseguiram compreender com facilidade a questão da unicidade de uma correspondência e também tivemos a oportunidade de aprofundar o conceito de variável, quando pedimos que os alunos fizessem sua identificação; portanto, durante a realização dessas duas atividades pudemos trabalhar conceitos considerados essenciais para a compreensão do conceito de função – Entendimento essencial 1a da grande ideia 1, de Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) – e a compreensão das variáveis defendidas por Pelho (2003).

Terminada a aula dissemos que na próxima aula faríamos as duas últimas atividades desta seção e também uma síntese dos conteúdos que trabalhamos durante a resolução das atividades.

9º ENCONTRO - DIA 06/06/2013 (DUAS AULAS)

Iniciamos a aula do nono encontro pedindo que formassem os grupos, falando que iríamos entregar o roteiro da Atividade 12 para eles responderem e que faríamos a explicação da Atividade 13 em cada grupo, individualmente. Havia em sala de aula 25 alunos; foram formados sete grupos de 3 componentes mais duas duplas.

Atividade 12¹⁶ – Dos fanáticos por futebol:

João e José moram há pouco tempo em Lagoa Seca. Fanáticos por futebol, resolveram ir ao Estádio do Amigão em Campina Grande para assistir à final do campeonato paraibano entre os times Treze e Campinense. Como não conheciam muito

¹⁶ Atividade formulada pelo pesquisador.

bem a região, resolveram ir de táxi até o Estádio. Quando entraram no táxi perguntaram ao motorista quanto custava a corrida; o taxista informou que a bandeirada custa R\$ 3,80, mais R\$ 1,50 por quilometro rodado.

- a) Escreva uma expressão matemática que represente essa situação, relacionando o custo da bandeirada com os quilômetros rodados.*
- b) Sabendo que a distância da casa de João e José até o Estádio Amigão é de 7 km, com R\$ 12,80 eles conseguem chegar ao Estádio?*
- c) Qual a distância máxima que eles poderiam percorrer com R\$ 12,80?*
- d) Sabemos que o preço da passagem de ônibus custa R\$ 2,25 sendo que, para ir e vir até o Estádio do Amigão é preciso tomar 4 ônibus. Seria mais vantagem ir ao Estádio de ônibus ou de táxi?*

Quando os alunos começaram a tentar escrever a expressão algébrica não estavam considerando o valor da bandeirada¹⁷, inclusive alguns questionaram sobre o que isso representava; explicamos que se tratava de um valor fixo que pagamos quando entramos em um táxi e que independe do percurso.

No início, a constante referente à bandeirada fez com que os alunos tivessem dúvidas, isso pode ter ocorrido pelo fato de que nas generalizações anteriores as relações expressas eram do tipo $y = ax + b$, com b nulo. O fato de termos este valor não nulo era uma novidade para os alunos, tornando-se desta forma um problema mas a partir de nossa mediação eles conseguiram expressar a representação de forma satisfatória. Para que eles compreendessem pedimos que pensassem como fariam para calcular a corrida de taxi, perguntamos:

PP: O que vocês entenderam do enunciado do problema? Quais cálculos devemos fazer para saber o valor a pagar?

Gs: Devemos multiplicar por um real e cinquenta centavos.

PP: Multiplicar o que?

Gs: A quilometragem da viagem.

PP: Certo, mas no caso é a distância que é medida em quilômetros.

Comentário:

¹⁷ Do dicionário Luft: Bandeirada: 1. Abaixamento da bandeira do taxímetro. 2. Preço inicial, mínimo, em corrida de táxi.

A maioria dos alunos tinha respondido que a expressão algébrica seria $V = 1,5 \cdot p$.

PP: Mas, e a bandeira não conta?

Gs: Como assim professor:

PP: Esse valor de R\$ 3,80 o passageiro não paga por ele?

Gs: Paga sim.

PP: E o que fazemos para incluí-lo na expressão? No final da corrida como é calculado este valor?

Gs: Somando ao $1,5 \cdot p$.

PP: Correto. Escreva a expressão agora.

Análise:

Percebemos que a mediação tem grande importância nas aulas de Matemática; permite que através da problemática feita pelo professor o aluno seja motivado e se envolva na resolução de atividade. O professor mediador colabora para a aprendizagem pois insere os alunos como protagonistas do processo de resolução do problema e, conseqüentemente, da construção do conhecimento.

No item (b) os grupos responderam substituindo a variável independente por 7 encontrando, desta forma, um valor acima do que eles tinham, concluindo que não era possível ir até o estádio com R\$ 12,80.

Quando perguntamos quanto se poderia percorrer com o valor de R\$ 12,80, esperávamos que substituíssem o valor dado pela variável dependente mas constatamos que a maioria dos grupos o fez por tentativa e erro, substituindo alguns valores na variável independente até encontrar o valor de 12,80. Apesar de estarmos sempre pedindo que eles usassem a expressão algébrica encontrada para resolver o problema, percebemos que os alunos não a usam e preferem fazê-lo por tentativa e erro.

No item (d) os alunos deveriam afirmar que o valor pago pela corrida de taxi era R\$ 28,60 e de ônibus R\$ 18,00. Alguns grupos afirmaram que de ônibus seriam gastos apenas R\$ 9,00, sem considerar que se tratava de duas pessoas e que teriam que multiplicar esse valor por dois; aos que colocaram nove como resposta, questionamos a quantidade de pessoas, fazendo rapidamente com que entendessem que deveriam multiplicar por dois.

Os grupos 3, 4 e 7 responderam que era mais vantajoso ir de táxi, justificando que era mais barato, tendo considerado, para o ônibus, a ida e a volta; quanto ao táxi, apenas consideraram uma viagem. Percebemos que muitas vezes os alunos erram as respostas dos problemas por falta de atenção.

Os demais grupos responderam que seria melhor fazer o percurso de ônibus, todos justificando a partir dos valores que gastariam indo e vindo de ônibus e taxi. Vale notificar que houve algumas justificativas que afirmaram que a melhor opção era relativa, não dependia apenas dos valores a pagar; havia outras coisas envolvidas, como conforto e rapidez de chegada.

No instante em que os grupos iam terminando a Atividade 12, nos dirigíamos a eles a fim de explicar a Atividade 13; nossa explicação foi a seguinte, para todos os grupos: entregamos todas as atividades que os alunos tinham feito nos encontros anteriores e falamos que durante esses encontros trabalhamos diversas temáticas mas a maneira usada para resolver as atividades era semelhante e que fazia parte de um mesmo conteúdo.

Naquele momento eles deveriam estar olhando as temáticas, o que foi pedido em cada atividade anteriormente feita e deveriam elaborar um problema com os conteúdos trabalhados, com uma temática diferente, usando a criatividade para tentar elaborar um bom problema.

No início sentimos certa resistência em relação à proposição dos problemas mas, em seguida, todos os grupos se envolveram e conseguiram fazer a elaboração.

Nos grupos acompanhamos algumas discussões e chamou nossa atenção que o grupo 2 nos perguntou se poderiam elaborar três problemas. Eles queriam fazer uma competição entre eles para ver qual seria o melhor.

Ao analisar os problemas propostos percebemos que quase todos os problemas tinham um item, pedindo para representar a situação em forma de tabela e através da expressão algébrica, como encontrar a imagem de alguns valores dados do domínio.

Três dos oito problemas elaborados pelos grupos de alunos estão transcritos em seguida.

O problema do grupo 3 tinha o seguinte enunciado:

Na cidade de Lagoa Seca o metro de um tecido é 4,80, e eu tenho que comprar 1 metro de tecido quanto no mínimo vou gastar?

- a) *Construa uma tabela com a quantidade de tecido e o valor.*
- b) *Construa uma expressão algébrica que represente este valor.*
- c) *Quanto no mínimo vai gastar se comprar 5 metros e 8 metros?*

Análise do problema:

No problema do grupo 3 percebemos que os alunos usam a correspondência quando pedem para relacionar quantidade de tecidos e valor a pagar; fazem uso da representação tabular e algébrica e pedem para testar alguns valores do domínio.

O problema do grupo 4 tinha o seguinte enunciado:

Sabendo que o preço atual de uma coca-cola de 2 litros custa 4,50 R\$ e o de guaraná 3,75 R\$.

- a) *Construa uma tabela, com os litros e os valores.*
- b) *Qual a expressão que representa esta situação?*
- c) *Em uma mesa de bar há 5 pessoas cada uma tem 2,75 reais e estão querendo compra 4 litros de coca-cola, qual o valor que cada pessoa pagaria por esses 4 litros? Daria para comprar um guaraná com o que sobrou de cada pessoa?*

Análise do problema:

No problema do grupo 4 os alunos tratam, em um mesmo problema, de duas situações e pedem para fazer a representação tabular e algébrica das duas situações. O item (c) faz uma pergunta que leva a pensar sobre o processo mostrando que eles entenderam que com o uso do conteúdo de função é possível tratar de coisas comuns do nosso dia a dia.

O problema do grupo 3 tinha o seguinte enunciado:

Na loja do Armazem Paraíba por mês era vendido em torno de 200 celulares Nokia no valor de R\$ 399,00 e da LG vende 400 no valor de R\$ 299,00.

- a) *Quanto em valor eles arrecadaram por mês em cada marca?*
- b) *Qual é a mais lucrativa?*

- c) *Qual a expressão que devemos para determinar o valor de cada marca lucra por mês?*

Análise do problema:

Da mesma forma que o grupo 4, o grupo 7 também propõe em uma mesma situação, duas representações de função e também faz alguns questionamentos sobre a situação do problema.

Análise:

Percebemos que alunos tiveram dificuldades na escrita da língua materna e na linguagem matemática, usada no uso de algumas ideias e na forma de fazer as perguntas nos enunciados mas o importante para nós é que a ideia de função estava presente em todos os problemas elaborados. Como, provavelmente, era a primeira vez que os alunos propunham problemas, ficamos bastante satisfeitos com os resultados. Os alunos, precisariam, além da proposição, responder ao problema. Observamos que todos os grupos conseguiram resolver seus problemas de forma autônoma e correta, sem precisar de nossa presença; ao contrário do que acontecia nas primeiras atividades.

A atividade de proposição de problemas nos permitiu perceber como os alunos são criativos, visto que eles conseguiram elaborar problemas do conteúdo de função trazendo situações cotidianas. Esse tipo de metodologia permite desenvolver tal potencial no aluno, e ainda, segundo English (1997) quando o aluno propõe problema permite que o professor perceba como o aluno está vendo o conteúdo, mostrando-nos, que eles estão compreendendo o conteúdo que vem sendo estudado.

4.3 Segunda seção: representação gráfica de função

Na segunda seção de atividades nossa pretensão foi retomar as ideias e representações estudadas na primeira seção e acrescentar a representação gráfica, a fim de que o aluno compreenda que a partir desta representação é possível visualizar o comportamento de uma função e mostrar que uma função pode ser representada de várias formas; a segunda seção teve início no dia 12 de junho de 2013 com término em 24 de julho de 2013, totalizando 6 encontros, perfazendo o total de 12 aulas.

10º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 12/06/2013

Iniciamos as aulas falando para os alunos que tínhamos terminado a primeira seção de atividades e que era necessário que eles fizessem algumas atividades para que pudessemos avaliá-los. Entregamos uma lista com seis atividades para cada aluno resolver em casa e devolvê-las em oito dias.

Cinco das atividades foram os problemas que eles elaboraram no encontro do dia 02/06/2013. Essas atividades foram corrigidas por nós, melhorando alguns itens e acrescentamos outros porém não mudamos os temas nem os enunciados que os alunos propuseram.

Ao entregar as atividades, um dos alunos falou: “professor, essa atividade aqui é minha, fui eu que elaborei essa das laranjas.” Falei que algumas daquelas atividades tinham sido elaboradas por eles. Depois desta fala notamos que os alunos leram os problemas e procuraram identificar as atividades que tinham elaborado.

Análise:

Sentimos que os alunos ficaram orgulhosos de ter seus problemas sendo trabalhados por toda a turma, ou seja eles se sentiram agentes ativos do que estava ocorrendo em sala de aula e perceberam que suas atividades eram valorizadas e que eles estavam promovendo sua própria aprendizagem.

Na 6ª atividade desta lista elogiávamos seus desempenhos na proposição dos problemas do encontro do dia 02/06/2013 e pedíamos que desta vez tentassem melhorar, elaborando mais um problema. O tema deveria ter relação com alguma temática da cidade de Lagoa Seca – PB; em seguida, fizemos uma síntese dos conteúdos que trabalhamos nas 13 atividades que fizemos na seção 1. Comentamos sobre os conceitos de correspondência, grandezas, variável, generalização, dependência e independência, entre quantidades e ainda tratamos sobre as representações tabular, verbal e algébrica e suas importâncias.

Análise:

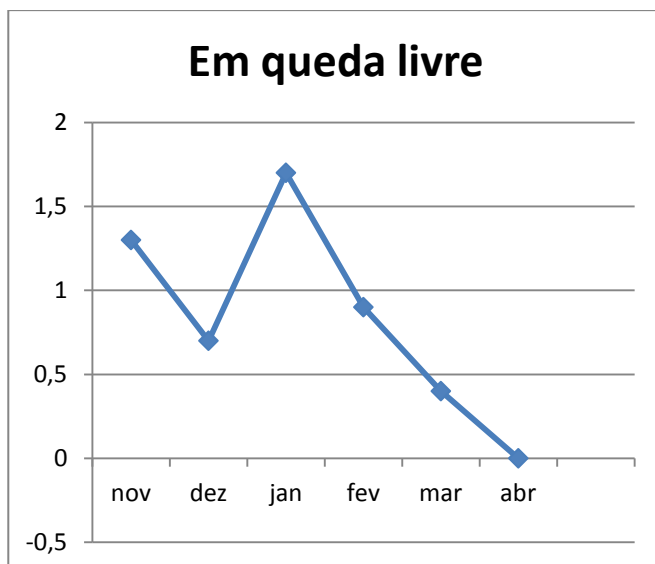
Ficou nítido, para nós, o quanto a participação dos alunos na resolução dos problemas da seção 1 ajudou no entendimento dos conceitos matemáticos; quando fazíamos a formalização dos conteúdos os alunos logo conseguiam fazer uma correlação com alguma atividade já realizada na seção 1.

Após esta síntese falamos que estaríamos iniciando uma nova seção, que usaríamos a mesma metodologia usada na seção 1 e que estaríamos inserindo uma nova representação para ajudar a entender como se comporta uma função mas que também retomariamos as ideias e as representações estudadas na seção 1; em seguida, pedimos que se dividissem em grupos de três alunos; havia em sala de aula 26 alunos, sendo formados 8 grupos de três alunos e uma dupla; em seguida, entregamos o roteiro da Atividade 14.

Atividade 14¹⁸ – Variação da inflação:

O gráfico abaixo mostra a variação da inflação (%) em determinado período de tempo; de acordo com o gráfico, responda:

¹⁸ Retirada e adaptada de Tinoco (2004. p. 17-18).



- a) *Onde são registrados os meses correspondentes ao gráfico?*
- b) *Onde são registrados os índices de inflação?*
- c) *Qual foi a inflação de janeiro?*
- d) *Entre que meses a inflação subiu?*
- e) *Qual a diferença entre inflação negativa e queda de inflação?*
- f) *Coloque os dados do gráfico em uma tabela.*

Os objetivos das Atividades 14 e 15 era fazer com que os alunos se familiarizassem com um gráfico; identificassem que em um gráfico sempre existem dois eixos e a importância de fixar uma origem.

Logo, os itens (a) e (b) da atividade 14 tinham, como propósito, questionar os alunos sobre a posição de cada uma das grandezas nos eixos. Os alunos não tiveram problema algum para identificar que se tratava dos eixos horizontal e vertical. No item (c) dávamos uma informação sobre ponto e pedíamos para que eles encontrassem o outro valor, ao qual este ponto estava se associando.

Os grupos tendiam a colocar os valores aproximados sem fazer a projeção, ou colocavam que janeiro correspondia a 1,5 ou 2, ao que perguntamos:

PP: Por que 1,5? Se eu projetar este ponto no eixo vertical vai ficar em cima do 1,5?

Gs: Não.

PP: Então, vai ser quanto?

Gs: Mas, não tem um valor.

PP: Aproximadamente é quanto?

Gs: 1,7.

PP: Correto.

O grupo 3 colocou, como resposta ao item (c) “entre 1,5 e 2” porém só detectamos quando estávamos analisando as atividades.

Quando questionamos sobre o crescimento da inflação em certo período, sentimos que eles o confundiram pois a maioria dos grupos colocou que a inflação tinha subido entre os meses de novembro a janeiro.

Fizemos o seguinte questionamento:

PP: Observem no gráfico o período de novembro a dezembro; o que está acontecendo?

G1: A inflação estar caindo.

PP: E entre dezembro e janeiro?

G1: Subindo.

PP: Logo, qual a resposta correta?

G1: De janeiro a fevereiro.

Tivemos este diálogo com os demais grupos e todos conseguiram entender, sem problemas, em qual período havia aumentado a inflação. Perguntamos qual seria a diferença entre inflação negativa e a queda da inflação a fim de que os alunos percebessem que, mesmo havendo um decréscimo no gráfico, isto não implica que a imagem seja negativa.

Todos os grupos nos chamaram alegando que não estavam conseguindo entender o enunciado. Para sanar as dúvidas fizemos alguns questionamentos para os grupos.

PP: Digam-nos o que houve com a linha no gráfico no período de janeiro a abril.

G2: Caiu.

PP: E neste período, mesmo em queda, a inflação foi positiva ou negativa?

G2: Positiva.

PP: E quando teremos uma inflação negativa?

G2: Quando o gráfico for abaixo da reta horizontal.

PP: Tentem escrever qual a diferença.

As respostas de alguns grupos foram:

G2: A queda nem sempre é negativa, só se continuar caindo. Ex: se passar de 0 e for $-0,5$ ai será negativo.

G3: Inflação negativa quando se tá (sic) com o valor abaixo de zero e a queda de inflação quando a inflação está alta e começa a cair.

G4: Queda de inflação é quando apenas vai descendo e não passa de $(-0,5)$. Já a inflação negativa é quando passa da margem de $(-0,5)$.

G5: A inflação negativa é quando ela estiver caindo e pode ir até 0, a partir de 0 para baixo inflação estar negativa.

Análise:

O ponto $-0,5$ no eixo das abscissas fez com que alguns alunos pensassem que só iria ficar negativo a partir deste ponto e não a partir do zero. Para os alunos é difícil perceberem que entre o zero e menos zero vírgula cinco existem infinitos números.

Neste item os alunos puderam fazer uma análise de como se comporta o gráfico, em relação ao crescimento e decrescimento.

O item (f) era para os alunos usarem a representação tabular, fazendo com que percebessem que a partir da representação gráfica eles poderiam construir uma tabela.

As únicas dificuldades estavam apenas em saber o que colocar na primeira e na segunda colunas, percebendo que tivemos algumas variações neste sentido. Vejam duas tabelas.

Meses	Varição de Inflação
Novembro	1,4
Dezembro	0,9
Janeiro	1,8
Fevereiro	0,9
Março	0,4
Abril	0

Figura 22: Representação tabular do grupo 6 referente ao item (f) da atividade 14.

INFLAÇÃO	MESSES.
2	NOV
1,5	DEZ
1	JAN
0,5	FEV
0	MAR
-0,5	ABR

Figura 23: Representação tabular do grupo 7 referente ao item (f) da atividade 14.

Análise:

Geralmente é feita no início do estudo do gráfico de uma função nos livros didáticos a passagem da representação tabular para a gráfica sem que seja feito o processo inverso, indo na contramão do que afirmam Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) no entendimento essencial 5d de que não se deve privilegiar apenas um tipo de representação; em nosso caso iniciamos já fazendo da segunda forma e percebemos que os alunos se comportaram bem com este tipo de abordagem.

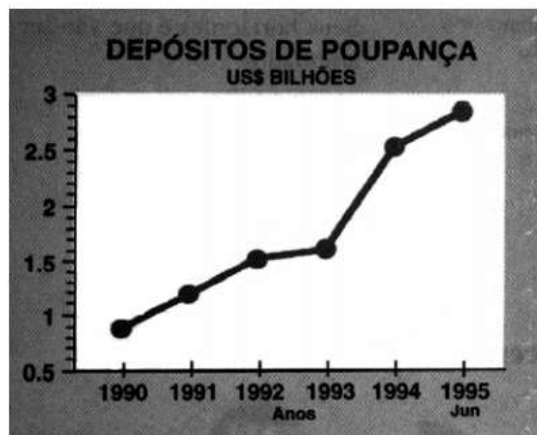
Outra dificuldade que observamos é que os alunos confundem grandezas com medida de grandeza. Como os gráficos que iniciamos são gráficos estatísticos, não chamamos a atenção dos alunos para este detalhe.

Esta atividade propiciou, aos alunos, entender que em um gráfico sempre existem dois eixos e em cada um deles deve ser colocada uma das variáveis; permitiu, ainda, que eles percebessem o comportamento do gráfico ao fazer o estudo do crescimento e do decréscimo; por fim, puderam fazer a passagem da representação gráfica para a tabular, ou seja, fazendo uso das representações.

Quando os grupos foram terminando esta atividade entregamos o roteiro da Atividade 15, cujos objetivos eram parecidos com a Atividade 14; o que havia de novidade era o propósito de os alunos perceberem a variação do que estava ocorrendo tanto no eixo das abscissas como no das ordenadas.

Atividade 15¹⁹ – Depósito de poupança:

Encontramos, na revista VEJA, 26 de julho de 1995 o informe de um Banco apresentando sua evolução ao longo dos últimos anos. Para tanto ela apresenta o gráfico, que produzimos abaixo:



Agora, responda:

- Qual a variação de tempo descrita pelo gráfico?
- A variação dos depósitos de poupança nos 5 anos foi de quantos bilhões de dólares?
- No período de tempo descrito pelo gráfico o que ocorreu com os depósitos de poupança, neste Banco?
- Em que período houve maior aumento nos depósitos de poupança? E de quanto foi este aumento? Qual o período em que houve o menor aumento nos depósitos de poupança?
- Construa uma tabela com os dados do gráfico.

No item (a) muitos alunos colocaram que a variação de tempo era em meses; por isto precisamos questioná-los sobre os períodos inicial e final para que eles percebessem que a variação se tratava da diferença entre o tempo final e o tempo inicial.

Com relação à variação dos depósitos, alguns alunos colocaram 3 milhões, considerando que o gráfico começava em zero e não em 0,9. Fizemos esta observação nos grupos fazendo com que percebessem que em 1990 já havia um valor em depósito na poupança e que eles teriam que considerá-lo.

¹⁹ Retirada e adaptada de Oliveira (1997).

Análise:

A resolução de problemas como metodologia, sugere que o aluno faça uma leitura mais atenta da atividade e, como estamos trabalhando com atividades de contexto social, é necessário ficar atento aos detalhes que o enunciado fornece. A partir da resposta que os alunos deram, como explicitamos no parágrafo anterior, pudemos mostrar-lhes que deveriam fazer uma leitura bem atenciosa dos enunciados dos problemas pois eles fornecem detalhes importantes.

O item (c) era para que eles analisassem a curva do gráfico e dissessem o que estava ocorrendo com os depósitos no período dos cinco anos, apresentando algumas respostas, como as destacadas em seguida:

G1: Foi subindo ficou meio parado mas depois foi subindo novamente (sic).

G2 e G6: Subiu.

G4: Aumentou com o passar do tempo.

G5: Aumentaram os depósitos.

G8: Ocorreu um aumento de depósitos na poupança.

Análise:

Observamos que, com uma linguagem comum, conseguiram fazer, tal como na Atividade 14 o estudo de como se comporta o gráfico, mesmo sem termos formalizado para eles sobre crescimento e decrescimento.

Todos os grupos no item (d) confundiram e disseram que o período com maior depósito de dinheiro foi em 1995. Isto deve ter ocorrido porque, ao olharmos o gráfico, é neste ano que está o maior acúmulo na poupança. Os alunos não perceberam que se trata de um acúmulo de valores. Precisamos questioná-los e pedimos para que olhassem a linha do gráfico e nos dissessem qual período estava crescendo mais rapidamente; assim perceberam que era de 1993 a 1994.

Questionamos também, neste item de quanto foi o depósito neste período, sendo que apenas os grupos 6 e 8 responderam corretamente; os demais não perceberam que

queríamos os valores de depósito apenas no período de 1993 a 1994 e colocaram os depósitos de todo o período.

Análise:

Acreditamos que os alunos não dão atenção necessária ao que estão fazendo; muitas vezes, o que se pede é algo simples de ser resolvido; contudo, eles não param e fazem uma reflexão sobre o que estão fazendo e desistem; pelo fato, talvez, desses alunos não estarem acostumados a um trabalho com uma metodologia que os coloque como protagonistas e o professor não lhes dar as respostas prontas.

Ainda tínhamos o questionamento em qual período houve menor quantidade de depósitos. Apesar de terem tido dificuldade no item anterior, neste último questionamento eles conseguiram responder sem dúvidas. Por fim, tal como na Atividade 14, também pedimos a construção da tabela.

No final da aula desenhamos um gráfico na lousa e chamamos a atenção dos alunos para os termos reta horizontal e vertical, destacando que em um gráfico, ou quando formos construir um gráfico, temos sempre que definir a origem e que esta será sempre na intersecção entre os eixos.

Análise:

A Atividade 15 permitiu o aprofundamento do que foi trabalhado na Atividade 14 e ainda fez com que os alunos percebessem, a partir de nossa fala, a importância de fixar a origem e os aspectos relacionados à leitura de um problema.

11º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 13/06/2013

Ao chegar à escola, às 15h40min (nossa aula seria às 16h) nos deparamos com alguns alunos no portão indo embora mas ao nos ver, retornaram; contudo, alguns alunos foram ao nosso encontro e disseram que a maioria dos alunos da turma já havia saído, porque a professora de Português havia faltado e eles não quiseram esperar nossa

aula. Propomos iniciar, com eles, neste horário, tendo em vista que a turma estava sem professor.

Ao entrar na classe havia apenas 10 alunos e eles pediram que liberássemos todos. Tomamos a palavra e falamos que isto não podia acontecer e que eles estavam ali para assistir a aula, até as 17h10min e que não poderiam estar perdendo a aula de Matemática, apenas por não querer esperá-la, por serem as duas últimas aulas que, embora tendo poucos alunos, iríamos dar continuidade às atividades que tínhamos planejado.

Observação:

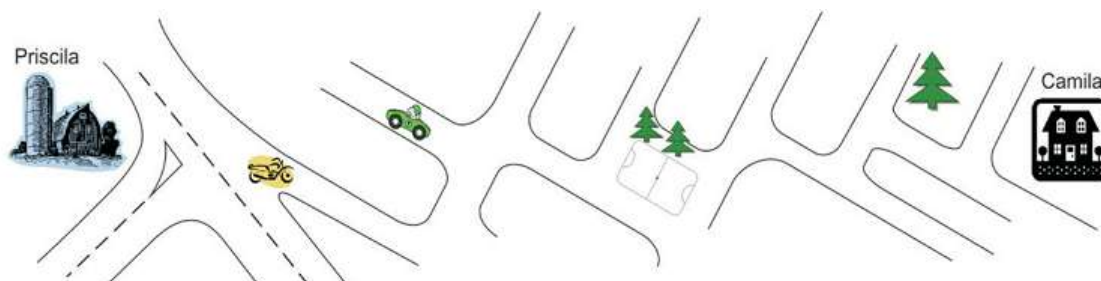
As nossas aulas da quinta-feira foram prejudicadas por serem a duas últimas aulas dos alunos; eles sempre pediam para sair no mínimo com 10 minutos antes, alegando que poderiam perder o ônibus escolar que os levam para a Zona Rural. Observamos que parece ser uma rotina da escola liberar as turmas antes do horário previsto; quando saíamos de nossa sala de aula notávamos que quase não tinha mais alunos nos ambientes da escola.

Após esta conversa inicial demos início à aplicação das atividades, sendo formados dois grupos de três alunos e duas duplas.

Entregamos, às equipes, o roteiro da Atividade 17.

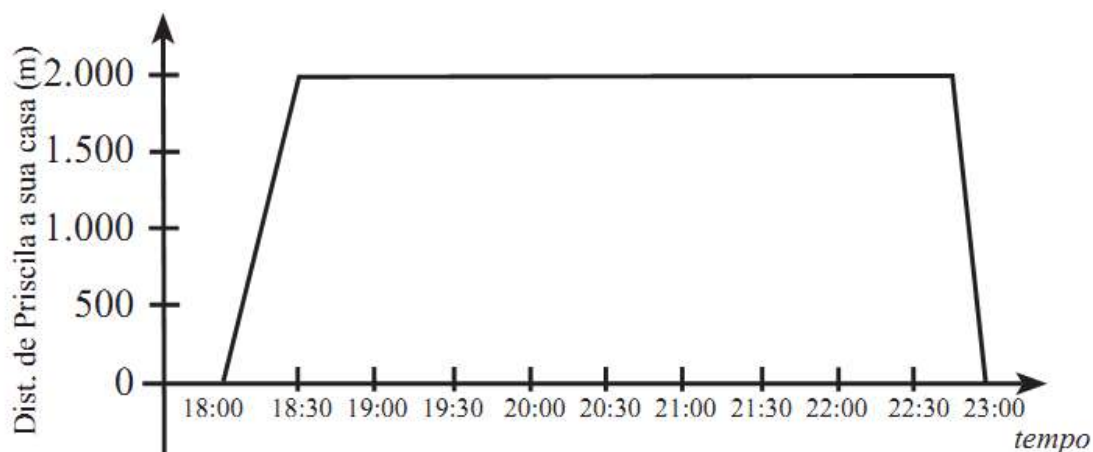
Atividade 16²⁰ – A ida à festa:

Priscila sai de casa para ir à festa de Camila. Camila dá um mapa do caminho para que Priscila possa chegar à sua casa. Priscila vai a pé e volta de ônibus.



Observe o gráfico e responda:

²⁰ Retirada e adaptada de Tinoco (2004. p.30).



- A que horas Priscila saiu de casa?
- A que horas Priscila chegou em casa?
- A que horas Priscila Chegou à festa?
- A que distância fica a casa de Camila da casa de Priscila?
- Quanto tempo Priscila demorou para chegar à festa?
- Quanto tempo Priscila demorou para chegar em casa?
- Por que no trecho entre 18:00h e 18:30h, o gráfico sobe?
- Que grandeza representa o eixo horizontal?
- Que grandeza representa o eixo vertical?

Esta atividade tinha, como objetivo, levar os alunos a identificar a presença dos dois eixos e das grandezas nelas postas, além de que este gráfico ajudaria o aluno a ver sentido quando fosse estudar a função constante.

Os alunos não tiveram problemas em identificar que Priscila saiu de casa às 18h00min nem a hora em que ela chegou à casa, após a festa, porém alguns grupos não conseguiram identificar a hora da chegada à festa, sem a nossa ajuda.

Para que eles nos respondessem corretamente, fizemos alguns questionamentos sobre o que significava a linha horizontal a o eixo x, a fim de que percebessem que representava o tempo que Priscila estava na festa; em seguida, perguntamos o que significava o ponto (18:30; 2000), apenas apontando-o com o lápis, sem dar suas coordenadas. Falamos que se eles conseguissem projetar aquele ponto no eixo horizontal conseguiriam saber o horário em que Priscila chegou na festa.

Com relação à distância da casa de Priscila à festa, dois grupos responderam que era de 500 metros. Não conseguimos entender como o aluno chegou a este resultado, mas chamamos sua atenção para o que representava cada valor no eixo vertical.

Nos itens (e) e (f) os alunos tenderam a repetir a resposta, afirmando que Priscila gastou o mesmo tempo para ir de sua casa à festa e da festa para a sua casa. Os questionamos relativos à forma que Priscila usou para ir e vir à festa, eram uma ressalva para que percebessem que no enunciado trazia que ela havia ido andando e voltado de ônibus; sendo assim, a volta seria feita em menos tempo. Com este encaminhamento os alunos concordaram que não era o mesmo tempo; pedimos, então, que fizessem a projeção no gráfico obtendo, como resposta, 15 e 20 minutos, respectivamente.

Mesmo os alunos respondendo quais os horários de chegada e saída da festa, nenhum grupo respondeu que Priscila demorou 4h15min na festa; todas as respostas foram 4h45min.

Análise:

Esta atividade foi bastante proveitosa, apesar de contarmos com poucos alunos, mas permitiu que eles compreendessem melhor como fazer a leitura de um gráfico.

Quando entregamos a atividade seguinte, cujo objetivo era fazer com que os alunos trabalhassem o plano cartesiano, pedimos que lessem o que estava sendo solicitado. Como se tratava do primeiro contato, nesta série, dos alunos com o plano cartesiano, fomos à lousa para explicar alguns pontos que eles iriam usar para resolver a atividade. Tomamos como exemplo, a Atividade 16, e explicamos como dispor os eixos ox , oy e como dispor também uma coordenada no plano cartesiano.

A Atividade 17²¹ era técnica e consistia em dispor vários pontos no plano cartesiano a fim de, no final, construírem um desenho no plano. Apesar de a atividade ser longa, os alunos estavam bastante entusiasmados, pois queriam saber de que desenho se tratava²². Uma das dificuldades dos alunos era com relação o que pertencia ao eixo ox , se era o primeiro ou o segundo valor do par ordenado.

Análise:

Com esta atividade acreditamos que os alunos conseguiriam construir os gráficos de função das próximas atividades, com maior facilidade. As atividades 14, 15, 16 e 17 não representavam função mas

²¹ Retirada de Tinoco (2004, p.22).

²² Quando eram dispostos os pontos e em seguida ligados, formava-se o desenho de um cachorro.

permitiram que os alunos se familiarizassem com aspectos da construção de um gráfico.

12º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 10/07/2013

No dia 13/06/2013 demos nossas aulas e saímos da escola com a informação de que na semana seguinte, haveria aula até a quarta-feira, dia 18/06/2013; entretanto, um dia antes fomos informados de que neste dia seria a confraternização dos alunos da escola, não haveria aula e ainda deveria ser o encerramento do segundo bimestre, ou seja, o encerramento das aulas que pelo calendário da Secretária Estadual de Educação da Paraíba deveria ocorrer na sexta-feira; para início do recesso do meio do ano, ocorreu com três dias de antecedência. Foram 21 dias de recesso escolar, tendo as aulas sido retomadas apenas em 10/07/2013 quando, pelo calendário escolar deveriam ter sido retomadas no dia 08/07/2013.

A aula teve início no horário normal e pedimos que os alunos entregassem a atividade extra que tínhamos deixado para que eles fizessem em casa. Recebemos apenas 20 atividades, visto que alguns alunos falaram que esqueceram e que a entregariam no próximo encontro.

Após este momento convidamos os alunos a prestar atenção em nossa fala, pois naquele momento gostaríamos de revisar algumas ideias estudadas antes do recesso do meio do ano, para que eles pudessem lembrar o que já tínhamos estudado.

Uma das primeiras atividades que trabalhamos na nossa intervenção tinha, como contexto, o preço da passagem de ônibus entre os municípios de Lagoa Seca e Campina Grande; na época da aplicação da atividade o valor da passagem custava R\$ 2,25. Durante o recesso houve vários protestos²³ em todo o País, sendo que uma das reivindicações dos manifestantes era a redução do valor da passagem do transporte coletivo; devido a essas manifestações o valor da passagem entre Lagoa Seca e Campina Grande foi reduzido em R\$ 0,25.

Em virtude deste contexto social, retomamos esta atividade para fazer uma breve revisão. Colocamos os novos dados no quadro e iniciamos fazendo a representação

²³ Esses protestos ficaram conhecidos como “Revolução dos vinte centavos”.

tabular para algumas quantidades de passagens e, a partir disto lembramos os conceitos de grandeza, variável dependente e variável independente; em seguida, fizeram a representação algébrica depois dessa explanação fizemos também a representação gráfica.

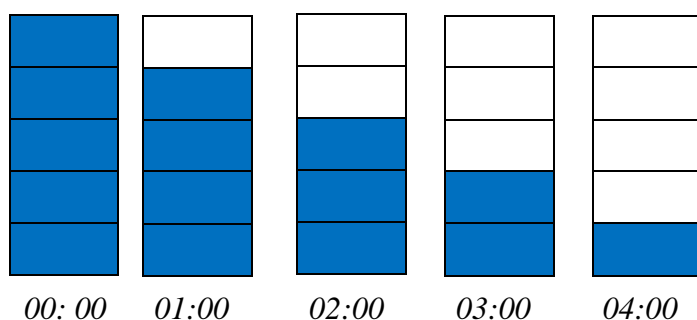
Quando construíamos o gráfico desta situação lembramos a eles das posições dos eixos, a posição do ponto de coordenada (0,0). Uma das dúvidas que dois alunos explicitaram quando construíamos o gráfico se referia a: qual variável colocar em cada eixo; um aluno perguntou se era indiferente colocarmos o valor da passagem na horizontal ou na vertical.

Explicamos que para construir um gráfico era comum colocarmos no eixo horizontal a variável independente e no eixo vertical a variável dependente, muito embora também explicássemos, no momento, que esta ordem não é obrigatória mas que iremos optar por ela; ainda chamamos sua atenção para que, quando fossem construir o gráfico, era preciso ver a escala que eles estavam usando.

Após esta breve explanação pedimos para que eles formassem grupos de 3 alunos; como tínhamos na sala 24 alunos, foram formado 8 grupos; em seguida, entregamos o roteiro da atividade seguinte.

Atividade 18²⁴ – Reservatório de água:

Um reservatório de água com capacidade de 1000 litros está cheio; o registro é aberto para esvaziá-lo e um cronômetro é acionado no instante em que se inicia o escoamento.



Observando a ilustração acima, preencha a tabela:

Tempo (horas)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
Volume (litros)	1000		800						

²⁴ Retirado e adaptado de Rossini (2006).

- a) *Represente, no gráfico, o que você observou na tabela, coloque o volume no sentido vertical e o tempo no sentido horizontal.*
- b) *Se o cronômetro continuar funcionando, qual a quantidade de água no reservatório no instante $t = 7$? Represente no gráfico esta situação.*
- c) *Com quanto tempo o reservatório estará completamente esvaziado? Represente no gráfico esta situação.*
- d) *É necessário unir os pontos do gráfico? Explique.*
- e) *O volume de água observado no reservatório depende do tempo transcorrido? Explique.*
- f) *Escreva uma expressão matemática que represente esta situação.*

Como ocorria sempre nas primeiras atividades, alguns grupos nos chamavam para dizer que não tinham entendido o problema.

Análise:

Sentimos que, mesmo já tendo mudado um pouco, os alunos querem que o professor ainda diga qual procedimento eles devem utilizar para resolver as atividades matemáticas. Acreditamos que isto já esteja enraizado nos alunos; eles não gostam de pensar; muitas vezes, nem leem o enunciado do problema e já dizem que não o entenderam. Observamos que os alunos estão acostumados com a Matemática praticada no início do século XX, quando eles repetiam os procedimentos que o professor já tinha ensinado.

Para esses grupos que nos chamaram fazendo esta justificativa, tínhamos que pedir para que lessem o problema e fazíamos alguns questionamentos para que pudessem compreender o contexto. As perguntas eram do tipo: “O que diz o problema?” “Quais são os dados do problema?”

Análise:

Tentamos sempre trabalhar na perspectiva de não dar as respostas prontas e definidas para os alunos. Quando trabalhamos numa perspectiva através da resolução de problemas, esta mediação fica mais

facilitada o que ajuda o aluno a sair da comodidade que o ensino tradicional fortalece.

Para o item (a) que era para preencher a tabela, a dúvida de alguns alunos era saber quais eram os valores que deveriam colocar.

PP: Olhem o desenho e vejam qual a variação do volume em cada intervalo de tempo.

G6: A cada hora diminui um quinto.

PP: Correto. Mas, isso são quantos litros?

G6: 200 litros.

PP: E cada meia hora?

G6: 100 litros.

Este diálogo foi parecido com o estabelecido com os demais grupos, com exceção de que nos demais grupos não houve percepção fracionária da situação, o que fez com que conseguissem compreender que a cada 30 minutos o volume do reservatório diminuía em 100 litros. Não percebemos, em nenhum grupo, acerto por completo do preenchimento da tabela. Como o tempo na tabela variava no início de 30 em 30 minutos, quando esta variação começou a ocorrer a cada hora, os alunos continuaram a preencher as cédulas da tabela referente ao volume, variando apenas em 100 litros, mas agora seria uma variação de 200 litros, o que deve ter ocorrido por falta de atenção dos alunos.

Para corrigir isto nos grupos, partimos da visualização da variação de 30 minutos na tabela e perguntamos:

PP: A cada 30 minutos quanto está variando o volume?

Gs: 100 litros.

PP: E a cada hora?

Gs: 200 litros.

PP: Observem o preenchimento da tabela; vejam que o volume está variando a cada 30 minutos, de zero a três horas, porem a partir de 3 horas não é mais de 30 em 30 minutos mas de hora em hora. Sendo assim, de 3 para 4 horas quanto de volume vai diminuir no reservatório?

Gs: 200 litros.

Percebemos que alguns alunos não têm a devida atenção aos dados do enunciado do problema, o que faz com que cometam erros.

Para fazer a representação gráfica no item (b) apesar de um exemplo no início da aula, eles perguntavam quais valores deveriam colocar no gráfico. Ao caminhar na sala e observar as resoluções dos alunos víamos que, mesmo estando trabalhando na malha, não colocavam as distâncias dos valores numéricos nos dois eixos obedecendo a uma escala. Neste momento fizemos comentários com relação aos valores que eles colocavam, se cada ponto na reta x tinha a distância de um para o outro igual a, 0,5 deveria ser mantido padrão até o fim; com nosso comentário eles entendiam rapidamente e não questionavam.

Análise:

Quase sempre os livros didáticos apresentam o conteúdo de função sem apresentar, no entanto, qualquer preocupação com a escala usada nem sugerem o uso do papel milimetrado, originando esta dificuldade para se construir o gráfico de maneira correta, sobretudo se não forem orientados pelo professor.

Outro equívoco comentado por alguns grupos se refere à relação aos pontos (0; 1000) e (5; 0). Eles colocavam dois zeros nos eixos não percebendo que poderiam projetar o ponto no próprio eixo.

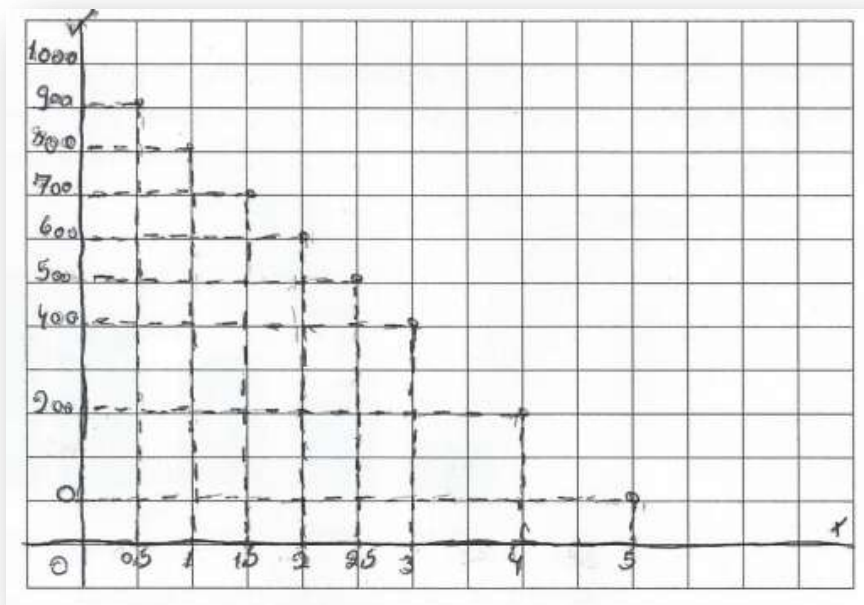


Figura 24: Recorte da resolução do grupo 3 referente à atividade 18.

A resolução deste item levou bastante tempo de vez que eles chamavam constantemente para perguntar a cerca de cada passo que davam. O grupo 6 colocou, no eixo das abscissas, os valores em ordem decrescente; após o zero colocaram 900; em seguida 800, até chegar em 100.

Análise:

Mesmo com as dificuldades relatadas fica evidente que os alunos mostraram operar bem a passagem da linguagem escrita para a tabela e gráfico.

No item (c) tínhamos, como objetivo, observar se os alunos haviam entendido a situação. Esperávamos que dissessem que depois de 5 horas qualquer valor da variável tempo teria, em sua correspondência, o volume zero, mas os alunos questionavam que não era possível ou então era um valor negativo.

Acreditamos que este entendimento poderia ter sido diferente se tivéssemos colocado o item (d) antes do item (c). No item (d) os alunos conseguiram responder sem nenhuma dúvida, bem como o item (e).

Quando perguntávamos, no item (f), se era possível ligar os pontos do gráfico, eles não conseguiram responder; tentamos, então, mostrar que qualquer valor do eixo

das ordenadas tinha um correspondente no outro eixo e mostramos a diferença entre o gráfico desta atividade e do exemplo do início da aula; mesmo assim, cremos que os alunos possam não ter entendido; na aula seguinte retomamos esta Atividade em sala, fazendo uma plenária com os alunos e respondendo à questão na lousa.

Quanto à representação algébrica, foi preciso que fizéssemos algumas mediações para que eles fizessem a representação.

PP: Qual o volume inicial do reservatório?

Gs: 1000 litros.

PP: E após uma hora?

Gs: 800 litros.

PP: E como você chegou a este resultado?

Gs: Tirando 200 de 1000.

PP: Ou seja, subtraindo. Escreva isto. E decorridas duas horas, qual será o volume?

GG: 600 litros.

PP: Como fez?

Gs: Subtraindo 400 de 1000.

PP: Escreva isto no papel. É possível escrever 400 de outra forma?

Gs: Como assim?

PP: Através de uma multiplicação por exemplo.

Gs: 200 vezes 2.

PP: Escreva.

Depois disto ficou mais fácil eles identificarem qual a expressão algébrica da situação porém não conseguimos fazer esta discussão com todos os grupos pois, como a aula chegou ao fim, os alunos queriam sair para o intervalo, entregando a atividade. Como sentimos que a compreensão desta atividade não ficou clara, precisamos retomá-la no encontro seguinte para só assim passarmos para a Atividade 19.

Quanto aos problemas que os alunos tinham que elaborar em casa, eles traziam as noções por nós estudadas na primeira seção.

Das atividades que recebemos observamos que: três alunos não elaboram o problema; havia cinco problemas iguais, ou seja, cinco alunos fizeram juntos, tendo um copiado as respostas dos outros; um aluno elaborou um problema que não envolvia a temática de função; era um problema que abordava uma tabela da estatística e

perguntava sobre distribuição de frequência; os demais problemas representavam função.

Vejam alguns problemas:

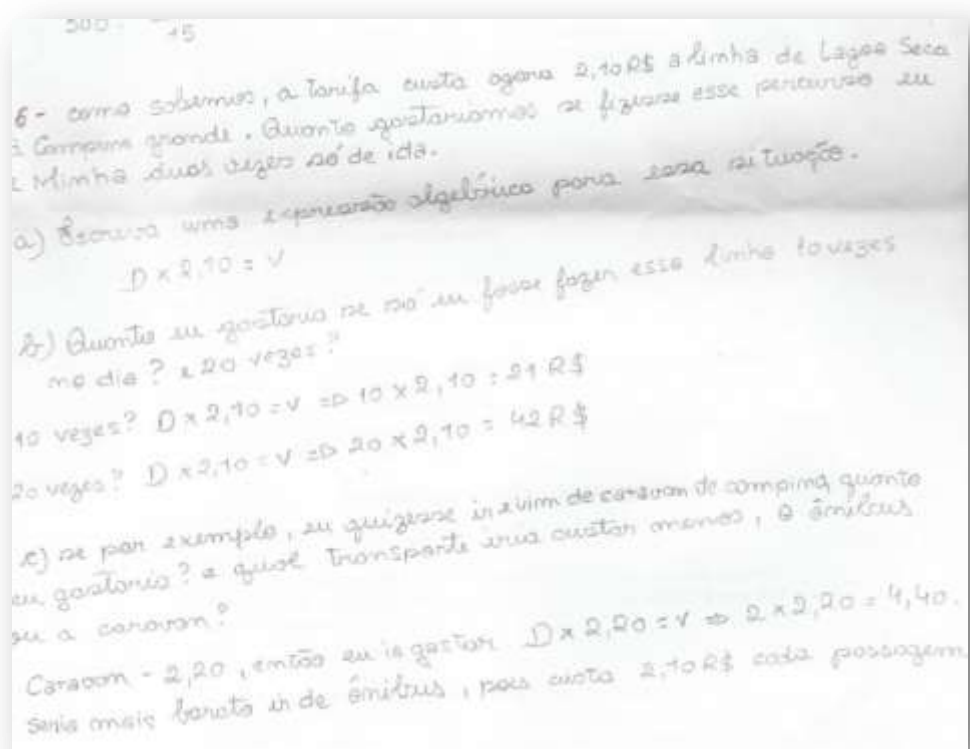


Figura 25: Proposição de problema feita pelo aluno 1.

6) no mercado de today em Loggia Seca sabemos que o valor de um determinado Litro de Whisk é de R\$ 52,00. Responda

a) Qual a expressão algébrica para esta situação?
 $V, W = R\$ 52,00$

b) Qual é a variável dependente? e qual a variável independente?
 $V \neq W$

c) Quais as letras que você utilizou para representar os variáveis na expressão?
 $V \neq W$

d) por que uma determinado quantidade de... há quantos valores?
 $R\$ 52,00$

e) Qual o valor de 5 Litros de Whisk? 145? e de 200 Litros?
 $5L = R\$ 260,00$ e de 33 = R\$ 171,60 e de 200 = ~~R\$ 1040,00~~
 $R\$ 1040,00$

Figura 26: Proposição de problema feita pelo aluno 2.

6) em cada dia além de esther... há loggia seca, a mensagem custa 3,00 quanto o...
 Desse quanto gasta?

a) Então uma tabela quanto o do ponto gasto se forem 5 ou 20 vezes?

b) faça uma expressão algébrica sobre isso
 $R\$ 3 \times a = V$

b) a)

quantidade	valor
2	6
3	35
5	50

5) a)

$x = a + 35$ $x = 45$
 $x = 100 + 35$ $x = 135$
 $x = 100 + 35$ $x = 135$

d) $35 \times 2 = 70$
 35
 $70 + 35 = 105$
 $105 + 35 = 140$

Figura 27: Proposição de problema feita pelo aluno 3.

NO AÇOGE EM LADDA ^{SEEN} O KL DE EDNE DE BOZ
CUSTA R\$ 15,00.

A) CONSTRUA UMA TABELA.

B) DUNIS AS ~~GRANDEZAS~~ GRANDEZAS?

C) FAÇA UMA EXPRESSÃO ALGEBRICA.

D) COM R\$ 60,00 QUANTOS KL DE EDNE SE COMPA.

A)	KL	VALOR
	1	15,00 R\$
	2	30,00 R\$
	3	45,00 R\$
	4	60,00 R\$

B) VALOR e QUANTIDADE.

C) $X = KL \cdot 15$

D) SE COMPA 4 KL DE EDNE.

Figura 28: Proposição de problema feita pelo aluno 4.

Série: 1º ano turma F turno tarde

Trabalho de Matemática

1) No Mercado de Lagoa Seca, uma caixa de Bolacha custa 15,00 reais e, no mercado de Compinas custa 15,50. Responda.

a) Escreva uma expressão Algebrica para esta situação:

$$R\$ 15,00 \times Q = V$$

$$R\$ 15,50 \times Q = V$$

b) No mínimo quanto gastaria se comprar 10 caixas no primeiro mercado e mais em Lagoa Seca?
 E se fosse no mercado de Compinas grande?
 Em qual dos mercados gastaria menos?

Em Lagoa Seca gastaria 150 reais
 Em Compinas grande gastaria 155 reais
 No mercado de Lagoa Seca, pois + uma economizar 5 reais de seu dinheiro

c) Quantas caixas de Bolacha seriam compradas com 400 reais? E com 600 reais?

Com 400 reais compraria 26 caixas pois:
 $26 \times 15,00 = 390$ e sobra 10 reais.

Com 600 reais compraria 38 caixas pois:
 $38 \times 15,50 = 589$ e ainda sobra 11 reais.

d) Quais são as variáveis?
 Q depende de B para poder de se obter.
 São o preço da bolacha, que mais depende de Q e nem de B.

Figura 29: Proposição de problema feita pelo aluno 5.

6) No município de Lagoa Seca PB tem um parque de Diversões com duas Bilheterias com preços diferentes de ingressos. A Bilheteria A e B. Bilheteria A custa R\$ 3,00 um ingresso e Bilheteria B custa R\$ 4,00 um ingresso.

A) Construa duas tabelas de correspondência entre a quantidade de pessoas e o valor do ingresso a pagar.

A)	a	v	B)	a	v
	1	3,00		1	4,00
	2	6,00		2	8,00
	3	9,00		3	12,00
	4	12,00		4	16,00
	5	15,00		5	20,00
	6	18,00		6	24,00
	7	21,00		7	28,00

B) Quais as duas expressões algébricas que representam estas situações.

$$| A = a \cdot v | \quad | B = a \cdot v |$$

C) Quais as variáveis dependente e independente?

Variável independente \rightarrow Valor $\rightarrow v$
 Variável dependente \rightarrow Quantidade $\rightarrow a$.

D) Se tivesse R\$ 220,00 quantos ingressos poderia comprar de cada Bilheteria?

R: Poderia comprar da Bilheteria A 73 ingressos e da Bilheteria B 55 ingressos.

$$A) \begin{array}{r} 3,00 \\ \times 73 \\ \hline 900 \\ 2100 \\ \hline 219,00 \end{array}$$

$$B) \begin{array}{r} 4,00 \\ \times 55 \\ \hline 2000 \\ 2000 \\ \hline 220,00 \end{array}$$

E) Quanto pagaria se comprasse 55 ingressos da Bilheteria A? e da B?

R: Pagaria se comprasse 55 ingressos da Bilheteria A R\$ 165,00 e da Bilheteria B R\$ 220,00.

$$A) \begin{array}{r} 3,00 \\ \times 55 \\ \hline 1500 \\ 1500 \\ \hline 165,00 \end{array}$$

$$B) \begin{array}{r} 4,00 \\ \times 55 \\ \hline 2000 \\ 2000 \\ \hline 220,00 \end{array}$$

Figura 30: Proposição de problema feita pelo aluno 6.

Análise:

Acreditamos que, tal como afirma English (1997), quando o aluno propõe problemas corretamente mostra que houve um entendimento do conceito. Percebemos que durante a proposição dos problemas os alunos foram organizando os conhecimentos aprendidos; em seus problemas encontramos os conceitos introdutórios de função e as representações verbal, tabular e algébrica.

13º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 17/07/2013

Neste encontro retomamos a Atividade 18 para fazer uma plenária, ressaltamos que percebemos que eles tinham grandes dificuldades para entender o enunciado do problema e que isto ocorria por eles não fazerem uma leitura adequada e que eles deveriam ter mais confiança em si mesmos.

Foi feita uma leitura do problema 18 e logo em seguida colocamos, na lousa, a tabela preenchida, que era a resposta do item (a) do problema. Falamos que era interessante e ajudaria para encontrar a expressão algébrica se, ao invés de colocar o resultado direto, referente a cada célula da tabela, fizessem a operação detalhada; assim, para colocar na tabela o volume do reservatório correspondente a uma hora com a torneira ligada, deveriam por $1000 - 200.I = 800$, o que ajudaria a generalizar para qualquer valor.

Quando passamos para o item (b) fizemos, mais uma vez, comentários sobre as grandezas envolvidas no problema e em qual eixo deveriam colocar cada uma delas; na oportunidade, ainda falamos das variáveis dependente e independente; ao colocar os valores nos dois eixos falamos sobre o cuidado com a escala; quando estávamos colocando esses valores um aluno perguntou se o zero não deveria ser no lugar do 100.

Comentário:

Sentimos que os alunos ficaram com dúvida quanto à origem dos eixos. Na correção das atividades já havíamos percebido que tinham cometido alguns erros com relação a isto; eles queriam que fossem colocados dois zeros, um no eixo das ordenadas e outro no das abscissas.

Este questionamento permitiu que falássemos mais sobre a importância de fixar logo a origem ao se construir um gráfico.

As dificuldades apresentadas pelos alunos na interpretação do gráfico podem ocorrer pela falta de compreensão do problema.

Em seguida, falamos sobre a continuidade e da necessidade de ligarmos os pontos do gráfico. Feita toda a correção em plenária da Atividade 18 e como na aula havia 23 alunos, formamos 7 grupos de 3 componentes e uma dupla, aos quais entregamos o roteiro da Atividade 19 e pedimos que começassem a responder.

Atividade 19²⁵ – Troco ao comprar pães na padaria:

João vai à padaria Bom Jesus, com R\$ 2,00 para comprar pães; cada um custa R\$ 0,20.

- a) Se comprar 5 pães, quanto receberá de troco? E se comprar 6 pães? E 10 pães?*
- a) Escreva a expressão que dá o troco que João receberá, se comprar um número x de pães qualquer.*
- b) Construa um gráfico que represente esta situação.*
- c) O ponto $(2; 0,40)$ pertence a este gráfico? E o ponto $(10; 2,00)$? E o ponto $(11; 2,20)$?*
- d) Qual a segunda coordenada do par $(0; \quad)$ do gráfico?*
- e) Qual a primeira coordenada do par $(\quad; 1,60)$ do gráfico?*

Quanto ao item (a) quase todos os grupos se confundiram; ao invés de colocarem o troco que João deveria receber ao comprar 6 pães, colocaram o valor correspondente a 6 pães, ou seja, R\$ 1,20, ao invés de R\$ 0,80. Interessante é que poucos grupos solicitaram nossa presença para perguntar algo sobre este item; eles nos chamavam para tirar dúvidas de como escrever a expressão algébrica, quando percebíamos que tinham cometido este equívoco. Precisamos fazer algumas colocações:

PP: Por que a resposta de vocês deu R\$ 1,20 para 6 pães?

G4: Se um pão custa vinte centavos, 6 pães custa um e vinte.

²⁵ Atividade formulada pelo pesquisador.

PP: Correto. Mas o enunciado do problema não pede o valor a pagar por seis pães. Leiam. E me digam o que o problema quer saber.

G4: O troco.

PP: E qual é o troco quando comprar 6 pães?

G4: Oitenta centavos.

No grupo 7:

PP: Vamos ver como vocês fizeram o item A? Para cinco pães, qual o valor correspondente?

G7: Um real.

PP: E para seis pães?

Comentário: Eles tinham colocado que para seis pães seria R\$ 1,20, mas na hora em que eu fiz a pergunta um aluno do grupo percebeu que era o troco.

A1G7: Oitenta centavos. Tem que colocar o troco, né? E dez pães não vai sobrar nada.

PP: Correto. Agora tentem escrever a expressão algébrica.

No grupo 5:

PP: Leiam pra mim o item (a), por favor.

G5: Se comprar 5 pães, quanto receberá de troco?

PP: Quanto?

G5: Um real?

PP: E para seis pães?

G5: Um e vinte.

PP: Vai receber um real e vinte centavos de troco ou vai custar isto? Ele quer saber o que?

G5: O troco.

PP: Se seis pães custam R\$ 1,20, quanto de troco ele receberá?

G5: R\$ 0,80.

PP: E se forem dez pães?

G5: Não tem troco.

Análise:

Apesar deste erro cometido pelos alunos, fica evidente a evolução que eles tiveram na leitura do problema e já com autonomia para resolvê-lo sem ajuda do professor pesquisador.

No item (b) era para se escrever a expressão algébrica. Alguns grupos, mesmo acertando o item (a), colocaram que a expressão algébrica era $T=0,20.X$; neste caso, falávamos que não estava correto, que era preciso que eles tentassem fazer, olhando como fizeram o item (a).

G7: Está certo a letra (b), professor?

PP: Vamos analisar. Como vocês fizeram o item (a)? Vá falando qual procedimento você utilizou.

G7: Eu peguei o valor que ele tinha.

PP: No caso, R\$ 2,00.

G7: Vou diminuindo.

PP: Diminuindo quanto?

G7: Um valor qualquer de pão.

PP: Multiplicado por 0,20.

G7: Vai ficar dois menos vinte vezes x?

PP: Certo.

Análise:

Propositadamente não solicitamos em nenhum item da Atividade 19, a construção de tabela, para que os alunos não fiquem presos ao seu uso e pensem que é possível fazer apenas a representação algébrica e gráfica com o auxílio da tabela; percebemos que com alguns raciocínios simples pudemos levá-los a construir essas representações, sem o auxílio da tabela.

Para o item (c) os alunos deveriam construir o gráfico e queríamos ver se eles colocariam as variáveis no eixo correto, sem nossa interferência; apenas um grupo colocou quantidade de pães na vertical; todos os outros fizeram corretamente. Para corrigir este grupo perguntamos:

PP: Qual a variável dependente desta situação?

G6: Troco.

PP: Em qual eixo devemos colocar a variável dependente?

G6: Na vertical.

PP: Vocês trocaram, corrijam.

Os grupos se equivocaram e colocaram no gráfico que os pontos correspondiam à quantidade de pães e ao valor a pagar. Falamos outra vez que a situação se tratava do troco. O grupo 3 foi o único que não nos perguntou nada sobre os itens (a) e (b). Quando vimos, ficamos muito satisfeitos com suas respostas, pois, além de conseguir a expressão algébrica de forma independente, este grupo de alunos ainda colocou um exemplo.

Handwritten work showing the calculation of change (T) for a purchase of 1.00 R\$ with a 0.20 R\$ discount. The final result $T = 1,60$ is boxed.

$$G) T = 2,00 - (P \cdot 0,20)$$

Exemplo = $T = 2,00 - (1 \cdot 0,20)$

$$T = 2,00 - 12 \cdot 0,20$$

$$T = 2,00 - 0,40$$

$$T = 1,60$$

Figura 31: Recorte da resolução do grupo 3 referente à atividade 19.

O grupo 3 respondeu às atividade e perguntou pouco. Tivemos uma única discussão neste encontro com este grupo, quando nos vieram mostrar o item (c).

Discussão com o grupo 3:

PP: Se eu comprar um pão, vou ter R\$ 0,20 de troco?

G3: E é para colocar o troco é?

PP: Olhe o que diz o item (c); construa um gráfico que represente esta situação, a situação que estamos trabalhando é com troco.

G3: ah não professor! Agente preencheu quase todo o gráfico.

PP: Vocês podem fazer no verso da folha.

G3: Pelo amor de Deus.

PP: Entenderam a situação? Se eu comprar um pão vou receber quanto de troco?

G3: R\$ 1,80.

PP: Corrijam.

Os itens (d), (e) e (f) tinham, como objetivo, fazer com que os alunos percebessem se os pontos pertenciam ao gráfico. As dúvidas foram sanadas apenas

pedindo para que eles olhassem se o ponto $(2; 0,40)$ pertencia ao gráfico e qual era a correspondência de determinado ponto.

No fim, quando os alunos nos chamaram para entregar as atividades, questionamos se podíamos ligar os pontos do gráfico. Como esta situação representa uma função descontínua, facilitou nossa explicação da continuidade e descontinuidade de uma função, ao comparar com a função do problema 18.

Análise:

A atividade 19 permitiu que os alunos se familiarizassem ainda mais com a importância de fixar a origem dos eixos, a questão da dependência entre variáveis e a interpretação do comportamento do gráfico. Na atividade 18 partimos da representação tabular para a gráfica e, por fim, para a algébrica; já na Atividade 19 partimos da representação algébrica para a gráfica, permitindo fazer a passagem por diversas representações e em todos os sentidos. Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) já justificam que a utilização das diversas formas de representar uma função permite analisar o conceito de diversas formas, em todos os seus aspectos, colaborando, desta forma, para seu entendimento.

14º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 18/07/2013

A aula foi iniciada com a solicitação de que os alunos formassem os grupos; oito grupos de três alunos foram formados; em seguida lhes entregamos o roteiro da Atividade 20 e pedimos que lessem e tentassem resolver.

A atividade 20 tinha, como propósito, fazer com que os alunos percebessem que poderíamos apresentar, no enunciado, a representação algébrica e, em seguida, solicitar que os alunos fizessem as representações tabular e gráfica. Queríamos que percebessem que em um mesmo plano cartesiano podemos traçar vários gráficos e, através da leitura gráfica, poderíamos fazer algumas observações sobre as duas funções.

Logo que entregamos aos alunos o problema eles começaram a ler o enunciado.

Atividade 20²⁶ – Locação de carros:

O turista vem visitar Lagoa Seca e decide alugar um carro para se locomover. O valor a pagar (V) por este aluguel em uma locadora da cidade, é dado pela seguinte expressão matemática: $V = 50T + 150$ (T significa número de dias que o turista fica com o carro).

a) *Construa uma tabela na qual conste o valor a ser pago pelo aluguel de 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 dias.*

b) *Com R\$ 400,00 é possível alugar o carro por 6 dias?*

Em outra locadora, o valor a ser pago é dado pela seguinte expressão $V = 60T + 100$.

c) *Construa uma tabela em que conste o valor a ser pago pelo aluguel de 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 dias.*

d) *Você poderia dizer qual desses dois planos é o mais vantajoso? Justifique.*

e) *Construa um gráfico para cada situação, no mesmo plano cartesiano.*

Os alunos não conseguiram perceber que com os valores dados, referentes aos dias, era possível encontrar o valor a pagar substituindo esses valores na expressão algébrica. Para que conseguissem resolver o item (a) precisamos fazer alguma mediação, como no diálogo com o grupo 4:

G4: Professor o que significa esse 150?

PP: Você leu o problema? (Nesse instante o aluno lê novamente o problema).

PP: Qual o valor que o turista vai pagar por um dia?

G4: R\$ 50,00.

PP: Por que R\$ 50,00?

G4: Não são cinquenta vezes T e T não significa quantidade de dias?

PP: Mas tem algo a mais na expressão; tente perceber. Esses 150 representam o que? Por que são mais 150?

G4: Então ele vai pagar R\$ 200,00 por um dia?

PP: Correto. E por dois dias?

G4: R\$ 250,00.

PP: Agora, preencha a tabela.

²⁶ Atividade formulada pelo pesquisador.

Como todos os grupos estavam nos chamando, sempre com dúvidas sobre como responder a atividade, resolvemos explicar no quadro. No momento, falamos que neste problema já foi dada a expressão algébrica e a partir dela era para construir a tabela. Que V significava valor a pagar e T quantidade de dias referente à locação. Para saber qual valor pagar por determinado dia de locação, bastava que substituíssem a quantidade de dias em T . Com esta explicação um aluno fez o seguinte comentário: “Assim é mais fácil do que o senhor vindo de carteira em carteira”.

Análise:

Acreditamos que este comentário é devido ao fato dos alunos estarem mais acostumados com o método ao qual chamamos de tradicional, sendo mais comum para eles quando o professor dá suas aulas no quadro. Muito embora tenhamos percebido que o resultado nesta turma é mais significativo quando percorremos cada grupo e fazemos as observações individuais.

Durante nossa intervenção e leituras constatamos que os conteúdos matemáticos são apresentados pelos professores, na maioria das vezes em formato tradicional, seguindo a sequência do livro didático, em que cada função é tratada de forma isolada, sem conexão com a outra.

Enfim, após esta explicação os alunos passaram um bom tempo sem nos chamar para tirar dúvidas; percebemos, então, que quase todos estavam conseguindo preencher a tabela. Houve alguns questionamentos sobre qual variável colocar na primeira e na segunda coluna.

G6: A tabela terá 7 linhas professor?

PP: Por que?

G6: Por que são 7 dias.

PP: Certo.

G5: Os dias devem ser colocados em qual coluna?

PP: Lembrem-se de que falei que a variável dependente deveria ser colocada no eixo vertical e a independente no horizontal?

G5: Lembro.

PP: E qual a variável dependente?

G5: Valor a pagar.

PP: Então, o que vai ficar na horizontal.

G5: Os dias.

No item (b) apenas um aluno do grupo 5 errou, embora os outros dois companheiros de grupo tenham acertado, sendo sua resposta: “Sim e ainda cobrou R\$ 50,00 reais (sic)”.

As respostas dos demais grupos ao item (b) foram baseadas no preenchimento da tabela. Nenhum aluno a fez substituindo na variável independente na expressão, muito embora entendemos que para preencher a tabela o aluno possa ter usado a expressão algébrica.

Mesmo o item (c) sendo da mesma forma que o item (a), mudando para outra expressão algébrica, alguns grupos nos chamaram para perguntar como deveriam fazer; alguns chegaram a não perceber que se tratava de outra locadora e nos perguntavam por que deveriam fazer outra tabela, se já tinham feito no item (a).

Análise:

Observamos que os alunos têm certa acomodação e não gostam de pensar sobre o que leem. Acreditamos que se o aluno fizesse uma leitura mais atenta entenderia o problema e conseguiria resolvê-lo. É preciso um trabalho em sala de aula, em que sejam propostas, aos alunos, mais leituras matemáticas.

Explicamos que o item (c) se tratava de outra situação, era outra locadora e a forma de calcular; quanto pagar pelo aluguel do carro, era feita de outra maneira.

Para o item que questionava sobre qual dos dois planos era mais vantajoso, nenhum grupo respondeu de forma reflexiva; todos estavam colocando um dos dois planos, aleatoriamente. Em alguns grupos percebemos este equívoco e fizemos alguns questionamentos. As respostas dos três grupos que não conseguimos ver que suas respostas estavam erradas durante, a aula foram: G1: “O mais vantajoso é o plano $V=60T+100$, porque o valor a ser pago é mais baixo do que o outro plano”. G2: “O primeiro, pois quem aluga o carro por 7 dias paga R\$ 500 e na segunda R% 520”. G5: “A primeira locadora porque o valor é menor”.

Nossa mediação quando percebemos nos grupos aqueles que escolheram, como resposta ao item (c), apenas um plano, foi a seguinte:

PP: Por que vocês colocaram que a primeira locadora é a melhor?
 G3: E não é não?
 PP: Digam-me por que.
 G3: Porque na primeira locadora o turista vai pagar R\$ 500,00 e na segunda R\$520,00.
 PP: Vejam. Se o turista resolver alugar o carro por um dia, quanto pagará?
 G3: Como assim?
 PP: Na primeira locadora qual o valor pago por um dia de locação? (silêncio).
 Olhem na tabela.
 G3: R\$ 200,00.
 PP: E na segunda locadora?
 G3: R\$ 160,00.
 PP: Logo, para um dia qual a melhor locadora?
 G3: A primeira.
 PP: E por que você colocou que o melhor plano era o da segunda?
 G3: Só olhei para 7 dias.

As respostas dos grupos que acertaram, foram: G3: “Dependendo se for 1, 2, 3 ou 4 dias é mais vantajoso o plano 2, mas se for pra passar de 6 a 7 dias, é mais vantajoso o 1º plano”. G4: “Depende da quantidade de dias a ser locado o carro”. G6: “O mais vantajoso é o segundo plano nos três primeiros dias e os 4 dias a mais vantajoso, é o 1º”. G8: Não, pois em algumas das situações os valores variam tipo no primeiro gráfico o aluguel de 1 dia é de 200 no segundo gráfico é de 160. Já se alugar 6 dias no segundo gráfico é de 460 e no primeiro 450”.

Os alunos tiveram grande dificuldade em construir o gráfico, haja vista que tinham que colocar as duas situações no mesmo plano cartesiano. Sugiram vários questionamentos: “Quais valores colocar no gráfico?” “E por que quatrocentos duas vezes?” “Devo colocar o quatrocentos duas vezes?” “Vai dar para colocar todos esses valores no eixo vertical?”

Diante de tantas dúvidas propomos fazer a representação gráfica no quadro; solicitamos que prestassem atenção e fizemos a construção do gráfico para eles, momento em que comentamos sobre todas as dúvidas que haviam surgido; no final, afirmamos que, no caso da situação de que estávamos resolvendo o problema o gráfico ajuda a tirar conclusões que plano seria melhor escolher.

Análise:

O 14º encontro permitiu que partíssemos da representação algébrica para a representação tabular e gráfica fazendo com que os alunos percebam que é possível fazer o processo partindo de qualquer representação permitindo, desta forma, um enfoque no entendimento essencial 5c da grande ideia 5 de Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) cujas algumas representações de uma função podem ser mais úteis do que outras, dependendo do contexto; logo, esta atividade permitiu que os alunos percebessem isto; os alunos ainda compreenderam que em um mesmo plano é possível traçar vários gráficos e, para determinadas situações, esse tipo de construção ajuda na interpretação da situação.

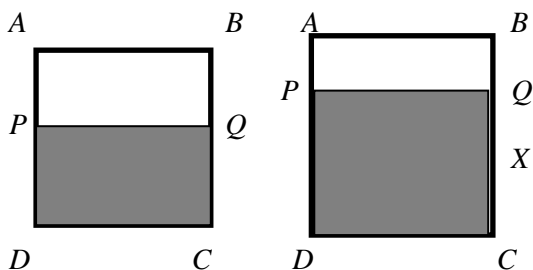
15º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 24/07/2013

Quando chegamos à sala de aula, alguns alunos estavam fazendo uma atividade de outra disciplina e outros até continuaram, porém pedimos que guardassem o material pois íamos dar início à aula de Matemática; logo em seguida, solicitamos que formassem os grupos; tivemos a formação de oito grupos de 3 alunos cada um.

Neste encontro aplicamos duas atividades, que foram entregues juntas; os alunos iniciaram a leitura da primeira atividade.

Atividade 21²⁷ - Área da região retangular:

O quadrado ABCD tem lado de 10cm. O ponto P se move de D para A, de modo que PQ se conserva paralelo a AB.



²⁷ Retirada e adaptada de Candido (2000).

- a) Calcule a área da figura sombreada para $x = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 em cm e organize os dados em uma tabela do tipo:

X	Área de PQCD
1	
2	
3	
4	
5	
6	
n	

- b) Quanto pode medir o lado de medida x da figura sombreada?
 c) Represente essa dependência descrita na tabela, em um gráfico cartesiano.

A Atividade tinha, como objetivo, mostrar para os alunos uma aplicação do conceito em estudo, dentro de outro conteúdo da Matemática, ou seja, uma contextualização matemática; ela ainda permitiu analisar se os alunos estavam sabendo fazer as representações tabular, algébrica e gráfica.

Com prevíamos, após os grupos terminarem as leituras do problema, logo começaram a nos chamar para pedir explicações; eles comentaram que o problema era difícil e que não iriam conseguir resolvê-lo mas, na verdade, estavam falando isso porque faltava a compreensão do problema. Como todos os grupos nos chamavam para explicar e ajudar na compreensão do problema, resolvemos mediar na lousa.

Mantivemos o seguinte diálogo com a turma:

PP: Vamos ler o enunciado do problema, juntos.

PP: Que figura geométrica nós temos aqui?

Als: Um quadrado.

PP: E qual a medida do lado desse quadrado?

Als: 10 cm.

PP: O que está acontecendo na segunda figura?

Als: O ponto P estar se movendo de D para A.

PP: E formando outra figura geométrica que está pintada de cinza. Que figura está sendo formada?

Als: Um retângulo.

PP: E quais as medidas dos lados desse retângulo?

Als: 10 cm.

PP: Todos os lados são 10 cm? O lado CQ é igual a CB?

Als: Não, o lado CQ vale x .

PP: Correto. Esse valor de x está variando. No item (a) temos alguns possíveis valores para x . Com esses valores é possível encontrar a área do retângulo?

Als: Sim.

PP: Mas como fazemos para calcular a área do retângulo?

Comentário:

Visto que os alunos ficaram todos calados, concluímos que eles não estavam se lembrando da fórmula para calcular a área do retângulo, a qual resgatamos para a turma.

PP: Qual a área do retângulo quando x é igual a 1?

Als: 10 centímetros quadrados.

PP: E quando forem dois?

Als: 20 centímetros quadrados.

PP: Você agora tem condições de responder ao item (a)? Façam-no.

Em seguida, todos os grupos conseguiram resolver o item (a) sem problemas; apenas quando chegavam ao final da coluna da tabela em que aparecia o “ n ” para eles generalizarem, eles perguntavam: “E esse “ n ”, professor?” Falávamos que se quiséssemos saber um valor qualquer para x , era só substituí-lo por n e o encontraríamos. Os alunos não tiveram dúvidas para escrever a expressão algébrica que representava a situação.

Para o item (d) a maioria dos grupos nos chamou para explicar como deveriam fazer.

PP: Qual o valor máximo que x pode assumir?

Gs: 6 centímetros.

PP: x não pode ser 7?

Gs: Pode.

PP: E 8?

Gs: Sim.

PP: E 11?

Gs: Não.

PP: Por que não pode ser 11 centímetros?

Gs: Porque o máximo é 10 centímetros.

Um dos grupos nos falou que o valor máximo para x era 9 centímetros. Perguntamos: Por que não poderia ser 10 centímetros tendo os alunos respondido que, neste caso, a figura deixaria de ser um retângulo.

Neste momento explicamos, para este grupo, que o valor máximo seria 10 centímetros e todo quadrado é retângulo, sendo que o valor máximo para x faria justamente com que os segmentos de reta PQ e AB coincidissem.

Para a representação gráfica do item (d) os alunos não tiveram dúvidas; todos os grupos conseguiram dispor os pontos no plano cartesiano, de forma correta porém nenhum grupo ligou os pontos do gráfico. Quando eles nos chamavam para olhar suas respostas, perguntamos em todos os grupos se os pontos podiam ser ligados e os componentes dos grupos davam respostas contrárias entre si. Questionamos se era possível obter uma área para o retângulo se x fosse um número decimal. Dávamos alguns exemplos e fazíamos a projeção no gráfico; com isso, acreditamos que todos os grupos perceberam que era possível que os pontos fossem ligados entre si.

Análise:

Como afirma Oliveira (1997), também constatamos que os alunos têm dificuldades em identificar quando uma função é contínua; consequentemente, tendem a ligar os pontos ao traçar qualquer gráfico, seja de uma função contínua ou descontínua. Para os alunos nos parece que todos os gráficos os pontos são contínuos; consequentemente, eles têm a noção de que o conceito é sempre contínuo.

Com a aplicação da atividade 21, fizemos com que os alunos entendessem que o conteúdo de função pode ter uma contextualização com outro conteúdo da própria matemática, lavando a destacar grande ideia 1 de Cooney, Backmann e Lloyd (2010) a qual nos indica a grande aplicabilidade que a função possui.

A segunda atividade do encontro tinha, como propósito principal, partir da representação gráfica para as demais representações; queríamos que os alunos percebessem esta possibilidade.

Atividade 22²⁸ – Valor da gasolina:

Em um posto de gasolina o litro de gasolina comum custa R\$2,10; observe o gráfico abaixo e responda às perguntas:



- Quais são as variáveis dependente e independente desta situação?
- Qual a expressão algébrica que relaciona essas grandezas?
- O que significa o par ordenado (2; 4,20)?
- Quanto custam, neste posto, 2 litros de gasolina? E 1,5 litro de gasolina? E 55 litros?
- Pagando o total de R\$6,30, quantos litros de gasolina comprará um consumidor? E se pagar R\$21,00?

Os resultados desta Atividade foram bastante gratificantes, pois os alunos conseguiram fazê-la de maneira autônoma; os poucos questionamentos que surgiram foi com relação a se suas respostas estavam corretas. Os alunos conseguiram resolver os itens (a) e (b) sem qualquer dúvida; para o item (c) precisaram de nossa mediação; eles sempre perguntavam:

Gs: Como assim, o que significa?

PP: Você, olhando para este ponto, o que ele “diz”? O que representa o dois?

Gs: Que o preço de dois litros de gasolina custa R\$ 4,00.

PP: ok! esta é a resposta.

Análise:

Vimos que os alunos não estão acostumados a justificar em matemática; acreditamos que seja importante que o aluno expresse, de forma verbal ou escrita, como procedeu para chegar à solução do problema.

²⁸ Retirada e adaptada de Barroso (2010, p. 83).

Os alunos também se saíram bem nos itens (d) e (e) porém quando eles terminavam sempre pedíamos para olhar suas respostas, percebendo que colocavam sempre as respostas sem o uso da expressão algébrica para calcular. Neste instante, falamos para eles que a resposta ficaria mais adequada se estivesse expressa como tinha sido o processo para chegar àquela resposta e falávamos que eles deveriam usar a expressão algébrica para calculá-las; pedíamos que fossem aplicados os valores na expressão e só depois de fazerem isto é que poderiam entregar a atividade.

d) Quanto custa, neste posto 2 litros de gasolina? E 1,5 litro? E 55 litros?

$2 \text{ litros} = 4,20$	$V = l \cdot 2,10$	$V = l \cdot 2,10$	$V = l \cdot 2,10$
$1,5 \text{ litros} = 3,15$	$V = 2 \cdot 2,10$	$V = 1,5 \cdot 2,10$	$V = 55 \cdot 2,10$
$55 \text{ litros} = 115,5$	$V = 4,20$	$V = 3,15$	$V = 115,5$

e) Pagando um total de R\$ 6,30, quantos litros de gasolina comprará um consumidor? E se pagar R\$ 21,00?

$6,30 = 3$	$V = l \cdot 2,10$	$V = l \cdot 2,10$
$21,00 = 10$	$6,30 = l \cdot 2,10$	$21,00 = l \cdot 2,10$
	$l = \frac{6,30}{2,10}$	$l = \frac{21,00}{2,10}$
	$l = 3$	$l = 10$

Figura 32: Recorte da resolução dos itens (d) e (e) do grupo 7 referente à atividade 20.

Análise:

Referente à representação gráfica de uma função, percebemos que os alunos têm dificuldade para marcar pontos no plano cartesiano, sobremaneira se o ponto for de coordenadas (0,0), ou seja, possui fragilidades em perceber a origem do plano; também têm dificuldade em traçar gráfico para funções definidas por mais de uma sentença.

Os alunos, para construir os gráficos, têm dependência da representação tabular muito embora tenhamos, durante a pesquisa, tentado mostrar para os alunos que a tabela entra como um recurso na construção de gráfico mas que não é o único.

Com as atividades da seção 2 conseguimos fazer com que os alunos avançassem em suas concepções para a construção de gráfico e

interpretação de gráficos de funções; observamos este avanço pois, ao analisar as primeiras atividades em comparação com a última da seção 2 verificamos que as dificuldades foram sanadas e, no fim, eles estavam construindo os gráficos com autonomia; entretanto, temos convicção de que qualquer conceito é adquirido com o tempo e que outros contatos dos alunos com a construção de gráficos vão permitir melhor compreensão.

Os alunos nos deram pistas através das quais ficou compreensível que a representação gráfica tem sua importância visual, de vez que, através desta, fica facilitado o entendimento de como se comporta a função. Percebemos, a partir da visualização, se o gráfico é uma reta, ou uma curva; se é crescente ou decrescente; se passa pela origem dos eixos; se cada elemento x está associado a um único elemento y , isto é, temos esses e outros elementos que dão sentido ao uso da representação gráfica.

Com relação à construção gráfica, os alunos encontraram dificuldades apenas em dispor de um ponto em que uma das coordenadas fosse o zero ou para quando tinha duas funções representadas em um mesmo plano cartesiano quando havia pontos coincidentes, sobre isto Rêgo (2000) já esclarece que as funções definidas por mais de uma equação causa dificuldade para a maioria dos alunos, principalmente no traçado do gráfico; para a autora, os alunos pensam que uma função tem a mesma regra de correspondência em todo o seu domínio. No mais, com a disposição ponto a ponto e sua localização no plano cartesiano, os alunos fizeram bem.

Comentário:

Durante o trabalho sentimos com a representação gráfica de função, por não ter tido a oportunidade de trabalhar com os alunos algum software que possibilitasse a construção de gráficos. Acreditamos que o trabalho de sala de aula teria sido mais dinâmico se tivéssemos levado os alunos a um laboratório de informática.

4.4 Terceira seção: formalização de função

Nesta seção trabalhamos três atividades que tiveram, como finalidade, trabalhar com os alunos a definição formal de função. A seção teve três encontros, sendo duas aulas em cada encontro. Iniciamos em 25 de julho de 2013 e terminamos em 01 de agosto de 2013.

16° ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 25/07/2013

A aula foi iniciada às 13h40min, uma vez que os alunos estavam sem aula e nos ligaram pedindo que fôssemos para a escola; neste dia nossas aulas seriam a quinta e sexta; No início da aula comentamos com a turma que hoje estaríamos aplicando as três últimas atividades (em anexo), antes de fazer a institucionalização (formulação) do conteúdo e que na próxima aula estaríamos fazendo isso, inclusive definindo função. Solicitamos que formassem os grupos de 3 componentes; foram formados seis grupos com três componentes e duas duplas.

Entregamos, juntos, os três roteiros das Atividades²⁹ e pedimos que lessem os enunciados e tentassem resolvê-los, porém quando terminavam a leitura todos os grupos estavam nos chamando falando que não estavam entendendo o que era para ser feito. As atividades não eram do estilo das anteriores; eram mais diretas e não tinham qualquer tipo de contextualização. Nosso objetivo era fazer com que os alunos percebessem aspectos da unicidade de uma função, através da representação tabular, algébrica e gráfica.

Análise:

Como os alunos não estavam conseguindo responder às questões, fizemos a mediação no quadro porém para essas atividades não obtivemos sucesso. Tentamos fazer alguns questionamentos; entretanto, acabamos resolvendo um item de cada atividade. Percebemos que

²⁹ As atividades 23, 24 e 25 dispomos nos anexos por serem mais extensas que as demais.

usamos a metodologia tradicional, em que o professor resolve alguns exemplos e, em seguida, pede para os alunos resolverem exercícios semelhantes. A falta de compreensão dos alunos e a necessidade que eles tiveram de que mostrássemos como se resolvia, pode ter ocorrido, visto que a atividade fugia ao padrão com que vínhamos trabalhando anteriormente, ou seja, eles já poderiam estar acostumados com o trabalho por meio de problemas contextualizados, o que faz refletir que, talvez, seja importante o trabalho com exercícios mais tradicionais também.

Apesar disto, acreditamos que as atividades fizeram com que os alunos percebessem a questão da unicidade e não unicidade nas relações, ajudando-os a entender que este aspecto é importante na definição de função.

Após feitos os exemplos, os alunos resolveram as atividades sem expressar nenhuma dúvida.

Quando estávamos analisando as respostas dos alunos, observamos que alguns grupos erraram o item (e) e colocaram que tinha mais de uma correspondência.

17º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 31/07/2013

Após 16 encontros, que correspondeu a 33 aulas e nos quais trabalhamos as ideias e os elementos necessários para a compreensão do conceito de função, fizemos a formalização para os alunos, em cuja aula apresentamos a definição de função expondo alguns exemplos com conjuntos e retomando algumas das situações e conceitos por nós trabalhados nos encontros anteriores. Além da definição de função também apresentamos as definições de domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função.

Análise:

Percebam que seguimos as indicações de colocar o problema como ponto de partida para a explicação do conteúdo matemático. Os

autores Andrade (1998), Onuchic (1999), Schroeder e Lester (1989) e Brasil (1998) já trazem que no enfoque da resolução de problemas como metodologia, os problemas devem ser colocados para contribuir com a formação do conceito e que esses devem vir, mesmo antes da apresentação do conteúdo, ou seja, antes de sua formalização. Portanto, apenas depois de 16 encontros trabalhando os problemas matemáticos e fazendo os alunos se familiarizarem com aspectos essenciais do conceito, é que trazemos a definição do que seria uma função.

Apesar de os alunos possuírem o livro didático, preferimos fazer uma síntese escrevendo no quadro para que transcrevessem em seus cadernos. Escrevemos pouca coisa porém os alunos escrevem muito devagar e perdemos bastante tempo esperando que eles concluíssem.

Neste momento os alunos ficaram muito preocupados em saber se o que estamos escrevendo e/ou falando, cairá na prova. Por estarmos escrevendo no quadro alguns alunos nos perguntaram se aquele conteúdo fazia parte do terceiro bimestre. Esses alunos não compreenderam que estávamos fazendo a institucionalização (formalização) do conteúdo, apesar de termos falado, no início da aula. Acreditamos que isso deva ocorrer por ser a turma muito dispersa e que, para prestar atenção à aula, o professor tem que chamar sua atenção, a todo momento.

A pergunta de uma aluna chamou nossa atenção: ela nos indagou se não iríamos mais trabalhar com as folhinhas, referindo-se às atividades impressas; respondemos que nas próximas aulas os alunos estariam sendo os protagonistas e nós mediadores na facilitação de seus trabalhos.

Acreditamos que os problemas trabalhados nas aulas passadas ajudaram os alunos a entender melhor a definição de função. A exposição ocorreu sem nenhum problema de não entendimento por parte dos alunos, uma vez que foram poucas as dúvidas surgidas; quando mostrávamos os exemplos, as incertezas eram sanadas.

No final da aula falamos para os alunos que nas próximas aulas estaríamos trabalhando algumas atividades abordando o que estudamos nesta aula.

18º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 01/08/2013

Iniciamos a aula, ressaltando para os alunos que estaríamos fazendo uma atividade para aplicar as definições expostas na aula anterior. Mais uma vez, tal como no encontro anterior, um dos alunos nos questionou sobre as atividades: “Professor, não vai ter mais a folhinhas não”?

Sentimos que os alunos já estavam bem adaptados à metodologia que estávamos usando, inclusive neste encontro pedimos que fossem formados grupos de quatro pessoas com o objetivo de permutar alguns alunos de grupos que já estavam fixos; os alunos também questionaram este pedido, dizendo que não iam mudar os grupos e solicitaram para ficar com três componentes. Diante do pedido falamos que podiam ser formados grupos de três participantes; foram formados cinco grupos de 3 alunos, um de 4 alunos e uma dupla. Nas aulas desse encontro havia apenas 21 alunos.

A quantidade de alunos nesse encontro estava abaixo da média da frequência dos demais; ao chegar à escola, vimos um aluno indo embora e quando entramos na sala dois alunos nos chamaram dizendo que não iriam assistir à aula porque estavam participando de uma reunião para discutir uma gincana que ocorreria na escola. Esses alunos eram o representante e o vice - representante da turma; ainda questionamos se era necessária a presença dos dois alunos na reunião, ou seja, tentamos convencê-los da sua permanência em sala mas não conseguimos.

Organizada a turma, entregamos o roteiro da Atividade 26 para eles responderem:

Atividade 26³⁰ – Preço da passagem de ônibus.

O preço da passagem de ônibus entre as cidades de Lagoa Seca e Campina Grande é de R\$ 2,00. Com base nesse dado responda às seguintes questões:

- a) Esta relação é uma função?*
- b) Qual a expressão algébrica desta relação?*
- c) Em caso afirmativo ao item (a) quais o domínio $D(f)$, o contradomínio $CD(f)$ e o conjunto imagem $IM(f)$?*
- d) Qual o valor da imagem quando $x=10$? E $x=58$?*

³⁰ Atividade formulada pelo pesquisador.

- e) Qual o valor do domínio para $f(x)=220$?
- f) Esboce o gráfico que representa esta relação. Devo ligar os pontos do gráfico? Por quê?

Nenhum aluno teve dificuldade em entender o enunciado do problema, inclusive foi feito um problema semelhante, no 2º encontro porém no item (a) os grupos nos perguntaram como saberiam se a relação era uma função.

Sentimos que os alunos não compreenderam a definição de função, apesar de no encontro em que definimos função não ter havido intervenção alguma de alunos nos falando que não entenderam o que é uma função, informamos que, para responder à Atividade 26, eles poderiam consultar as anotações que havíamos feito no encontro 17 mas de qualquer forma passamos pelos grupos explicando alguns pontos.

A fim dos alunos compreenderem o item (a) explicamos novamente os exemplos do encontro anterior. Mesmo indicando no exemplo que para ser função era preciso que todo elemento do domínio tivesse um correspondente no contradomínio e que cada elemento do domínio deveria estar associado a apenas um único elemento do contradomínio, percebemos que apenas o grupo 3 justificou adequadamente sua resposta.

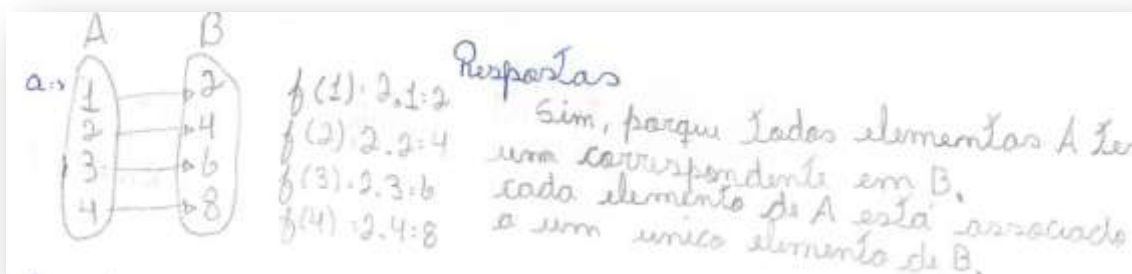


Figura 33: Recorte da resolução dos itens (a) do grupo 3 referente à atividade 26.

Os grupos 1, 4 e 5 se justificaram com apenas uma das afirmações; um grupo não justificou e colocou apenas que era função e os grupos 2 e 6 justificaram de forma incorreta.

Análise:

Acreditamos que os alunos não tenham tido êxito na questão em virtude de ter sido a primeira atividade que estavam fazendo após a

definição e então pensamos que para a formação de certo conhecimento pelos alunos é preciso que eles estejam diante de uma variedade maior de situações aliada a facilitação pelo professor; cremos também que como no final da aula fizemos uma plenária e resolvemos a atividade na lousa as dúvidas, provavelmente, possam ter sido sanadas.

Para fazer a representação algébrica do item (b) todos os grupos a fizeram sem dificuldades. No item (c) os grupos nos perguntavam o que era domínio, contradomínio e imagem. Pedíamos que lessem as anotações feitas no caderno e tentassem resolver o problema. Quando andamos pela sala olhando as resoluções dos alunos percebemos que, quando foram escrever os conjuntos, consideraram apenas os elementos que tinham colocado no diagrama construído; por esta razão estabelecemos com o grupo o seguinte diálogo:

PP: Quais são os elementos do domínio?

G6: 0, 1, 2 e 3.

PP: Mas não existem quatro passagens?

G6: Sim, existe.

PP: E 10 passagens? E 50? 255?

G6: E é para colocar tudo isso?

PP? Não precisa colocar todos os valores mas pense em uma forma com a qual possamos representar todos os valores.

G6: Colocando os três pontinhos, né?

Queríamos, dessa forma, que os alunos compreendessem o que estavam fazendo e não apenas colocassem os valores por colocar, ou seja, o processo deveria fazer sentido.

Nos itens (d) e (e) os alunos também tiveram dúvidas pois não escreveram a expressão na forma $f(x)=2.x$, visto que não sabiam quem era o x . Deveríamos, portanto, ter colocado o enunciado de outra maneira, pedido a imagem mas, usando as expressões domínio 10 e domínio 58 em nossa mediação, usamos esses termos.

No item (f) os alunos conseguiram resolver sem dificuldade.

Após todos os alunos concluírem a atividade, nós os convidamos para que resolvêssemos a Atividade na lousa a fim de sanar algumas possíveis dúvidas que tivessem ficado. Quando resolvemos a Atividade na lousa, um aluno disparou que era

muito difícil, ao que argumentamos que a atividade que fizemos hoje é semelhante com às que vínhamos trabalhando ao longo desses dias, e que vocês conseguiram resolver e entender sem muito problema; hoje, só estamos usando outros termos mas apenas para expressar a mesma coisa.

Análise:

Quando os termos e expressões passam a ser mais formais, os alunos sentem dificuldade; muitas vezes temos que fazer adaptações da linguagem usada com os alunos e aceitar sua linguagem comum; que, contudo, sem deixar de expressar para eles a forma mais adequada.

Terminada a aula lembramos, aos alunos, que no próximo encontro seria feita a avaliação (a escola e o professor titular da turma estavam nos cobrando que fizéssemos com os alunos algum tipo de avaliação); No encontro do dia 07/08/2013, realizamos, portanto, uma atividade em dupla, com os alunos abordando o conteúdo de função.

Análise:

Percebemos que as atividades das seções 1 e 2, permitiram que os alunos compreendessem as ideias de função mas também quando fomos fazer a formalização do conteúdo com os termos mais abstratos, os alunos tiveram dificuldades de associar com os conceitos aprendidos quando eles estavam trabalhando em uma situação de ação, aquela que tinha um cunho mais intuitivo, com resoluções mais espontâneas e sem a cobrança dos termos formais. Acreditamos, porém, que a passagem para a linguagem com mais rigor e mais formal se dê com o contato ao longo da vida estudantil dos alunos com o conceito.

4.5 Seção extra: trabalho com função afim

Propusemo-nos, nesta seção, trabalhar uma das famílias de funções – função afim, com o objetivo de perceber se, durante os 18 encontros em que introduzimos e definimos função, o trabalho fez sentido para os alunos pois acreditamos que com uma boa compreensão dos elementos introdutórios do conceito de função o entendimento das famílias seria facilitado. A seção foi iniciada no dia 08 de agosto de 2013 e terminada em 29 de agosto do mesmo ano, no total de 5 encontros, em 9 aulas.

19º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 08/08/2013

A aula começou com nossa explanação sobre as famílias das funções; explicamos que eles estudariam as funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica e as funções polinomiais mas que, nos próximos encontros, estaríamos estudando a função afim e que, no presente encontro, já a definiríamos mas antes gostaríamos que eles fizessem a Atividade 26; estiveram presentes, no encontro, 21 alunos, os quais formaram cinco grupos com três alunos e três duplas.

Não formamos sete grupos de 3 alunos pelo seguinte motivo: soubemos que alguns alunos estavam participando de uma reunião cuja pauta era a realização de uma gincana na escola; desta reunião só deveriam participar os representantes de turma mas vários alunos da turma estavam presentes. Quando já tínhamos iniciado a atividade dois alunos chegaram para formar a terceira dupla; não concordamos com reuniões marcadas para os alunos participarem no horário da aula.

Formados os grupos entregamos o roteiro da Atividade e pedimos que lessem e tentassem resolvê-la.

Atividade 27³¹ – Comissão sobre vendas:

O salário base de um vendedor em uma loja de preço único do Município de Lagoa Seca, PB, é de R\$ 700,00. Para incentivar o crescimento das vendas dos

³¹ Retirado e adaptado de Dornelas (2007).

produtos e aumentar seu lucro, o proprietário da loja oferece, aos seus vendedores, uma comissão de R\$ 0,50 por venda de cada produto.

- a) Para cada produto vendido o salário do vendedor é aumentado de quanto?*
- b) Se em um mês o vendedor vender 10 produtos, que salário receberá no fim do mês? E se vender 100 produtos? E 200?*
- c) Escreva um bilhete ao dono da loja, explicando como o vendedor deve fazer para calcular seu salário mensal.*
- d) Maria, uma das vendedoras da loja, precisa faturar R\$ 1000,00 para cobrir umas despesas que aumentaram no mês. Quantos produtos ela deve vender para conseguir este salário?*
- e) Como no próximo mês Maria ainda tem despesas extras, precisará de um salário maior para cobri-las. Então, pede ao dono da loja que lhe explique como calcular quantos produtos deve vender para receber o salário de que precisa. Imagine que você seja o dono da loja, escreva um bilhete para Maria explicando como ela deve fazer.*
- f) Escreva uma expressão algébrica para esta situação.*
- g) Esboce o gráfico desta função.*

A atividade tinha, como meta, retomar algumas ideias estudadas na introdução do conceito de função e, a partir dela, apresentar para os alunos a forma geral de uma função afim e fazer uso das representações verbal, algébrica e gráfica.

Ao entregar a atividade para os grupos demos um tempo para que lessem o enunciado e, em seguida, passamos em cada grupo perguntando se haviam entendido o problema; todos falaram que não encontraram dúvidas no enunciado do problema.

Quase todos os grupos responderam ao item (a) sem problemas, excetuando-se o grupo 7; mantivemos o seguinte diálogo com o grupo este:

G7: Faz como aqui?

PP: Você já leu o problema?

G7: Claro.

PP: Então me digam o que está solicitando no item (a).

G7: Mas não está dizendo quantos produtos ele vendeu.

PP: Veja que tem uma palavra chave no enunciado. Para cada produto aumenta quanto?

G7: Cinquenta centavos.

PP: Ok.

Com o item (b) percebemos a evolução dos alunos, uma vez que os grupos, quando nos chamavam, já explicavam como faziam a questão; expressavam verbalmente com se dava o processo de resolução do problema.

Quando caminhávamos pelos grupos constatamos que o grupo 3 colocou, como resposta no item (a), que se o vendedor vendesse 10 produtos receberia R\$ 1200,00 no final do mês, ao que perguntamos:

PP: Por que R\$ 1200,00?

G3: Porque tem R\$ 700,00 que já é fixo, daí somamos com R\$ 500.

PP: Tudo bem, mas por que deu R\$ 500,00?

G3: Não é dez vezes cinquenta?

PP: Não é cinquenta reais é zero vírgula cinquenta, ou seja, cinquenta centavos.

Vejam agora quanto dá dez vezes zero vírgula cinquenta.

Para o item (c) em alguns grupos precisamos falar que eles deveriam escrever um bilhete que explicasse qual o procedimento que eles utilizaram para responder ao item (b) e, neste momento, deveriam verbalizar/escrever como fizeram.

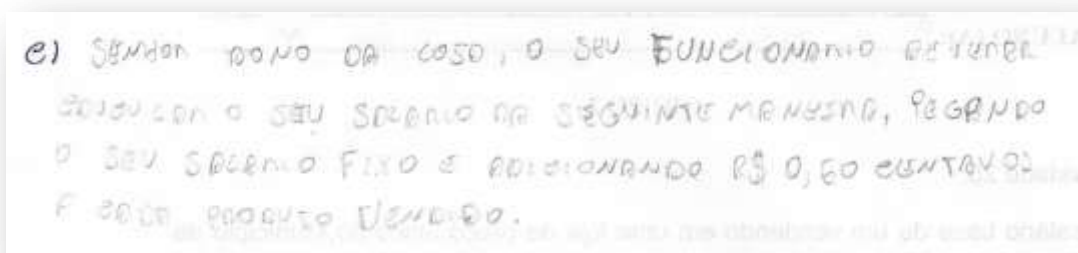
G2: Como fazer no (c)?

PP: Vocês vão escrever um bilhete explicando como calcular o salário mensal.

G2: Temos que colocar a expressão algébrica?

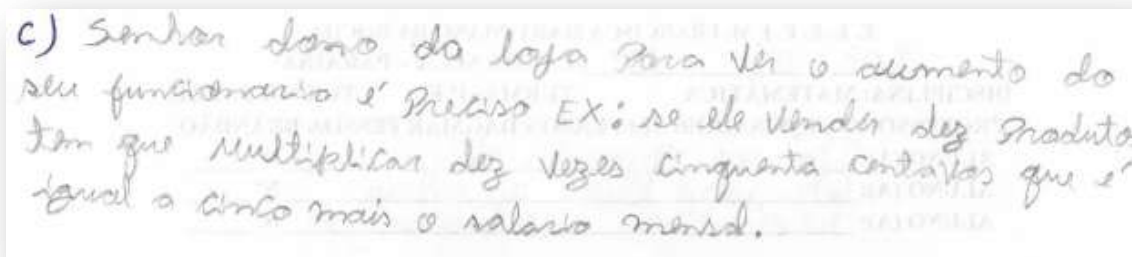
PP: Vocês terão que escrever com palavras, como se estivessem explicando a expressão algébrica.

As resposta ao item (c) de alguns grupos seguem nas figuras a seguir:



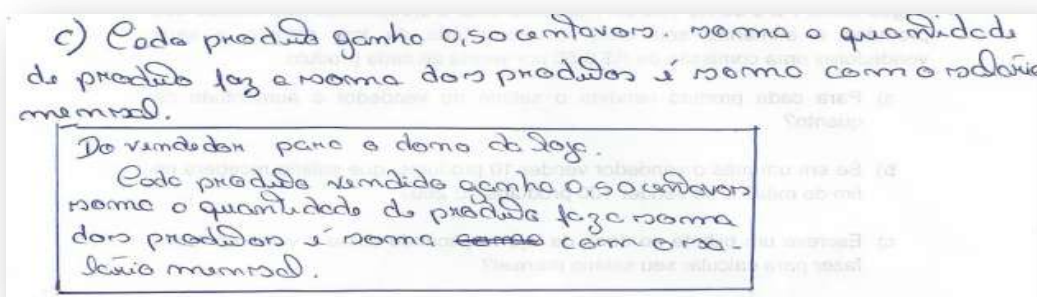
e) SEMPRE DO MO DA COISA, O SEU FUNCIONARIO RECEBERÁ
 SEU SALARIO O SEU SALARIO NA SEGUINTE MANEIRA, pegando
 O SEU SALARIO FIXO E ADICIONANDO R\$ 0,50 CENTAVOS
 F CADA PRODUTO VENDIDO.

Figura 34: Recorte da resolução dos itens (c) do grupo 2 referente à atividade 27.



c) Semhar dono da loja Para ver o aumento do seu funcionario e preciso EX: se ele vender dez produtos tem que multiplicar dez vezes cinquenta centavos que e igual a cinco mais o salario mensal.

Figura 35: Recorte da resolução dos itens (c) do grupo 3 referente à atividade 27.



c) Cada produto ganha 0,50 centavos. como a quantidade de produtos faz a soma dos produtos e como como o salario mensal.

De vendas para o dono da loja.
Cada produto vendido ganha 0,50 centavos como a quantidade de produtos faz a soma dos produtos e soma como o salario mensal.

Figura 36: Recorte da resolução dos itens (c) do grupo 2 referente à atividade 27.

Explicamos, para o grupo 7, que dividir por dois é a mesma coisa que multiplicar por zero vírgula cinco.

Para o item (c) os alunos foram influenciados pelo item anterior, colocando que para saber quanto receber no final do mês bastava multiplicar a quantidade de produtos vendidos por 0,50 mas perceberam que deveriam ou não conseguiram expressar que seria subtrair o salário por setecentos e depois dividir por zero vírgula cinco.

Prevíamos que nenhum aluno teria dificuldade de fazer a representação algébrica, de vez que já fora expressa verbalmente e durante a introdução do conceito de função, trabalhamos bastante esta representação.

Os alunos colocaram a representação gráfica no eixo vertical. Os valores da comissão, ou seja, um produto equivalia a cinquenta centavos e dois produtos correspondiam a um real; um produto correspondia a R\$ 700,50, dois produtos a R\$ 701,00 e assim por diante; precisamos explicar este detalhe aos alunos e pedir que corrigissem o que haviam feito.

Após o término da atividade por todos os alunos, solicitamos que escrevessem em seus cadernos a definição e a forma geral de uma função afim; começamos a

explicação perguntando qual a expressão algébrica que eles tinham encontrado e, a partir dela, mostramos a forma geral.

Um aluno nos questionou:

Al: Esse a e b pode ser qualquer letra?

PP: Aqui é a forma geral; a cada representação de função esses valores vão ser diferentes; o que era a na expressão que vocês encontraram na atividade?

Al: 0,50.

PP: E o b , quanto valia?

Al: 700

Neste momento aproveitamos para falar que o a e o b eram os coeficientes angular e linear da função; ressaltamos a diferença entre os coeficientes e as variáveis e orientando-os a ter cuidado e não confundi-las.

A introdução ao conceito de função nos permitiu já nas primeiras aulas sobre função afim, defini-la, pois durante as três primeiras seções já havíamos trabalhado com situações que representavam uma função afim.

20º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 21/08/2013

Deixamos de nos encontrar com os alunos nos dias 14 e 15 de agosto; o dia 14 foi dedicado aos preparativos para uma gincana na escola, que ocorreu no dia 16 de agosto motivo pelo qual não houve aula e no dia 15 de agosto era feriado municipal.

Iniciamos o encontro pedindo que os alunos formassem os grupos visto que iríamos dar início às atividades. Havia, na aula 25, alunos; foram formados sete grupos com três alunos e um grupo com quatro.

Neste encontro trabalhamos três Atividades; as duas primeiras eram correlatas e tinham, como objetivo, mostrar duas situações, a primeira envolvendo uma função crescente e a outra um função decrescente; ambas partiam de um contexto e solicitavam o uso das representações algébrica e gráfica; a primeira atividade, da pizzaria, fazia uso da representação verbal, quando pedia para o aluno explicar a situação, enquanto a terceira atividade tinha, como objetivo, mostrar para os alunos que, a partir de dois pontos do gráfico, era possível expressar algebricamente a função.

Atividade 28³² – **O preço de uma pizza pronta entrega:**

Uma pizzaria do Município de Lagoa Seca, PB, entrega pizza na cidade. Um consumidor, ao ligar para o estabelecimento visando comprar uma pizza família, que custa R\$ 22,00, pergunta quanto pagará; o vendedor explica que vai depender da distância, pois é cobrado pelo transporte R\$ 0,20 por quilometro transportado.

- a) Explique com suas palavras essa situação.*
- b) Qual a expressão algébrica que o transportador utiliza para saber quanto o consumidor deve pagar?*
- c) Faça a representação gráfica desta função.*
- d) Quais o domínio e o conjunto imagem desta função?*

Atividade 29³³ – **Pagamento da mensalidade com desconto:**

Para incentivar o pagamento adiantado da mensalidade, uma escola no Município de Lagoa Seca, PB, oferece um desconto de R\$ 5,00 para cada dia de antecipação, podendo antecipar no máximo 10 dias. Sabendo que o valor da mensalidade é de R\$ 200,00, responda às seguintes questões:

- a) Qual a expressão algébrica que relaciona o valor y da mensalidade com o número de dias de antecipação do pagamento x ?*
- b) Quanto um pai de aluno irá pagar se efetuar o pagamento com 5 dias de antecedência? Quanto no máximo em reais um pai pode economizar?*
- c) Quais são os possíveis valores que podemos atribuir a x ?*
- d) Faça a representação gráfica desta relação.*

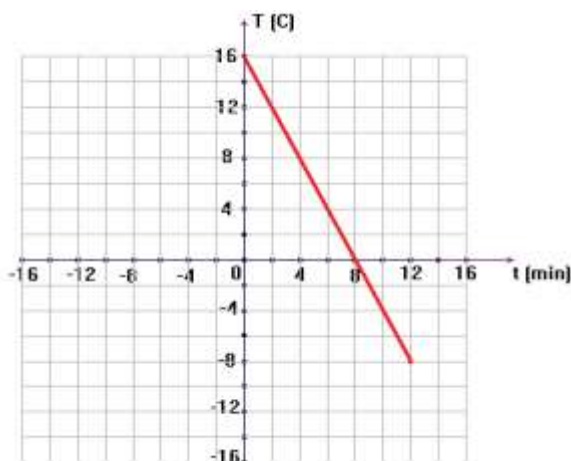
Atividade 30³⁴ – **Variação da temperatura:**

O gráfico abaixo ilustra a variação da temperatura (T), em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$), e uma chapa de metal em função do tempo (t), em minutos (min).

³² Atividade formulada pelo pesquisador.

³³ Atividade formulada pelo pesquisador.

³⁴ Retirada e adaptada de Delgado (2010).



- No decorrer do tempo, a barra foi aquecida ou resfriada?
- A temperatura da chapa esteve mais tempo positiva ou negativa?
- Determine a representação algébrica desta função para o domínio $0 \leq x \leq 12$ min.
- Em que ponto do gráfico a reta toca o eixo das ordenadas (eixo horizontal)? O que significa este ponto?

As dúvidas que surgiram em relação as atividades da pizzaria e do desconto da mensalidade, foram poucas; acreditamos que tal se deu por termos trabalhando algumas situações semelhantes nas seções anteriores.

Podemos destacar que, na representação gráfica da função decrescente alguns alunos colocaram os valores da variável dependente na ordem decrescente porém quando nos aproximávamos e questionávamos o que tinham feito, eles percebiam que tinham cometido um equívoco e corrigiam as respostas.

Quando os alunos terminaram as duas primeiras atividades ainda faltavam 30 minutos para o encerramento da aula ante o que resolvemos aplicar a terceira atividade.

No item (a) apenas dois grupos colocaram, como resposta, que a chapa estava sendo aquecida; intervimos da seguinte forma:

PP: Qual o tempo inicial desta situação?

G5: Zero minuto.

PP: Com zero minuto, qual a temperatura da chapa?

G5: 16 graus.

PP: E com quatro minutos?

G5: 8 graus.

PP: Ou seja, o tempo está aumentando. E a temperatura, aumenta ou diminui?

G5: Diminui.

PP: Então, a chapa está aquecendo ou resfriando?

G5: Resfriando.

Este diálogo nos dois grupos, permitiu que compreendessem que suas respostas seria justamente o contrário. Nos itens (b) e (d) não observamos dúvidas nos grupos porém o item (c) nenhum aluno conseguiu resolver; como o tempo da aula estava prestes a findar, pedimos que os alunos levassem a atividade para casa e tentassem resolver o item (c) para nos entregar no próximo encontro.

Neste próximo encontro retomamos, em plenária, as três atividades trabalhadas a fim de formalizar as explicações do crescimento, decrescimento, determinação da expressão algébrica de uma função conhecendo dois pontos do gráfico e zero de uma função.

Na realização das atividades deste encontro entregamos apenas uma folha de atividade para o grupo; durante as outras atividades todos os alunos do grupo recebiam a mesma atividade. Percebemos, em alguns grupos que, apenas um dos alunos fazia as atividades, enquanto os outros, faziam uma atividade de outra disciplina ou estavam distraídos com outra coisa. Precisamos chamar sua atenção constantemente e concluímos, com isto, que a didática de entregar o roteiro da atividade, para todos os componentes, é mais adequada.

21º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 22/08/2013

Iniciamos a aula falando para os alunos que estaríamos devolvendo as duas primeiras atividades que fizemos no encontro anterior para que fizessem suas resoluções no quadro, a fim de formalizar e observar alguns conceitos da função afim.

Começamos perguntando para eles qual a expressão algébrica das duas situações e em seguida fizemos a representação gráfica (a construção dessas representações foi feita a partir das falas dos alunos); após a construção das duas representações mantivemos o seguinte diálogo:

PP: Temos como fazer alguma comparação entre esses dois gráficos? Existe alguma diferença entre eles?

Als: A primeira é crescente e a segunda é decrescente.

PP: Como vocês perceberam isto?

Als: Porque quando a variável independente aumenta no primeiro caso, a dependente também aumenta e quando é decrescente é o contrário, uma aumenta e a outra diminui.

PP: Muito bem.

Não tínhamos falado sobre crescimento e decrescimento de função, observando a representação gráfica, mas a linguagem usada pelos alunos estava bastante aprimorada, ficando clara quando usaram os termos variável dependente e independente.

Continuamos nossa conversa:

PP: E com relação à representação algébrica, o que podemos comparar?

Als: Tem a mesma estrutura?

PP? Qual o coeficiente angular nas duas representações algébricas?

Als: Na primeira é 0,20 e na segunda 5.

PP: Na segunda é -5. Olhando para os coeficientes angular das duas representações, o que percebem?

Als: Um é positivo e outro negativo.

PP: Vejam que quando é positivo temos a função crescente e quando o coeficiente angular é negativo, a função será decrescente.

Usamos as duas representações para mostrar aspectos do crescimento e decrescimento de uma função, o que fez com que acreditássemos que tenha facilitado os alunos a compreenderem o que estávamos expondo; em seguida, retomamos a atividade 29, a fim de discutir com os alunos como fazer a representação algébrica tomando dois pontos distintos do gráfico.

Questionamos quanto ao comportamento da função e os alunos confirmaram que se tratava de uma função decrescente; também perguntamos sobre que tipo de função aquela representação modelava.

PP: Por que é uma função crescente?

Als: À medida que o tempo aumenta, a temperatura diminui daí, ela ser uma função crescente.

PP: Que função é essa?

Als: Função afim.

PP: E por que ela é uma função afim?

Als: Porque seu gráfico é uma reta.

Reforçamos, neste momento, a ideia de que em toda função afim o gráfico é uma reta e que cada família de função tem seu estilo; citamos também o exemplo da parábola de uma função quadrática.

Precisávamos, muitas vezes, chamar a atenção dos alunos para que pudéssemos ministrar a aula, parando algumas vezes nossa discussão para pedir silêncio, tentando conscientizar os alunos da importância da dedicação aos estudos.

Fizemos uma discussão sobre o significado do ponto $(8; 0)$, falando para eles que se tratava do zero da função e que pela análise do gráfico poderíamos identificar quais eram as raízes da equação que representa a função; solicitamos, ainda, que os alunos encontrassem as raízes das representações algébricas das Atividades 27 e 28.

Na discussão do item (c) relativa à representação algébrica da função, ressaltamos que, mesmo colocando os valores em uma tabela não é tão simples conseguir ver o padrão da função e que existia uma maneira mais fácil, neste caso, de fazer a representação algébrica; em seguida, solicitamos que os alunos nos falassem as coordenadas de alguns pontos do gráfico, sendo apresentados os pontos $(4; 8)$ e $(8; 0)$; notamos certa dificuldade para expressarem verbalmente outros pontos e então perguntamos:

PP: Quando o tempo for 2 segundos, qual será a temperatura?

Als: A temperatura será 12° .

PP: Correto. E quando for 1? E quando for zero?

Continuando, encontramos a expressão algébrica com os alunos e então surgiram algumas perguntas:

Al: professor eu posso usar qualquer ponto?

PP: Sim.

Al: Mas, vai dar o mesmo resultado?

PP: O ponto que eu pegar vai ser da mesma função que só tem uma representação algébrica.

Al: Para substituir em t , pode ser 4 ou 8? (fazendo referência ao ponto $(4; 8)$).

PP: Não. Lembrem que o primeiro valor da coordenada é a variável independente e o segundo, a variável dependente; portanto, para t será o primeiro valor do ponto.

Após encontrarmos a representação algébrica pedimos que os alunos confirmassem se o zero da função era realmente 8; só que deveriam encontrá-lo igualando o $f(x)$ a zero; a intenção foi fazer com que os alunos usassem as representações algébrica e gráfica.

Feitas essas intervenções no quadro, pedimos aos alunos para formarem grupos de três componentes pois iríamos trabalhar mais uma atividade; alguns questionaram dizendo que estavam cansados mas falamos que era preciso aplicar mais uma atividade, para aprendermos bem o conteúdo. Havia 22 alunos em sala; foram formados seis grupos com três alunos e um com quatro alunos.

Atividade 31³⁵ – Valor da fatura telefônica:

Para calcular o valor da fatura telefônica de certa empresa de telefonia fixa, procede-se da seguinte forma:

1º Tem um valor fixo de R\$ 30,00, referente à mensalidade.

2º Tem uma parte variável dependendo do número de minutos que exceda 100 minutos mensais. R\$ 0,50 por minuto excedente.

a) *Complete a tabela:*

<i>Minutos consumidos ao mês</i>	<i>Valor pago na conta telefônica</i>
<i>10</i>	
<i>75</i>	
<i>100</i>	
<i>105</i>	
<i>200</i>	
<i>300</i>	
	<i>50,00</i>

b) *Represente esta situação em um gráfico.*

c) *Se chamarmos de x a quantidade de minutos consumidos e de y o valor a ser pago na conta telefônica, como escreveria uma expressão algébrica para esta relação?*

O objetivo da atividade era apresentar, para os alunos, que uma mesma situação pode ser representada por duas ou mais funções e fazer as representações algébrica e gráfica das funções.

³⁵ Retirada e adaptada de Delgado (2010).

Entregamos o roteiro da Atividade e lhes pedimos que lessem e tentassem resolvê-la; percebemos que alguns alunos tiveram dificuldade em entender a situação sendo estabelecida a seguinte mediação no grupo 3:

PP: Se você usar 10 minutos, vai pagar R\$ 5,00?

G3: Sim.

PP: Por que?

G3: E não é não?

PP: Quero que você me diga o porquê.

G3: Cada minuto não é R\$ 0,50.

PP: A segunda informação do enunciado do problema nos fornece o que? Leia, por favor. O que você entendeu?

G3: Que quando exceder 100 minutos vai pagar R\$ 0,50 por minuto.

PP: R\$ 0,50 a mais. Então, você usando 10 minutos excedeu 100?

G3: Não.

PP: Então quanto você pagará?

G3: R\$ 30,00?

PP: Veja que esses R\$ 30,00 se referem a uma taxa fixa que só vai ser alterada após passar de 100 minutos no mês.

Usando este diálogo com os grupos que apresentaram dificuldades, eles conseguiram entender e completar a tabela.

Para o esboço do gráfico alguns grupos colocaram o valor 30 da variável dependente três vezes no eixo vertical. Precisamos sentar nos grupos, com os alunos, e mostrar que não poderíamos ter três valores iguais no eixo em posições diferentes e mostramos, também, como iria ser o comportamento no gráfico.

No item (c) precisamos falar em cada grupo que havia duas expressões algébricas, como indicado no diálogo com o grupo 2:

PP: Durante o tempo de zero a 100 minutos como a função se comporta?

G2: Não sei professor.

PP: É uma função crescente ou decrescente? Quando passou de 10 minutos para 75 minutos, o valor aumentou ou diminuiu?

G2: Permaneceu igual a 30.

PP: E após 100 minutos o que acontece?

G2: Começa a aumentar os valores.

PP: Correto. Logo, para esta função teremos duas expressões para representá-la em cada um desses intervalos.

PP: Quais os valores que a função vai assumir no tempo de zero a 100 minutos?

G2: 30.

PP: O valor vai variar nesse intervalo de tempo?

G2: Não.

PP: Percebam que temos uma função constante e após 100 minutos teremos uma função afim.

Tivemos que fazer a discussão em cada grupo reforçando a questão dos intervalos e ajudá-los a expressar as duas representações.

22º ENCONTRO (DUAS AULAS) - DIA 28/08/2013

Iniciamos a aula pedindo que os alunos formassem os grupos; havia 22 alunos em sala; foram formados 6 grupos com três componentes e duas duplas.

Entregamos o roteiro da Atividade 31 e solicitamos que começassem a fazê-la. Alguns alunos disparam comentários com relação ao preço da unidade de maçã; confirmamos que se tratava de uma situação fictícia e podíamos pensar ser de uma maçã do amor; o que nos levou a refletir que a situação não foi bem colocada por nós.

Atividade 32³⁶ – Venda de maçãs.

Um comerciante gastou R\$300,00, na compra de um lote de maçãs; como cada maçã será vendida a R\$2,00, ele deseja saber quantas maçãs devem ser vendidas para que haja lucro no final da venda. Observe que o resultado final (receita menos despesa) é dado em função do número x de maçãs vendidas.

- a) Quantas maçãs precisam ser vendidas para que não haja lucro nem prejuízo?*
- b) A partir de quantas maçãs vendidas haverá lucro?*

A Atividade 32 teve, como finalidade, mostrar para os alunos a possibilidade do estudo do sinal de uma função afim.

³⁶ Atividade formulada pelo pesquisador.

Os alunos rapidamente resolveram os itens (a) e (b) porém nenhum expressou a expressão algébrica da função; colocaram 150 e 151 de forma direta, sem nenhum cálculo; ao passar nos grupos, questionávamos qual o procedimento que eles tinham usado para encontrar as respostas e os alunos responderam que haviam dividido 300 por 2 encontrando, assim, a quantidade necessária de maçãs para arrecadar R\$ 300,00.

Diante de suas respostas fomos ao quadro e formalizamos o conteúdo de estudo do sinal de uma função e demos mais dois exemplos; neste momento, os alunos falaram que compreenderam e que não havia dúvidas; acreditamos que situações que envolvem o cotidiano de suas vidas ou de situações mais reais, possibilitam um entendimento melhor do conteúdo, pois eles se sentem mais motivados a compreendê-lo.

Concluídos os dois itens da Atividade, sentimos a necessidade de explorar o problema fazendo alguns questionamentos e pedindo que escrevessem a expressão algébrica para a situação.

Os alunos nos chamaram muito, de que não estavam conseguindo identificar a expressão algébrica; pedimos, então, que construíssem uma tabela a qual relacionasse quantidade de maçãs vendidas e o lucro pela venda das maçãs.

Nos grupos tivemos os seguintes diálogos:

G8: Nos ajude a fazer a expressão algébrica.

PP: Não estão conseguindo? O que vocês conseguiram fazer?

G8: Ta muito difícil professor.

PP: Construam uma tabela relacionando a quantidade com o lucro.

G8: Como assim?

PP: Se ele vender 150 maçãs, qual será o lucro?

G8? Zero.

PP: Coloque isto na tabela. Como você encontrou tal valor?

G8: Multipliquei cento e cinquenta por dois.

PP: Mas essa multiplicação tem como resultado zero?

G8: Não, é 300.

PP: Então está faltando alguma coisa.

PP: Pense um pouquinho. Leia o enunciado. O vendedor teve algum custo com as maçãs?

G8: Teve de trezentos.

PP: Qual a operação que devemos fazer para retirar este valor.

G8: Vai ficar cento e cinquenta vezes dois menos trezentos.

PP: Certo. Agora, coloque mais valores na tabela e tente escrever a expressão algébrica.

A tabela ajudou os alunos a encontrar a expressão algébrica que representa esta função. Fizemos mais algumas explorações, questionando se a função era crescente ou decrescente e a construção da sua representação gráfica. Quando os alunos terminaram a atividade 31, entregamos o roteiro da Atividade 32 cujo objetivo era trabalhar com a representação gráfica, algébrica e tabular.

Atividade 33 – Associação entre representações:

Na coluna da esquerda estão alguns gráficos e na coluna da direita, a representação algébrica de funções e tabelas; faça a correspondência entre as colunas.

		<input type="checkbox"/> $f(x) = -x - 4$						
		<input type="checkbox"/> <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td>-1</td> </tr> </tbody> </table>	x	f(x)	4	5	-2	-1
x	f(x)							
4	5							
-2	-1							
		<input type="checkbox"/> $f(x) = x - 1$						
		<input type="checkbox"/> <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>	x	f(x)	3	1	-2	6
x	f(x)							
3	1							
-2	6							

Os alunos não tiveram dificuldade de entender o que se pedia na atividade porém encontraram dificuldade de fazer as associações. Precisamos ir ao quadro e lhes mostrar como podiam retirar informações da representação gráfica cujos pontos nos ajudariam a perceber qual associação deveríamos fazer; após a explicação os alunos resolveram o problema de maneira correta.

Depois de suas respostas fomos novamente ao quadro e mostramos que havia outras formas de responder a atividade; pedimos que os alunos encontrassem as expressões algébricas a partir de dois pontos distintos do gráfico.

Ainda a fim de sondar se eles haviam realmente entendido o conteúdo, pedimos que respondessem quais das representações eram de função crescente e quais eram a de função decrescente; solicitamos, daí, o domínio, o conjunto imagem e os zeros das

funções; chegando ao fim da aula, percebemos avanços na autonomia dos alunos e melhoria na compreensão do que estavam fazendo.

Análise da seção extra:

Acreditamos que houve evolução dos alunos nas suas concepções sobre o conceito de função afim, propiciado pelo seu bom desempenho no desenvolvimento das seções um, dois e três, enfatizamos o trabalho em que utilizamos a metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, nessas seções reforçamos as ideias consideradas por Conney, Beckamann e Loyd (2010) como sendo essenciais para o desenvolvimento do conceito de função; acreditamos também que isto tenha levado os alunos a compreender de forma qualitativa e rápida, o conceito de função afim.

23º ENCONTRO (UMA AULA) - DIA 29/08/2013

Este foi o nosso último encontro com a turma da pesquisa; nele, agradecemos a colaboração de todos pela ajuda que nos deram e antes de sair pedimos que fizessem uma avaliação de nossas aulas, de forma sigilosa onde eles puderam expressar o que acharam.

Apresentamos, a seguir, algumas transcrições referentes às avaliações dos alunos:

“... No começo achei um pouco ruim, mas com o tempo mim acostumei com ele e o ensinamento dele. Eu achei maravilhoso o dele, não achei nada ruim, nos ajudou muito.”

“Nesse pouco tempo que você esteve conosco foi um bom tempo aprendemos coisas novas de um jeito bom de aprender as coisas... muita coisa foi feito e o aprendizado que você passou ficou pra sempre.”

“A presença do professor na sala foi boa, ele é muito legal sabe explicar o conteúdo, a parte das atividades em grupo foi legal porque aprendemos em conjunto todos juntos, foi um pouco complicado mas fomos aprendendo e com o tempo ficou fácil...”

“Nesse tempo que você passou com agente foi muito bom, você Jefferson nos ajudou muito só não gostava das atividades porque era muito chata, mas você é muito legal era pra você ficar até o fim do ano.”

“Apesar de eu já gostar de matemática desde que comecei a estudar, eu adorei estudar matemática este ano e os assuntos este ano estavam muito mais claros, pois o método de trabalho do professor foi bem interessante acredito que não só eu como todos os meus colegas de sala aprenderam bastante... ele foi sempre muito legal e paciente com todos, seu método da folhinha conquistou a todos e iremos sentir muita sua falta. E é isso, este ano estudar matemática para mim foi diferente, o que aprendi este ano nunca irei esquecer.”

“Este período foi muito bom, pra mim na matéria de matemática, porque eu aprendi muito gostei do modo de avaliação do professor, o modo de avaliação me ajudou a melhorar na matéria. As atividades era muito boas,..., foi um ótimo professor, amigo, companheiro se nós precisava tirar dúvidas ele sempre atencioso...”

“O professor de matemática no inicio ninguém gostou,... o jeito de ensinar dele era diferente ele passava a atividade e depois que ele explicava o assunto e com isso agente se esforçava. Algo que acho errado nele é que ele é muito paciente e tinha hora que meus colegas se aproveitava e começavam a bagunçar. Mas, particularmente eu gostei do professor ele tanta com que o aluno aprenda...”

“... eu gostei do jeito que ele ensina a gente só fazendo atividades e explicando a todos. Gostei muito, apesar de não entender muito, mas quando eu não sabia eu pedia explicação a ele e ele me explicava,...”

“... com ele aprendi varias coisas, ensina muito bem, tem paciência, passou várias atividades para nos avaliar. Eu vou sentir muita falta, apesar de não gostar de matemática eu adorava as aulas dele...”

“Esse ano foi bom o ensino de matemática o jeito que o professor ensinou, de um jeito mais simples a resolver problemas o professor de matemática trouxe pala um jeito, podemos dizer, novo. Logo no começo do ano ele disse que ia ensinar de um jeito mais prático e falando serio foi mesmo, gostei muito do ensino de matemática e professor tenho que agradecer por, tudo aprendi matemática de um jeito que não esperava e sempre que ficava em dúvida chamava ele ei ele explicava e eu resolvia to no instante.”

“... Aprendi muitas coisas com ele. Um das coisas é tentar a cada dia ser uma pessoa melhor...”

Pelo que percebemos nas aulas e com base na opinião dos alunos, acreditamos que a metodologia usada em nossa pesquisa nas aulas do conteúdo de função foi capaz de ampliar o interesse e a motivação dos alunos por este conteúdo. Notamos que os alunos não enxergavam a matemática como útil em suas vidas, o que provoca falta de vontade em estudar a matéria, os alunos afirmam que uma metodologia diferenciada chama mais a atenção do que a tradicional.

Os alunos valorizaram o trabalho em grupo afirmando que este tipo de trabalho permite a aprendizagem de forma coletiva e que, ao iniciarmos o conteúdo com um problema matemático só para depois fazer a formalização, faz com que se esforcem para conseguir resolver o problema.

Suponho que as aulas em que utilizamos a metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas surtiram uma participação maior dos alunos na construção do conceito de função fazendo com que se sentissem protagonistas do processo.

Neste último capítulo apresentamos os detalhes de nossa intervenção utilizando a metodologia proposta; foram 23 encontros, nos quais tentamos fazer com que os alunos compreendessem as ideias consideradas essenciais para o bom entendimento do conceito de função. Acreditamos que no percorrer desses encontros os alunos compreenderam o essencial do conceito - a questão da unicidade, a importância da covariação e taxa de variação, além da utilização em uma mesma função de diversas representações. Sabemos, no entanto, que o conceito de função é amplo; sua construção em um todo é algo que demanda tempo, que vai ser feito ao longo de toda a escolaridade.

Apresentamos a seguir as nossas Considerações Finais e os principais resultados da pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso trabalho propôs analisar as dificuldades e possibilidades que a metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas aliada ao trabalho com as representações múltiplas oferece durante a formação do conceito de função, em sala de aula.

Essas considerações finais têm a finalidade de retomar aspectos da pesquisa que consideramos marcantes, tais como: fundamentação teórica, fundamentação metodológica, os principais resultados, as limitações encontradas, as contribuições e as perspectivas.

Utilizamos, para fundamentar o trabalho, as grandes ideias essenciais para a aquisição do conceito de função, destacadas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), que apresentam cinco grandes focos para o bom desenvolvimento do ensino aprendizagem do conceito, a saber: o conceito de função; covariação e taxa de variação; família de funções; combinação e transformação de funções e representações de funções.

A contribuição da teoria abordada por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) foi importante para acompanhar e analisar, de forma estruturada, o desenvolvimento do conteúdo em sala de aula.

Neste trabalho utilizamos, como metodologia de sala de aula, o ensino aprendizagem de Matemática através da resolução, proposição e exploração de problemas e destacamos Schroeder e Lester (1989) que colocam o problema matemático como ponto de partida, o qual leva o aluno a ser protagonista do processo e o professor mediador.

O método de pesquisa utilizado foi de cunho qualitativo; consideramos os pressupostos da pesquisa pedagógica, o qual explicita a interação do professor/pesquisador e os alunos participantes da pesquisa, diretamente no cotidiano da sala de aula.

Introduzimos o conteúdo de função para estudantes de uma escola pública do Estado da Paraíba, em uma turma 1º ano do Ensino Médio, por meio da elaboração e aplicação de uma sequência de atividades composta de 4 seções, desenvolvida com a turma da pesquisa durante 23 encontros – a 1ª seção continha as ideias essenciais para a

introdução do conceito de função, composta de 10 encontros; a 2ª seção tinha, como objetivo, apresentar para os alunos a representação gráfica de uma função e aprimorar as demais representações e ideias trabalhadas na seção anterior; a 3ª seção levava à formalização do conteúdo de função e na última seção trabalhamos uma das famílias de função, a função afim, para observar se as ideias trabalhada nas seções 1, 2 e 3 facilitavam a compreensão das famílias de função.

O caminho que trilhamos nos faz acreditar que nosso objetivo foi alcançado, de vez que os alunos aceitaram bem a proposta da nova metodologia. Acreditamos que a resolução de problemas fez com que os alunos compreendessem melhor o conteúdo de função e, portanto, esta metodologia contribuiu significativamente para o ensino do professor e aprendizagem do aluno, referentes ao conceito em estudo.

Nas primeiras atividades os alunos pouco debatiam entre si, ao encontrar dificuldade, vindo logo tentar sanar suas dúvidas com o professor pesquisador. Sentimos que sempre esperavam que o professor desse a resposta pronta ao problema e quando fazíamos algum tipo de questionamento, a fim de que pensassem sobre o problema, eles não gostavam e faziam reclamações sobre isto. Com o passar do tempo, a partir da nossa tentativa de quebrar essa cultura eles ficaram mais acostumados com as nossas perguntas e se envolveram mais uns com os outros.

Alguns alunos sentiram dificuldades ao trabalhar as situações do cotidiano, o que pode ser atribuído ao fato de, provavelmente, estarem acostumados a trabalhar a Matemática efetuando operações diretas com o objetivo de responder questões do tipo padrão, denominadas tradicionais; no desenvolvimento da pesquisa sentimos que alguns alunos ficaram bastante entusiasmados com as discussões que alguns problemas geraram.

Percebemos que eles tenderam a colocar apenas a resposta final e não expõem os cálculos que usaram para chegar às suas respostas; acreditamos que isto ocorra por não haver a valorização do processo de resolução e os professores em geral, enfatizam a resposta final; tentamos reverter a situação mas acreditamos que este trabalho requer mais tempo com os alunos, pois é algo enraizado neles.

Referente às representações múltiplas de funções, observamos que os alunos identificam com facilidade a representação verbal das situações e obtêm os valores da variável dependente e independente usando esta representação. O uso da representação verbal e tabular os ajuda a fazer a passagem para a representação algébrica mas, de modo geral, as representações eram, na maioria das vezes, mediadas pela representação

tabular, de vez que usavam a tabela para intermediar as representações algébrica e gráfica, mostrando dependência dos alunos a esta representação.

Conseguimos bons resultados com o uso das representações múltiplas de funções e percebemos que os alunos operaram bem a passagem das linguagem verbal para a escrita, para a tabular e para a algébrica; da tabular para a algébrica e para a gráfica; da algébrica para a tabular e para a gráfica; e da gráfica para a algébrica, para a tabular e para a verbal. Portanto, fizeram a mudança de registro de várias representações de funções. Oliveira (1997) já indicava que para suprir as necessidades dos alunos na compreensão do conceito de função é preciso fazer as passagens de uma representação para outra.

Acreditamos que conseguimos desenvolver bem a grande ideia 5 de Conney, Beckmann e Lloyd (2010), “Representações múltiplas de funções”, na qual os alunos tiveram a oportunidade de perceber que uma função pode ser representada de maneiras distintas sem deixar de ser a mesma função mas levando os alunos a compreenderem as características de uma função.

Quando lhes solicitamos encontrar o valor da variável dependente usando a expressão algébrica, eles faziam a substituição e conseguiam obter os valores correspondentes, porém, quando pedíamos a variável independente dando um valor da variável dependente, eles preferiam fazer mentalmente, ou seja, há dificuldades em fazer com que os alunos percebam que, fazendo esta substituição, é mais fácil chegar às respostas e que quando tivermos uma expressão que represente uma situação mais complexa e que não dê para se resolver mentalmente, a substituição vai ajudar e será necessária.

Muitas vezes, os alunos erram as respostas simplesmente por falta de atenção, seja na leitura ou na interpretação do enunciado; o fato é que querem resolver o problema sem antes entender de que se trata, o que ocorreu diversas vezes na intervenção. Tínhamos que chamar sua atenção para detalhes e que se eles fizessem uma leitura mais atenta dos problemas, acreditamos que conseguiriam resolver as atividades propostas, sem nossa mediação. Pensamos que nas aulas de Matemática devemos trabalhar mais com os alunos a leitura e interpretação; desta forma, acreditamos que eles fiquem mais atentos a detalhes importantes dos enunciados de problemas.

Creemos que tenha ficado claro, para os alunos a grande aplicabilidade do conceito de função, tal como afirmam Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) na grande ideia 1. Pudemos trabalhar com alunos situações diversas de seu cotidiano; da própria

Matemática como, por exemplo, as sequências numéricas além de trabalharmos situações da Física. Em nenhum momento surgiu uma pergunta que já se tenha tornado clássica: “Para que serve isso?” ou “Em que eu vou usar isso?” pensamos que os alunos tenham percebido a grande aplicabilidade do conceito.

Acreditamos que os alunos tenham compreendido a essência da grande ideia 1, descrita por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), bem como na grande ideia 2, quando trabalhamos com eles as variáveis; principalmente quando eles percebiam que quando o valor de uma variável mudava ocorria o mesmo com a outra.

Ressaltando a importância do uso da metodologia de resolução de problemas no processo, observamos que os alunos se tornaram, ao longo das atividades, mais autônomos, críticos, ou seja, criaram uma nova postura, além de mudar algumas concepções de que a Matemática é “chata” e não possui aplicação; supomos que a resolução de problemas tenha feito com que os alunos fossem motivados a estudar Matemática.

A resolução de problemas permitiu que os alunos desenvolvessem mais seu processo metacognitivo apesar de, nas primeiras atividades, sentirem dificuldade para pensar sobre o que estavam fazendo; entretanto, como a resolução de problemas exige leitura, interpretação e extração de dados do enunciado, os alunos foram evoluindo em seu processo de metacognição, apesar de sabermos que eles ainda possuem várias limitações.

A proposição de problemas nos permitiu perceber como os alunos estavam vendo o conceito de função. Os problemas que eles elaboraram, continham a ideia do conceito, mesmo sem termos definido o que era função, uma vez que todos os problemas eram situações que representavam funções.

Como as atividades foram feitas em grupo, percebemos que os alunos discutiam entre si as possíveis formas de resolver o problema fazendo com que houvesse um debate entre os alunos dos grupos porém também constatamos que alguns alunos esperavam que seus companheiros o fizessem sozinhos, casos em que precisamos mediar, fazendo com que todos participassem das discussões.

Observamos uma mudança significativa quanto à receptividade à metodologia de ensino; no início de nossa intervenção chegaram a fazer reclamações de nossa prática porém durante e no fim da intervenção conseguimos fazer com que os alunos se adaptassem e gostassem da forma como trabalhamos.

Ainda percebemos que houve compreensão dos alunos de que função pode ser representada de maneiras diferentes e que, quando mudamos sua representação, a função continua sendo a mesma. Compreenderam, então, que algumas representações são mais úteis que outras, dependendo da situação, e que cada uma oferece características particulares.

Acreditamos que existem mais aprofundamentos cujos alunos ainda têm para alcançar sobre o conceito de função mas sabemos, também, que a formação de um conceito não ocorre em poucas aulas mas é algo que leva tempo tendo-se que colocá-lo à frente de várias situações que o envolvem, com a convicção, porém, de que nosso estudo oferecerá contribuições para o trabalho de sala de aula com o conteúdo de função uma vez que consideramos que, de modo geral houve, por parte dos alunos participantes das seções, um crescimento na compreensão deste conceito.

Uma das maiores dificuldades que sentimos foi em relação à indisciplina da turma pois tínhamos que chamar sua atenção constantemente para que atentassem para nossa fala. Com a turma da pesquisa o trabalho fluía mais significativamente quando eles estavam fazendo as atividades do que quando o professor fazia a explicação.

A receptividade dos alunos no início da intervenção não foi positiva mas acreditamos que deva ter ocorrido em virtude de, anteriormente, só tenham sido desenvolvidas atividades tradicionais nas aulas de Matemática.

Realizar, então, um estudo em torno do tema função, o qual permitiu que elaborássemos e aplicássemos uma sequência de atividades em sala de aula; desta forma, fornecemos uma maneira de introduzir o conceito de função através de problemas que geram as discussões sobre as ideias essenciais do conteúdo sem que seja necessário, de início, já apresentar as definições formais e que devem ser construídas pelos alunos durante o processo em sala aula, isto é, não fornecemos apenas a sugestão para o desenvolvimento do conceito de função mas também a discussão dos resultados da sua utilização em sala de aula.

Todo este processo nos ensinou muito; entretanto, destacamos que a pesquisa permitiu que, a partir das reflexões que fizemos da nossa própria prática, desenvolvêssemos melhor nossa identidade, de professor; conseqüentemente, acreditamos que melhoramos nossa prática; após, a realização da intervenção em sala de aula sentimos que escutamos mais os alunos; deixamos que eles coloquem suas opiniões e os questionamos para que tentassem chegar a uma solução por si só; passamos a aceitar mais outras opiniões e não apenas aquela que já esperávamos.

No decorrer do tempo que desenvolvemos nossa pesquisa, tivemos a oportunidade a partir de alguns recortes de nossa produção publicar alguns artigos em anais de Congresso, que possibilitou divulgarmos algumas coisas de nossa investigação e fazermos uma discussão sobre o tema da pesquisa:

BRANDÃO, J. D. P.; ANDRADE, S. **Ensino Aprendizagem do Conceito de Função Através da Metodologia de Resolução de Problemas**. In: Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação matemática, XVI, 2012, Canoas. Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação matemática, 2012.

BRANDÃO, J. D. P.; ANDRADE, S. **Ensino aprendizagem do conceito de função: aplicando a metodologia de Resolução de Problemas**. In: I Semana Acadêmica em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2012, Campina Grande. I Semana Acadêmica em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2012.

BRANDÃO, J. D. P.; ANDRADE, S. **Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas**. In: Congresso Nacional de Educação, 2014, Campina Grande. Congresso Nacional de Educação, 2014.

BRANDÃO, J. D. P.; ANDRADE, S. **Ensino Aprendizagem Através da Resolução de Problemas e Representações Múltiplas: uma introdução do conceito de função**. In: Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação matemática, XVIII, 2014, Recife. Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação matemática, 2014.

Durante a intervenção e a análise dos dados, tivemos alguns insights que poderão ser objeto de futuras pesquisas devido ao tempo que temos e, pelos objetivos que traçamos, não tivemos a possibilidade de abordá-los de forma satisfatória.

Em primeiro lugar, destacamos a necessidade de aprofundar o estudo em relação às famílias de função, podendo desenvolver uma pesquisa mais ampla que se estenda e aprofunde a grande ideia 3 de Conney, Backmann e Lloyd (2010).

O segundo ponto é que poderíamos avultar uma investigação que trate das concepções e prováveis dificuldades que professores de Matemática possuem acerca do conceito de função, além de propostas de superação das possíveis dificuldades encontradas.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP, Rio Claro, 1998.

ANDRADE, J. M.; SARAIVA, M. J. Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa.** México, vol.15, n. 2. P. 137 – 169. Julho de 2012.

ARDENGHI, M. J. **Ensino aprendizagem do conceito de função:** pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2008.

BRANDÃO, J. D. P.; ANDRADE, S. **Ensino Aprendizagem do Conceito de Função Através da Metodologia de Resolução de Problemas.** In: Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação matemática, XVI, 2012, Canoas. Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação matemática, 2012.

BRANDÃO, J. D. P.; ANDRADE, S. **Ensino aprendizagem do conceito de função: aplicando a metodologia de Resolução de Problemas.** In: I Semana Acadêmica em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2012, Campina Grande. I Semana Acadêmica em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2012.

BRANDÃO, J. D. P.; ANDRADE, S. **Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas.** In: Congresso Nacional de Educação, 2014, Campina Grande. Congresso Nacional de Educação, 2014.

BRANDÃO, J. D. P.; ANDRADE, S. **Ensino Aprendizagem Através da Resolução de Problemas e Representações Múltiplas: uma introdução do conceito de função.**

In: Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação matemática, XVIII, 2014, Recife. Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação matemática, 2014.

BRANDÃO, J. D. P. **O papel do livro didático no Processo de Ensino**

Aprendizagem: uma introdução do conceito de função. Monografia (Especialização em Educação Matemática). UEPB, Campina grande, 2013.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006. v. 2.

BROWN, S. A.; MEHILOS, M. Using tables to Bridge Arithmetic and Algebra. **Mathematics Teaching in the Middle School.** 15(9), 532-538, (2010).

CAMPITELI, Heliana Cioccia. CAMPITELI, Vicente Coney. **Funções.** Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CÂNDIDO, S. L. Uma Experiência sobre o Ensino e a Aprendizagem de Funções. **Educação Matemática em Revista,** São Paulo, 2000 ano7, n.8, p.47-56.

CHARLES, R.; LESTER, F. **Mathematical problem solving.** Spring House, PA: Learning Institute, 1986.

CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. **The teaching and assessing of mathematical problem solving.** Reston: NCTM, 1989.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas:** O Elo Perdido entre o Ensino e a Aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.** Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 151-173

CONNAY, T. J.; BECKMANN, S.; LLOYD, G. M. et al. **Developing an essential understanding of functions: fo teaching mathematics in grades 9-12.** Reston, NCTM, 2010.

COSTA, C. B. J. **O conhecimento do professor de matemática sobre o conceito de função.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.

DANTE, L. R. **Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática.** Tese de Livre Docência. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 1988.

DINIZ, M. I. S. V. A metodologia Resolução de Problemas. **Revista do professor de Matemática – RPM.** São Paulo, n. 18, p. 12 – 19, 1991.

DOMITE, M. D. C. Formulação de problemas e educação matemática: a quem compete? **Revista Movimento.** Faculdade de Educação da Universidade Federal Fluminense, n. 14, p. 14-30, 2009.

ENGLISH, L. D. **The development of fifth-grade children’s problem-posing abilities.** Educational Studies in Mathematics, v. 34, n. 3, p. 183-217, 1997.

ERNEST, P. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: ABRANTES, P; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. **Investigar para aprender Matemática** (textos selecionados). Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, 1996. p. 25-48.

FERNANDES, L. S. **Análise de processos metacognitivos de alunos do 1.º Ciclo do ensino básico na resolução de problemas matemáticos.** Dissertação (Mestrado em Educação). Instituto Politécnico de Castelo Branco, Castelo Branco, 2012.

FRIENDLAND, A.; TABACH, M. Promoting multiple representation in algebra. In. CUOCO (Ed). **The roles of representation in school mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2001.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa Pedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LESTER, F. K. Research in mathematics problem solving. In: Shumway, R. J. (Ed.). **Research in mathematics education**. Reston: NCTM, 1980. p.286-323.

LESTER, F. K. Trends and issues in mathematical problem-solving research. In. LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. Orlando, FL: Academic Press, 1983.

NCTM. **An agenda for action**. Reston: NCTM, 1980.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Reston: NCTM, 2007.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função**: uma abordagem do processo de ensino-aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). PUC, São Paulo, 1997.

ONUCHIC, L. R. O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Trabalhando volume de cilindros através da resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista**. Rio Grande do Sul, v. 10, n. 1, p. 95-103, 2009.

PELHO, E. B. B. **Introdução ao conceito de função**: a importância da compreensão das variáveis. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2003.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

POZO, J. I. (Org.) **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RÊGO, R. G. **Um estudo sobre a construção do conceito de função**. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, UFRN, 2000.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa Social: Métodos e Técnicas**. São Paulo: Atlas, 2012.

RONAU, R. N.; MEYER, D.; CRITES, T. Putting Essential Understanding of Functions into Practice in Grades 9 – 12. Reston: NCTM, 2014.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxeologias**. Tese (Doutorado em Educação). PUC, São Paulo, 2006.

SANTOS, V. M. P. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática: métodos alternativos**. Instituto de Matemática – UFRJ. Projeto Fundação, 1997.

SHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-32.

SILVA, L. M. **Compreensões de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). UEPB, Campina Grande, 2013.

VAN DE WALLE, J. A.; LOVIN, LouAnn H. **Teaching Student – Centered mathematics grades 5-8**. Boston: Pearson, 2006. v.3.

ZATTI, S. B. **Construção do conceito de função: uma experiência de ensino aprendizagem através da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física e Matemática). UNIFRA, Santa Maria, 2010.

ANEXOS

Atividades desenvolvidas em sala de aula durante a pesquisa

Apresentamos no material em anexo as atividades aplicadas durante os 23 encontros da intervenção da pesquisa. Apesar das atividades já terem sido dispostas na parte textual da dissertação aqui as colocamos em ordem para que o leitor que almeje analisa-las possa encontrá-las de forma mais linear.

Atividade 1³⁷ – Mistura de tinta e água:

Para preparar suas tintas um pintor costuma dissolver cada 4 latas de tinta concentrada em 8 latas de água. Complete a tabela, relacionando a quantidade de água (litro) para dissolver a quantidade de tinta (litro) dada:

Quantidade de tinta concentrada (litros)	Quantidade de água (litros)
1	
2	
	6
4	8
15	
40	
T	

- Se o pintor usar mais tinta concentrada, o que deverá fazer com a quantidade de água, para manter a mesma concentração?
- Quais as grandezas envolvidas na situação? Elas variam?
- Sabendo a quantidade de tinta concentrada, ele pode usar qualquer quantidade de água? Por que?
- Para cada lata de tinta concentrada, quantas latas de água ele usa?
- É possível escrever uma “fórmula matemática”³⁸ para determinar qualquer valor que relacione o número de latas A de água, com o número de T de latas de tinta concentrada.

³⁷ Atividade retirada e adaptada de Zatti (2010, p. 47-48).

Atividade 2³⁹ – O preço da passagem de ônibus:

O preço da passagem de ônibus entre as cidades de Lagoa Seca e Campina Grande é, R\$ 2,25. Com base neste dado, construa uma tabela, relacionando o valor a ser pago com o número de passagens.

Agora, responda às seguintes questões:

- Quanto uma pessoa pagaria por dia se morasse em Lagoa Seca e trabalhasse em Campina Grande? E em uma semana? E em um mês?
- É possível saber a quantidade de passagens pagas se o valor total pago corresponde a R\$ 54,00?
- Quais as grandezas envolvidas nesta situação?
- É possível estabelecer uma relação matemática que possa expressar esta situação? Qual?
- Em sua opinião, o preço da passagem de ônibus entre Lagoa Seca e Campina Grande é justo? Por que?

Atividade 3⁴⁰: Jogo tira de expressões

Objetivo: O intuito do jogo é fazer com que os alunos fiquem a passagem da representação verbal para a representação algébrica.

Apresentação: O jogo envolve a oralidade do aluno e é indicado o trabalho em duplas. Entregue-se, às duplas, uma tira de papel contendo as seguintes dez frases: indique o dobro do número; indique o sucessor do número; indique o quadrado do número menos um; indique o triplo do número menos um; indique o número mais cinco; indique o quadrado do número; indique o dobro do número menos um; indique quatro vezes o número, menos um.

Regras: Um aluno da dupla escolhe aleatoriamente uma tira de papel, sem que o outro veja seu conteúdo. O aluno que ficou sem a tira propõe um número qualquer e o outro executa com esse número a operação indicada dizendo apenas o resultado obtido. Isso deverá ser repetido até que seja descoberta a instrução contida no papel. No passo seguinte o aluno precisa escrever a expressão algébrica correspondente. A seguir,

³⁸ Usamos a expressão “fórmula matemática”, porque acreditamos que a mesma facilite a compreensão do aluno porém no final da atividade expomos para os alunos que o certo seria expressão algébrica e que nas próximas atividades estaríamos usando esta última expressão.

³⁹ Atividade formulada pelo pesquisador.

⁴⁰ Jogo retirado e adaptado de Rossini (2006, p. 102 – 103).

trocam-se os papéis entre as duplas, até esgotar todas as possibilidades entre os alunos. Ganha o jogo o aluno que acertar as expressões com menos palpites.

Atividade 4⁴¹ – Locomoção pé ante pé:

Para uma pessoa que se locomove pé ante pé, determine a relação entre as medidas dos deslocamentos feitos, em centímetros e em pés, de maneira que a seguinte questão possa ser respondida sem que seja necessário fazer o deslocamento:

- a) Quantos centímetros a terão percorrido depois de se deslocar 10 pés? E 11 pés? E 50 pés? E 600 pés?
- b) Quantos deslocamentos (pé ante pé) são necessários para percorrer 5000 centímetros?
- c) Qual a expressão matemática para as duas situações?
- d) Justifique com palavras os procedimentos que você realizou nos itens a, b e c.

Atividade 5⁴² – Caixa d'água:

Em uma caixa de água vazia é aberta uma torneira que despeja 10 litros de água por minuto.

- a) Construa uma tabela desenvolvendo o volume de água na caixa d'água, em litros, em relação ao tempo, em minutos.
- b) Quanto tempo é necessário para encher uma caixa com capacidade para 1000 litros de água? E 2000 litros? E 1500 litros?
- c) Determine a expressão matemática da situação.
- d) Se houvessem duas torneiras abertas o que aconteceria com o tempo para encher a caixa?
- e) Sabendo que o banho de 15 minutos com o chuveiro ligado gasta em média 120 litros de água, com quantos banhos uma caixa de água com capacidade para 1000 litros de água ficaria completamente vazia?
- f) Determine uma expressão matemática para esta situação.

⁴¹ Retirada e adaptada de Campiteli e Campiteli.(2006, p. 53).

⁴² Retirada e adaptada de Neto et al (apud MARTINS, 2012, p. 169-170).

Atividade 6⁴³ – Dos pregadores:

D. Lurdes lavou as camisas do time de futebol de seu neto, Cacá, e vai colocá-las para secar da seguinte maneira:

- cada camisa é presa por dois pregadores;
- cada camisa é ligada à seguinte por um pregador.
- a) Tente fazer um desenho que represente esta situação.
- b) Quantos pregadores D. Lurdes usará para pendurar 8 camisas? E 10 camisas? E 11 camisas?
- c) D. Lurdes comprou duas cartelas de 12 pregadores cada uma. Este número de pregadores é suficiente para prender as camisas de 22 jogadores? Justifique.
- d) Escreva uma expressão que represente o número de pregadores necessários para pendurar um número qualquer de camisas.
- e) Se D. Lurdes colocasse dois pregadores exclusivamente para cada camisa, quantos pregadores a mais ela usaria para pendurar três camisas? E para pendurar 8 camisas? E 10 camisas? E 100 camisas?

Atividade 7⁴⁴ – Triângulo com palitos de fósforo:

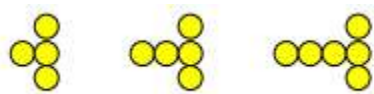
- a) Com palitos de fósforo, construa um triângulo. Quantos palitos você usou?
- b) Forme dois triângulos com 5 palitos, de modo que tenham um lado em comum.
- c) Usando o mesmo procedimento anterior para formar três triângulos, quantos palitos você usaria? Registre seus resultados. E para formar cinco? E para formar dez? E se quiser formar 65?
- d) Se alguém quiser saber quantos palitos serão usados para formar um número n qualquer de triângulos, você saberia escrever uma expressão algébrica para ajudá-lo?
- e) Verifique se esta expressão dá o número de palitos que você usou para fazer os triângulos do item c).

⁴³ Retirado e adaptado de Tinoco (2004, p. 32)

⁴⁴ Retirado de Tinoco (2004, p. 33).

Atividade 8⁴⁵ – Sequência de bolinhas:

Observe a sequência abaixo e responda:



- Desenhe a próxima figura da sequência. Quantas bolinhas ela tem?
- Desenhe a 7ª figura da sequência. Quantas bolinhas ela tem?
- Quantas bolinhas tem a figura que ocupa a 57ª posição da sequência?
- O que fazer para descobrir o número de bolinhas de qualquer figura da sequência?
- Qual a expressão algébrica que representa esta situação?
- Verifique se esta expressão dá o número de bolinhas encontradas nos itens a, b e c.
- Que posição ocupa a figura que possui 10 bolinhas? E qual a posição da figura que possui 99 bolinhas?

Atividade 9⁴⁶ - Preço do álcool e da gasolina:

O preço atual por um litro de gasolina no posto Ipuarana, na cidade de Lagoa Seca é de R\$ 2,79 e de álcool é R\$ 2,29.

- Construa uma tabela relacionando a quantidade de litros e seus respectivos valores.
- Escreva uma expressão algébrica para as duas situações.
- Qual seria o valor a pagar se abastecessem 10 litros de cada combustível? E 17 litros? E 55 litros?
- Um carro popular anda em média 12 km com um litro de gasolina e 10 km com um litro de álcool. Nessas condições é melhor abastecer com álcool ou gasolina?
- Um tanque cheio tem capacidade para 55 litros. Quantos quilômetros o carro percorreria se enchesse o tanque com gasolina? E se enchesse com álcool? E qual o valor pago em cada situação?

⁴⁵ Retirado e adaptado de Imenes e Lellis (2012, 223).

⁴⁶ Atividade formulada pelo pesquisador.

Atividade 10⁴⁷ – Viagem entre João Pessoa e o Sertão:

Um profissional viaja periodicamente de João Pessoa a uma cidade do Sertão paraibano; sabendo que a distância de uma cidade a outra é de 600 km, responda:

- Se a lei permitisse e o profissional fizesse o percurso com uma velocidade média de 200 km/h, quanto tempo ele levaria para fazer a viagem? E a 100 km/h?
- O tempo depende de qual informação (variável)?
- Qual a relação existente entre as variáveis utilizadas para fazer o cálculo?
- Se o profissional fizer o percurso em 4 horas, qual deve ser a velocidade média do automóvel? E em 5 horas?

Atividade 11⁴⁸ – Fábrica de cadarço:

Em Lagoa Seca existe uma fábrica de cadarço para calçados, cujo custo da produção de uma peça é de R\$ 1,20.

Complete a tabela:

Número de peças	1	2	3	4	5	6	7	8
Custo (R\$)	1,20	2,40	3,60					

- A cada quantidade de peças corresponde um único custo em reais?
- O custo depende de que?
- Quais são as variáveis?
- Expresse com palavras o que está acontecendo na situação.
- Descubra a regularidade e escreva a expressão algébrica que representa esta situação.
- Qual o custo de 10 peças? E de 50 peças?
- Com um custo de R\$ 120,00, quantas peças podem ser produzidas?

Atividade 12⁴⁹ – Dos fanáticos por futebol:

João e José moram há pouco tempo em Lagoa Seca. Fanáticos por futebol, resolveram ir ao Estádio do Amigão em Campina Grande para assistir à final do campeonato paraibano entre os times Treze e Campinense. Como não conheciam muito

⁴⁷ Retirada e adaptada de Oliveira (1997).

⁴⁸ Atividade formulada pelo pesquisador.

⁴⁹ Atividade formulada pelo pesquisador.

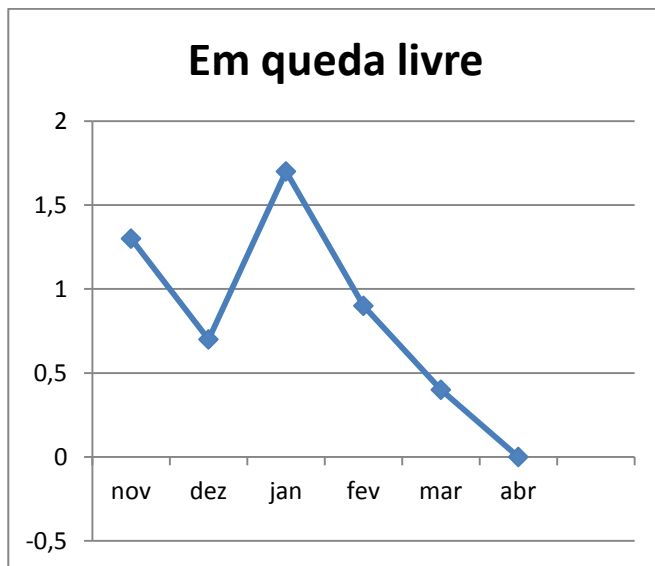
bem a região, resolveram ir de táxi até o Estádio. Quando entraram no táxi perguntaram ao motorista quanto custava a corrida; o taxista informou que a bandeirada custa R\$ 3,80, mais R\$ 1,50 por quilometro rodado.

- Escreva uma expressão matemática que represente essa situação, relacionando o custo da bandeirada com os quilômetros rodados.
- Sabendo que a distância da casa de João e José até o Estádio Amigão é de 7 km, com R\$ 12,80 eles conseguem chegar ao Estádio?
- Qual a distância máxima que eles poderiam percorrer com R\$ 12,80?
- Sabemos que o preço da passagem de ônibus custa R\$ 2,25 sendo que, para ir e vir até o Estádio do Amigão é preciso tomar 4 ônibus. Seria mais vantagem ir ao Estádio de ônibus ou de táxi?

Atividade 13: proposição de problemas referente ao conteúdo de função

Atividade 14⁵⁰ – Variação da inflação:

O gráfico abaixo mostra a variação da inflação (%) em determinado período de tempo; de acordo com o gráfico, responda:



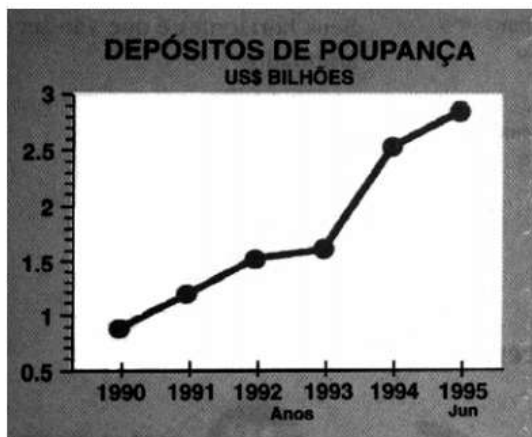
- Onde são registrados os meses correspondentes ao gráfico?
- Onde são registrados os índices de inflação?
- Qual foi a inflação de janeiro?
- Entre que meses a inflação subiu?
- Qual a diferença entre inflação negativa e queda de inflação?

⁵⁰ Retirada e adaptada de Tinoco (2004, p. 17-18).

f) Coloque os dados do gráfico em uma tabela.

Atividade 15⁵¹ – Depósito de poupança:

Encontramos, na revista VEJA, 26 de julho de 1995 o informe de um Banco apresentando sua evolução ao longo dos últimos anos. Para tanto ela apresenta o gráfico, que produzimos abaixo:



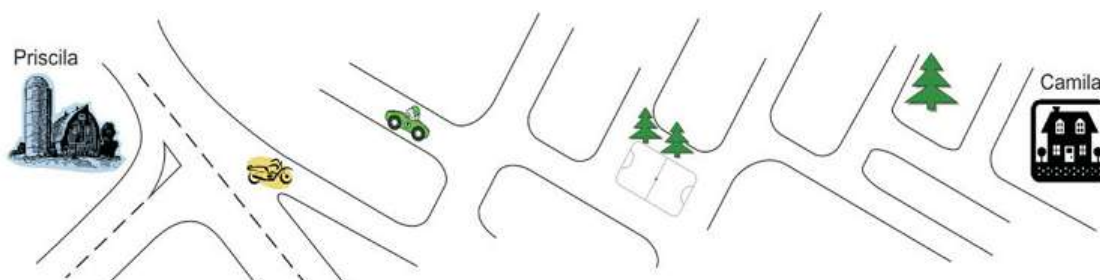
Agora, responda:

- Qual a variação de tempo descrita pelo gráfico?
- A variação dos depósitos de poupança nos 5 anos foi de quantos bilhões de dólares?
- No período de tempo descrito pelo gráfico o que ocorreu com os depósitos de poupança, neste Banco?
- Em que período houve maior aumento nos depósitos de poupança? E de quanto foi este aumento? Qual o período em que houve o menor aumento nos depósitos de poupança?
- Construa uma tabela com os dados do gráfico.

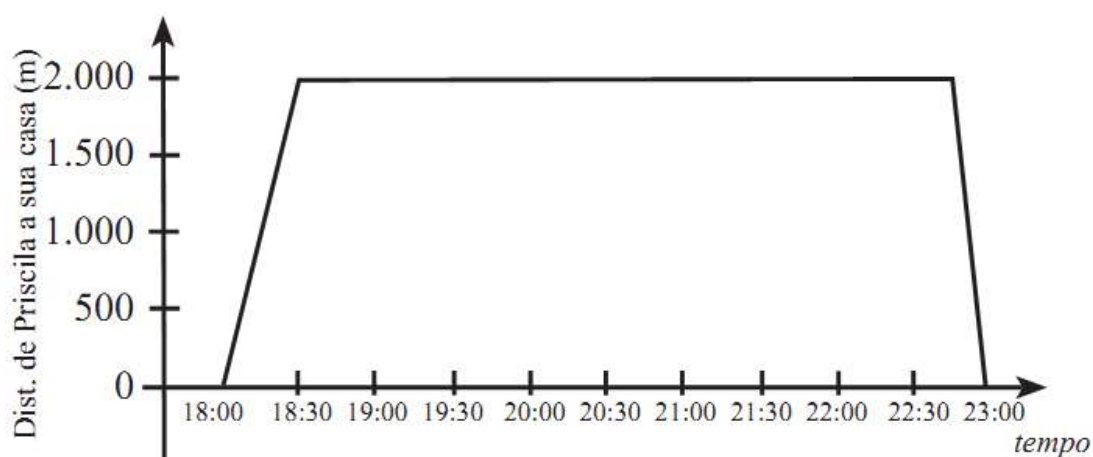
⁵¹ Retirada e adaptada de Oliveira (1997).

Atividade 16⁵² – A ida à festa:

Priscila sai de casa para ir à festa de Camila. Camila dá um mapa do caminho para que Priscila possa chegar à sua casa. Priscila vai a pé e volta de ônibus.



Observe o gráfico e responda:



- A que horas Priscila saiu de casa?
- A que horas Priscila chegou em casa?
- A que horas Priscila Chegou à festa?
- A que distância fica a casa de Camila da casa de Priscila?
- Quanto tempo Priscila demorou para chegar à festa?
- Quanto tempo Priscila demorou para chegar em casa?
- Por que no trecho entre 18:00h e 18:30h, o gráfico sobe?
- Que grandeza representa o eixo horizontal?
- Que grandeza representa o eixo vertical?

⁵² Retirada e adaptada de Tinoco (2004, p.30).

Atividade 17⁵³: Adivinha o que é

Apresentação: Atividade para fixação da localização dos pontos de um plano por meio das suas coordenadas. A curiosidade para descobrir a figura deverá incentivar o trabalho.

Material: Tabela com as coordenadas e uma folha de papel quadriculado.

1. Distribua a cada aluno a folha com os pares de coordenadas e outra de papel de quadriculado.
2. Peça que os alunos desenhem no papel quadriculado os eixos coordenados, com a origem próxima ao canto esquerdo inferior da folha, de modo que:
 - 2.1 Marcar uma escala de 0 a 20 em ox e de 0 a 30 em ou.
 - 2.2 Marcar os pontos dados das suas coordenadas ligando apenas aqueles que pertencem a um mesmo bloco (determinado por uma letra).

A – (16,3) (18,7) (18,9) (17,11) (16, 13) (14,15) (13,17) (12,19) (13,20) (12,23) (13,25) (14,27) (16,28) (14,29) (12,29) (11,28) (10,27) (9,25) (8,24) (4,24) (2,23) (2,21) (3,20) (9,20).

B – (8,10) (7,7) (7,5) (5,5) (4,3) (10,3) (11,4) (12,9).

C – (10,9) (9,5) (7,3).

D – (6,4) (5,3).

E – (9,4) (8,3).

F – (17,9) (16,10) (14,10) (12,9) (12,7) (14,5) (16,5).

G – (14,5) (12,4) (11,3) (16,3) (17,2) (15,1) (17,1) (19,2) (19,4) (17,5).

H – (16,28) (17,25) (17,23) (16,21) (15,19) (14,19) (13,20).

I – (2,23) (1,24) (1,22) (2,22).

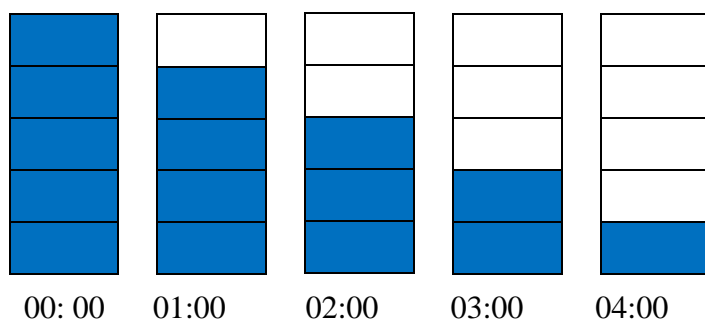
J – (9,25) (10,24).

Atividade 18⁵⁴ – Reservatório de água:

Um reservatório de água com capacidade de 1000 litros está cheio; o registro é aberto para esvaziá-lo e um cronômetro é acionado no instante em que se inicia o escoamento.

⁵³ Retirada e adaptada de Tinoco (2004, p.22-23).

⁵⁴ Retirado e adaptado de Rossini (2006).



Observando a ilustração acima, preencha a tabela:

Tempo (horas)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
Volume (litros)	1000		800						

- Represente, no gráfico, o que você observou na tabela, coloque o volume no sentido vertical e o tempo no sentido horizontal.
- Se o cronômetro continuar funcionando, qual a quantidade de água no reservatório no instante $t = 7$? Represente no gráfico esta situação.
- Com quanto tempo o reservatório estará completamente esvaziado? Represente no gráfico esta situação.
- É necessário unir os pontos do gráfico? Explique.
- O volume de água observado no reservatório depende do tempo transcorrido? Explique.
- Escreva uma expressão matemática que represente esta situação.

Atividade 19⁵⁵ – Troco ao comprar pães na padaria:

João vai à padaria Bom Jesus, com R\$ 2,00 para comprar pães; cada um custa R\$ 0,20.

- Se comprar 5 pães, quanto receberá de troco? E se comprar 6 pães? E 10 pães?
- Escreva a expressão que dá o troco que João receberá, se comprar um número x de pães qualquer.
- Construa um gráfico que represente esta situação.
- O ponto $(2; 0,40)$ pertence a este gráfico? E o ponto $(10; 2,00)$? E o ponto $(11; 2,20)$?
- Qual a segunda coordenada do par $(0; \quad)$ do gráfico?

⁵⁵ Atividade formulada pelo pesquisador.

- f) Qual a primeira coordenada do par $(\quad; 1,60)$ do gráfico?

Atividade 20⁵⁶ – Locação de carros:

O turista vem visitar Lagoa Seca e decide alugar um carro para se locomover. O valor a pagar (V) por este aluguel em uma locadora da cidade, é dado pela seguinte expressão matemática: $V = 50T + 150$ (T significa número de dias que o turista fica com o carro).

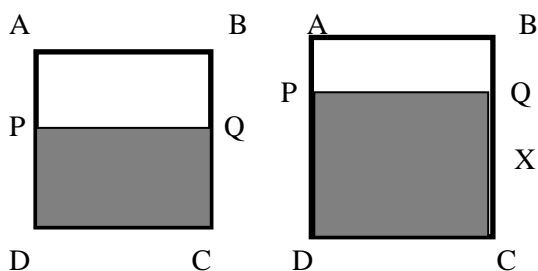
- a) Construa uma tabela na qual conste o valor a ser pago pelo aluguel de 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 dias.
 b) Com R\$ 400,00 é possível alugar o carro por 6 dias?

Em outra locadora, o valor a ser pago é dado pela seguinte expressão $V = 60T + 100$.

- c) Construa uma tabela em que conste o valor a ser pago pelo aluguel de 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 dias.
 d) Você poderia dizer qual desses dois planos é o mais vantajoso? Justifique.
 e) Construa um gráfico para cada situação, no mesmo plano cartesiano.

Atividade 21⁵⁷ - Área da região retangular:

O quadrado ABCD tem lado de 10cm. O ponto P se move de D para A, de modo que PQ se conserva paralelo a AB.



- a) Calcule a área da figura sombreada para $x = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 em cm e organize os dados em uma tabela do tipo:

⁵⁶ Atividade formulada pelo pesquisador.

⁵⁷ Retirada e adaptada de Candido (2000).

X	Área de PQCD
1	
2	
3	
4	
5	
6	
n	

- b) Quanto pode medir o lado de medida x da figura sombreada?
- c) Represente essa dependência descrita na tabela, em um gráfico cartesiano.

Atividade 22⁵⁸ – Valor da gasolina:

Em um posto de gasolina o litro de gasolina comum custa R\$2,10; observe o gráfico abaixo e responda às perguntas:



- a) Quais são as variáveis dependente e independente desta situação?
- b) Qual a expressão algébrica que relaciona essas grandezas?
- c) O que significa o par ordenado (2; 4,20)?
- d) Quanto custam, neste posto, 2 litros de gasolina? E 1,5 litro de gasolina? E 55 litros?
- e) Pagando o total de R\$6,30, quantos litros de gasolina comprará um consumidor? E se pagar R\$21,00?

Atividade 23:

As tabelas seguintes representam situações em que a cada elemento da primeira linha corresponde algum elemento da segunda linha. Verifique, em cada item, se cada elemento da primeira linha (domínio) tem um único ou mais de um correspondente na segunda linha (contradomínio) assinale a resposta adequada.

⁵⁸ Retirada e adaptada de Barroso (2010, p. 83).

a)

-2	-1	0	1	2	5	6	8	2	5
40	1	0	20	40	25	30	10	3	15

Existe um único correspondente.

Existem mais de um correspondente.

b)

1	1	3	6	10
2	5	8	9	12

Existe um único correspondente.

Existem mais de um correspondente.

c)

0	1	5	0	3
0	1	25	0	9

Existe um único correspondente.

Existem mais de um correspondente.

d)

4	4	5	5	6
16	8	25	10	36

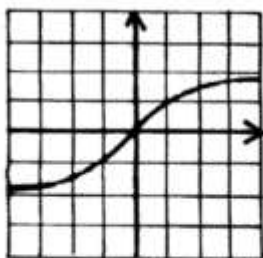
Existe um único correspondente.

Existem mais de um correspondente.

Atividade 24:

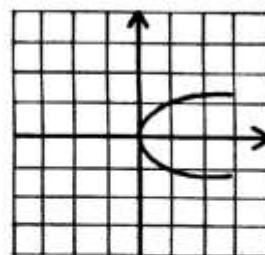
Supondo que os gráficos seguintes representam algumas situações, verifique a quantidade de elementos correspondentes a cada elemento e assinale a resposta correta (O domínio está representado no eixo horizontal e o contradomínio, no vertical).

a)



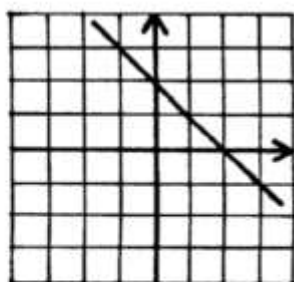
- () Cada elemento tem um único correspondente.
 () Cada elemento tem mais de um correspondente.

b)



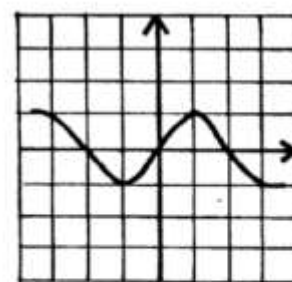
- () Cada elemento tem um único correspondente.
 () Cada elemento tem mais de um correspondente.

c)



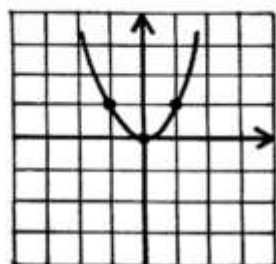
- () Cada elemento tem um único correspondente.
 () Cada elemento tem mais de um correspondente.

d)



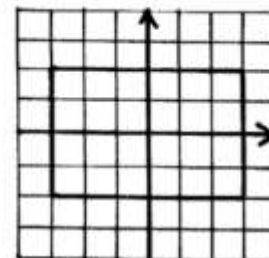
- () Cada elemento tem um único correspondente.
 () Cada elemento tem mais de um correspondente.

e)



- () Cada elemento tem um único correspondente.
 () Cada elemento tem mais de um correspondente.

f)



- () Cada elemento tem um único correspondente.
 () Cada elemento tem mais de um correspondente.

Atividade 25:

As leis abaixo representam algumas situações. Verifique em cada caso, se a cada elemento do domínio corresponde um único elemento no contradomínio e assinale a resposta correta. Nos itens a, b e d o domínio e o contradomínio é o conjunto dos números reais e no item c o domínio é os reais não negativos e o contradomínio os reais.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{para } x < 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \\ x, & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

() A cada elemento existe um único correspondente.

() A cada elemento existe mais de um correspondente.

b)

$$y = \begin{cases} -x, & \text{para } x < 0 \\ x, & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

() A cada elemento existe um único correspondente.

() A cada elemento existe mais de um correspondente.

c)

$$f(x) = \pm\sqrt{x}$$

() A cada elemento existe um único correspondente.

() A cada elemento existe mais de um correspondente.

d) $y = x + 3$

() A cada elemento existe um único correspondente.

() A cada elemento existe mais de um correspondente.

Atividade 26⁵⁹ – Preço da passagem de ônibus.

O preço da passagem de ônibus entre as cidades de Lagoa Seca e Campina Grande é de R\$ 2,00. Com base nesse dado responda às seguintes questões:

- Esta relação é uma função?
- Qual a expressão algébrica desta relação?
- Em caso afirmativo ao item (a) quais o domínio $D(f)$, o contradomínio $CD(f)$ e o conjunto imagem $IM(f)$?

⁵⁹ Atividade formulada pelo pesquisador.

- d) Qual o valor da imagem quando $x=10$? E $x=58$?
- e) Qual o valor do domínio para $f(x)=220$?
- f) Esboce o gráfico que representa esta relação. Devo ligar os pontos do gráfico? Por quê?

Atividade 27⁶⁰ – Comissão sobre vendas:

O salário base de um vendedor em uma loja de preço único do Município de Lagoa Seca, PB, é de R\$ 700,00. Para incentivar o crescimento das vendas dos produtos e aumentar seu lucro, o proprietário da loja oferece, aos seus vendedores, uma comissão de R\$ 0,50 por venda de cada produto.

- a) Para cada produto vendido o salário do vendedor é aumentado de quanto?
- b) Se em um mês o vendedor vender 10 produtos, que salário receberá no fim do mês? E se vender 100 produtos? E 200?
- c) Escreva um bilhete ao dono da loja, explicando como o vendedor deve fazer para calcular seu salário mensal.
- d) Maria, uma das vendedoras da loja, precisa faturar R\$ 1000,00 para cobrir umas despesas que aumentaram no mês. Quantos produtos ela deve vender para conseguir este salário?
- e) Como no próximo mês Maria ainda tem despesas extras, precisará de um salário maior para cobri-las. Então, pede ao dono da loja que lhe explique como calcular quantos produtos deve vender para receber o salário de que precisa. Imagine que você seja o dono da loja, escreva um bilhete para Maria explicando como ela deve fazer.
- f) Escreva uma expressão algébrica para esta situação.
- g) Esboce o gráfico desta função.

Atividade 28⁶¹ – O preço de uma pizza pronta entrega:

Uma pizzaria do Município de Lagoa Seca, PB, entrega pizza na cidade. Um consumidor, ao ligar para o estabelecimento visando comprar uma pizza família,

⁶⁰ Retirado e adaptado de Dornelas (2007).

⁶¹ Atividade formulada pelo pesquisador.

que custa R\$ 22,00, pergunta quanto pagará; o vendedor explica que vai depender da distância, pois é cobrado pelo transporte R\$ 0,20 por quilometro transportado.

- a) Explique com suas palavras essa situação.
- b) Qual a expressão algébrica que o transportador utiliza para saber quanto o consumidor deve pagar?
- c) Faça a representação gráfica desta função.
- d) Quais o domínio e o conjunto imagem desta função?

Atividade 29⁶² – Pagamento da mensalidade com desconto:

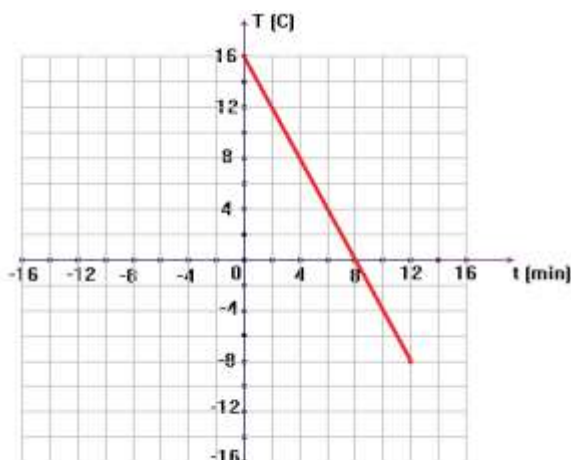
Para incentivar o pagamento adiantado da mensalidade, uma escola no Município de Lagoa Seca, PB, oferece um desconto de R\$ 5,00 para cada dia de antecipação, podendo antecipar no máximo 10 dias. Sabendo que o valor da mensalidade é de R\$ 200,00, responda às seguintes questões:

- a) Qual a expressão algébrica que relaciona o valor y da mensalidade com o número de dias de antecipação do pagamento x ?
- b) Quanto um pai de aluno irá pagar se efetuar o pagamento com 5 dias de antecedência? Quanto no máximo em reais um pai pode economizar?
- c) Quais são os possíveis valores que podemos atribuir a x ?
- d) Faça a representação gráfica desta relação.

⁶² Atividade formulada pelo pesquisador.

Atividade 30⁶³ – Variação da temperatura:

O gráfico abaixo ilustra a variação da temperatura (T), em graus Celsius (°C), e uma chapa de metal em função do tempo (t), em minutos (min).



- No decorrer do tempo, a barra foi aquecida ou resfriada?
- A temperatura da chapa esteve mais tempo positiva ou negativa?
- Determine a representação algébrica desta função para o domínio $0 \leq x \leq 12$ min.
- Em que ponto do gráfico a reta toca o eixo das ordenadas (eixo horizontal)?
O que significa este ponto?

Atividade 31⁶⁴ – Valor da fatura telefônica:

Para calcular o valor da fatura telefônica de certa empresa de telefonia fixa, procede-se da seguinte forma:

- Tem um valor fixo de R\$ 30,00, referente à mensalidade.
- Tem uma parte variável dependendo do número de minutos que exceda 100 minutos mensais. R\$ 0,50 por minuto excedente.

- Complete a tabela:

Minutos consumidos ao mês	Valor pago na conta telefônica
10	
75	
100	
105	

⁶³ Retirada e adaptada de Delgado (2010).

⁶⁴ Retirada e adaptada de Delgado (2010).

200	
300	
	50,00

- b) Represente esta situação em um gráfico.
- c) Se chamarmos de x a quantidade de minutos consumidos e de y o valor a ser pago na conta telefônica, como escreveria uma expressão algébrica para esta relação?

Atividade 32⁶⁵ – Venda de maçãs.

Um comerciante gastou R\$300,00, na compra de um lote de maçãs; como cada maçã será vendida a R\$2,00, ele deseja saber quantas maçãs devem ser vendidas para que haja lucro no final da venda. Observe que o resultado final (receita menos despesa) é dado em função do número x de maçãs vendidas.

- a) Quantas maçãs precisam ser vendidas para que não haja lucro nem prejuízo?
- b) A partir de quantas maçãs vendidas haverá lucro?

Atividade 33 – Associação entre representações:

Na coluna da esquerda estão alguns gráficos e na coluna da direita, a representação algébrica de funções e tabelas; faça a correspondência entre as colunas.

		<input type="checkbox"/> $f(x) = -x - 4$						
		<input type="checkbox"/> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td>-1</td> </tr> </tbody> </table>	x	$f(x)$	4	5	-2	-1
x	$f(x)$							
4	5							
-2	-1							
		<input type="checkbox"/> $f(x) = x - 1$						
		<input type="checkbox"/> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>	x	$f(x)$	3	1	-2	6
x	$f(x)$							
3	1							
-2	6							

⁶⁵ Atividade formulada pelo pesquisador.