UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Limite e Continuidade: Um enfoque acessível ao ensino médio com o auxílio do Geogebra

Jonh Cleidson da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}.Luciana Roze de Freitas

Campina Grande - PB
Agosto/2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UEPB.

S586l SILVA, Jonh Cleidson da.

Limite e Continuidade [manuscrito]: um enfoque acessível ao Ensino Médio com o auxílio do GeoGebra / Jonh Cleidson da Silva. - 2014

94 p. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014

"Orientação: Prof[a]. Dr[a]. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Ensino de matemática. 2. Teorema do Valor Intermediário. 3. Didática. 4. Geogebra. I. Título

21. ed. CDD 515

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Limite e Continuidade: Um enfoque acessível ao Ensino Médio com o auxílio do GeoGebra

por

Jonh Cleidson da Silva †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Bolsista CAPES

Limite e Continuidade: Um enfoque acessível ao Ensino Médio com o auxílio do GeoGebra

por

Jonh Cleidson da Silva

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Claudilene Gomes da Costa
____
Profª. Drª. Claudilene Gomes da Costa - UFPB

Maria Isabelle Silva
____
Profª. Drª. Maria Isabelle Silva - UEPB

Luciana Freitas
____
Profª. Drª. Luciana Roze de Freitas - UEPB
Orientadora

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto/2014

Dedicatória

À minha esposa Amanda Lucena Rosendo de Lima, à minha mãe Josefa da Silva Bigio (in memoriam), ao meu filho João Alves da Silva Neto e ao meu pai João Alves da Silva.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, a Deus pela força nos momentos difíceis durante os anos de curso.

À orientadora Luciana Roze de Freitas, pela orientação, por todo o incentivo nas pesquisas, sua preocupação constante em estar presente em todos os momentos a fim de esclarecer quaisquer dúvidas e, em geral, por toda a formação dada.

À minha querida esposa, Amanda Lucena Rosendo de Lima, pelo companheirismo durante os anos de curso e no processo de construção desta Dissertação, muitas vezes tendo que abrir mão das nossas diversões, diante das demandas exigidas pelo curso.

Ao meu pai, João Alves, pelo aprendizado ao longo dos anos, diante da sua simplicidade.

Ao professor, amigo, conselheiro e irmão Mauricio Gualberto Pelloso pelas inúmeras tardes que ficou a me ajudar na elaboração desta dissertação, ofertando suas grandiosas contribuições, sugestões e encorajamentos.

Ao professor Sidmar Bezerra que durante o primeiro ano do PROFMAT tornou-se meu professor particular, ensinando-me os diversos conteúdos pelos quais senti dificuldade.

Às professoras Aleir Galvão e Cacilda Tenório e aos professores Roberto Nogueira, Menelau Júnior e Veridiano Santos por nunca deixarem de acreditar nessa vitória e me ajudarem a crescer como profissional da educação.

Aos meus coordenadores do CPPEG, Adriana Pereira e Carlos Soares que sempre contribuíram nos momentos de estudos, disponibilizando horários para que eu pudesse desenvolver minhas atividades do PROFMAT.

À minha gestora, Patrícia da Gama, e à gestora adjunta Lourdinha que me liberaram, principalmente na fase final do Mestrado, dando-me condições de concluí-lo.

Aos meus alunos dos terceiros anos 2014 que participaram e se empenharam durante aplicação da proposta.

Aos coordenadores pedagógicos Tuane do Egito e Rodrigo Frutuoso pelo apoio e valorização durante o Mestrado.

Aos professores do PROFMAT pela dedicação e preocupação com o processo de Ensino e Aprendizagem.

Aos colegas que tornaram-se grandes amigos: Herede (o humorista da turma), Felipe (sempre pode melhorar), Maxsuel (o segundo gordo), Raimundo (companheiro do café e de boas conversas), Ronaldo, Josimar (Trukin), Wilson, Uelder, Loana, Weskley e Cícero.

Ao genial Stanley Borges que com sua simplicidade e grande sapiência nos ajudou, consideravelmente, nas disciplinas do PROFMAT.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

O presente trabalho procurou desenvolver uma sequência didática capaz de estreitar os conteúdos de Limites, Continuidade e o Teorema do Valor Intermediário para aplicação em turmas do Ensino Médio. Para tanto, foram construídas propostas didáticas separadas paras estes temas, que foram aplicadas a alunos da terceira série do Ensino Médio, da Escola Nicanor Souto Maior. A análise da aplicação da proposta apontou que a utilização da sequência é viável do ponto de vista didático, com a possível inserção desses conteúdos no Ensino Médio. Quanto às dificuldades para desenvolver as atividades propostas sem o auxílio do GeoGebra, estas foram apontadas principalmente quanto à construção do gráfico, conforme já relatado na literatura. O GeoGebra mostrou-se uma significativa ferramenta para auxiliar na construção de tais conteúdos. Foram propostos, para estudos futuros, projetos de pesquisa que identifiquem atividades matemáticas que possam ser potencializadas com o uso do GeoGebra e pesquisas que possam resultar em novas situações didáticas que podem relacionar de forma interdisciplinares diversas áreas do saber.

Palavras Chaves: GeoGebra. Limite. Continuidade. Teorema do Valor Intermediário.

Abstract

This study sought to develop a teaching sequence capable of narrowing the contents of Limits, Continuity and the Intermediate Value Theorem for use in secundary education classes. For this purpose, didactic separate proposals were built for these themes, which were applied to students of Secondary Education of the Nicanor Souto Maior School. The application analysis of the proposal pointed out that the use of the sequence is viable from a didactic point of view, the possible inclusion of these contents in secundary education. As for the difficulties to develop the proposed activities without the help of GeoGebra, these were identified mainly on the construction of the graph, as has been reported in the literature. The GeoGebra proved to be a significant tool to assist in the construction of such contents. Were proposed for future studies, research projects that identify mathematical activities that may be strengthened with the use of GeoGebra and researches that could results in new teaching situations that may relate in an interdisciplinary way many areas of knowledge.

Keywords: GeoGebra. Limit. Continuity. The Intermediate Value Theorem.

Lista de Figuras

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$ .... Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$ .... Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$ .... Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$ .... Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ .... Conjunto dos números irracionais
$\mathbb{C}$ .... Conjunto dos números complexos
LDB .... Leis de Diretrizes e Base da Educação
PNLEM .... Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
PROFMAT .... Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
TIC's .... Tecnologias de Informação e Comunicação
TVI .... Teorema do valor Intermediário

Um dia você irá olhar para todas as dificuldades que enfrentou e verá que elas foram essenciais, pois a fizeram chegar no topo.
(Zé Ramalho)

Sumário

Introdução

O ensino e o currículo da matemática, abordados no Ensino Médio no Brasil, tem passado por mudanças significativas desde suas primeiras abordagens, no início do século XIX, quando se verifica as primeiras orientações para o ensino de Matemática neste nível de ensino. Verifica-se que tais mudanças estão relacionadas, entre outros fatores, às concepções sobre a aprendizagem, sejam elas do ponto de vista pedagógico ou cognitivo, e aos conteúdos abordados com discussões acerca do currículo e seus objetivos.

Pesquisas recentes, desenvolvidas no próprio programa formatado pelo Ministério da Educação através do PROFMAT, vem se desenvolvendo com a finalidade de propor um estreitamento entre os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral e o Ensino Médio. Tais propostas além de analisarem a viabilidade da inserção, no Ensino Médio, de tópicos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral procuram propor atividades que promovam tal aproximação. Para Pereira [27], a ausência ou evitação de tais conteúdos na Educação Básica pode gerar obstáculos para os anos iniciais do curso superior. Por outro lado, há aqueles estudiosos, tal como Gil [18], que apontam que estes conteúdos possuem um alto grau abstração e por isso estaria distante da realidade desses alunos.

No entanto, estudos realizados por Ávila [4] , Oliveira [24], Dominguini [15] e Molon [23], entre outros apontam que não é apenas necessário, como é possível inserir e relacionar atividades acerca do Cálculo Diferencial e Integral com o cotidiano escolar, sem o exagero da formalização matemática, mas respeitando sua linguagem e propriedades específicas. Molon [23], ressalta em seu estudo a importância das novas tecnologias como um aliado fundamental para uma primeira aproximação do Cálculo Diferencial e Integral com os alunos.

Dentre as diversas possibilidades de conteúdos propostas nesses estudos, verificamos que a compreensão sobre limites, continuidade e o Teorema do Valor Intermediário - TVI, se realizado através de uma abordagem mais simples e acessível aos alunos do Ensino Médio, auxiliado com o uso de um software, como o *GeoGebra*, escolhido para esta pesquisa por ser um software matemático de livre acesso e gratuito, permite o manuseio destes conteúdos sem o peso do formalismo e de forma mais dinâmica e interativa entre o alunos e as novas tecnologias. Tal perspectiva, além de contribuir para a formação intelectual, fornecerá novas ferramentas de compreensão dos fenômenos que podem ser representados através de uma linguagem matemática.

A proposta desenvolvida neste trabalho possibilitou um estudo mais aprofundado acerca do conteúdo de funções, em relação a análise dos limites e continuidade de uma função (comportamento da função em torno de um determinado ponto) e as aplicações do TVI para resolução de problemas que são cotidianos, mas não possuem um modelo básico de resolução, tais como as funções polinomiais de grau maior que dois. Além, de que a utilização do *GeoGebra* torna o estudo de funções mais dinâmico e é pautado numa metodologia que leva o aluno a buscar soluções de forma mais eficiente, através da interação das ferramentas disponibilizadas neste software.

As reflexões acerca das dificuldades encontradas em inserir tais conteúdos no programa de Ensino Médio, apontadas como obstáculos para tal inserção a exemplo do rigor matemático ou falta de uma proposta didática de articulação deste com outros conteúdos - proposta interdisciplinar, foram motivadoras para realização deste trabalho.

Outro fator considerado, como elemento chave para o desenvolvimento deste trabalho, mesmo considerando que a matemática não está para servir a matemática, isto é, não é para preparar os alunos para os cursos de exatas, são os resultados apresentados pelos alunos que iniciam o ensino superior, mais expressivamente nas engenharias, onde se verifica um índice de reprovação alarmante, muitas vezes, justificada pela ausência destes conteúdos na Educação Básica. Garzella[19], após um levantamento dos dados estatísticos acerca da reprovação e evasão na disciplina chega a atingir 77,5%.

Assim, procurou-se verificar como a abordagem em relação ao estudo das funções no ensino médio, desde a introdução do conceito, o esboço gráfico, a obtenção de raízes para aquelas que trazem métodos de obtenção (ou não), poderiam ser enriquecidas com a inserção destes conteúdos. Nesse sentido, procurando responder a demanda que emerge, diante das novas necessidades imposta pelo sociedade e pelo mercado, e tentando promover um estreitamento entre tais conteúdos e os alunos do Ensino Médio é que foram propostas atividades para verificar a viabilidade e como os alunos reagem diante de uma sequência didática planejada para esse fim, que fundamenta-se numa prática construtivista e que, sem manter o rigor matemático, possa garantir uma efetiva compreensão da aplicabilidade de tais conteúdos.

Os objetivos propostos nesse trabalho foram construídos a partir da demanda do estreitamento entre a abordagem de conteúdos, que não fazem parte da matriz curricular do Ensino Médio atualmente por serem considerados abstratos, com uma abordagem didática que aproxime os alunos de tais conhecimentos. Dessa forma, procuramos: i) construir uma proposta metodológica para desenvolver os conteúdos de limites, continuidade e Teorema do Valor Intermediário com e sem o auxílio do *GeoGebra*; e ii)Analisar a sequência didática aplicada aos alunos do Ensino Médio acerca dos conteúdos de Limites, continuidade e Teorema do Valor Intermediário com e sem o auxílio do *GeoGebra*.

Para atender a demanda desse trabalho, organizamos uma estrutura de modo que se possa compreender: i) no primeiro capítulo é apresentada um levantamento histórico que aborda a forma como os conteúdos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral apareceram e saíram do currículo escolar, principalmente na Educação Básica, bem como é tratado esses conteúdos nos livros didáticos; ii) no segundo capítulo é abordado o conceito de limite de uma função, do ponto de vista de sua construção histórica, através dos paradoxos, e sob a ótica dos limites laterais. Ainda neste Capitulo é apresentada uma proposta didática com aplicabilidade para o ensino médio para construção do conceito de limite sem o auxílio de ferramentas tecnológicas; iii) no terceiro capítulo é proposto a análise da continuidade e descontinuidade, de uma função, cujo conceito é construído mediante a ideia dos limites laterais, seguida de situações didáticas para serem abordadas no ensino médio; iv) no quarto capítulo é explorado a interpretação gráfica do Teorema do valor Intermediário, suas aplicabilidades e atividades didáticas para abordagem no ensino médio; v) no quinto capítulo analisamos a influência e a importância das TIC's como recurso didático para o auxílio da construção do conhecimento matemático em sala de aula e como o software adotado, *GeoGebra*, apresenta-se eficiente para desenvolver os tópicos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral; vi) no sexto capítulo é apresentada propostas de sequências didáticas desenvolvidas para abordagem dos tópicos de limite, continuidade e Teorema do Valor Intermediário que foram aplicadas e analisadas posteriormente; vii) no sétimo capítulo apresentamos a análise dos resultados da intervenção e da aplicação da sequência didática proposta no sexto capítulo seguida da conclusão do trabalho.

Capítulo 1

A abordagem de Cálculo Diferencial e Integral no currículo do Ensino Médio: Uma perspectiva histórica

O ensino da matemática vem passando por mudanças significativas ao longo do tempo devido a diversos fatores. Entre eles, podemos destacar: mudanças no currículo adotado, não apenas no Brasil, mas também a nível mundial; mudanças na concepção sobre aprendizagem do ponto de vista cognitivo graças ao desenvolvimento da Psicologia e da Neurociência; e também em virtude das tecnologias desenvolvidas nos últimos anos. Nesse sentido, nos dois subtópicos seguintes faremos uma divisão da perspectiva histórica sobre as principais mudanças ocorridas no ensino do Cálculo Diferencial e Integral, adotando o século XX como um divisor, por considerar que é neste período que foram identificadas as principais mudanças no contexto do ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

1.1 O Currículo de Matemática antes do século XX

Anteriormente ao século XX verifica-se que a disciplina Matemática não apresentava a formatação existente hoje, no que se refere à constituição de um conteúdo programático (currículo proposto/matriz curricular), porém era considerada como elemento importante para formação do indivíduo e estava sujeita, principalmente, aos tutores/professores que lecionavam esta disciplina, talvez esse fato possa estar relacionado à pouca produção de conhecimento matemático no Brasil neste período.

No Brasil, a introdução ao Cálculo Diferencial e Integral ocorreu, pela primeira vez, no ano de 1891 (Busse [10]), junto com os conteúdos de Álgebra Superior e Geometria Descritiva, talvez influenciado pelas ideias de Augusto Comte em 1890 que, entre outras coisas, introduziria uma formação científica em substituição à formação literária existente, que era baseada na promoção dos alunos não mais por disciplina, mas por série, e pelas reformas ocorridas na França, a partir do ano de 1801, quando uma nova mudança no processo de estruturação das escolas é adotada. Costa [12], ressalta que nessa nova estruturação as escolas secundárias de Paris passam a ter duração de sete anos, dos quais os três primeiros são dedicados a ler e escrever, aritmética e latim e os quatro últimos anos, dois ramos: (a) humanidades, retórica e filosofia para as carreiras civis; (b) matemáticas, astronomia, física, química, e fortificação e artilharia do campo para as carreiras militares, com Inglês e Alemão em ambos os ramos.

Outra mudança significativa verificada, aponta Costa [12], é que esses colégios conseguiram inovar em aspectos como o espaço onde funcionava os locais de instrução que antes eram dispersos, mantidos pelos professores que trabalhavam de forma independente e agora nos colégios seria um local único, com diversas salas de aula, a divisão das faixas etárias e das matérias. Haidar (2008, p.21, Apud Costa [12]), identificou que no Brasil:

> *o currículo, de acordo com o regulamento de 31 de dezembro de 1838 do Colégio Pedro II introduziria, a exemplo dos colégios franceses, os estudos simultâneos e seriado, organizados em um curso regular de 6 a 8 anos. Ensinar-se-iam no novo colégio as línguas latina, grega, francesa e inglesa, a gramática nacional e a retórica, a geografia e a história, as ciências naturais, as matemáticas, a música vocal e o desenho.*

É conhecido que no início do século XIX, no Brasil, o currículo de matemática expressava uma tendência pedagógica tradicional em virtude das heranças pedagógicas introduzidas aqui pelos jesuítas e suas metodologias. Mesquida [22], ressalta que "Companhia de Jesus tudo era baseado em regras, disciplina, ordem, e o Ratio Studiorum[1]apontava constantemente para a observância das normas de uma prática pedagógica eficiente, tanto na formação de professores quanto na sua ação docente", ou seja, o ensino era pautado num sistema de práticas pedagógicas tradicionais em que se prevalecia, entre outros elementos, o caráter memorístico, livresco, retórico e repetitivo estimulados por práticas pedagógicas da recompensa ou do castigo.

Segundo Santos[30]: "o programa de Matemática sofreu poucas alterações de 1837 até 1932 e não era ensinada em todas os anos de escolaridade. De 1838 até o fim do império em 1889, o ensino de nível médio incluía o estudo da Aritmética, Álgebra, Geometria e a Trigonometria". Para Costa[12] o Brasil caminhava descompassado

[1]Compunha-se de trinta conjuntos de regras, num detalhado manual que indicava a responsabilidade, desempenho, subordinação e o tipo de relacionamento dos membros da hierarquia, dos professores e dos alunos; tratava também de organização e administração escolar. .

com as propostas educacionais, a ponto de não existir incentivo ou orientação para os professores e estes escolhiam os horários e os conteúdos a serem ensinados para os alunos, que se matriculavam e se retiravam quando quisessem. Assim, os conteúdos matemáticos abordados nesse período podem ser observados no quadro seguinte:

QUADRO 01

Principais Conteúdos Matemáticos abordados antes do século XX

Aritmética	Operações até os números complexos, teoria das razões, proporções, logaritmos, Matemática Comercial (regra de três, juros simples e juros compostos, desconto de companhia e anuidades), sistema métrico.
Álgebra	Até teoria geral das equações de 2º grau.
Geometria	Áreas e volumes, estudo de polígonos, círculo e poliedros, igualdade e semelhança, posições relativas entre retas e planos.
Trigonometria	Dedução de fórmulas, construção das tábuas, teoria dos triângulos.

Com a adoção de uma orientação, em 1891, para as escolas, agora seriadas, havia quem não concordasse com a inserção, no terceiro ano do ensino médio, da cadeira de Cálculo Diferencial e Integral. Tal postura culminaria em 1900 com a retirada dos programas oficiais do Cálculo Diferencial e Integral. Roxo apontou que: "o estudo do Cálculo Diferencial e Integral não tinha ligação com o resto do curso, onde não era desenvolvida a ideia de função, e foi feito de um ponto de vista excessivamente formalístico, tornou-se inútil e contraproducente" com proposta de educação que se projetava neste período.

1.2 O Currículo de Matemática nos séculos XX e XXI

Verifica-se que as mudanças ocorridas no Brasil anteriormente ao século XX, em relação ao ensino de Matemática e do Cálculo Diferencial e Integral, não foram significativas e não eram formalizadas, como se verifica historicamente, em currículos. Porém, é em 1908 que ocorreu, em Roma, no IV Congresso Internacional de Matemática, o primeiro movimento internacional para reforma do currículo da matemática. Desse encontro emergiu a criação do ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) ou IMUK (Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission) cuja finalidade era fomentar resultados para uma reforma da Educação Matemática. Deste congresso, diversos trabalhos mostraram a muitos países, inclusive ao Brasil, a necessidade da reformulação tanto do currículo, quanto da abordagem de determinados conteúdos (Costa [12]).

Na década de 1920, os professores do Colégio Pedro II, solicitaram uma mudança na organização do ensino secundário em seu sistema de seriação. Tal mudança foi apreciada pelo Conselho Nacional de Ensino e homologada em 26 de julho de 1928 tornando-se legal pelo decreto nº 18.564 de 15 de janeiro de 1929 e regulada sua aplicação pelo Aviso do Ministro da Justiça e encaminhado ao Diretor Geral do Departamento Nacional de Ensino em 29 de janeiro de 1929.

Em 1931 a Reforma denominada Francisco Campos, tentaria pela primeira vez uma estruturação de todo o curso secundário nacional e a introdução dos princípios modernizadores da educação. Com esta reforma, ficariam estabelecidos que o currículo teria, entre outros: formato seriado; a frequência seria obrigatória; composição em dois ciclos - um fundamental e outro complementar. Porém, é com a reforma Capanema, em 1942, que é introduzido conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral no currículo escolar oficialmente até 1961, quando novamente é retirado em virtude da influência do movimento denominado de Matemática Moderna que considerava estes conteúdos como inadequados para o Ensino Médio (Busse [10]).

No período anterior a reforma Capanema os conteúdos abordados não apresentavam uma variação muito grande entre a seleção dos conteúdos nos programas de ensino do intervalo de tempo delimitado, mas apenas pequenas mudanças e somente dentro de cada uma das divisões dos ramos em que a Matemática era proposta Beltrame (2000, apud Dassie [14]). No quadro 02 é possível verificar os conteúdos abordados nesse intervalo 1900 – 1942.

QUADRO 02

Conteúdos Matemáticos abordados no período de 1900 a 1942

Aritmética	Número: primeira noção de número, unidade, quantidade, grandeza, números inteiros; Sistema de numeração: numeração falada e escrita, base; Adição, subtração, multiplicação e divisão: definição e teoremas; Divisibilidade: definições e teoremas, divisibilidade por 10^m, 2^m, 5^m, 9, 3 e 11; Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: definição e teoremas; Números primos: definição, decomposição de um número em fatores primos, crivo, divisores de um número, teoremas; Frações ordinárias: definição e termos, operações, número misto e frações impróprias; Frações decimais e números decimais: definição e notação, operações, conversões, dízimas; Sistema métrico decimal, medidas de grandezas, sistema monetário, números complexos; Quadrado, cubo e raízes: definições e teoremas, números incomensuráveis, extração de raízes com aproximação; Razões e proporções: definições e teoremas, números proporcionais, divisão proporcional, regra de três, regra de sociedade; Juros, capital, taxas, descontos, misturas e ligas, cambio; Cálculo aritmético dos radicais.
Álgebra	Definições preliminares, sinais, termos; Expressões algébricas: valor numérico e operações; Números negativos; Monômios e polinômios: adição, subtração, multiplicação, divisão; Frações algébricas: operações, denominadores irracionais; Equações do 1º grau: resolução, discussão, problemas; Sistemas do 1º grau: métodos de redução ao mesmo coeficiente, substituição e comparação, método de Bézout, regra de Crammer, discussão; Desigualdades do 1º grau; Equações do 2º grau: resolução, discussão, problemas, equações biquadradas; Sistemas do 2º grau; Progressões aritméticas e geométricas; Logaritmos; Equações exponenciais; Juros compostos e anuidades.

Geometria Plana	Definições preliminares, reta e plano; Ângulos, retas perpendiculares e oblíquas e paralelas; Triângulos: propriedades e casos de igualdade; Polígonos: definições, soma dos ângulos internos e externos; Quadriláteros: definições e propriedades; Círculo e Circunferência: definições e teoremas, cordas, arcos, ângulos, reta tangente, Quadriláteros inscritíveis; Polígonos regulares: definições e teoremas, cálculo de Pi, Figuras semelhantes, Polígonos semelhantes; Triângulos semelhantes, Relações Métricas no triangulo; Áreas de figuras planas.
Geometria Espacial	Posições relativas entre retas e planos: diversos casos e teoremas; Ângulos diedros e poliedros; Poliedros: definições, poliedros semelhantes; Prisma e pirâmide: volume e superfície lateral; Corpos redondos: definições, sólidos de revolução; Cilindro, cone e esfera: volumes e superfície lateral.
Trigonometria	Linhas trigonométricas: definições e propriedades; Redução ao primeiro quadrante; Relações fundamentais: fórmulas; Relações para soma, subtração, multiplicação e divisão de dois arcos; Taboas trigonométricas: teoremas e construção, taboa de Callet; Resolução de triângulos: triângulos retângulos e triângulos quaisquer.

No período considerado, Dassie [14] elenca os livros que eram adotados:

1. *Aritmética – F.I.C. (1919)*
2. *Lições de Aritmética – Euclides Roxo (1923 a 1928)*
3. *Questões de Aritmética – Cecil Thiré (1926 a 1928)*
4. *Exercícios de Aritmética – Henrique Costa, Euclides Roxo e O. Castro (1926 a 1928)*
5. *Álgebra Elementar – Serrasqueiro (1923 a 1928)*
6. *Lições de Álgebra – Joaquim de Almeida Lisboa (1926 a 1928)*
7. *Exercícios de Álgebra – Henrique Costa, Euclides Roxo e O. Castro (1926 a 1928)*
8. *Exercícios de Álgebra – Cecil Thiré (1928)*

9. *Elementos de Geometria – F.I.C. (1923 a 1928)*

10. *Apontamentos de Geometria – Ferreira de Abreu. (1926)*

11. *Exercícios de Geometria – Henrique Costa, Euclides Roxo e O. Castro. (1926 a 1928)*

12. *Exercícios de Trigonometria – Henrique Costa, Euclides Roxo e O. Castro. (1928)*

13. *Trigonometria – F.I.C. (1923 a 1928)*

14. *Trigonometria Elementar – Arthur Thiré (1923 a 1928)*

Entretanto, a proposta que tinha como anseio a inovação, não obteve o resultado esperado devido às resistências que passou para ser implantada, por parte dos professores que seguravam-se no fato de que o material didático não era tão fácil de ser encontrado. Os professores, em sua maioria, continuavam a trabalhar os conteúdos de forma desordenada, isto é, em relação à linearidade dos conteúdos.

Através da Portaria Ministerial nº 1045 de 1951, o Ministério da Educação permitiu uma abertura para que os governos estaduais e territoriais elaborassem seus próprios programas de ensino, obedecendo a um programa mínimo de conteúdos e instruções metodológicas.

Mas, é em 1961, que a estrutura da nossa escola muda e passa a ser de quatro graus, assim denominados: primário, ginasial, colegial e superior. Essa mudança se deve a Lei de Diretrizes e Bases, que conseguiu flexibilizar o currículo escolar e extinguir o Cálculo da escola secundária, permanecendo ainda em algumas escolas isoladas, situação que até hoje sobrevive. Porém, é apenas em 1971, com a publicação da segunda *LDB*, que pela primeira vez, percebeu-se a necessidade de uma base curricular comum.

Atualmente, o currículo do ensino médio é estruturado conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's). Dessa forma, assegurando ao aluno a possibilidade de ampliar e aprofundar os conhecimentos nas diversas áreas do conhecimento, neste caso, a matemática com as outras áreas. Quanto aos objetivos, os PCN's (BRASIL [9]) trazem que: "os estudantes nessa área devem levar em conta que a Matemática busca dar conta de aspectos do real e que é instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências", enquanto as Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM (BRASIL [9]), sugerem que os alunos concluam o Ensino Médio saibam "usar Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento, compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; caibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento cientifico e tecnológico"

1.2.1 A abordagem do conceito de limites nos livros didáticos

Nos últimos anos vêm se discutindo a inserção dos limites no Ensino Médio, onde alguns livros didáticos da educação básica e que estão no Programa Nacional do Livro do Ensino Médio (PNLEM)[2] já trazem esse conteúdo, mas não o relacionam com situações em que é possível ao aluno perceber as suas aplicabilidades no seu cotidiano. Busse [10] verificou que estes conteúdos não são ensinados sob o pretexto de serem difíceis e impróprios a esse segmento da educação, devendo ficar restritos ao ensino superior. Assim sendo, o Cálculo faz parte do livro didático, mas não do currículo do Ensino Médio.

Conforme podemos verificar no quadro a seguir, onde foram analisadas 5 coleções do ensino médio cujo objetivo era o de verificar quais traziam o conteúdo de relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral para este nível de educação. Distribuímos os resultados nos itens a seguir:

QUADRO 03

Análise dos livros didáticos sobre a abordagem de funções, limite e TVI

Autor/Ano	Conteúdo	Abordagem
Barreto Filho/1998	Função	Apresenta abordagem histórica, utiliza-se de gráficos e uma linguagem formal.
	Limite	Não aborda
	TVI	Não aborda
Dante/2013	Função	Abordagem através da relação binária, utiliza-se de gráficos com o auxílio de tabelas.
	Limite	Não aborda
	TVI	Não aborda
Giovanni/2000	Função	Aborda o conteúdo a partir da linguagem gráfica e a exposição dos elementos do produto cartesiano.
	Limite	Não aborda
	TVI	Não aborda
Paiva/2009	Função	Introduz o conceito a partir da relação biunívoca entre grandezas do cotidiano.
	Limite	Não aborda
	TVI	Apesar de não abordar, traz exemplos em que é visualmente possível identificar, pela linguagem gráfica, a existência de raízes num dado intervalo.
Panadés/2005	Função	É introduzido através da relação biunívoca, observadas em tabelas e gráficos.
	Limite	Não aborda
	TVI	Não aborda, mas a obtenção de raízes ele traz apenas pelos métodos usuais.
Souza/2013	Função	O conteúdo é introduzido através da relação biunívoca, observadas em tabelas e gráficos.
	Limite	Não aborda
	TVI	Não aborda

[2] Implantado em 2004, pela Resolução nº 38 do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), prevê a universalização de livros didáticos para os alunos do ensino médio público de todo o país.

De acordo com o quadro 03, verifica-se que das coleções elencadas acima, constatamos que nenhuma delas apresentam o conteúdo de Limites ou do Teorema do Valor Intermediário e nem tão pouco relacionam estes ao conteúdo de funções. Ao passo de a introdução destes conteúdos poderia promover, no aluno da educação básica, uma visão com aplicabilidades e possibilidade de um estudo mais detalhado sobre as funções.

Nesta perspectiva, tomamos como base o currículo de Matemática das Escolas de Referência em Ensino Médio (EREM)[3] da rede estadual de Pernambuco, onde destacamos alguns conteúdos da 1ª série do ensino médio e que são distribuídos em bimestres, conforme o quadro a seguir:

QUADRO 04

CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DAS EREM

1° Bimestre	• Construir e/ou analisar gráficos associados a uma situação do mundo natural ou social; • Identificar o domínio de validade e situações de continuidade e descontinuidade; • Identificar crescimento e decrescimento pela análise de gráficos de situações realísticas; • Reconhecer função como modelo matemático para o estudo das variações entre grandezas do mundo natural ou social.
2° Bimestre	• Reconhecer a representação algébrica e a representação gráfica de uma função afim; • Dominar as diferentes formas de representação de uma função e identificar as relações entre elas; • Operar com funções e sua classificação, de acordo com seu comportamento; • Resolver e elaborar problema envolvendo função afim; • Relacionar uma sequência numérica com crescimento linear a uma função de domínio discreto; • Reconhecer o zero, o coeficiente linear e o coeficiente angular de uma função afim no plano cartesiano; • Reconhecer as transformações sofridas pela reta no plano cartesiano em função da variação dos coeficientes; • Associar duas retas no plano cartesiano à representação de um sistema de duas equações de primeiro grau e duas incógnitas.
3° Bimestre	• Resolver sistema de duas equações de primeiro grau e duas incógnitas por escalonamento; • Resolver sistema de três equações de primeiro grau e três incógnitas por escalonamento; • Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações de segundo grau; • Determinar as raízes de uma equação do segundo grau por fatoração; • Determinar as raízes de uma equação do segundo grau pelo método de completar quadrados; • Reconhecer a representação algébrica e a representação gráfica de uma função quadrática, associando a curva a uma parábola; • Reconhecer, na representação gráfica da função do segundo grau, elementos como zeros, intersecção com o eixo das ordenadas, eixo de simetria, concavidade e pontos de máximo/mínimo;
4° Bimestre	• Resolver e elaborar problemas envolvendo função definida por mais de uma sentença polinomial do primeiro grau.

Figura 1.1: *Fonte: SEE/PE - Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco, 2013*

[3]Oferecem jornada de nove aulas diárias de segunda a quinta-feira e cinco aulas na sexta-feira, totalizando quarenta e uma aulas semanais em regime integral)

Capítulo 2

O limite de uma função

A ideia sobre o limite de uma função vem desde os antigos e foi sistematizada com o trabalho de diversos matemáticos entre eles Leibniz, Newton e D'Alembert. Sua inserção no currículo da matemática passou por diversas fases conforme será descrito posteriormente. Porém, é a sua abordagem no ensino médio que torna de forma mais efetiva a compreensão do estudo das funções.

2.1 Limite de uma Função

2.1.1 A ideia do *Limite*: Um contexto histórico

A ideia inicial sobre o conceito de limite é datada por volta de 450 a.C., mediante os paradoxos de Zenão de Eléia, seguido por Eudoxo de Cnido (século IV a.C.) e, depois, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) que se utilizavam do método da exaustão para calcular a área ou o volume de uma região. Tal método consistia em:

(i) Inscrever uma sequência infinita de figuras de áreas (ou volumes, no caso dos sólidos);

(ii) Somar as áreas (ou os volumes) dessas figuras.

(iii) Esta soma tenderia à área (ou volume) da região

Dessa forma, era possível perceber que o valor obtido *tendia* à área (ou volume da região). É justamente na expressão *noção de tender*[1] que está implícito o conceito de limite.

Porém, é durante o século XVII que vários matemáticos desenvolveram métodos e técnicas que se utilizavam de argumentos existentes na álgebra para determinar

[1]Segundo o Dicionário da Língua Portuguesa, tender pode ser: Apresentar tendência, inclinação ou disposição para algo.

equações de retas tangentes a determinadas curvas. Em cada um desses métodos o conceito de limite surgia, mas por enquanto, como um conceito desconhecido. Conforme Hefez et al [1]:

> *Isaac Newton (1641-1727), em Principia Mathematica, foi o primeiro a reconhecer, em certo sentido, a necessidade do limite. No início do Livro I do Princípia, ele tenta dar uma formulação precisa para o conceito de limite.*

Considerado um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que juntamente com Newton deu o tratamento do cálculo de áreas por meio da uniformização do método de exaustão, onde fazia uso da noção de somas de séries.

Todavia, Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), parece ter sido um dos primeiros matemáticos a perceber a necessidade sobre o estudo de limites, antes de derivadas, conforme cita Hefez[2]:

> *...reconheceu a centralidade do limite no Cálculo e afirmou que a definição apropriada do conceito de derivada requer primeiramente a compreensão de limite para o qual propôs uma definição.*

Em 1812, Gauss já tinha dado um tratamento para as noções de convergência e séries:

> *...deu o primeiro tratamento rigoroso para a noção de convergência de sequências e séries, ao realizar o estudo da série hipergeométrica, embora não utilizasse a terminologia de limite.*

Na primeira metade do século XIX, Cauchy formula as noções modernas de Limite, Continuidade e Convergência de Séries, determinando uma nova fase para o tratamento da Análise Moderna, mediante os resultados que obteve.

Ainda no século XIX, a Teoria das funções analíticas é desenvolvida utilizando-se das ideias de convergência graças a Abel, Weierstrass, Riemann e outros.

Mesmo sendo considerado um conceito fundamental, ele levou cerca de dois mil anos para finalmente ser definido com rigor pelos matemáticos do século XIX, conforme afirma Hefez [2].

2.1.2 Dois Paradoxos famosos

Com base na ideia de *uma verdade possível*, os paradoxos[2] que veremos a seguir passaram muitos anos aceitos como verdades, pois não se tinha conhecimento daquilo

[2]Declaração ou proposição que se parece autocontradizer mas que na realidade expressa uma verdade possível. Fonte: Wikidicionário - O dicionário da internet. Acessado em 24/7/2014

que, anos mais tarde, seria chamado de *Limites* . O desconhecimento dos limites, no passado, levou a vários paradoxos, sendo dois mais famosos o do atleta e o de Aquiles e a tartaruga, que serão descritos a seguir:

1º) O Paradoxo de Zenão

Um dos mais antigos e que se tem notícia é o paradoxo de Zenão de Eléia, com aproximadamente 2450 anos. Cujo problema é proposto por Zenão conforme descrito Hefez [1]:

> *Imagine que um atleta deva correr, em linha reta, de um ponto a outro distando 1km. Quando o atleta chegar na metade do caminho, ainda faltará 0,5 km para chegar ao seu destino. Quando ele percorrer a metade dessa metade do caminho, ainda faltará 0,25 km e quando percorrer a metade dessa distância ainda faltará 0,125 km e assim, sucessivamente.*

Repetindo-se esse raciocínio, sem a necessidade de um número de vezes determinado, Zenão afirmava que o atleta nunca chegaria ao destino, pois independentemente da distância percorrida, sempre restaria algo a ser percorrido.

O paradoxo de Zenão era verdadeiro, para a época, pois não era levado em conta o fator tempo, abaixo a qualquer movimento, e o fato de que, ao somar sucessivamente as distâncias percorridas,

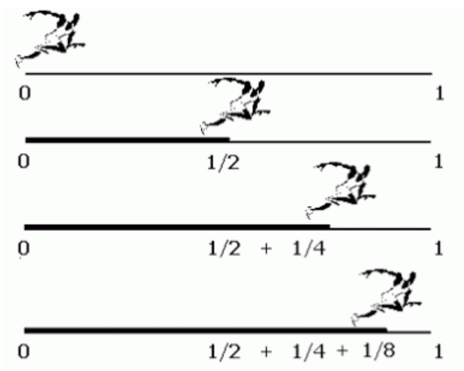


Figura 2.1: *Paradoxo do corredor*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

O resultado será limitado por 1 e dele se aproxima o quanto quisermos. E é a partir das ideias intuitivas de estar tão próximo quanto se quiser que chegamos ao conceito de limite.

2º) O Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga

Neste paradoxo, Zenão considerava a questão relativa do movimento de dois corpos, conforme Hefez [2]:

> *Aquiles nunca pode alcançar a tartaruga; porque na altura em que atinge o ponto donde a tartaruga partiu, ela ter-se-á deslocado para outro ponto; na altura em que alcança esse segundo ponto, ela ter-se-á deslocado de novo; e assim sucessivamente,* ad infinitum.

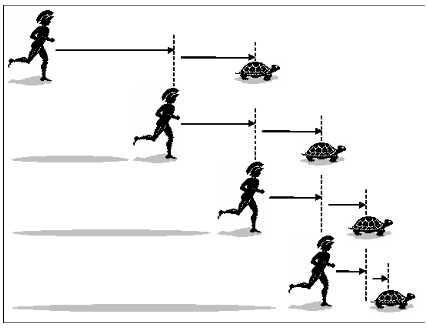


Figura 2.2: *Aquiles e a tartaruga*

Observe que a distância entre o atleta a a tartaruga se tornará tão próxima de zero quanto ele quiser. Para isso, basta repetir os espaços percorridos, acima descritos, uma quantidade de vezes suficientemente grande.

Deste modo, numa corrida, quem perseguia nunca poderia alcançar quem estava sendo perseguido, mesmo que fosse mais rápido que este. A teoria do espaço que está aqui implícita é a que o supõe infinitamente divisível.

2.1.3 A definição de limite de uma função

A principal intenção desta pesquisa é levar ao Ensino Médio a ideia de Limite a partir dos limites laterais para uma função e verificar a existência dele ou não, mediante as aproximações (pela esquerda e pela direita), o comportamento da imagem da função acerca dessas aproximações e a sua continuidade. No entanto, faz-se necessário apresentar a definição de limites, mesmo que ela não seja o nosso foco da pesquisa e nem tão pouco para o aluno da educação básica.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f(x) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X'$ um ponto de acumulação[3] do conjunto X, daí segue a definição:

[3] Dizemos que um número real a é um ponto de acumulação de um subconjunto X' da reta real se qualquer intervalo aberto contendo a contém, necessariamente, um elemento do subconjunto X' o qual é diferente de a.

Definição 2.1 *Diz-se que o número real L é limite de f(x), quando x tende para a, e escrevemos* $\lim_{x \to a} f(x) = L$*, quando para todo* $\epsilon > 0$ *dado arbitrariamente, pode-se obter* $\delta > 0$ *tal que se tem* $|f(x) - L| < \epsilon$ *sempre que* $x \in X$ *e* $0 < |x - a| < \delta$.

Observação: A restrição $0 < |x - a|$ significa $x \neq a$. Daí segue que, para o limite $\lim_{x \to a} f(x) = L$ não é permitido à variável x assumir o valor a. Em consequência disso, temos que o valor $f(a)$ não tem importância alguma, pois estamos preocupados é com o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a e não o que ocorre com f quando $x = a$.
Diante deste formalismo, um leitor poderia indagar o seguinte:

1) *Mas o que realmente significa* $|f(x) - L| < \epsilon$?
Normalmente, o valor absoluto de uma diferença é utilizado para indicar a distância das quantidades que são subtraídas. Da mesma forma que $|f(x) - L| < \epsilon$ mostra a distância entre $f(x)$ e um termo constante L, isto é, a função $f(x)$ e o limite L de que ela se aproxima estão a uma distância fixa ϵ um do outro. Sendo esta distância $|f(x) - L|$ menor do que ϵ.

2) *Geometricamente, o que significa* $0 < |x - a| < \delta$?
Essa expressão também representa uma distância, onde essa distância entre x e a é menor do que um termo constante, aqui denominado δ e que é positivo.

Introduziremos o conceito no Ensino Médio por meio das ideias dos limites laterais de uma função, em relação às situações de se aproximar tanto quanto e tender a determinado valor. Serão apresentadas duas situações problemas de partida. A partir disso faremos conjecturas acerca dos exemplos, analisaremos os gráficos gerados pelas situações e, ao final, tentaremos evidenciar que a inserção do conteúdo de Limite no Ensino Médio é uma opção viável e que pode facilitar o estudo de Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior e, assim, tentar reduzir os altos índices de reprovação.

2.1.4 Os limites laterais

Em algumas situações, o limite de uma determinada função, quando x tende a um número a, pode não existir, mas a função pode tender a um certo número ℓ_1 que, neste caso, não dependerá da sequência escolhida quando x tende a a pela esquerda, ou tender a um certo número ℓ_2 quando x tende a a pela direita, assim: *poderá não existir um dos números ou existirem e serem distintos.*

Como exemplo de atividade para o ensino médio, poderemos criar situações que levem os alunos a investigar o "*comportamento*"das funções em relação a um número específico e a sua representação gráfica. Vejamos, em cada item a seguir, a representação gráfica:

1)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 2x, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Solução:

Considere o gráfico da função:

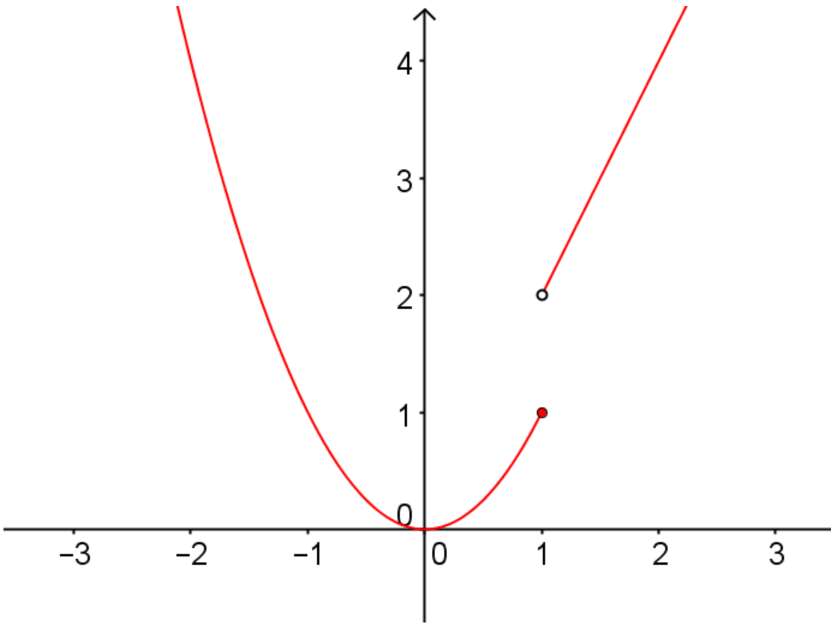


Figura 2.3: *Gráfico da função $f(x)$*

FONTE: Criado pelo próprio autor e com o auxílio do *GeoGebra*.

Conclusão: A partir da visualização do gráfico, percebemos que há uma interrupção (uma quebra) na linha. Verificamos então que a função não é contínua no ponto x = 1, devido a esta "quebra"em seu gráfico e podemos perceber que o limite desta função não existe.

2)

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se} \quad x \geqslant 1 \\ 2x, & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

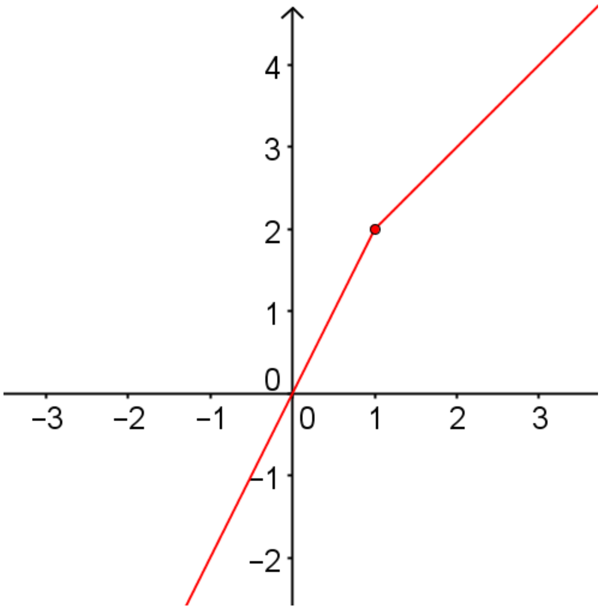


Figura 2.4: *Gráfico da função $g(x)$*

FONTE: Criado pelo próprio autor e com o auxílio do *GeoGebra*.

Observe que **não** há qualquer interrupção no gráfico e o limite da função é 2.

3)

$$h(x) = \begin{cases} x-2, & \text{se} \quad x > 1 \\ 3, & \text{se} \quad x = 1 \\ 4-x, & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

Solução:

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém maiores que 1 (à direita de 1), obtemos:

x	2,000	1,500	1,250	1,100	1,010	1,001
h(x)	0,000	-0,500	-0,750	-0,900	-0,990	-0,999

Atribuindo, agora, a x valores próximos de 1, porém menores que 1 (à esquerda de 1), obtemos:

x	0,000	0,500	0,750	0,900	0,990	0,999
h(x)	4,000	3,500	3,250	3,100	3,010	3,001

Segue que:

Quando aproximamos x de 1 pela direita, os valores da função ficam próximos de - 1 e quando aproximamos de 1 por valores menores que 1, pela esquerda, os valores de $h(x)$ aproximam-se de 3.

Vejamos o gráfico:

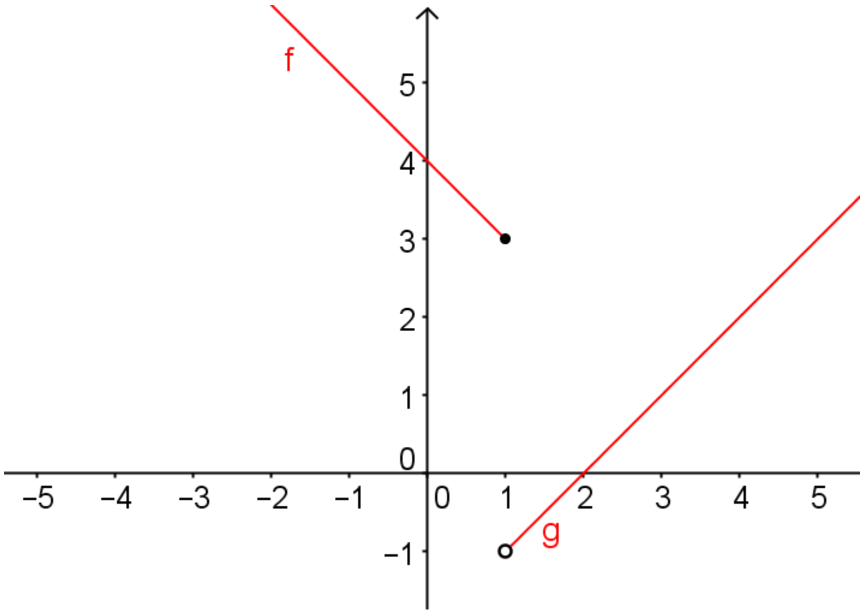


Figura 2.5: *Gráfico da função* $h(x)$

Intuitivamente, podemos definir os limites laterais como:

Definição 2.2 *Escrevemos* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ *e dizemos que o limite esquerdo de* $f(x)$ *quando* x *tende a* **a** *pela esquerda é L se pudermos tornar os valores de f(x) arbitrariamente próximos de L, tomando-se x suficientemente próximo de* **a***, porém menor do que* **a***. Analogamente, para x maior que* **a***, vamos obter o limite direito de* $f(x)$*, quando x tende a* **a** *como igual a L e escrevemos* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

Dessa forma, sendo os limites laterais diferentes, concluímos que o limite da função não existe.

2.1.5 Aplicações didáticas de Limite no Ensino Médio

No Brasil, em 1961, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, introduz uma nova estrutura para a escola, dividindo em quatro graus escolares o sistema educacional brasileiro: primário, ginasial, colegial e superior. Entretanto, esta mesma lei permitiu a flexibilização do currículo escolar e algumas instituições de ensino extinguiram o ensino do Cálculo Diferencial e Integral na escola secundária. Algumas suprimiram em sua totalidade enquanto em outras este conteúdo ainda é vivenciado, visto que elas têm autonomia para tal.

A supressão desse conteúdo limita a compreensão do conceito de função, como por exemplo, o estudo do seu domínio, esboço do gráfico e a relação biunívoca (injetividade, sobrejetividade e bijetividade). Por outro lado, a inserção desse conteúdo pode promover entre outros a compreensão das assíntotas, o comportamento das funções quando o seu domínio tende ao infinito ou ainda aquelas com restrições em seu domínio.

Tais considerações sobre a importância do limite para uma compreensão ampliada do conceito de função e diante da rejeição apresentada pelos alunos em relação ao formalismo da matemática que, em muitas vezes, é apontada como o maior empecilho para a sua compreensão é que propomos a introdução da ideia de Limite no Ensino Médio, mas sem o formalismo e rigor matemático exigidos no Ensino Superior. Enfim, sem todos os "ϵ"'s e "δ"'s ocorrentes na definição.

Tal ideia, para a introdução do conceito de limite, será proposta através de uma análise visual e comportamental das experiências que serão sugeridas, apoiando-se sobre o conhecimento algébrico mínimo necessário: modelar, através de uma expressão, uma situação cotidiana; determinar o domínio e a imagem de funções; representação gráfica da função modelada.

A proposta construída utilizou o conteúdo de funções, vivenciado na 1ª série do Ensino Médio e o conteúdo abordado, em Física, na 3ª série do Ensino Médio (a *Lei de Coulomb*), com o objetivo de justificar a possibilidade de articulação entre as áreas do conhecimento.

Atividade 01

Durante a aplicação de um programa municipal de capacitação para professores de matemática, da cidade de Caruaru - PE, os professores formadores da secretaria municipal de educação analisaram e verificaram que os custos para a aplicação do programa seriam, em milhares de reais, dado pela função $p(x) = \dfrac{2(x^2 - 100)}{x - 10}$*, com* $0 \leq x \leq 100$*, onde* x *representa o percentual de professores participantes..*

(i) *Complete as tabelas a seguir:*

Pela esquerda:

x	$9,0$	$9,5$	$9,7$	$9,8$	$9,9$	$9,99$
$p(x)$						

Pela direita:

x	$11,0$	$10,7$	$10,5$	$10,2$	$10,1$	$10,01$
$p(x)$						

(ii) *Verifique o que acontece com o valor de* $p(x)$ *à medida que* x *se aproxima de* 10% *de professores, tanto pela esquerda quanto pela direita;*

(iii) *Esboce graficamente a situação descrita, mediante os dados obtidos nas tabelas de aproximações do item* (i).

(iv) *Considerando que o limite de uma função existe quando os valores à direita e a esquerda, de um determinado valor* x *do domínio se, e somente se, tendem a um mesmo número* $x = c$. *O que se pode afirmar em relação ao limite da função quando* x *tende a* 10? *O limite existe? Em caso afirmativo, justifique a sua resposta.*

Nesta atividade, construiremos a ideia de limite a partir da análise das tabelas e do gráfico com valores para x se aproximando, tanto quanto quisermos, de um determinado número $x = c$, levando em consideração a ideia de esquerda e direita do número x.

Procedimento didático:

(i) *Para o desenvolvimento da atividade, utilizaremos tabelas de aproximações, conforme representaremos a seguir:*
Atribuindo a x valores tão próximos de 10 quanto quisermos, porém menores:

x	$9,0$	$9,5$	$9,7$	$9,8$	$9,9$	$9,99$
$p(x)$						

(ii) Por outro lado, atribuindo a x valores tão próximos de 10 quanto quisermos, porém maiores, teremos:

x	$11,0$	$10,7$	$10,5$	$10,2$	$10,1$	$10,01$
$p(x)$						

(iii) Observe que, nos dois casos, $p(x)$ *se aproxima de 40 o quanto desejarmos, bastando para isso aproximar x de 10.*

Graficamente teremos:

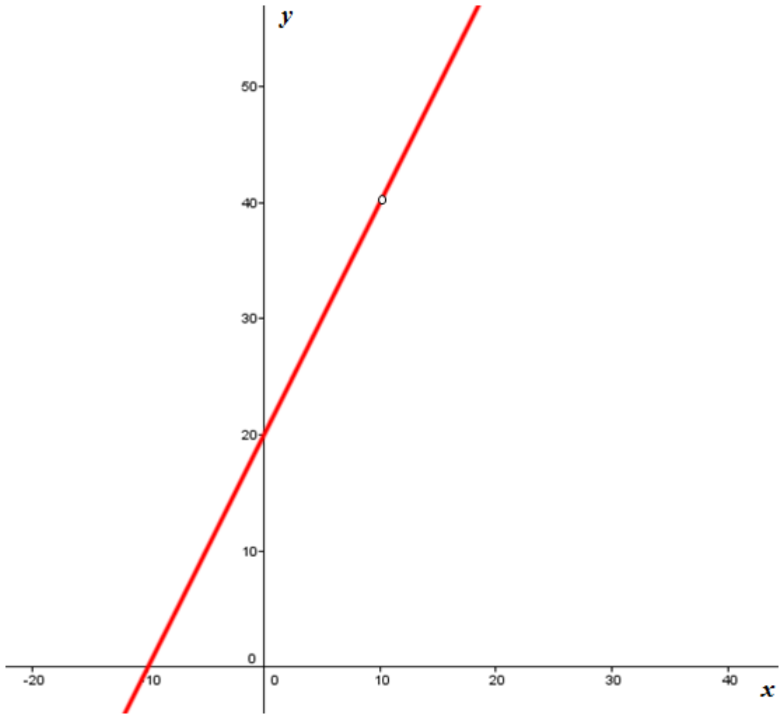


Figura 2.6: *Gráfico da função* $p(x) = \dfrac{2(x^2 - 100)}{x - 10}$

Fonte: *Criado pelo próprio autor criado com o auxílio do GeoGebra*

Atividade 02

Em Física, força elétrica é utilizado para explicar o comportamento de uma função. Na Eletrostática, quanto mais próximo duas cargas estiverem, maior será a intensidade da força que atua entre elas. Da Lei de Coulomb[4], temos:

> *O módulo da força entre duas cargas elétricas puntiformes (Q_1 e Q_2) é diretamente proporcional ao produto dos valores absolutos (módulos) das duas cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre eles. Esta força pode ser atrativa ou repulsiva dependendo do sinal das cargas. É atrativa se as cargas tiverem sinais opostos. É repulsiva se as cargas tiverem o mesmo sinal.*
> *Da Lei de Coulomb, temos: considerando duas cargas idênticas, Q_1 e Q_2, postas no vácuo a uma distância d:*

$$F = K.\frac{|Q_1.Q_2|}{d^2}$$

[4]Acessado em 18/2/2014 no sítio: http://pt.wikipedia.org/wiki/Lei_de_Coulomb

Como $K = 9.10^9 N.m^2/C^2$ *é uma constante e fixaremos os valores de* Q_1 *e* Q_2*, iguais a* $\frac{1}{9}C$ *e* $10^{-9}C$*, respectivamente, teremos como variável a distância d, com* $d \geq 0$*, considerando os valores dentro do sistema internacional de unidades;*

(A) *Complete a tabela seguinte e analise o que ocorre com o módulo da força elétrica à medida que a distância entre as cargas se aproxima de 1m, para valores pela direita, dado que K é uma constante e as cargas* Q_1 *e* Q_2 *não sofrerão alterações.*

d	1,3	1,2	1,1	1,01
F				

(B) *Complete a tabela seguinte e verifique o que ocorre com o módulo da força elétrica à medida que a distância entre as cargas se aproxima de 1m, para valores pela esquerda, sabendo que K é uma constante e* Q_1 *e* Q_2 *são valores fixos.*

d	0,2	0,5	0,9	0,99
F				

(C) *Esboce graficamente o comportamento dessa função, com base nas tabelas dos itens (A) e (B).*

(D) *Considerando que o limite de uma função existe quando os valores à direita e a esquerda, de um determinado valor x do domínio se, e somente se, tendem a um mesmo número* $x = c$*. O que se pode afirmar em relação ao limite da função quando x tende a* 1*? O limite existe? Em caso afirmativo, justifique a sua resposta.*

Procedimento didático:

Para responder esta questão, adotaremos o seguinte procedimento:

(1) *Utilizando diversas vezes a fórmula, variando-se as distâncias, aproximando-as de* 1*, obtemos um valor para a força elétrica, tal que:*

d	1,3	1,2	1,1	1,01
F				

E, na tabela abaixo, estamos aproximando a distância de 1*m, entre as duas cargas, para valores pela esquerda:*

d	0,2	0,5	0,9	0,99
F				

(2) *Com o procedimento (1), é possível perceber que ao serem adotados valores de distância próximos de* 1*, tanto pela esquerda quanto pela direita, a força tende a* 1*.*

(3) *Da representação gráfica, é possível visualizar o comportamento da função, cuja imagem se aproxima de 1 tanto quanto quisermos, bastando para isso tornar a distância d tão próxima de 1 quanto se queira.*

Capítulo 3

Continuidade e descontinuidade de uma Função

Embora o limite seja de grande utilidade, como por exemplo determinar a taxa de variação de uma função num determinado ponto bem como para as definições e demonstrações das derivadas e o estudo de integral. Verifica-se que além das aplicações para derivação e integração de um função, o *Limite* é fundamental para garantir o conceito de *continuidade*[1] num ponto $a \in \mathbb{R}$ e a pertencente ao intervalo aberto I.

Vejamos um problema e a representação gráfica:

Problema: *Um paciente em um hospital recebe uma dose inicial de 200 miligramas de um medicamento. A cada 4 horas recebe uma dose adicional de 100 mg. A quantidade $f(t)$ do medicamento presente na corrente sanguínea após t horas é exibida na figura a seguir:*

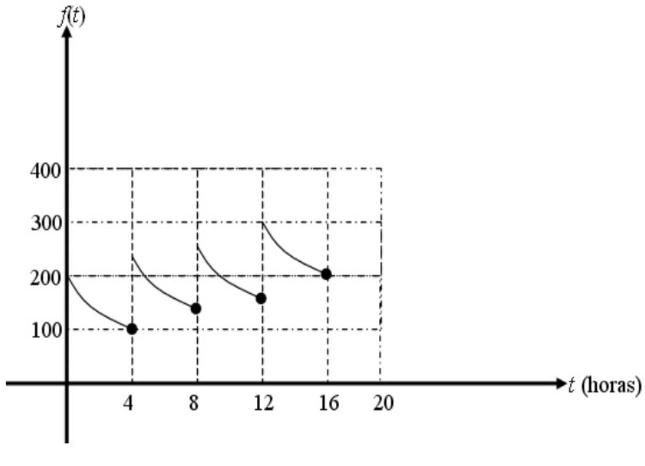


Figura 3.1: *Gráfico da função $f(t)$*

Fonte: *http:// www.pb.utfpr.edu.br/anamunaretto/lista2.pdf*.

Acessado em 14/7/2014

[1]con.ti.nu.i.da.de (lat continuitate) sf 1 Qualidade daquilo que é contínuo. 2 Ligação ininterrupta das partes de um todo. con.tí.nuo (lat continuu) adj 1 Em que não há interrupção; seguido.

Se analisarmos, por exemplo, a quantidade de medicamento presente na corrente sanguínea, à medida que o tempo se aproxima das 8h e logo após as 8h, é fácil ver que a quantidade presente difere, isto é, em termos de limite, os laterais são distintos. Ou ainda, o gráfico nos mostra "saltos"ou interrupções, concluindo dessa forma que a função não é contínua.

3.1 Continuidade de uma função num ponto

Em muitos casos, o limite de uma função quando x tende a a pode ser calculado, simplesmente, aplicando a função naquele ponto a. Funções que apresentam esta propriedade serão chamadas de *contínuas em a*. Considere a definição:

Definição 3.1 *Uma função f é contínua à direita de um número* **a** *se* $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *e f é contínua à esquerda de* **a** *se* $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

É fácil ver que, implicitamente, a definição acima necessita de três pontos para que a função seja contínua em a, são eles:

(i) $f\,(a)$ está definida ($a \in$ D, onde D é o domínio da função);

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f\,(a)$

Vejamos algumas situações:

$\boxed{\text{Situação 01}}$ *Um supermercado deseja introduzir um novo sistema de atendimento ao público e que possa reduzir o tempo de espera para finalizar suas compras. O seguinte modelo foi experimentalmente determinado para prever que em t minutos o percentual de clientes deste supermercado que podem ser atendidos nos seguintes intervalos de tempo:*

$$h(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50, \; se\ 0 \leq \; t \; \leq 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0,4t}, \; se\ 10 < t \end{cases}$$

Uma das condições para garantir a continuidade de uma função é que ela seja definida no ponto $t = 10$, assim temos:

$$h(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50, \; se\ 0 \leq \; t \; \leq 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0,4t}, \; se\ 10 < t \end{cases}$$

Daí, segue que:

$$h(t) = t^2 - 8t + 50 \Rightarrow h(10) = 10^2 - 8.10 + 50 \Rightarrow h(10) = 70$$

Outra condição a ser observada é a existência do limite. Observe que ao t assumir valores menores que 10 (limite lateral à esquerda), temos:

$$\lim_{t \to 10^-} t^2 - 8t + 50 = 70 = h(10)$$

E para valores de t maiores que 10 (limite lateral à direita), tem-se:

$$\lim_{t \to 10^+} \frac{38t - 100}{0,4t} = 70 = h(10)$$

Como os limites laterais foram iguais, verifica-se que $\lim_{t \to 10} h(t) = h(10)$. Logo, a função é contínua em $t_0 = 10$ e no intervalo $0 \leq t \leq 10$. Graficamente, teremos:

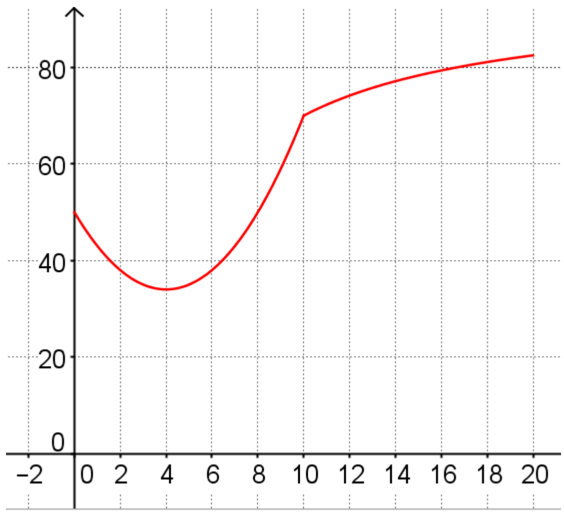


Figura 3.2: *Gráfico da função h(t) criado com o auxílio do GeoGebra*

Fonte: Elaborado pelo autor

Situação 02 Verifique se a função $q(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ é contínua para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

A análise do domínio da função f aponta a existência de uma restrição. Ou seja, ela só será definida para qualquer $x \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$, assim temos que:

$q(2)$ não está definida e, dessa forma, q é descontínua em 2. Por outro lado, ela apresenta limite neste ponto, sendo contínua em todos os outros pontos de seu domínio. Graficamente teremos:

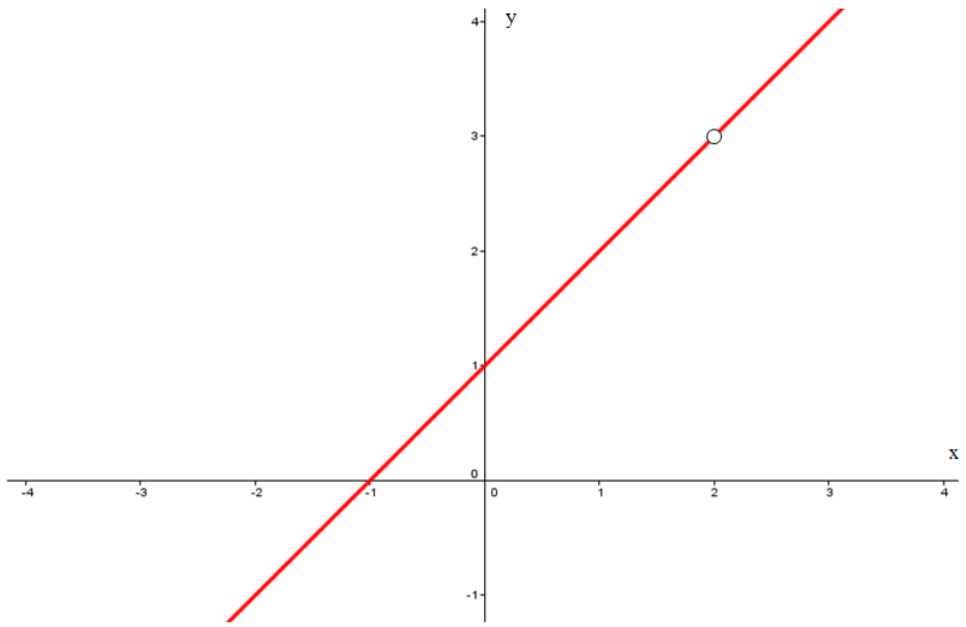


Figura 3.3: *Gráfico da função $q(x)$ criado com o auxílio do GeoGebra*

$\boxed{\text{Situação 03}}$ Observando a função $s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$, verifique sua continuidade.

Solução:

Verifica-se que $s(0)$ *está definida tal que* $s(0) = 1$, *mas se analisarmos o limite da função, quando* x *tende a zero, observa-se que* $\lim_{x \to 0^-} s(x) = \lim_{x \to 0^+} s(x) = \infty$. *Logo, não existe o limite, a continuidade em* $x = 0$ *não existirá, pois o* $\lim_{x \to 0} s(x) \neq s(0)$.

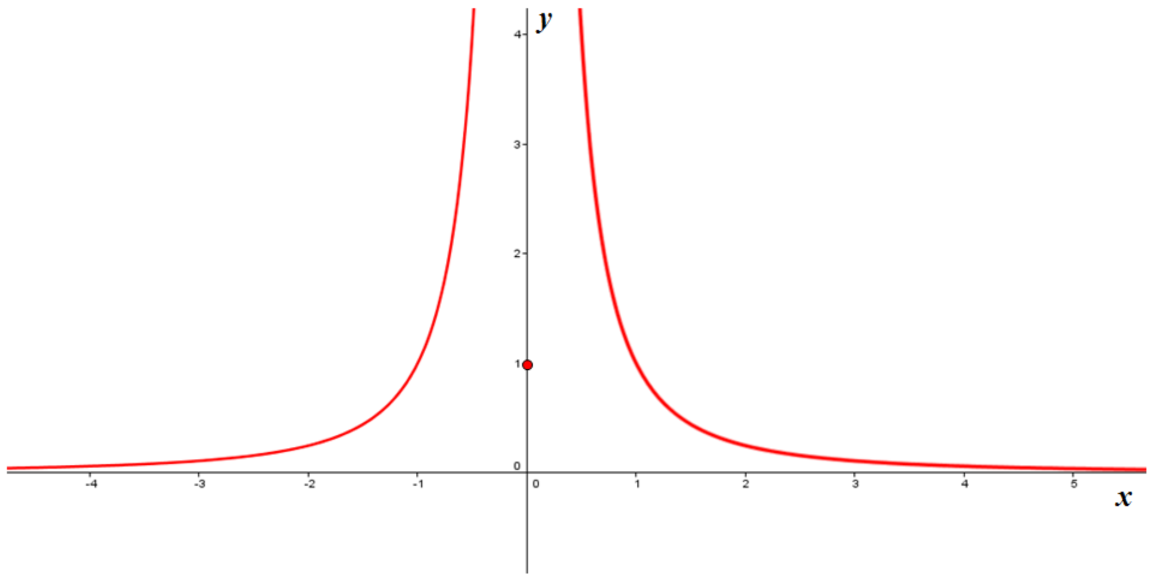


Figura 3.4: *Gráfico da função $s(x)$*

Capítulo 4

O Teorema do Valor Intermediário

Neste capítulo apresentaremos as aplicações do Teorema do Valor Intermediário (TVI), reforçando o conceito de continuidade de uma função, a visualização gráfica bem como a obtenção de raízes de funções polinomiais, a existência de soluções para equações algébricas do tipo $f(x) = d$, sendo $d \in \mathbb{R}$, pontos fixos, o método da bissecção e devido à fácil compreensão, o TVI também será indicado em nosso trabalho como uma possibilidade de inserção no currículo do Ensino Médio.

O TVI é um resultado que garante a existência de algo, um número com determinada propriedade, a existência de uma raiz de uma equação, num determinado intervalo [a, b] e se olharmos para a linguagem gráfica é fácil ver que ele é o ponto de partida para o conceito de continuidade de uma função, conforme veremos a seguir.

4.1 Interpretação gráfica do Teorema do Valor Intermediário

Uma ideia bastante simples onde é possível verificar a validade do Teorema do Valor Intermediário é a seguinte:

Considere o plano cartesiano XOY e uma reta paralela ao eixo OX, seja A um ponto abaixo desta reta e B um ponto acima e, finalmente, considere uma curva contínua ligando os pontos A e B, conforme a figura 4.1:

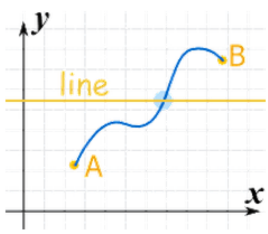


Figura 4.1: *Interpretação gráfica do TVI*

- *Seja A o ponto abaixo da linha paralela ao eixo OX*

- *Seja B o outro ponto e acima da linha*

Considerando o intervalo de extremos x_A e x_B, verifica-se que haverá pelo menos um ponto desta linha contínua que interceptará a reta $y = w$.

Nesse sentido, para se percorrer o trajeto AB, sobre a linha contínua, irá interceptar a reta $y = w$.

Mais formalmente, poderíamos assim representar:

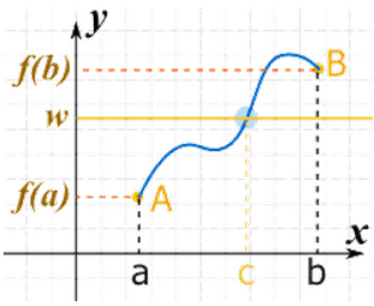


Figura 4.2: *Interpretação gráfica do TVI com f(c) = w*

- *A curva representa a função $y = f(x)$ que é contínua no intervalo [a, b]*; e

- *w é uma imagem entre $f(a)$ e $f(b)$*

Deve haver pelo menos um valor c pertencente a $[a, b]$ tal que $f(c) = w$.

Através do TVI é possível mostrar que existe "*pelo menos um valor de c pertencente a* $[a, b]$ *tal que* $f(c) = w$" (ver figura 4.2), porém pode haver mais de um valor pertencente ao intervalo $[a, b]$ tal que $f(c_1) = f(c_2) = ... = f(c_n) = w$ (ver figura 4.3).

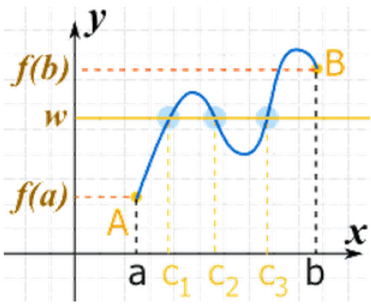


Figura 4.3: *Intervalo [a, b] contendo os pontos c_1, c_2 e c_3*

É possível demonstrar, geometricamente, que através do *Teorema do Valor Intermediário* qualquer reta horizontal $f(x) = d$ intersectando o eixo y entre as imagens $f(a)$ e $f(b)$, intersectará a curva $y = f(x)$ pelo menos uma vez no intervalo $[a, b]$, conforme mostra a figura 4.2. Para uma demonstração do TVI ver Hefez [3].

4.2 Utilizações do Teorema do Valor Intermediário

O Teorema do Valor Intermediário (TVI) apresenta-se de forma útil para uma gama de situações em que suas aplicações facilitam a resolução de problemas tais como: *i*) determinar a obtenção ou existência de raízes de uma função $f(x)$, principalmente daquelas que não há procedimentos algébricos básicos, ou ainda para desenvolvimento de métodos tal como o da bissecção; e *ii*) Para a obtenção de pontos comuns a duas funções, seja para determinar os pontos de intersecção entre elas ou para determinar seus pontos fixos.

4.2.1 Existência de raízes num determinado intervalo

Dado um intervalo fechado $[a, b]$ e seja f uma função contínua definida neste intervalo. O TVI garante a existência de raízes no intervalo (a, b) se é válido a relação: $f(a) < 0 < f(b)$, para funções crescentes neste intervalo ou $f(a) > 0 > f(b)$, para funções decrescentes neste intervalo.

Considerando a possibilidade de inserir tal conteúdo de maneira didática e com uma linguagem mais acessível, no ensino médio, abaixo apresenta-se uma atividade que permite uma compreensão da aplicação desse conceito em identificar a existência de raízes para uma função num determinado intervalo.

Atividade 01

Considere a função contínua, no intervalo $[1, 2]$, definida por $f(x) = 4x^3 – 6x^2 + 3x – 2$.

(A) Calcule $f(1)$;

(B) Calcule $f(2)$;

(C) Mostre que existe pelo menos uma raiz neste intervalo, isto é, $f(x) = 0$, provando que a existência está condicionada ao fato de que $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(a) > 0 > f(b)$.

Solução:

Estamos procurando uma solução da equação dada, isto é, um número c entre 1 e 2 tal que f(c) = 0.

Teremos então:

(A) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$

$f(1) = 4 \,.\, 1^3 - 6 \,.\, 1^2 + 3 \,.\, 1 - 2$

$f(1) = 4 \,.\, 1 - 6 \,.\, 1 + 3 \,.\, 1 - 2$

$f(1) = 4 \,.\, 1 - 6 \,.\, 1 + 3 \,.\, 1 - 2$

$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2$

$f(1) = -1 < 0$

(B) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$

$f(2) = 4 \,.\, 2^3 - 6 \,.\, 2^2 + 3 \,.\, 2 - 2$

$f(2) = 4 \,.\, 8 - 6 \,.\, 4 + 3 \,.\, 2 - 2$

$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2$

$f(2) = 12 > 0$

(C) *Como $f(1) < 0 < f(2)$ e pelo Teorema do Valor Intermediário temos que se f é uma função contínua e d um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d = 0$.*

Um observador crítico poderá mostrar-se contrário e indagar:

Neste exemplo, de onde surgiu a ideia de calcular $f(1)$ e $f(2)$?

Se alguém tivesse experimentado $f(0)$ e $f(1)$, não chegaria a conclusão alguma sobre as raízes da equação?

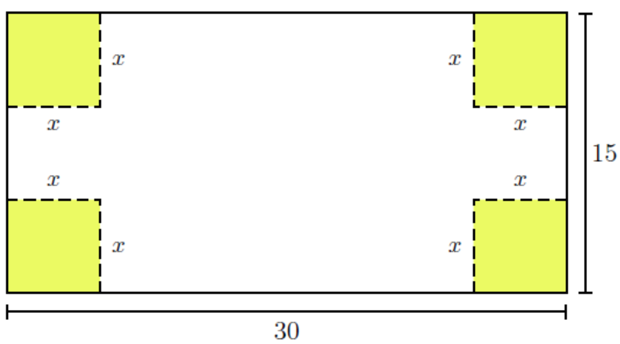
Fica claro que o Teorema do Valor Intermediário, embora seja muito útil, não é suficiente para localizar raízes. Assim, a equação $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ tem pelo menos uma raiz c no intervalo $[1, 2]$.

4.2.2 Existência de solução para uma equação algébrica do tipo $f(x) = d$

De modo análogo a determinação da existência de raízes de uma função num dado intervalo, adota-se o TVI para garantir (ou não) a existência de solução de uma equação do tipo $f(x) = d$. Para tanto, deve-se considerar os mesmos procedimentos didáticos adotados no item anterior.

Atividade 01

Uma caixa retangular aberta deve ser fabricada com uma folha de papelão de 15 cm x 30 cm, recortando quadrados nos quatro cantos, de medida x cm, e depois dobrando a folha nas linhas determinadas pelos cortes conforme a figura seguinte:



(A) *Obtenha o modelo matemático que representa o volume da caixa, em função do corte x, dado em centímetros;*

(B) *Do modelo matemático obtido no item (A), determine o volume da caixa quando a altura for igual a 1 cm;*

(C) *Do modelo matemático obtido no item (A), determine o volume da caixa quando a altura for igual a 2 cm;*

(D) *Existe solução da equação* $V(x) = d$, *se* $V(1) < d < V(2)$, *onde d é um volume qualquer. Desse modo, há algum valor para a altura x da caixa, no intervalo* $(1, 2)$, *que resulte num volume igual a* $648cm^3$*?*

Solução:

Seja V o volume da caixa dado por $V(x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x$, *com* $V(x) = 648$, *isto é,* $4x^3 - 90x^2 + 450x - 648 = 0$. *Pelo TVI temos que:*

$V(1) = 364$ *e* $V(2) = 572$, *assim não é possível concluir a existência de um volume V, tal que* $x \in (1, 2)$ *seja igual a* $648cm^3$.

4.2.3 Intersecção de funções

A intersecção de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é o equivalente à solução para $f(x) = g(x)$, ou ainda, a raiz para $f(x) - g(x) = 0$. Para desenvolver de maneira didática a resolução da intersecção entre duas funções, sugere-se os seguintes passos:

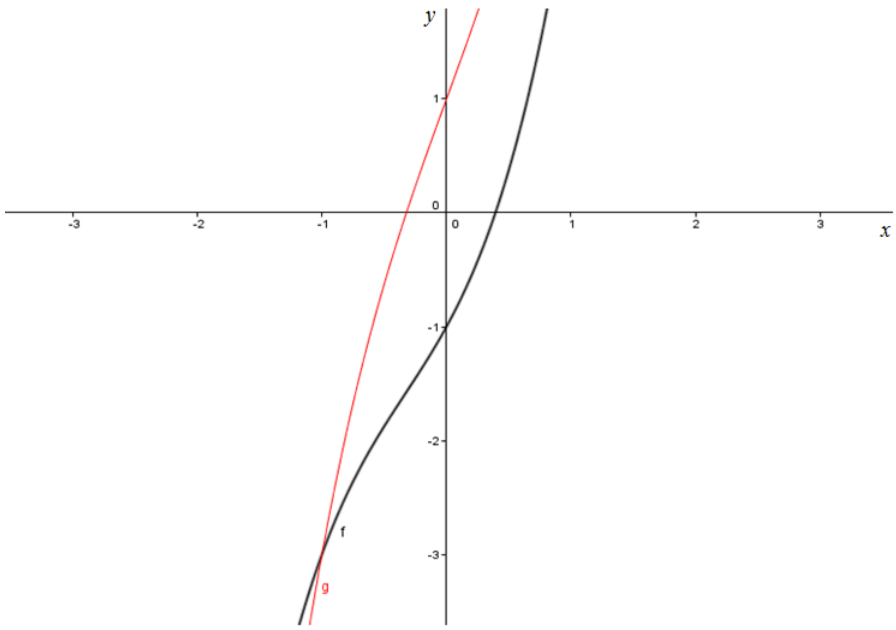
(i) Obter a igualdade $f(x) = g(x)$;

(ii) Subtrair $g(x)$ em ambos os membros, isto é, $f(x) - g(x) = g(x) - g(x)$, sem perda de generalidade, obtendo $f(x) - g(x) = 0$;

(iii) Verificar, com o auxílio do TVI, a existência de uma raiz da equação obtida no item (ii), mediante o intervalo dado.

Atividade 01

A figura abaixo representa as funções polinomiais $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ *e* $g(x) = x^3 + 3x + 1$, *cujos gráficos se intersectam em dois pontos, sendo um deles* $(-1, -3)$, *como esboçado na figura:*



(A) Obtenha a igualdade $f(x) = g(x)$;

(B) Considerando $h(x) = f(x) - g(x)$ como sendo a função obtida a partir do item A. Verifique, com o auxílio do TVI, a existência de uma raiz no intervalo $[1, 3]$.

Procedimento didático

Assim, para obtermos a função $h(x)$, tal que $h(x) = f(x) - g(x)$, faremos:

$f(x) - g(x) = h(x)$, segue que:

$x^3 + x^2 + 2x - 1 - x^3 - 3x - 1 = h(x)$

$h(x) = x^2 - x - 2$

Vamos verificar, agora, a existência de raízes no intervalo $[1, 3]$:

$h(x) = x^2 - x - 2$

$h(1) = 1^2 - 1 - 2$

$h(1) = 1 - 1 - 2$

$h(1) = -2 < 0$

Vejamos para $x = 3$:

$h(x) = x^2 - x - 2$

$h(3) = 3^2 - 3 - 2$

$h(3) = 9 - 3 - 2$

$h(3) = 4 > 0$

Segue que, pelo TVI é possível perceber que as imagens de $x = 1$ e $x = 3$, são respectivamente $h(1) = -2$ e $h(3) = 4$ o que nos garante que em algum ponto do intervalo $[1, 3]$ haverá um x tal que $h(x) = 0$.

4.2.4 Obtenção de Pontos Fixos de uma função

Dada uma função $f(x)$ qualquer e a função $g(x)$ identidade, isto é, $g(x) = x$, denomina-se ponto fixo aos pontos obtidos a partir da igualdade $f(x) = x$. Assim, temos:

Definição 4.1 *Seja $f : A \longrightarrow A$ uma função. Um ponto $a \in A$ é chamado ponto fixo de f se f(a) = a admite solução.*

Teorema 4.1 *Seja f: [0, 1] $\longrightarrow$ [0, 1] uma função contínua. Então existe um ponto a $\in$ [0, 1] tal que f(a) = a.*

Demonstração 1 *Se $f(0) = 0$, a tese do teorema está satisfeita. Portanto, podemos supor que $f(0) > 0$. Analogamente, se $f(1) = 1$, o teorema se cumpre. Assim, vamos supor, também, que $f(1) < 1$. Como f(x) $\in$ [0, 1] $\subset$ R, podemos considerar a função contínua dada por g(x) = f(x) - x, definida no intervalo [0, 1].*

Das considerações anteriores, podemos ver que:

(a) $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$;

(b) $g(1) = f(1) - 1 < 0$, pois $f(1) < 1$.

Resumindo, $g(0) > 0 > g(1)$:
Podemos, portanto, aplicar à função g o Teorema do Valor Intermediário. Isto é, existe $a \in [0, 1]$ tal que $0 = g(a) = f(a) - a$ e, portanto, $f(a) = a$.

Atividade 01

Verifique na função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por f(x) = x^2 - x - 3, a existência pontos fixos.
Solução:

(i) A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - x - 3$, admite dois pontos fixos, que são -1 e 3, raízes de $x^2 - x - 3 = x$;

(ii) Note que eles correspondem às interseções do gráfico da função f com o gráfico da função identidade.

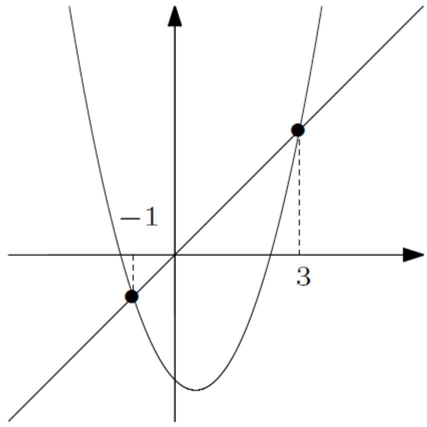


Figura 4.4: *Gráfico de uma função com dois pontos fixos.*

4.2.5 Método das Bissecção

A utilização do TVI permite garantir a existência de um número c, pertencente a um intervalo aberto (a, b) tal que $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(a) > 0 > f(b)$. No entanto este método não permite determinar o valor de c para que $f(c) = 0$, garantindo a existência de uma raiz neste intervalo. Neste sentido, o método da bissecção, fundamentado no TVI, é uma ferramenta útil para a obtenção de raízes de funções num determinado intervalo e soluções de equações do tipo $f(x) = d$.

Atividade 01

Duas crianças, denominemos aqui por A e B, e que estão brincando de acertar o número pensado por elas, uma de cada vez. Começando por A, que pensa em um número entre 1 e 100, para B tentar acertar qual foi o número pensado. A criança B adota o seguinte raciocínio: Ela pergunta se o número é 50. Ao que A responde que não, B então pergunta se está entre 50 e 100? A responde que sim e B, interpela: Está entre 50 e 75? A criança A responde que sim. Elas continuam brincando e B sempre reduzindo o intervalo onde estará o número pensado por A, até conseguir descobrir qual o número pensado por A

Com base nas informações apresentadas no texto:

(A) Complete a tabela seguinte com a sequência do raciocínio adotado pelas crianças A e B, considerando que as duas próximas respostas serão sempre maior.

Valor Inicial	*Valor Final*	*Valor pensado*	*Maior*	*Menor*
0	100	50	X	
50	100	75		X

(B) De acordo com o item (A), podemos dizer que o número pensado está em que intervalo?

(C) Repetindo o processo por várias vezes, o que deve acontecer com o intervalo em que se encontra a resposta?

Procedimento metodológico

(A) Considerando que as duas próximas respostas serão sempre maior, teremos uma possível tabela:

Valor Inicial	*Valor Final*	*Valor pensado*	*Maior*	*Menor*
0	100	50	X	
50	100	75		X
75	100	87	X	
87	100	94	X	

Levando em consideração que a criança B arredondava sempre para o próximo número inteiro[1].

(B) Considerando que uma possível tabela foi a apresentada no item (A) então, o número pensado está em que intervalo $(94, 100)$.

(C) Repetindo o processo por várias vezes, verifica-se que o intervalo em que se encontra a resposta será cada vez menor e, desta forma, possibilitará uma precisão no acerto do número pensado pela criança A.

O método da bissecção consiste em obter um valor, com aproximação, contido num intervalo, fazendo uso da ideia usada pelas crianças na atividade anterior.

Algoritmo do Método das Bissecções Recursivo

Para satisfazer o método, inicialmente precisaremos de algumas condições:

(i) f é contínua no intervalo $[a, b]$;

(ii) $f(a).f(b) < 0$, isto é, $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários;

(iii) f tem raiz única em $[a, b]$.

Assim,teremos:

(i) Calculamos o ponto médio x_1 de $[a, b]$, isto é, $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$

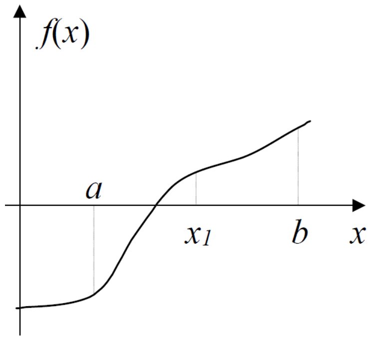
[1]Aqui não levamos em consideração a questão da aproximação com erro de casas decimais

(ii) Se $f(a).f(x_1) < 0$, então a raiz está em $[a, x_1]$;

(iii) Caso contrário, a raiz estará em $[x_1, b]$;

(iv) Repetir com o novo intervalo encontrado;

Graficamente teremos:



Teorema 4.2 *Seja f contínua em $[a, b]$ tal que $f(a).f(b) < 0$ e seja s o único zero de f nesse intervalo. Então o método das bissecções sucessivas gera uma sucessão que converge para s*

Considere o exemplo:
Seja a equação x^3 - 5x + 2 = 0. Verifique que ela possui solução no intervalo [-3, -1]
Solução:

(i) Sejam os extremos do intervalo, -3 e -1, temos então:
f(-3) = -10 < 0;
f(-1) = 6 > 0;

(ii) Como *f* é contínua (pois é uma função polinomial), segue do Teorema 2 que:
f(-3) . f(-1) < 0

(iii) seja **s** o único zero de *f*, isto é *f* (s) = 0, nesse intervalo. Então o método das bissecções garante que das sucessões geradas, uma delas converge para **s**.

Assim, verifica-se que o *Método da Bissecção* traz consigo a ideia do *Teorema do Valor Intermediário* para a obtenção de raízes de uma função, mesmo que ele não diga quem é esta raiz, mas garante sua existência.

A fim de verificarmos o comportamento dos alunos, diante do método da bissecção e o Teorema do Valor Intermediário, elaboramos uma atividade que solicitava aos discentes que verificassem a existência de uma raiz num determinado intervalo, que apresentaremos adiante com os resultados obtidos, diante de uma metodologia adotada para tal.

Capítulo 5

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) e a sua influência no ensino da Matemática

Com o avanço e acessibilidade da internet num contexto global, de qualquer lugar pode-se acessar uma informação, uma imagem, uma música, seja pelo computador de casa, do escritório, pelo laptop, pelo smartphone com os seus diversos aplicativos. Esta é uma constante que vem ganhando espaço em nosso dia-a-dia , particularmente, nas salas de aulas, com o aluno que domina as tecnologias para acesso às redes sociais, como por exemplo o Facebook, o WhatsApp, entre outros.

As novas tecnologias que chegaram às escolas ocorreram de uma forma desordenada, influenciando o comportamento dos alunos e, consequentemente, implicando uma necessidade de mudança da prática em sala de aula. As transformações sobre as práticas pedagógicas não se resumem apenas às aulas expositivas, atividades escritas ou digitadas. Desse modo, a prática pedagógica pensada desde o seu planejamento até as execuções das avaliações, no contexto atual, passa a associar a tecnologia com o ambiente da sala da aula. Kenski [21], ressalta que o uso de tecnologias tem o efeito de criar mudanças e alterações em relação à cultura de uma sociedade e que não é uma simples questão de uso destas tecnologias que se tornaram popular. Esse mesmo autor afirma que:

> *A evolução tecnológica não se restringe aos novos usos de determinados equipamentos e produtos. Ele altera comportamentos. A ampliação e a banalização do uso de determinada tecnologia impõe-se à cultura existente e transformam não apenas o comportamento individual, mas o de todo o grupo social.* Kenski [21]

Concordamos com Calil [11], quando se verifica que não se tem mais dúvida que as novidades tecnológicas são mais atraente para o estudante do que um caderno, uma caneta ou livro. Portanto, não se pode negar que as novas tecnologias chegaram e podem modificar o processo de ensino e aprendizagem. Bicudo [6], Borba e Penteado [8], apontam para a possibilidade de inserção das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) na sala de aula como mais uma ferramenta.

Diversas estratégias para minimizar as dificuldades dos estudantes em Matemática são propostas e fazem parte de pesquisas diariamente. Dentre estas, a importância da utilização de softwares específicos para esta disciplina, cujo objetivo passa por atrair os estudantes e fornecer métodos mais interativos para a construção do conhecimento.

Segundo Bicudo [6], as transformações implicam mudanças na prática docente uma vez que:

> *o movimento, a velocidade, o ritmo acelerado com que a Informática imprime novos arranjos na vida fora da escola caminham para a escola, ajustando e transformando esse cenário e exigindo uma revisão dos sistemas de hierarquias e prioridades tradicionalmente estabelecidos na profissão docente*

Na perspectiva apontada, ao qual concordamos de que a prática docente e as práticas pedagógicas influenciam a aprendizagem, serviu de orientação para adotarmos neste trabalho, a escolha do *GeoGebra*, desenvolvido pelo professor *Markus Hohenwarter*, da Universidade de Salzburgo, na Áustria, por se tratar de um software livre que consegue reunir elementos da Geometria, Álgebra e Cálculo Diferencial e Integral, além de oportunizar de maneira dinâmica o trabalho com equações e coordenadas diretamente, seja em álgebra, Geometria ou Cálculo, como por exemplo, trabalhar com variáveis que estejam ligadas a números, vetores e pontos, ainda é possível, nesse software, determinar derivadas e integrais para a compreensão de funções. Pode-se ainda, através de comandos próprios, da Análise Matemática, identificar pontos singulares de uma função, como raízes e extremos. Segundo Sá [29], o *GeoGebra* é:

> *" ...um sistema de Geometria Dinâmica que permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, cônicas como com funções que podem ser modificados dinamicamente ".*

A proposta desse trabalho articulou-se com a utilização do Software *GeoGebra*, o qual possibilita além da visualização gráfica também o trabalho algébrico e o cálculo numérico. Baseado nas possibilidades oferecidas pelo *GeoGebra*, as atividades propostas neste capítulo, foram destinadas a alunos do terceiro ano do ensino médio, partindo da ideia que os mesmos já haviam estudado este conteúdo no primeiro ano do ensino médio e que não são alunos que estão iniciando o estudo deste conteúdo.

5.1 O GeoGebra como ferramenta didática

Pesquisas recentes vem mostrando resultados acerca da utilização de softwares, no nosso caso, matemáticos tiveram resultados positivos mediante inferências realizadas com os conteúdos estudados juntamente com a utilização de softwares, conforme relatam em sua pesquisa Pimentel e Paula [28] sobre a assimilação dos conteúdos com mais facilidade que numa sala de aula sem uso destas tecnologias. Outros autores, como Frota e Borges [17], enfatizam a importância de incorporar tecnologias, mudando a forma de fazer e o pensar matemático, acreditando que estes instrumentos podem ser potentes ferramentas de ensino de Matemática, e usam a expressão "matematizar a tecnologia". Bittar [7] compara um software a *um artefato, um instrumento que possui vários esquemas de utilização e que, portanto, deve ser analisado pelo professor*.

5.2 O GeoGebra e suas ferramentas

O *GeoGebra*[1] é uma ferramenta que permite a interação, de forma dinâmica, do aprendiz com o conteúdo matemático que, de maneira tradicional, torna-se um processo cansativo e, muitas vezes, desmotivador para a aprendizagem de determinados conteúdos. Em seguida, apresentaremos algumas das suas funções necessárias para a construção e análise de gráficos com uma melhor compreensão do comportamento das funções que são interesse deste trabalho.

5.2.1 Criando gráficos de funções

Com o auxílio de *GeoGebra* é possível visualizar o gráfico de uma função. Vejamos o procedimento a seguir para a função, que utilizaremos como exemplo, definida por $u(x) = x^2 - 4$:

(1) Introduza a função no campo entrada: $u(x) = x^2 - 4$;

(2) Clique em ENTER para visualizar a curva gerada pela função.

[1]Para o leitor que deseje se aprofundar e obter melhores resultados, o software está disponível para download no endereço eletrônico: $http://www.geogebra.org/cms/$

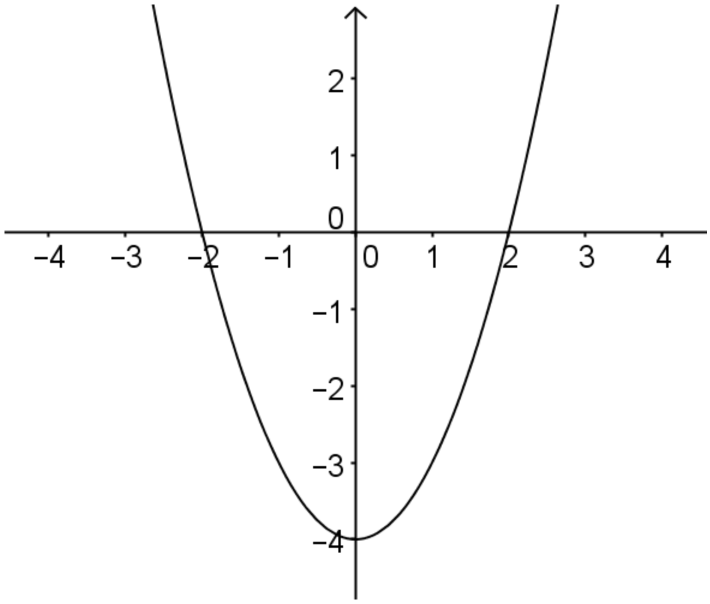


Figura 5.1: *Gráfico da função u(x) =* $x^2 - 4$

Fonte: *Criado pelo autor com o auxílio do GeoGebra.*

5.2.2 Limitando o domínio da função a um intervalo no eixo OX

Para esta atividade, limitaremos o domínio da função a um intervalo no eixo x.

(1) No campo entrada digite o comando:
Função[<Função>,<Valor de x inicial>,<Valor de x final>] Onde:

- Função = Será o comando informado ao *GeoGebra* e, portanto, não será alterado;
- <Função> = $x^2 - 4$
- Para determinarmos o intervalo, propriamente dito, digitamos:
  <Valor de x Inicial> = –3;
  <Valor de x Final> = 3.

  Visto que os números -3 e 3 foram dados de forma arbitrária, para o intervalo que queremos limitar o seu domínio.

(2) Em seguida, clique em ENTER para visualizar a curva gerada pela função limitada ao intervalo $[-3, 3]$.

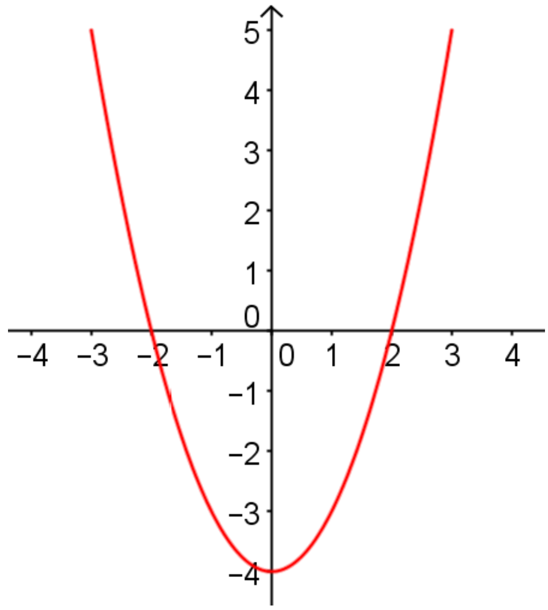


Figura 5.2: *Gráfico da função* $v(x) = x^2 - 4$, *limitada ao intervalo* $[-3, 3]$

5.2.3 Analisando o comportamento de uma curva variando os coeficientes da função

Para este exemplo, utilize a função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(1) Na barra de ferramentas clique em "controle deslizante" e crie os controles a, b e c.

(2) Digite, no campo de entrada, a função $f(x) = a * x^2 + b * x + c$.

(3) Utilizando os seletores, altere os valores de a, b e c e verifique como a curva se comporta.

5.2.4 Construindo Funções definidas por duas ou mais sentenças

Para criar o gráfico de funções definidas por partes utilize o comando "**Se**". Conforme o exemplo:

- Vamos construir o gráfico da função definida por

$$t(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{se} \quad x < 1 \\ x^2 + 2 & \text{se} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

- Utilize a seguinte notação no campo entrada:
  Se[x < 1, -x + 1, Se[$x \geqslant$ 1, x^2 + 2]]

- Clique em ENTER para visualizar a curva gerada pela função definida pelas duas sentenças.

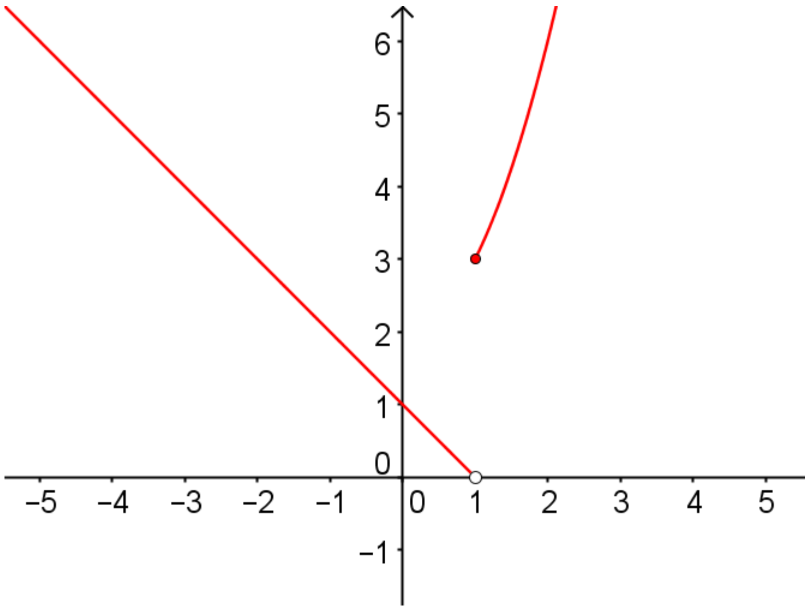


Figura 5.3: *Gráfico da função t definida por duas sentenças*

5.2.5 Analisando o comportamento de um ponto na curva gerada por uma função

(1) Crie o gráfico da função $j(x) = cos(x)$;

(2) Crie um seletor a com intervalo de $[-10, 10]$;

(3) Crie um ponto $A = (a, j(a))$;

(4) No controle altere o valor de a e veja como o ponto se comporta sob a curva.

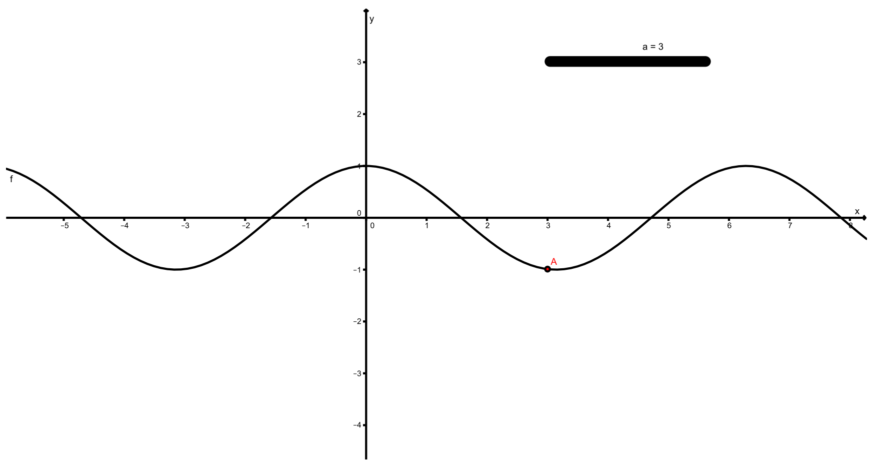


Figura 5.4: *Gráfico da função* $j(x) = cosx$

5.2.6 Analisando Limites

Analisemos o limite da função $z(x) = \sqrt{x^2+2}$ quando x tende a 1, utilizando o GeoGebra.

(1) Inicialmente, digite no campo entrada a função: $z(x) = \sqrt{x^2+2}$;

(2) Em seguida, crie um seletor a;

(3) Crie o ponto $P = (1, z(1))$;

(4) Crie o ponto $A = (a, z(a))$;

(5) Crie as coordenadas nos eixos x e y;

(6) Clique no seletor e altere o valor de a para próximo de 1;

(7) No campo entrada digite o comando Limite[<Função>,<Número>]. Onde:

- Limite será o próprio comando e, portanto, não será alterado;
- <Função> = $\sqrt{x^2+2}$
- <Número> = 1 (para onde tende x)

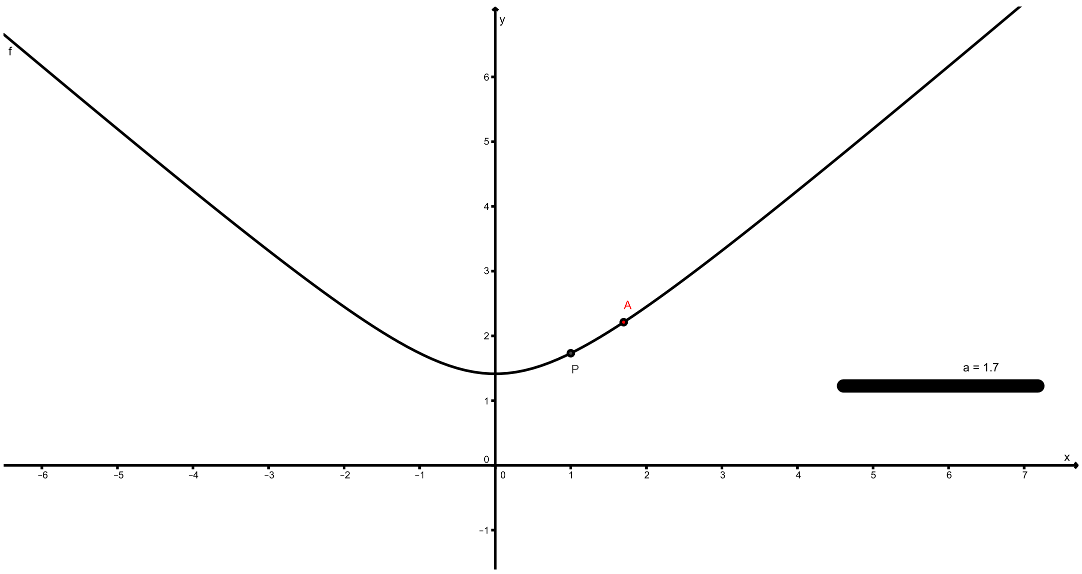


Figura 5.5: *Gráfico da função z quando* $\lim\limits_{x \to a} z(x)$

5.2.7 Aplicações didáticas com a utilização do GeoGebra

A seguir apresentaremos algumas atividades e perceberemos a riqueza de detalhes que este software pode disponibilizar nos estudos de funções para o Ensino Médio.

Atividade 01

Dada a função definida por $m(x) = \dfrac{1}{x^2}$, obtenha:

(A) o gráfico da função $m(x)$, com o auxílio do *GeoGebra*;

(B) os limites laterais da função quando x tende a zero, mediante o gráfico obtido no item (A).

Procedimento metodológico

Do item (A), com o auxílio do *GeoGebra*, vamos obter o gráfico, conforme o procedimento a seguir para a função $m(x) = \dfrac{1}{x^2}$:

(1) Introduza a função no campo entrada: $m(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

(2) Clique em ENTER para visualizar a curva gerada pela função.

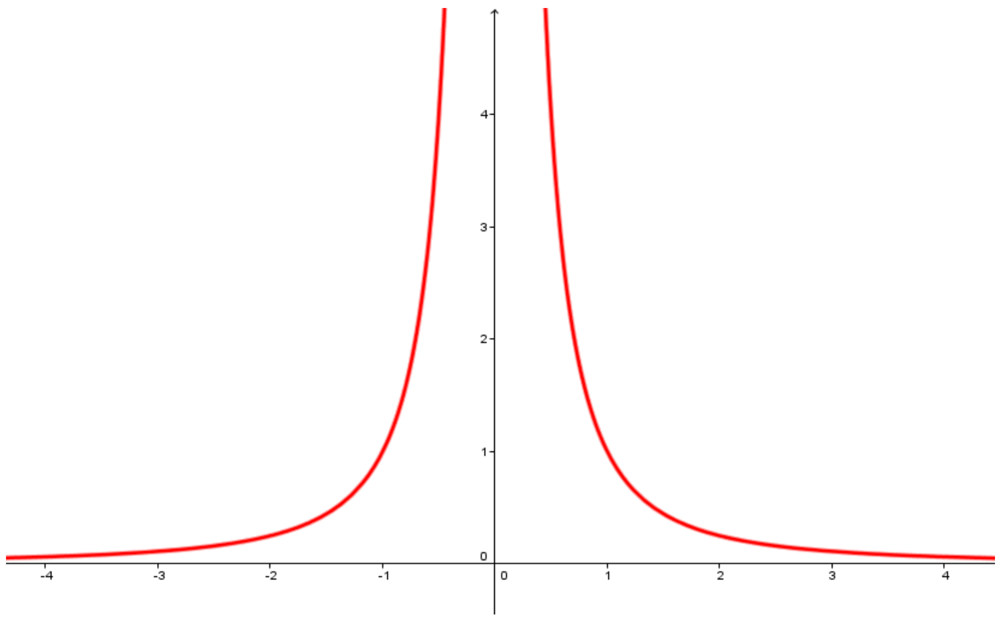


Figura 5.6: *Gráfico da função* $m(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Fonte: *Criada pelo próprio autor*

Para a análise dos limites laterais, propostos no item (B), faremos a análise do comportamento das imagens função à medida que x se aproxima de zero. Verifica-se que as imagens crescem indistintamente à medida que x tende a zero. O que nos leva a concluir que os limites laterais são tais que $\lim\limits_{x\to 0^-} m(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} m(x) = \infty$.

Capítulo 6

Proposta para o Ensino Médio: Uma sequência didática

Para atender aos objetivos propostos, em nosso estudo, procuramos desenvolver uma sequência de atividades que permitissem abordar, de maneira didática e com o auxílio das novas tecnologias, os conteúdos de limite e continuidade de uma função, bem como a aplicação do Teorema do Valor Intermediário para determinar uma raiz de uma função num determinado intervalo, de modo que estes possam completar a compreensão no estudo de funções, desde de sua análise gráfica até suas representações em software desenvolvido para tal finalidade, a exemplo do GeoGebra. A utilização da sequência didática representa o ponto chave da pesquisa e nos levou a refletir sobre as dificuldades que poderiam emergir durante o processo de construção de tais conceitos. Verifica-se, em sua maioria, que tais dificuldades apontadas por alguns estudos a exemplo de Costa [12], Dornelas [16], Pereira [27] está relacionado, entre outros fatores, ao formalismo existente na sua abordagem e a falta aplicabilidade destes conteúdos em situações cotidianas, tornado-os sem funcionalidade, indo de encontro às propostas sugeridas em âmbito nacional, pelos PCN's[1] e DCEM [2], que constituem documentos reguladores do Currículo de Matemática no Brasil, e outros como a BCC[3] adotada especificamente no Estado de Pernambuco.

Com o intuito de complementar a compreensão, em relação ao conteúdo de funções, para os alunos do 1º ano do Ensino Médio propomos uma sequência didática que possa ser vivenciada logo após a definição de função, visto que os livros didáticos, em sua maioria, não contemplam o conteúdo de limite e o de continuidade de funções, para os três anos do Ensino Médio, conforme verificamos no capítulo 2.

Nossa sequência didática é dividida em 5 (cinco) momentos, que variam entre 50

[1]Parâmetros Curriculares Nacional

[2]Descritores Curriculares para o Ensino Médio

[3]Base Curricular Comum

minutos ou 100 minutos, conforme descrito a seguir:

1ª Atividade

Objetivo: Conjecturar os limites laterais de forma empírica.

Problema 01

Um estudante anotou a posição, ao longo do tempo, de um móvel sujeito a uma força constante e obteve os dados abaixo:

Instante (s)	Posição (m)
0	17
10	45
20	81

Pede-se:

(A) identificar o modelo matemático que representa a situação descrita, considerando a posição y (em metros) e o instante x (em segundos);

(B) analisar o que acontece com a posição do móvel, de forma gráfica, quando o tempo se aproxima de 5s, tanto para valores menores quanto para valores maiores que 5s?

(C) utilizar o *GeoGebra* para esboçar graficamente e constatar se a função é contínua no intervalo $[0, 20]$.

1º Momento

Será dividido em duas etapas, a saber: construção do modelo matemático e esboço do gráfico da função, sem o auxílio do *GeoGebra*.

Duração: 100 min (sendo dois encontros de 50 minutos)

1º Passo: Construção do modelo matemático:

(i) Ao observar o quadro, verificamos que não se trata de um movimento uniforme, pois o móvel percorre espaços desiguais em mesmos intervalos de tempo. O que nos leva a concluir que é um movimento uniformemente variado e regido por uma função do tipo $w(x) = ax^2 + bx + c$;

(ii) Mediante o quadro que foi apresentado, convencionaremos o instante como a abscissa x e a posição como a ordenada $w(x) = y$, isto é, para cada linha da tabela teremos um par ordenado:

(i) $(0, 17) \Longrightarrow 17 = a \,.\, 0^2 + b \,.\, 0 + c \Longrightarrow c = 17$

(ii) $(10, 45) \Longrightarrow 45 = a \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + 17 \Longrightarrow 100a + 10b = 28$

(iii) $(20, 81) \Longrightarrow 81 = a \,.\, 20^2 + b \,.\, 20 + 17 \Longrightarrow 400a + 20b = 64$

(iv) Resolvendo o sistema obtido, temos:

$$\begin{cases} 100a + 10b = 28 \\ 400a + 20b = 64 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{25}, \ b = \frac{12}{5} \text{ e } c = 17$$

Segue que $w(x) = \dfrac{1}{25}x^2 + \dfrac{12}{5}x + 17$

(v) Analisemos o que acontece com $w(x)$ à medida que x se aproxima de 5, para valores menores e valores maiores, conforme os quadros a seguir:

x	$0,0$	$1,0$	$2,0$	$3,0$	$4,5$	$4,9$
$w(x)$	17	$19,44$	$21,96$	$24,56$	$28,61$	$29,7204$

x	$5,1$	$5,5$	$5,8$	$6,0$	$7,0$	$8,0$
$w(x)$	$30,2804$	$31,41$	$32,2656$	$32,84$	$35,76$	$38,76$

Note que os valores atribuídos a x nos quadros apresentados em (iii) foram arbitrários e para uma compreensão adequada para o aluno, sugere-se valores com uma proximidade maior, ou até mesmo pode-se levar o aluno a criar seu quadro e comparar com os resultados dos diversos quadros que foram construídos em sala, durante a aplicação da atividade.

(vi) Daí, percebemos que à medida que x se aproxima de 5, o valor de $w(x)$ se aproxima de 30.

2º Passo: Esboço do gráfico.

A partir dos pares ordenados obtidos nos quadros, podemos construir o gráfico da função.

2º Momento

Será dividido em duas etapas, a saber: Análise do problema mediante o gráfico obtido e a utilização do *GeoGebra* como uma alternativa na construção do gráfico.

Duração: 50 min

3º Passo: Analisar o problema a partir do gráfico da função;

Após termos construído o gráfico da função $f(x)$, faremos a análise do problema graficamente e levaremos o aluno a perceber o que acontece com os valores da função à medida que o valor da abscissa x se aproxima de 5.

4º Passo: Utilizando o GeoGebra

Com o auxílio do GeoGebra, construiremos o gráfico da função

$$w(x) = \frac{1}{25}x^2 + \frac{12}{5}x + 17,$$

a partir dos itens a seguir:

(i) Com o GeoGebra devidamente iniciado, no campo ENTRADA digite: $w(x) = \frac{1}{25}x^2 + \frac{12}{5}x + 17$

(ii) Após ter digitado a função, clique na tecla ENTER e obtenha o gráfico de $f(x)$.

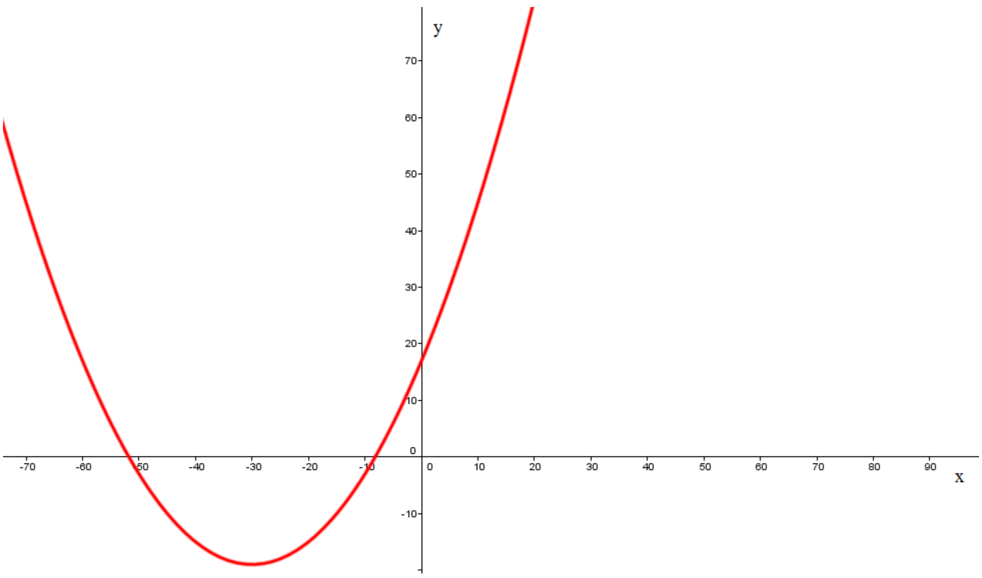


Figura 6.1: *Gráfico da função* $w(x) = \frac{1}{25}x^2 + \frac{12}{5}x + 17$

2ª Atividade

Objetivo: Compreender o conceito de continuidade e sua aplicabilidade em problemas cotidianos.

Problema 02

Com o auxílio de *GeoGebra*, esboce graficamente a função $b(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$, verificando se:

(A) há o limite de $b(x)$ quando x tende a 2, pela esquerda e pela direita;

(B) a função é definida quando x é igual a 2;

(C) a função é contínua no intervalo $[0, 5]$.

3º Momento

Esta atividade será apresentada num único momento.
Duração: 50 min

1º Passo: Analisaremos os limites laterais da função, quando nos aproximarmos o mais possível de $x = 2$, tanto pela esquerda quanto pela direita. Para isso, faremos uso das tabelas de aproximações, conforme descrito abaixo:

x	$0,0$	$1,0$	$1,5$	$1,8$	$1,9$	$1,99$
$b(x)$						

x	$2,01$	$2,1$	$2,3$	$2,5$	$2,7$	$3,0$
$b(x)$						

Após completarmos as tabelas, será possível perceber que à medida que o valor de x se aproxima de 2, sua imagem ($b(x)$) tenderá a 3. Esse comportamento será observado tanto para valores maiores que 2, quanto para valores menores que 2. Em outras palavras, os limites laterais apresentarão o mesmo comportamento.

2º Passo: Em seguida, analisaremos se a função está definida em $x = 2$ e para tanto, substituiremos o valor de x na função e, será observado, que há uma restrição nesta função para $x = 2$, gerando uma indeterminação matemática, e que nos garante que a função não é definida neste ponto.

3º Passo: Representação gráfica no *GeoGebra*.

Com o auxílio do GeoGebra, construiremos o gráfico da função $b(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$, a partir dos itens a seguir:

(i) Com o GeoGebra devidamente iniciado, no campo ENTRADA digite: $b(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$;

(ii) Após ter digitado a função, clique na tecla ENTER e obtenha o gráfico de $f(x)$, conforme podemos verificar na figura a seguir.

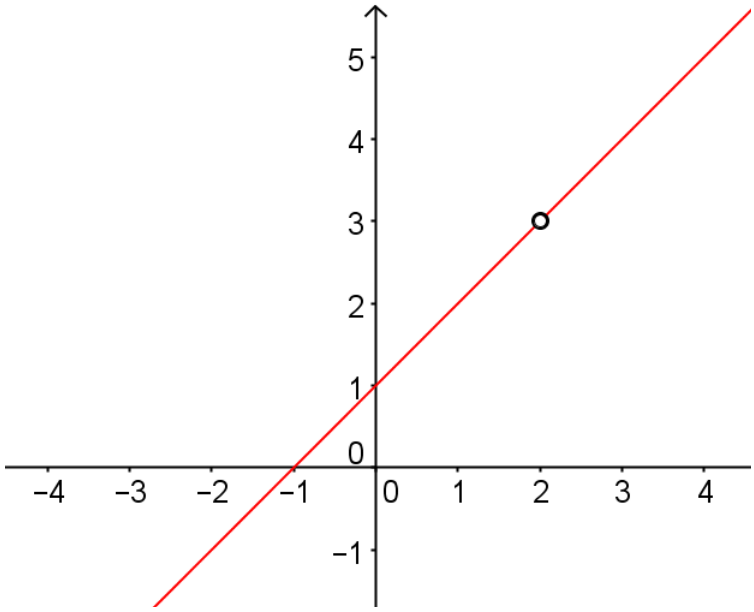


Figura 6.2: *Gráfico da função* $b(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Verificamos, a partir do gráfico criado com o auxílio do *GeoGebra* que a função não está definida no ponto $x = 2$ e, portanto, não é contínua neste ponto.

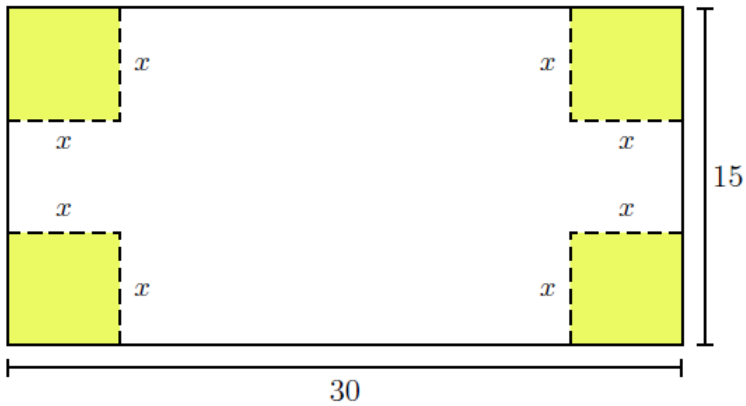
As atividades que foram propostas até agora se encontram no Apêndice 01.

3ª Atividade

Objetivo: Determinar a existência de uma raiz num determinado intervalo.

$\boxed{\text{Problema 01}}$

Uma caixa retangular aberta deve ser fabricada com uma folha de papelão de 15 cm x 30 cm, recortando quadrados nos quatro cantos, de medida x cm, e depois dobrando a folha nas linhas determinadas pelos cortes conforme a figura seguinte:



(A) identificar o modelo matemático que representa a situação descrita (*volume em função da altura*), considerando o volume y (em centímetros cúbicos) e a altura x (em centímetros);

(B) Existe alguma medida, entre 1 cm e 4 cm, do corte que produza uma caixa com volume de $648cm^3$?

1º Momento

Será dividido em duas etapas: A obtenção do modelo matemático que representa a situação descrita e a solução de uma equação, utilizando o TVI, do tipo $V(x) = d$.
1º Passo: Identificar o modelo matemático que representa a situação descrita.
Após serem retirados os quadrados de lado x, o seu volume V será dado por:

$$V(x) = (30 - 2x)(15 - 2x)x \Longrightarrow V(x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x$$

2º Passo: Verifiquemos se existe algum volume, no intervalo $[1, 4]$ que produza volume igual a $648cm^3$.
Para a solução, precisamos de um valor no intervalo $[1, 4]$ e que produza tal volume, isto é, queremos que $V(x) = 648 \Longrightarrow V(x) - 648 = 0 \Longrightarrow 4x^3 - 90x^2 + 450x - 648 = 0$.
Verifiquemos, utilizando TVI, a existência de raízes no intervalo considerado para a equação $4x^3 - 90x^2 + 450x - 648 = 0$:
Seja $h(x)$ a função tal que $h(x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x - 648$, tal que:

$$h(x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x - 648$$

$$h(1) = 4.1^3 - 90.1^2 + 450.1 - 648$$

$$h(1) = 4.1^3 - 90.1^2 + 450.1 - 648$$

$$h(1) = 4 - 90 + 450 - 648$$

$$h(1) = -284 < 0$$

Vejamos agora para $x = 4$:

$$h(x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x - 648$$
$$h(4) = 4.4^3 - 90.4^2 + 450.4 - 648$$
$$h(4) = 4.64 - 90.16 + 450.4 - 648$$
$$h(4) = 256 - 1440 + 1800 - 648$$
$$h(4) = -32 < 0$$

Pelo TVI, a existência de raízes é garantida quando as imagens encontradas têm sinais opostos, o que não ocorreu, logo não poderemos garantir uma raiz para a equação $4x^3 - 90x^2 + 450x - 648 = 0$.

2º Momento

$\boxed{\text{Problema 02}}$

Na função definida por $f(x) = x^3 - x + 3$, determine um inteiro n para que se tenha $f(x) = 0$ para algum x entre n e $n + 1$.

3º Passo: Verifiquemos se existe algum x entre n e $n + 1$ para que se tenha $f(x) = 0$. Por tentativa, obtemos os números -2 e -1, tais que:

$$f(x) = x^3 - x + 3$$
$$f(-2) = (-2)^3 - (-2) + 3$$
$$f(-2) = -8 + 2 + 3$$
$$f(-2) = -8 + 5$$
$$f(-2) = -3 < 0$$

Por outro lado, temos que:

$$f(x) = x^3 - x + 3$$
$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) + 3$$
$$f(-1) = -1 + 1 + 3$$
$$f(-1) = 3 > 0$$

Assim, temos que $f(-2) < 0 < f(-1)$, isto é, existe algum x entre -2 e -1, tal que $f(x) = 0$.

Capítulo 7

Análise e Resultados da Proposta

7.1 Aplicação da Proposta

Nesta seção é apresentada a descrição da aplicação da proposta que teve como objetivo analisar os efeitos da sequência didática, proposta no capítulo 6. Os alunos selecionados para esta investigação oriundos de quatro turmas do terceiro ano do ensino médio, dos turnos da manhã e da tarde, com idades variando dos 16, aos 19 anos, da escola Estadual Nicanor Souto Maior, na cidade de Caruaru - PE. O grupo de 17 alunos, composto de 9 alunas e 8 alunos, apresenta rendimento escolar de baixo a médio e a sequência didática foi composta de quatro atividades, sendo a primeira destinada aos limites laterais e a continuidade de uma função a partir da análise gráfica e das tabelas de aproximações, dividida em dois momentos, sendo o primeiro, com duração de 3 horas, destinado à apresentação dos conteúdos aos alunos e a resolução de questões propostas, pelas quais constam no Apêndice 01. O segundo momento, com duração de 3 horas, foi destinado aos alunos para que resolvessem questões similares ao do primeiro momento, sendo acrescentado à lista proposta, duas questões onde na primeira, os alunos deveriam fazer seus comentários acerca dos conteúdos que foram vivenciados em relação à importância dos mesmos para a formação dos discentes e na questão seguinte, eles deveriam dissertar sobre a percepção das diferenças existidas nas atividades propostas, para este segundo momento, e que constam no Apêndice 03, isto é, com o uso (ou não) do software *GeoGebra*.

No terceiro encontro, foi apresentado aos alunos o Teorema do Valor Intermediário (TVI), desde a sua definição até possíveis aplicações no Ensino Médio, conforme pode ser observado no Apêndice 02 e teve duração de 3 horas. Para que o entendimento desse teorema fosse mais efetivo pelos discentes que participavam do desenvolvimento da sequência didática, elaboramos dois problemas, sendo o primeiro relativo ao volume de uma caixa e cuja aplicabilidade do TVI consistia em verificar se num determinado intervalo, existiria algum valor para a altura da caixa que geraria um dado volume. Já o segundo problema, partia da ideia de identificar se num dado intervalo, uma função polinomial teria alguma raiz, outra aplicação do TVI.

Por fim, o quarto e último encontro foi destinado ao feedback do terceiro encontro, no mesmo formato dos encontros anteriores, isto é, com 3 horas de duração e os alunos foram arguidos a respeito de dois problemas semelhantes ao do terceiro encontro e teriam que utilizar o TVI para identificar se num dado intervalo a velocidade de um móvel, que era regido por uma função horária, informada no problema, seria nula em algum ponto do intervalo. O segundo problema exigiria do aluno uma boa percepção do TVI para sua resolução, pois a formatação deste problema era o de determinar a existência uma raiz da função polinomial dada, para um intervalo informado no enunciado. Em todos os momentos foram sugeridos o uso da calculadora a fim de que eles pudessem obter os resultados mais rápidos bem como se dedicarem, precisamente, à aplicação da proposta do que propriamente com cálculos que, em algumas situações, foram extensos.

7.2 Análise dos resultados

Apresentaremos aqui a descrição das atividades propostas aos alunos em relação à sequência didática proposta no capítulo 6, mediante as questões desenvolvidas e apresentadas nos Apêndices 01, 02, 03 e 04. Iniciaremos descrevendo as resoluções das atividades que foram propostas aos alunos nos Apêndice 03 e 04.

7.2.1 Análise da atividade proposta sobre limites com ou sem o auxílio do GeoGebra

Para a abordagem das atividades e da intervenção acerca dos limites de funções, elaboramos os Apêndices 01 e 03, respectivamente, relacionados à intervenção do professor e a a atividade proposta ao aluno.

No Apêndice 01, como foram propostas para a execução pelo professor não foram observadas, até porque não era a proposta de estudo identificar a didática adotada, mas apenas a introdução dos conteúdos de limite com e sem o uso do *GeoGebra*, este não identificou comportamento atípico a uma atividade pedagógica.

Do Apêndice 03, foi possível verificar que no problema 01, inicialmente os alunos mostraram dificuldade em obter a função que representaria a situação descrita no enunciado do problema e era pedida no item (A). Passados 30 minutos do início da atividade, optamos pela informação dos pares ordenados que iriam compor a situação.

Percebemos então que eles começaram a desenvolver os cálculos na obtenção deste modelo matemático. Entretanto, dos 17 alunos que participaram da atividade, 13 conseguiram obter o modelo matemático corretamente e 4 deles não conseguiram. Conforme podemos verificar a resolução do aluno, aqui denominado de aluno F:

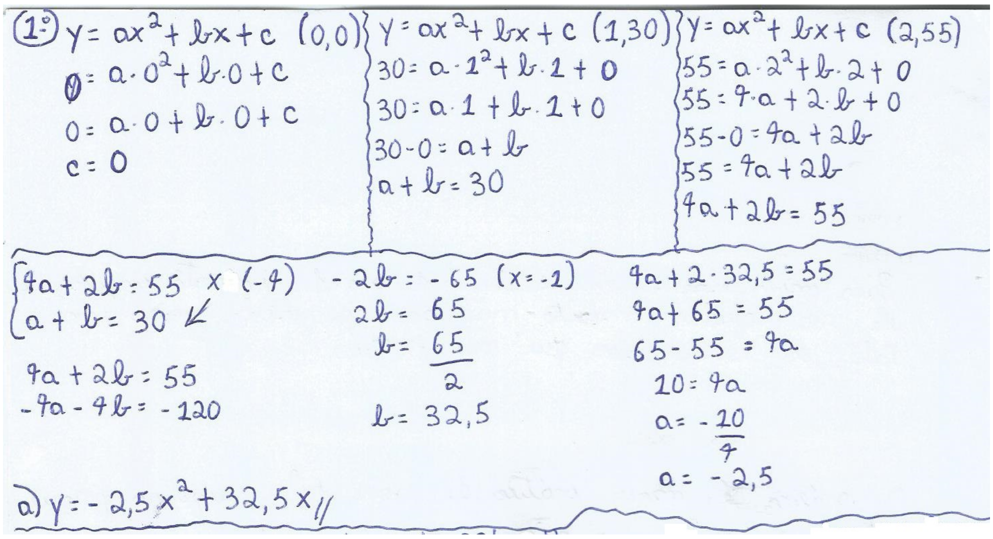
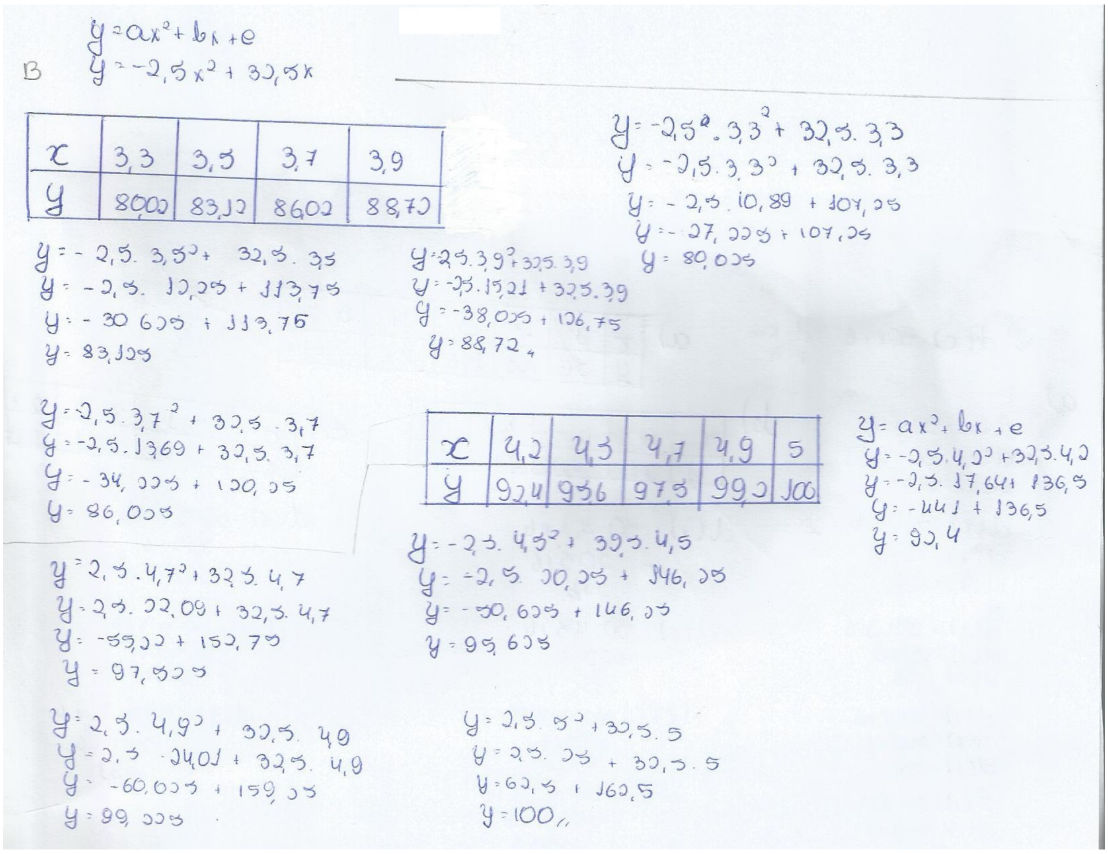


Figura 7.1: *Apêndice 03 - Problema 01 - Letra A - Resolução do aluno F*

Como a intenção da nossa pesquisa não era saber como o aluno chegaria a tal modelo, continuamos a aplicação da atividade e fornecemos o modelo matemático para os alunos que não conseguiram obtê-lo. Em seguida, analisamos o item (B) que solicitava aos alunos que analisassem, de maneira gráfica, o comportamento da função quando o tempo se aproximava de 4s, tanto para valores pela esquerda quanto pela direita, já que no primeiro momento (na resolução do Apêndice 01) estes termos foram empregados e já eram familiares ao grupo.

Para a análise proposta no item (B), percebemos que os alunos criaram as tabelas utilizando valores próximos de 4s, tanto menores quanto maiores, mas apenas 5 alunos, ao construírem a tabela, levaram em consideração que os valores deveriam se aproximar de 4s, mas não seriam iguais a 4. A ideia de tender a um número também já havia sido mostrada no primeiro encontro. Vejamos a resolução do aluno I e observe que nas tabelas de aproximações, ele não inseriu o número 4 mas apenas valores próximos:

Por outro lado, observe que o aluno J não teve a mesma preocupação com as aproximações e inseriu na tabela, que constava os valores que se aproximavam pela esquerda, o valor 4:



B

$y = ax^2 + bx + c$

$y = -2,5x^2 + 32,5x$

x	3,3	3,5	3,7	3,9
y	80,02	83,12	86,02	88,72

$y = -2,5 \cdot 3,3^2 + 32,5 \cdot 3,3$
$y = -2,5 \cdot 3,3^2 + 32,5 \cdot 3,3$
$y = -2,5 \cdot 10,89 + 107,25$
$y = -27,225 + 107,25$
$y = 80,025$

$y = -2,5 \cdot 3,5^2 + 32,5 \cdot 3,5$
$y = -2,5 \cdot 12,25 + 113,75$
$y = -30,625 + 113,75$
$y = 83,125$

$y = 2,5 \cdot 3,9^2 + 32,5 \cdot 3,9$
$y = -2,5 \cdot 15,21 + 32,5 \cdot 3,9$
$y = -38,025 + 126,75$
$y = 88,72$

$y = -2,5 \cdot 3,7^2 + 32,5 \cdot 3,7$
$y = -2,5 \cdot 13,69 + 32,5 \cdot 3,7$
$y = -34,225 + 120,25$
$y = 86,025$

x	4,2	4,3	4,7	4,9	5
y	92,4	93,6	97,5	99,2	100

$y = ax^2 + bx + c$
$y = -2,5 \cdot 4,2^2 + 32,5 \cdot 4,2$
$y = -2,5 \cdot 17,64 + 136,5$
$y = -44,1 + 136,5$
$y = 92,4$

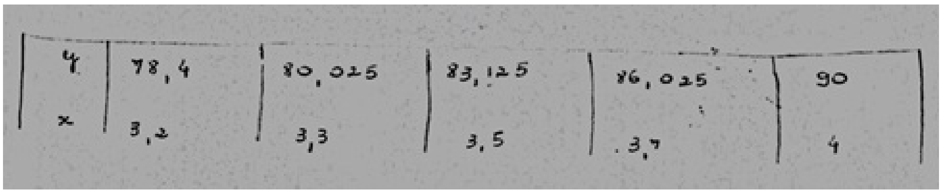
$y = -2,5 \cdot 4,5^2 + 32,5 \cdot 4,5$
$y = -2,5 \cdot 20,25 + 146,25$
$y = -50,625 + 146,25$
$y = 95,625$

$y = 2,5 \cdot 4,7^2 + 32,5 \cdot 4,7$
$y = 2,5 \cdot 22,09 + 32,5 \cdot 4,7$
$y = -55,22 + 152,75$
$y = 97,525$

$y = 2,5 \cdot 4,9^2 + 32,5 \cdot 4,9$
$y = 2,5 \cdot 24,01 + 32,5 \cdot 4,9$
$y = -60,025 + 159,25$
$y = 99,225$

$y = 2,5 \cdot 5^2 + 32,5 \cdot 5$
$y = 2,5 \cdot 25 + 32,5 \cdot 5$
$y = 62,5 + 162,5$
$y = 100$

Figura 7.2: *Apêndice 03 - Problema 01 - Letra B - Resolução do aluno I*



y	78,4	80,025	83,125	86,025	90
x	3,2	3,3	3,5	3,7	4

Figura 7.3: *Apêndice 03 - Problema 01 - Letra B - Tabela do aluno J*

Em relação ao item (C) deste problema 01, ao serem indagados sobre a continuidade da função, os 17 alunos não externaram seu pensamento em relação à continuidade (ou descontinuidade) da função, tendo 10 deles conseguido esboçar com o *GeoGebra* o gráfico da função, enquanto que 7 deles não conseguiram. Mesmo após terem sido dadas as noções iniciais de como se introduzir os dados no software em questão, ainda não foi suficiente para os 7 alunos conseguirem representar a função.

Ao analisarmos as resoluções relativas ao problema 02, conseguimos identificar que ao se informar a função no enunciado, os alunos afirmaram em sua totalidade que a questão estava mais fácil e ainda se mostraram mais seguros nos cálculos, pois diziam que a função era mais "*simples*"que a do problema anterior. Ao serem indagados sobre esta afirmação, os alunos J, K, M, O e P argumentaram que se tratava de uma função do 1º grau. Identificamos também que, no item (A), apenas dois alunos não fizeram a atividade e afirmaram que o tempo não tinha sido suficiente para tal.

Seguindo para o item (B), observamos que 14 alunos conseguiram realizar a atividade corretamente, como por exemplo o aluno G:

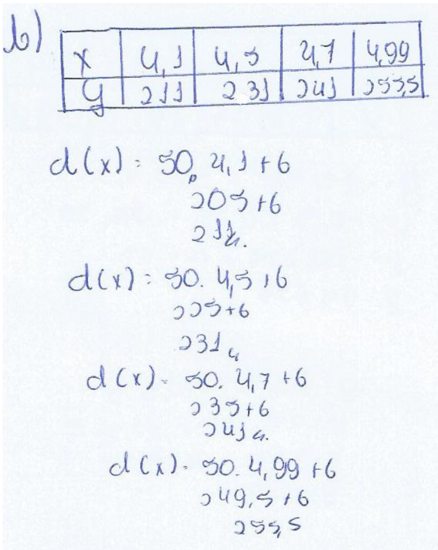


Figura 7.4: *Apêndice 03 - Problema 02 - Letra B - Resolução do aluno G*

Enquanto que três deles não conseguiram desenvolver corretamente a atividade ou como podemos observar, na figura a seguir, o aluno E não levou em consideração os valores que se aproximavam de 5 pela esquerda, tendo inserido em sua tabela o próprio 5, vejamos:

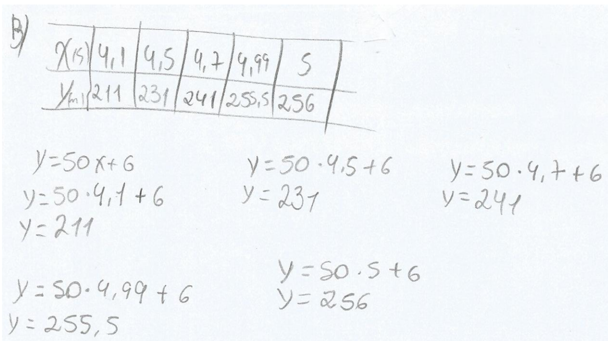


Figura 7.5: *Apêndice 03 - Problema 02 - Letra B - Resolução do aluno E*

Visto que a atividade propunha a análise dos limites laterais dessa função, quando x tendia a 5. A expressão limites laterais foi apresentada aos alunos no primeiro encontro, fazendo relação ao comportamento de uma função quando nos aproximamos de um determinado número, num dado intervalo.

Em relação ao item (C), dos 17 alunos que participaram desta atividade, identificamos que 12 acertaram a construção da tabela bem como efetuaram as operações necessárias corretamente. Dos 5 alunos restantes, 3 não fizeram e 2 deles inseriram o valor 5 em suas tabelas.

Quando chegamos à análise do item (D), percebemos que diferentemente do problema 01, o esboço do gráfico da função dada no problema 02 foi acessível a todos os alunos, isto é, 100 % deles conseguiram representar graficamente a função com o auxílio do *GeoGebra*. Destes, alguns se pronunciaram e afirmaram que a função foi muito simples para ser escrita no campo de entrada do software, diferentemente da função proposta no problema anterior.

Em relação ao item (E), logo após a obtenção da representação gráfica, pelo *GeoGebra*, 12 alunos afirmaram que a função era contínua no intervalo dado. Destes, apenas 4 complementaram o raciocínio afirmando que o gráfico não sofria interrupções no intervalo considerado, conforme o aluno F escreve:

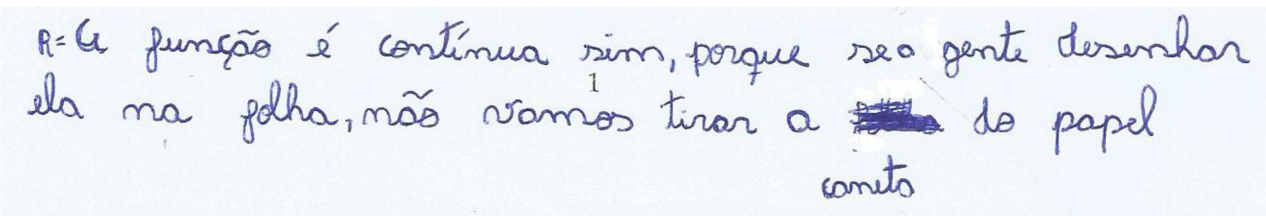

R= A função é contínua sim, porque se a gente desenhar ela na folha, não vamos tirar a caneta do papel

Figura 7.6: *Apêndice 03 - Problema 02 - resolução do aluno F*

Por fim, duas questões foram criadas e que buscavam dos alunos dois aspectos, após a aplicação da atividade, um em relação à formação do aluno mediante os conteúdos que foram apresentados, se tinham contribuído para o aprendizado de funções e a outra em relação ao uso do *GeoGebra* a fim de que eles pudessem dissertar sobre a utilidade deste software como uma ferramenta adicional na sala de aula ou algo que não seria necessário. Após a tabulação dos resultados, observamos que 12 alunos responderam às duas questões e apenas 5 deles não deram nenhuma resposta.

Dos alunos que responderam a primeira questão, 5 deles afirmaram que era um conteúdo de importância para o ensino superior, devendo-se este comentário ao fato de ao iniciarmos o primeiro encontro foi colocado que os conteúdos que seriam vivenciados faziam parte do estudo de funções, mas que eram aplicados no ensino superior.

Conforme podemos verificar no comentário do aluno J:

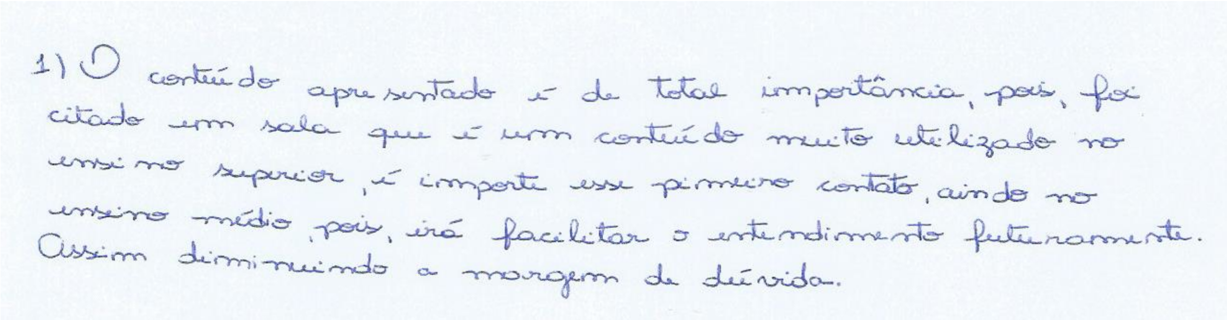

1) O conteúdo apresentado é de total importância, pois, foi citado em sala que é um conteúdo muito utilizado no ensino superior, é importe esse primeiro contato, ainda no ensino médio, pois, irá facilitar o entendimento futuramente. Assim diminuindo a margem de dúvida.

Figura 7.7: *Apêndice 03 - Questão 01 - Comentário do aluno J*

Em relação à questão 02, observamos que os alunos acham que a utilização do *GeoGebra* na sala de aula facilita muito a construção de gráficos de funções, como por exemplo o aluno C relata:

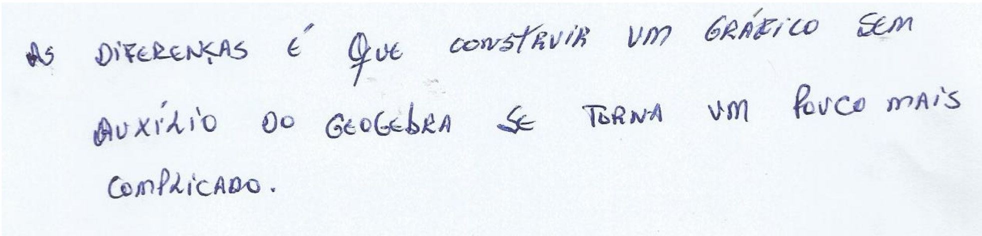
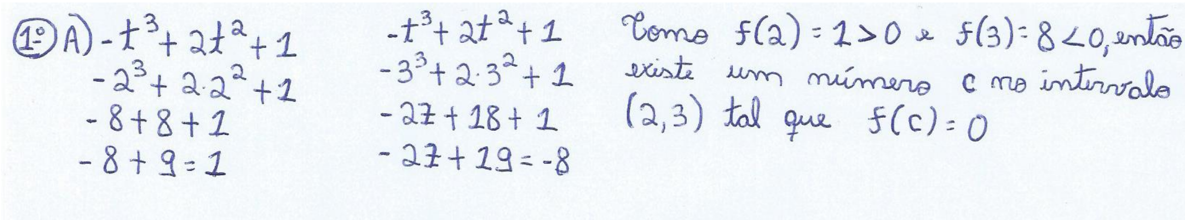

AS DIFERENÇAS É QUE CONSTRUIR UM GRÁFICO SEM AUXÍLIO DO GEOGEBRA SE TORNA UM POUCO MAIS COMPLICADO.

Figura 7.8: *Apêndice 03 - Questão 02 - Comentário do aluno E*

7.2.2 Análise da atividade proposta sobre TVI com ou sem o auxílio do GeoGebra

Para a abordagem das atividades e da intervenção acerca dos limites de funções, elaboramos os Apêndices 02 e 04, respectivamente, relacionados à intervenção do professor e a a atividade proposta ao aluno.

Dos 17 alunos que participaram da realização desta atividade, observamos que 10 conseguiram concluir de maneira correta o item (A) do problema 01, seis alunos não conseguiram concluir corretamente e apenas um deles que não fez a atividade proposta. Dentre os alunos, podemos perceber, por exemplo, que o aluno F desenvolveu a questão levando em consideração o TVI, conforme podemos verificar a sua resolução:



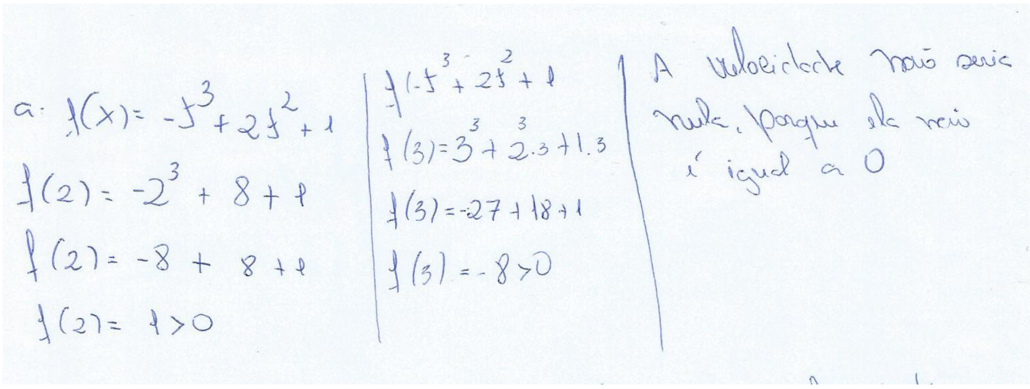
1º A) $-t^3+2t^2+1$
$-2^3+2\cdot2^2+1$
$-8+8+1$
$-8+9=1$

$-t^3+2t^2+1$
$-3^3+2\cdot3^2+1$
$-27+18+1$
$-27+19=-8$

Como $f(2)=1>0$ e $f(3)=8<0$, então existe um número c no intervalo $(2,3)$ tal que $f(c)=0$

Figura 7.9: *Apêndice 04 - Problema 01 - Resolução do aluno F*

Por outro lado, também identificamos quem não conseguiu comprovar a existência de uma raiz no intervalo considerado como, por exemplo, o aluno D mostra, em sua resolução:



a. $f(x)=-t^3+2t^2+1$
$f(2)=-2^3+8+1$
$f(2)=-8+8+1$
$f(2)=1>0$

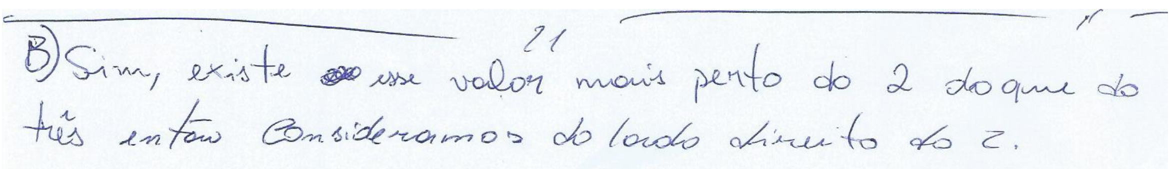
$f(-t^3+2t^2+1$
$f(3)=3^3+2.3^3+1.3$
$f(3)=-27+18+1$
$f(3)=-8>0$

A velocidade não seria nula, porque ela não é igual a 0

Figura 7.10: *Apêndice 04 - Problema 01 - Resolução do aluno D*

Analisando o item (B) do problema 01, identificamos que 10 alunos acertaram a resolução, 3 não conseguiram obter o resultado proposto pelo problema e 4 deles não fizeram a atividade. Foi possível ainda identificar os comentários, conforme serão mostrados a seguir:

O aluno Q afirmou que o valor que tornaria o volume nulo, era um número entre 2 e 3, sendo mais próximo do número 2 que o número 3. Percebemos que a conclusão foi tirada por este aluno, logo que ele esboçou graficamente a função, utilizando o *GeoGebra*. Observe o comentário:



B) Sim, existe esse valor mais perto do 2 do que do três então Consideramos do lado direito do 2.

Figura 7.11: *Apêndice 04 - Problema 01 - Justificativa do aluno Q*

O aluno O, conseguiu justificar a existência da raiz no intervalo considerado, conforme podemos visualizar em sua resolução:

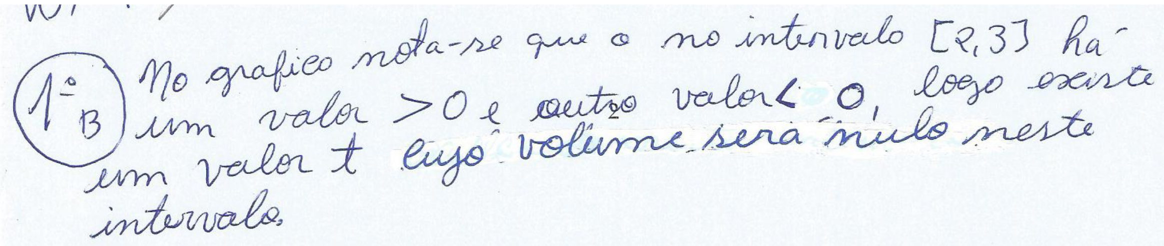

1º B) No grafico nota-se que o no intervalo [2,3] há um valor >0 e outro valor < 0, logo existe um valor t cujo volume será nulo neste intervalo.

Figura 7.12: *Apêndice 04 - Problema 01 - Justificativa do aluno O*

Já o aluno F não conseguiu justificar a existência de uma raiz no intervalo, pois ele partiu da ideia de que se não existe um valor positivo e um negativo, nos extremos do intervalo, então não existirá a raiz. Vejamos sua justificativa:

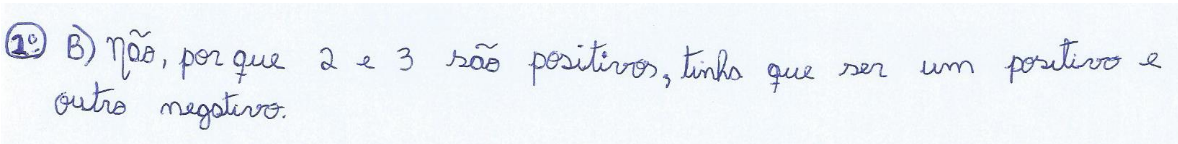

1º B) Não, por que 2 e 3 são positivos, tinha que ser um positivo e outro negativo.

Figura 7.13: *Apêndice 04 - Problema 01 - Justificativa do aluno F*

Por fim, o aluno P justificou corretamente a existência de uma raiz, usando adequadamente a ideia do TVI e percebendo as imagens da função com sinais contrários, conforme foi mostrado no terceiro encontro.

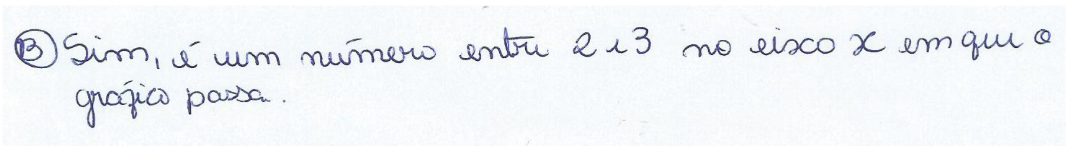
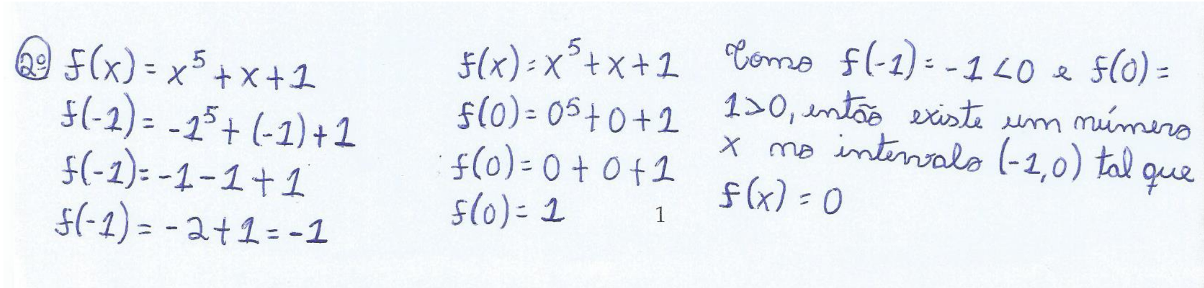

B) Sim, é um número entre 2 e 3 no eisco x em que o gráfico passa.

Figura 7.14: *Apêndice 04 - Problema 01 - Justificativa do aluno P*

Do problema 02, ao serem tabulados os resultados identificamos que 12 alunos conseguiram obter o resultado corretamente, 4 deles não obtiveram êxito em suas resoluções e apenas um dos alunos não fez a questão. Em relação aos alunos que resolveram corretamente o item (B) do problema 02, como exemplo, observe a resolução desenvolvida pelo aluno F:


2º $f(x) = x^5 + x + 1$
$f(-1) = -1^5 + (-1) + 1$
$f(-1) = -1 - 1 + 1$
$f(-1) = -2 + 1 = -1$

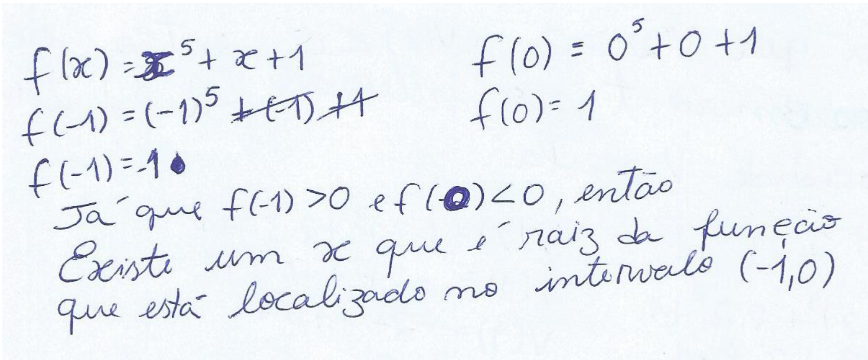
$f(x) = x^5 + x + 1$
$f(0) = 0^5 + 0 + 1$
$f(0) = 0 + 0 + 1$
$f(0) = 1$

1

Como $f(-1) = -1 < 0$ e $f(0) = 1 > 0$, então existe um número x no intervalo $(-1, 0)$ tal que $f(x) = 0$

Figura 7.15: *Apêndice 04 - Problema 02 - Resolução do aluno F*

Já em relação aqueles que não conseguiram resolver, percebemos que uma das dificuldades apresentadas é mostrada na resolução a seguir, desenvolvida pelo aluno O:


$f(x) = \cancel{x}^5 + x + 1$
$f(-1) = (-1)^5 \cancel{+(-1)+1}$
$f(-1) = -1$

$f(0) = 0^5 + 0 + 1$
$f(0) = 1$

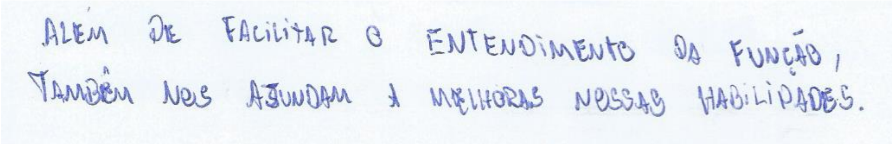
Já que $f(-1) > 0$ e $f(0) < 0$, então Existe um x que é raiz da função que está localizado no intervalo $(-1, 0)$

Figura 7.16: *Apêndice 04 - Problema 02 - Resolução do aluno O*

O aluno não identificou o sinal da desigualdade de corretamente, tendo escrito que $f(-1) = -1 > 0$ e que $f(0) = 1 < 0$. Mesmo assim ele ainda afirma que existe este x e está localizado no intervalo $(-1, 0)$.

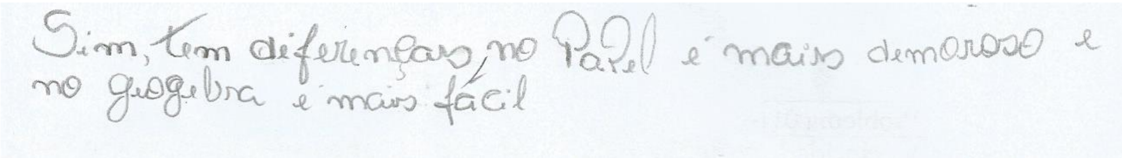
Para finalizar a análise da proposta, duas questões foram inseridas no Apêndice 04, idênticas às que foram dadas no Apêndice 03. Dos 17 alunos participantes, apenas um deles não externou o seu pensamento em relação às duas questões propostas.

Dos 16 alunos, comentários como o de facilitar a compreensão do conteúdo de funções e que o *GeoGebra* ajudava na representação gráfica, desde a construção até a visualização, evitando representações distorcidas e demoradas quando eles fariam a representação, utilizando lápis e papel foram identificadas e conforme podemos verificar nas imagens a seguir:



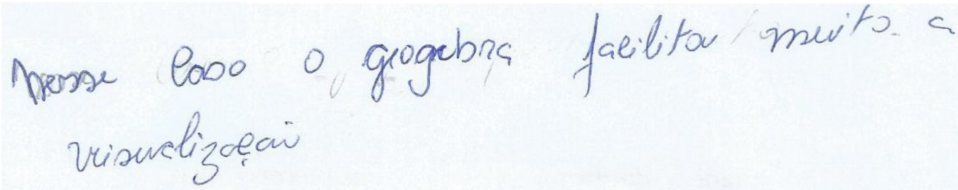
ALÉM DE FACILITAR O ENTENDIMENTO DA FUNÇÃO, TAMBÉM NOS AJUDAM A MELHORAR NOSSAS HABILIDADES.

Figura 7.17: *Apêndice 04 - Comentário do aluno I*



Sim, tem diferenças, no Papel é mais demoroso e no geogebra é mais fácil

Figura 7.18: *Apêndice 04 - Comentário do aluno B*



nesse caso o geogebra facilita muito a visualização

Figura 7.19: *Apêndice 04 - Comentário do aluno D*

7.3 Conclusões

Os resultados obtidos em nossa pesquisa tornam-se sinalizadores de uma possibilidade efetiva na abordagem de Limite e Continuidade com um enfoque construtivo no ensino médio, mediante o uso do *Geogebra* ou não, certo de que o seu uso foi considerado importante pelos alunos como um facilitador da aprendizagem. Percebemos que essa abordagem é adequada para as diversas séries do Ensino Médio, possibilitando o estudo de forma espiralizada quanto ao nível nestas três séries.

Após a análise dos resultados, mediante os questionários aplicados, pudemos verificar que os conteúdos que foram propostos são possíveis de serem aplicados no ensino médio, levando em consideração a existência dos limites laterais de uma função, a ideia de tender a um determinado número. Vimos ainda a possibilidade de inserção do Teorema do Valor Intermediário como uma ferramenta no estudo de funções a fim de que o aluno possa identificar a existência de raízes num determinado intervalo e que a inserção do *GeoGebra* nas aulas de matemática facilita a compreensão dos alunos desde o esboço gráfico de uma função até a análise do gráfico.

O presente trabalho tem o intuito de ser algo aditivo, no que diz respeito às contribuições daquilo que é necessário para que as ideias do Cálculo Diferencial e

Integral possam ser assimiladas durante processo de construção do pensamento matemático, melhorando, assim, a qualidade do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Nesse sentido, não consideramos este estudo acabado, pronto e definitivo, mas um elemento inicial para que sejam desenvolvidos novos projetos relacionados à potencialidade tanto do *GeoGebra*, como ferramenta didática para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos, bem como a utilização desses conteúdos (limites, continuidade e TVI) em situações interdisciplinares que produzam equações que não possuem modelos básicos de resoluções.

Capítulo 8

Apêndices

8.1 Apêndice 01 Atividades para apresentação aos alunos sobre o limite e a continuidade de uma função com e sem o auxílio do GeoGebra

Problema 01

Um estudante anotou a posição, ao longo do tempo, de um móvel sujeito a uma força constante e obteve os dados abaixo:

Instante (s)	Posição (m)
0	17
10	45
20	81

Pede-se:

(A) identificar o modelo matemático que representa a situação descrita, considerando a posição y (em metros) e o instante x (em segundos);

(B) analisar o que acontece com a posição do móvel, de forma gráfica, quando o tempo se aproxima de 5s, tanto para valores menores quanto para valores maiores que 5s?

(C) utilizar o *GeoGebra* para esboçar graficamente e constatar se a função é contínua no intervalo $[0, 20]$.

Problema 02

Com o auxílio de *GeoGebra*, esboce graficamente a função $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$, verificando se:

(A) há o limite de $f(x)$ quando x tende a 2, pela esquerda e pela direita;

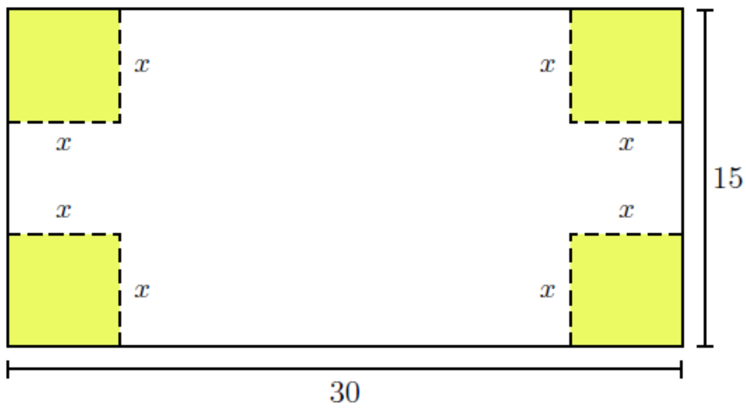
(B) a função é definida quando x é igual a 2;

(C) a função é contínua no intervalo $[0, 5]$.

8.2 Apêndice 02
Atividades para apresentação aos alunos sobre o Teorema do Valor Intermediário (TVI) com e sem o auxílio do GeoGebra

Problema 01

Uma caixa retangular aberta deve ser fabricada com uma folha de papelão de 15 cm x 30 cm, recortando quadrados nos quatro cantos, de medida x cm, e depois dobrando a folha nas linhas determinadas pelos cortes conforme a figura seguinte:



(A) identificar o modelo matemático que representa a situação descrita (*volume em função da altura*), considerando o volume y (em centímetros cúbicos) e a altura x (em centímetros);

(B) Existe alguma medida, entre 1 cm e 4 cm, do corte que produza uma caixa com volume de $648cm^3$?

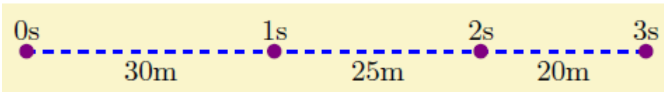
Problema 02

Na função definida por $f(x) = x^3 - x + 3$, determine um inteiro n para que se tenha $f(x) = 0$ para algum x entre n e $n + 1$.

8.3 Apêndice 03 Atividades propostas aos alunos sobre o limite e a continuidade de uma função com e sem o auxílio do GeoGebra

Problema 01

O motorista de um automóvel aplica os freios de modo suave e constante, de modo a imprimir uma força de frenagem constante a seu veículo, até o repouso. O diagrama a seguir mostra a posição do veículo a cada segundo a partir do instante em que os freios foram aplicados.



(A) identificar o modelo matemático que representa a situação descrita, considerando a posição y (em metros) e o instante x (em segundos);

(B) analisar o que acontece com a posição do móvel, de forma gráfica, quando o tempo se aproxima de 4s, tanto para valores menores quanto para valores maiores que 4s?

(C) utilizar o *GeoGebra* para esboçar graficamente e constatar se a função é contínua no intervalo $[0, 5]$.

Problema 02

Um motorista, saindo de um terminal A, viaja por uma estrada e nota que a distância percorrida, a partir do ponto inicial, pode ser calculada por $d(x) = 50x + 6$, sendo d em quilômetros e x em horas.

(A) Faça uma tabela listando as distâncias percorridas após cada intervalo de uma hora desde $x = 1$ até $x = 5$.

(B) Verifique o que ocorre com a distância percorrida à medida que se aproxima de $5h$, se considerássemos os seguintes instantes: $4,1h$; $4,5h$; $4,7h$ e $4,99h$, isto é, para valores próximos de $5h$, porém menores que ele;

(C) Verifique o que ocorre com a distância percorrida à medida que se aproxima de $5h$, se considerássemos os seguintes instantes: $5,7h$; $5,3h$ e $5,1h$, isto é, para valores próximos de $5h$, porém maiores que ele;

(D) Esboce graficamente, com o auxílio do *GeoGebra*, a função definida por $d(x) = 50x + 6$;

(E) Verifique se a função é contínua no intervalo $[1, 5]$.

$\boxed{\text{Comentários}}$

1) Descreva como você avalia a importância desses conteúdos para sua formação.

2) Aponte as diferenças, se existirem, entre a construção realizada com e sem o auxílio do GeoGebra.

8.4 Apêndice 04

Atividades propostas aos alunos sobre o Teorema do Valor Intermediário (TVI) com e sem o auxílio do GeoGebra

Problema 01

A velocidade V de um móvel varia com o tempo segundo a função horária $V(t) = -t^3 + 2t^2 + 1$, com V dado em metros por segundo e t em segundos. Pede-se:

(A) Determinar se existe algum $t \in [2, 3]$ tal que a velocidade V seja nula? Em caso afirmativo, onde estaria localizado, aproximadamente, este valor t?

(B) Esboçar graficamente, com o auxílio do *GeoGebra*, a função e verificar, caso exista, o valor de t no intervalo considerado do item (A).

Problema 02

Considere a função polinomial definida por $f(x) = x^5 + x + 1$. Mostre que existe um x que é raiz da função, localizado no intervalo $(-1, 0)$?

$\boxed{\text{Comentários}}$

1) Descreva como você avalia a importância desses conteúdos para sua formação.

2) Aponte as diferenças, se existirem, entre a construção realizada com e sem o auxílio do GeoGebra.

Referências Bibliográficas

[1] **A. HEFEZ**, L. M. Figueiredo e M. O. M. da Silva. *MA22 - Unidade 01 - Propriedades dos Limites de Sequências* Rio de Janeiro: SBM, 2012a.

[2] **A. HEFEZ**, L. M. Figueiredo e M. O. M. da Silva. *MA22 - Unidade 02 - Sequências Reais e Seus Limites* Rio de Janeiro: SBM, 2012b.

[3] **A. HEFEZ**, L. M. Figueiredo e M. O. M. da Silva. *MA22 - Unidade 08 - Funções Contínuas em Intervalos*. Rio de Janeiro: SBM, 2012c.

[4] **ÁVILA**, Geraldo. *Limites e Derivadas no Ensino Médio*? Revista do Professor de Matemática, nº 60, SBM, 2006.

[5] **BARRETO FILHO**, Benigno. Matemática aula por aula: ensino médio/Benigno Barreto Filho, Cláudio Xavier da Silva. - São Paulo: FTD, 1998. - (Coleção Matemática aula por aula)

[6] **BICUDO**, Maria Aparecida Viggiani . Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 2001.

[7] **BITTAR**, Marilena. *A incorporação de um software em uma sala de Matemática: uma análise segundo a abordagem instrumental*. Prelo, 2010.

[8] **BORBA**, M. C.; **PENTEADO**, M. G. Informática e Educação Matemática. 2ed. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

[9] **BRASIL**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio ; volume 2). Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

[10] **BUSSE**, Ronaldo da Silva, **SOARES**, Flávia dos Santos. *O Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio*. IX Encontro Nacional de Educação Matemática - IX ENEM, 2007, Belo Horizonte. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007.

[11] **CALIL**, Alessandro Marques. *Caracterização da utilização das TIC's pelos professores de Matemática e diretrizes para ampliação do uso*. Juiz de Fora - MG. 2011.

[12] **COSTA**, José Carlos de Oliveira. *O Currículo de Matemática no Ensino Médio do Brasil e a Diversidade de Percursos Formativos*. São Paulo - SP. 2011.

[13] **DANTE**, Luiz Roberto. *Matemática: Contextos e aplicações*/Luiz Roberto Dante. – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2013.

[14] **DASSIE**, Bruno Alves. *Euclides Roxo e a Constituição da Educação Matemática no Brasil*Rio de Janeiro - RJ. Abril/2008.

[15] **DOMINGUINI**; **GOMES**, Solange Freitas; **ALVES**, Ester de Souza Bitencourt. *Limite de uma função: Conteúdo viável para o ensino médio?* GT 02 – Educação matemática no ensino médio e ensino superior. II CNEM. IX EREM. Ijuí - RS. 2007.

[16] **DORNELLAS**, Julienne Jane Barbosa. *Análise de uma sequência didática para a aprendizagem do conceito de função afim*. Recife - PE. 2007.

[17] **FROTA**, Maria Clara Rezende; **BORGES**, Otto. *Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologia na educação Matemática*. GT: Educação Matemática, n.19, CNPQ, 2008.

[18] **GIL**, Katia Henn; BORGES, Otto. *Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra*. Porto Alegre - RS, 2008.

[19] **GARZELLA**, Fabiana Colombo. *A disciplina de Cálculo I: a análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos*. Faculdade de Educação da Unicamp. Campinas - SP. 2013.

[20] **GIOVANNI**, José Ruy. *Matemática: uma nova abordagem. Giovanni*, Bonjorno. - São Paulo: FTD, 2000. - (Coleção matemática uma nova abordagem)

[21] **KENSKI**, Vani Moreira. *Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância.* 5ed. Campinas, SP, Papirus, 2008.

[22] **MESQUIDA**, Peri *Catequizadores de índios, educadores de colonos,Soldados de Cristo: formação de professores e ação pedagógica dos Jesuítas no Brasil, de 1549 a 1759, à luz do Ratio Studiorum*. In: Educ. rev. no.48 Curitiba Apr./June 2013.

[23] **MOLON**, Jaqueline. *Cálculo no ensino médio: Uma abordagem possível e necessária com o auxílio do software Geogebra*. Santa Maria - RS. 2013.

[24] **OLIVEIRA**, Fernando Rodrigues de. *Uma proposta para o ensino de noções de cálculo no ensino médio*. Porto Alegre - RS. 2010.

[25] **PAIVA**, Manoel. *Matemática* - Paiva/Manoel Paiva. - 1. ed. - São Paulo: Moderna, 2009.

[26] **PANADÉS RUBIÓ**, Angel. *Matemática e suas tecnologias: ensino médio*: livro do professor/Angel Panadés Rubió, Luciana Maria Tenuta de Freitas. - São Paulo: IBEP, 2005. - (Coleção áreas do conhecimento). Obra em 3v. para alunos de 1ª a 3ª série.

[27] **PEREIRA**, Vinicius Mendes Couto. *Cálculo no ensino médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade*. Rio de Janeiro, RJ – Brasil. 2009.

[28] **PIMENTEL**, Ronaldo Abraão; PAULA, Maria José. *A dinâmica dos processos de aprendizagem em uma atividade de investigação*. Encontro Nacional de Educação Matemática, IX, Belo Horizonte. Anais. Recife: SBEM, p.1-10, 2007.

[29] **SÁ**, Ilydio Pereira de. *Introdução ao GeoGebra - Software educacional gratuito*. Centro Universitário Serra dos Órgãos (UNIFESO). Rio de Janeiro: março, 2010.

[30] **SANTOS**, V. C. M. *A Matemática escolar nos anos 1920: uma análise de suas disciplinas através das provas dos alunos do Ginásio da Capital do Estado de São Paulo*. São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

[31] **SOUZA**, Joamir Roberto de. *Novo Olhar Matemática*: 3/Joamir Roberto de Souza. - 2. ed. - São Paulo: FTD, 2013.