



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E  
MATEMÁTICA**

**MAURÍCIO ALVES NASCIMENTO**

**ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO E  
EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS E COTIDIANO ESCOLAR**

Campina Grande

2014

**MAURÍCIO ALVES NASCIMENTO**

**ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO E  
EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS E COTIDIANO ESCOLAR**

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, do Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB).

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

Campina Grande

2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

N244e Nascimento, Maurício Alves.  
Ensino-aprendizagem de trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar [manuscrito] / Maurício Alves Nascimento. - 2014.  
218 p. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

"Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática".

1. Trigonometria. 2. Educação matemática. 3. Prática pedagógica. 4. Cotidiano escolar. I. Título.

21. ed. CDD 516.24

# ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS E COTIDIANO ESCOLAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, do Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB).


Área de Concentração: Educação Matemática

Banca Examinadora



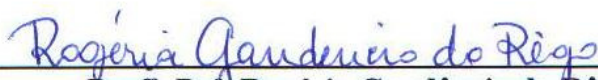
---

**Prof. Dr. Silvanio de Andrade – UEPB**  
(Orientador)



---

**Prof. Dr. Regina Leite Garcia - UFF**



---

**Prof. Dr. Rogéria Gaudêncio do Rêgo**

Campina Grande

2014

Dedico este trabalho as mulheres da minha vida – Marlene Alves Nascimento e Zefinha (“mães”), pela dedicação e pelo exemplo de vida, pois mesmo na complexidade e dureza da vida souberam depositar em mim ternura e coragem para acreditar na vida; Lígia Albuquerque Queiroz Nascimento (esposa), pela transfiguração diária do amor, por sua amizade e por sua companhia sempre terna; Renata Alves Nascimento (irmã), pela persistência na labuta do dia-a-dia – e aos meus irmãos, Matheus Alves Nascimento e Reginaldo Luiz do Nascimento, pela companhia nos momentos difíceis da família e pelo exemplo de coragem em lutar mesmo que muitos não acreditem em seus projetos.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu bom Senhor Jesus, fonte inesgotável de inspiração, onde me ensina a cada dia através da minha prática a ser sinal de motivação e superação. Exemplo supremo de vida.

Ao professor Dr. Silvanio de Andrade, orientador deste trabalho e meu maior incentivo para continuar estudando e acreditando que é possível uma Educação de melhor qualidade. Obrigado professor, por seu exemplo profissional e por toda tua dedicação a teus orientandos. Teu empenho e zelo em aproximar as distâncias entre a universidade e a escola é para mim sinal para continuar refletindo, procurando contribuir para minimizar tais distâncias.

À Universidade Estadual da Paraíba e todos que compõem o programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. De maneira especial a todos os professores e professoras, pelas críticas construtivas e sugestões, e pelas secretárias (Shirlânia e Karla) pela paciência e pela qualidade do exercício profissional.

Aos amigos do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação e Pós-Modernidade – GEPEP, os professores Eugeniano Brito, Poliana, Adeilson, Salvino, Rômulo Alexandre e Airlan. Em especial, aos professores Ledevande, Nahum, Jefferson, Vera, Tiego, Lucimara, Sheila, Miguel e Afonso, com estive mais tempo para reflexões. Obrigado pelas críticas e sugestões, elas proporcionaram contribuições maduras e significativas.

Aos demais alunos do mestrado, companheiros no processo de formação, em especial aos colegas, Erick, Rony, Érica, Charles, Débora, Negreiros, Alexandre, Juliana e ao amigo Marcos Edson.

Aos professores que compuseram a banca examinadora deste trabalho, nas pessoas da Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Rogéria Gaudencio do Rêgo e da Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Regina Leite Garcia, pelas contribuições significativas.

À Escola Estadual Francisca Martiniano da Rocha, ambiente inesgotável de pesquisa e laboratório de excelentes experiências profissionais. Aos professores que compõem o corpo docente dessa escola.

Aos meus alunos, especialmente aos que participaram desta pesquisa e que contribuíram na exploração dos problemas, trazendo novos olhares. Obrigado: *Adriana Gomes dos Santos, Adrielle da Silva Santos, Aires Costa, Ayanne Silva Macedo, Brendo Alves Muniz, Cassio Sousa da Silva, David Soares da Silva, Daniely Henrique dos Santos, Edson da Silva, Erica Taina Gomes Barbosa, Elisama Brasileiro Flor, Elizabeth do Nascimento Santos, Evilania Nascimento dos Reis, Fabio da Silva, Geovani Fernandes Matias, Jackeline do Nascimento Silva Santos, Lidiane Silva Leal, Lorena Ribeiro da Silva, Luana Souto Cavalcanti, Maria Tays Lino dos Santos, Misraeli Bezerra Cavalcanti, Natalia de Oliveira Araújo, Paloma Farias da Silva, Samara Maria da Silva, Suzana Batista da Silva, Thais Vieira do Nascimento, Thaise da Silva Bezerra e Waleska Gomes da Silva.*

Aos Frades Menores, em especial – Frei Zezinho, Frei Wilson e Frei Fernandes. Devo a vocês o meu amadurecimento humano e a consciência cristã que vocês vêm me proporcionando.

Aos meus amigos, Elias, Leandro, Laércio, Gilmar e família, Ailton, Denize, Marcos e Eliane, pela amizade, companheirismo e incentivo durante estes últimos anos.

Aos colegas de trabalho, que pela convivência diária contribuíram para o amadurecimento profissional, em especial aos professores Zé Walter e Evandro e as professoras Rosilda, Débora, Germana e Juliana, por ajudar nas correções do Português deste trabalho e na tradução do resumo.

Às minhas cunhadas, Agleice, Iolanda, Márcia, Lauanda e Núbia, pelas conversas, fruto da convivência, e pelo carinho e respeito que têm por mim.

Aos demais familiares, Luzia e Inês (avós), Dedé e Oscar (avôs), Walter, Ana e Yasmin (modelo de família), Wagner, Emanuel e Adilson (concunhados), Marisa (sogra) e Orlando (sogro), pelos momentos de descontrações que tanto contribuíram para as desopilações.

À minha esposa, Lígia, pela paciência, ternura e compreensão nos momentos de dedicação durante o trabalho e superação nos momentos difíceis.

À minha mãe Marlene, ao meu pai, Reginaldo, aos meus irmãos: Matheus, Reginaldo e Renata e a Zefinha, pelo apoio e principalmente por acreditar nos meus passos.



Na investigação concreta nunca vale tudo. Há argumentos mais ou menos válidos, mais ou menos convincentes, quer para o cientista quer para o que ele prevê ser o critério da *sua* comunidade científica *naquele tipo de investigação*. (...) Cada cientista é um todo em si, mas nem por isso deixa de ser parte de um todo (ESTEBAN 2003, p. 209 apud SANTOS, 1993).

## RESUMO

NASCIMENTO, Maurício Alves. **Ensino-Aprendizagem de Trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano da sala de aula**. 2014. Campina Grande: Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), 2014. (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática).

Este trabalho traz uma discussão–reflexão sobre o Ensino-Aprendizagem da Trigonometria através da Resolução e Exploração de Problemas, no cotidiano da sala de aula. Tem como objetivo investigar as potencialidades do ensino-aprendizagem da Trigonometria na perspectiva da Resolução e Exploração de Problemas, no cotidiano da sala de aula, na qual iremos refletir não apenas processos de ensino-aprendizagem do conteúdo de Trigonometria, mas também o contexto social da sala de aula de Matemática em que estamos mergulhados. Dentre algumas pesquisas lidas, fica evidente que a Trigonometria aparece como um obstáculo no ensino, tanto para os alunos, como para professores. As principais dificuldades encontradas pelos alunos, no ensino de Trigonometria, estão vinculadas ao não entendimento dos seus significados, conceitos e ideias, como a dificuldade de fazer conexões entre a Trigonometria do triângulo retângulo e a do ciclo trigonométrico. As principais dificuldades expostas por professores referentes ao domínio do conteúdo são de cunho operacional e conceitual. O que se presencia na prática de sala de aula é um ensino de Trigonometria com ênfase apenas em técnicas e não na formação dos conceitos, e os docentes, quando formados, têm, em sua grande maioria, o livro didático como a única fonte de preparação, que, de certa forma, limita o professor na superação dos obstáculos de ensino-aprendizagem dos alunos. Entende-se que nenhuma metodologia dá conta de atender a complexidade e multicontextualidade do cotidiano da sala de aula, sendo necessário, portanto, um olhar de suspeição, de inquietude e invenção a esse cotidiano. Nesse sentido, trazemos a Resolução e Exploração de Problemas como uma possível metodologia de ensino, por acreditar na possibilidade que ela favorece, sobretudo, no trabalho de formação de conceitos e ideias Matemáticas e de refletir a própria prática docente. Do planejamento ao desenvolvimento–execução da pesquisa utilizou-se de uma abordagem qualitativa do tipo: estudos cotidianos (Garcia, Alves, Ferraço, Serpa, entre outros) e pesquisa pedagógica (Lankshear e Knobel), em que o pesquisador exerce o papel de professor-pesquisador da sua própria sala de aula, problematizando assim como/por que/para que ensinar Matemática. A intervenção ocorreu em uma Escola Estadual da Paraíba, numa turma de 2º ano do ensino médio, onde realizou-se uma experiência didática com o conteúdo de Trigonometria, trabalhado na perspectiva da resolução e exploração de problemas. Entre os resultados obtidos destacam-se: engajamento mais intenso dos alunos nas explorações dos problemas, diálogo efetivo entre professor-aluno e entre aluno-aluno durante as aulas, tornando a sala de aula em um ambiente onde se constroem e se divulgam os conceitos trigonométricos explorados.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Sala de Aula. Trigonometria. Resolução e Exploração de Problemas.

## ABSTRACT

NASCIMENTO, Mauricio Alves. **Trigonometry Learning-Teaching through solution and exploration of everyday problems in the classroom**. 2014. Campina Grande: Universidade Estadual da Paraiba (UEPB), 2014. (Masters degree in Science and Mathematics Education).

This project offers a discussion-reflection about learning- teaching trigonometry, through solving and exploring problems of everyday classroom routine. The objective is to investigate the possibilities of learning-teaching trigonometry with the solving and exploring approach, in a classroom routine, in which we will rethink not only the learning/teaching process of trigonometry, but also the classroom social context. Researches show that trigonometry is an obstacle in teaching for both students and teachers. Students find the main issues in learning trigonometry related to non-understanding its concepts and ideas, such as trouble making connections between trigonometry's triangle rectangle and the trigonometric circle. Teachers find the main issues to be operational and conceptual. The trigonometry classes emphasize techniques, but not the formation of concepts, and the majority of the graduated teachers have the school books as their only resource, which in some way puts limits on the teachers' abilities of solving teaching/learning issues of their students. No methodology can cover the complex and the multi contextual classroom environment, thus is necessary to have a suspicious, restlessness view of this environment. This way we present the problems solution and exploration as a possible teaching methodology, which we believe can facilitate to formation of concepts and mathematical ideas to rethink teaching techniques. From the planning to development/execution of the research, was used a qualitative approach type: everyday studies (Garcia, Alves, Ferraco, Serpa, among others) and educational research (Lankshear and Knobel), in which the researcher executes the teacher/researcher role in his own classroom, analyzing how/ why/ what for teach mathematics. The laboratory took place in a high school of Paraiba (Escola Estadual Da Paraiba) sophomore classroom , using educational experiment with trigonometric contents, solving and exploring problems. Among the results obtained we could mention: intense participation of the students in solving problems, effective communication between teachers and students and students with students during classes, transforming the classroom into an environment where the explored trigonometric concepts are built and spread.

**Key words:** Education. Mathematic. Classroom. Trigonometry. Solve and explore problems.

## LISTA DE QUADROS

<b>QUADRO 1</b> – Relação das Metodologias exploradas e as Pesquisas	29
<b>QUADRO 2</b> – Contexto de desenvolvimento das pesquisas	31
<b>QUADRO 3</b> – Dificuldades apresentadas nas pesquisas	33
<b>QUADRO 4</b> – Distribuição da Trigonometria nas séries do Ensino Básico	38
<b>QUADRO 5</b> – Séries e Tópicos da Trigonometria explorados nas pesquisas	40
<b>QUADRO 6</b> – Relação da Frequência em Relação aos Encontros do Bloco 1	80
<b>QUADRO 7</b> – Relação dos Alunos em relação aos parâmetros estabelecidos na atividade conclusiva 1	110
<b>QUADRO 8</b> – Relação da Frequência em Relação aos Encontros do Bloco 2	111
<b>QUADRO 9</b> – Relação dos Alunos em relação aos parâmetros estabelecidos na atividade conclusiva 2	154
<b>QUADRO 10</b> – Relação da Frequência em Relação aos Encontros do Bloco 3	155
<b>QUADRO 11</b> – Relação dos Alunos em relação aos parâmetros estabelecidos na atividade conclusiva 3	181

## LISTA DE FIGURAS

<b>FIGURA 1:</b> Identificando hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente	84
<b>FIGURA 2:</b> Aplicando as razões trigonométricas	86
<b>FIGURA 3:</b> Percebendo regularidades 1	91
<b>FIGURA 4:</b> Percebendo regularidades 2	91
<b>FIGURA 5:</b> Imagem semelhante à realizada no quadro	100
<b>FIGURA 6:</b> Imagem semelhante a um desenho realizada por um aluno no quadro	101
<b>FIGURA 7:</b> Desenho da aluna em relação à atividade 4.4	102
<b>FIGURA 8:</b> Representação por meio de um desenho do problema 4.5	105
<b>FIGURA 9:</b> Exposição no quadro para tentar explicar a diferença entre o raio e o diâmetro de uma circunferência	113
<b>FIGURA 10:</b> Imagem da representação da medida de um arco	116
<b>FIGURA 11:</b> Representação através de um desenho do problema 2.4	122
<b>FIGURA 12:</b> Transição das Razões trigonométricas no ciclo trigonométrico	129
<b>FIGURA 13:</b> Representação do seno e do cosseno como um ponto da circunferência	137
<b>FIGURA 14:</b> Representação das razões trigonométricas no ciclo trigonométrico	140
<b>FIGURA 15:</b> Circunferência para exploração das relações a partir das razões trigonométricas	143
<b>FIGURA 16:</b> Exposição de um triângulo retângulo para representar o Teorema de Pitágoras	144
<b>FIGURA 17:</b> Relação fundamental a partir do Teorema de Pitágoras	145
<b>FIGURA 18:</b> Representação de um triângulo retângulo isósceles	146
<b>FIGURA 19:</b> Representação de um triângulo equilátero de lado 2	147
<b>FIGURA 20:</b> Representação do ângulo de $30^\circ$ nos demais quadrantes	149
<b>FIGURA 21:</b> Representação do ângulo de $45^\circ$ nos demais quadrantes	149
<b>FIGURA 22:</b> Representação do ângulo de $60^\circ$ nos demais quadrantes	150
<b>FIGURA 23:</b> Representação do seno no ciclo trigonométrico	169
<b>FIGURA 24:</b> Representação da função de Euler	170
<b>FIGURA 25:</b> Representação do cosseno no ciclo trigonométrico	174

## SUMÁRIO

<b>INICIANDO UMA CONVERSA.....</b>	<b>16</b>
<b>2. ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA, RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E COTIDIANO ESCOLAR: um olhar sobre a pesquisa e a sala de aula.....</b>	<b>23</b>
2.1 <i>Situando a Trigonometria: passado e presente</i> .....	23
2.2 <i>Trigonometria: o que as pesquisas apontam?</i> .....	28
2.3 <i>Dificuldades no ensino-aprendizagem da Trigonometria apontada pelas pesquisas e em nossas experiências de sala de aula</i> .....	32
2.4 <i>Resolução de Problemas</i> .....	41
2.4.1 Reformas no Currículo de Matemática e Resolução de Problemas.....	46
2.4.2 Resolução de Problemas: olhando o horizonte.....	51
2.5 <i>COTIDIANO ESCOLAR: refletindo a sala de aula de Matemática a partir de uma perspectiva libertadora</i> .....	57
2.5.1 A PESQUISA EM MATEMÁTICA COM O COTIDIANO DA SALA DE AULA COMO PRÁTICA DE LIBERDADE.....	62
<b>3. TESSITURAS DO COTIDIANO ESCOLAR E PLANEJAMENTO DA EXPERIÊNCIA .....</b>	<b>67</b>
3.1 <i>Considerações Iniciais</i> .....	67
3.2 <i>Perfil da escola</i> .....	67
3.3 <i>Para quem estamos planejando?</i> .....	68
3.4 <i>O ensino de Matemática em nossa escola</i> .....	69
3.5 <i>A Proposta</i> .....	71
3.5.1 Preâmbulo da Proposta .....	71
3.5.2 Trigonometria: o caminhar da exploração do pensamento trigonométrico.....	75
3.5.3 Os Problemas.....	75
3.5.3.1 Informações Gerais do Bloco 1 .....	76
3.5.3.2 Informações Gerais do Bloco 2 .....	77
3.5.3.3 Informações Gerais do Bloco 3 .....	77
<b>4. RETALHOS E IMPRESSÕES DA EXPERIÊNCIA REALIZADA.....</b>	<b>79</b>

<i>4.1 Retalhos das Atividades do Bloco 1: Trigonometria do triângulo retângulo</i> .....	79
4.1.1 Descrição e análise do encontro 1 (01/06/2012) – Aulas 1 e 2 .....	80
4.1.2 Descrição e análise do encontro 2(12/07/2012) – Aulas 3 e 4 .....	83
4.1.3 Descrição e análise do encontro 3 (13/07/2012) – Aulas 5 e 6 .....	88
4.1.4 Descrição e análise do encontro 4 (19/07/2012) – Aulas 7 e 8 .....	92
4.1.5 Descrição e análise do encontro 5 (20/07/2012) – Aulas 9 e 10 .....	97
4.1.6 Descrição e análise do encontro 6 (26/07/2012) – Aulas 11 e 12 .....	100
4.1.7 Descrição e análise do encontro 7 (27/07/2012) – Aulas 13 e 14 .....	104
4.1.8 Descrição e análise do encontro 8 (02/08/2012) – Aulas 15 e 16 .....	105
<i>4.2 Retalhos das Atividades do Bloco 2: Estabelecendo a transição da Trigonometria do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico</i> .....	111
4.2.1 Descrição e análise do encontro 1 (09/08/2012) – Aulas 17 e 18 .....	111
4.2.2 Descrição e análise do encontro 2 (10/08/2012) – Aulas 19 e 20 .....	115
4.2.3 Descrição e análise do encontro 3 (17/08/2012) – Aulas 20 e 21 .....	117
4.2.4 Descrição e análise do encontro 4 (13/09/2012) – Aulas 21 e 22 .....	122
4.2.5 Descrição e análise do encontro 5 (14/09/2012) – Aulas 23 e 24 .....	126
4.2.6 Descrição e análise do encontro 6 (21/09/2012) – Aulas 25 e 26 .....	128
4.2.7 Descrição e análise do encontro 7 (11/10/2012) – Aulas 27 e 28 .....	132
4.2.8 Descrição e análise do encontro 8 (18/10/2012) – Aulas 29 e 30 .....	137
4.2.9 Descrição e análise do encontro 9 (19/10/2012) – Aulas 31 e 32 .....	143
4.2.10 Descrição e análise do encontro 10 (25/10/2012) – Aulas 33 e 34 .....	151
<i>4.3 Retalhos das Atividades do Bloco 3: Estudando as Funções Trigonométricas</i> .....	155
4.3.1 Descrição e análise do encontro 1 (26/10/2012) – Aulas 35 e 36 .....	155
4.3.2 Descrição e análise do encontro 2 (01/11/2012) – Aulas 37 e 38 .....	160
4.3.3 Descrição e análise do encontro 3 (08/11/2012) – Aulas 39 e 40 .....	167
4.3.4 Descrição e análise do encontro 4 (09/11/2012) – Aulas 41 e 42 .....	169
4.3.5 Descrição e análise do encontro 5 (15/11/2012) – Aulas 33 e 44 .....	176
4.3.6 Descrição e análise do encontro 6 (16/11/2012) – Aulas 45 e 46 .....	178
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>182</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>187</b>
<b>ANEXOS</b> .....	<b>193</b>

<i>ANEXO A: Problemas referentes a Trigonometria do triângulo retângulo .....</i>	<i>194</i>
<i>ANEXO B: Atividade conclusiva do Bloco 1.....</i>	<i>200</i>
<i>ANEXO C: Problemas referentes a Trigonometria no ciclo trigonométrico.....</i>	<i>203</i>
<i>ANEXO D: Atividade conclusiva do Bloco 2 .....</i>	<i>208</i>
<i>ANEXO E: Problemas referente as funções trigonométricas .....</i>	<i>210</i>
<i>ANEXO F: Atividade conclusiva do Bloco 3.....</i>	<i>216</i>



## INICIANDO UMA CONVERSA...

Como começaremos a esboçar os primeiros traços dessa pesquisa? Tal pesquisa tem origem em um processo que não sabemos onde, quando e como terminaremos, e que buscaremos descrever, de forma mais fidedigna, nessa introdução.

Há algum tempo estivemos na educação básica. Como aluno, ao todo foram 13 anos, passando neste trajeto, por 12 professores. Estes anos contribuíram para nossa formação como cidadão e para a construção das nossas crenças, convicções e valores. Foram anos de construção de um pensamento matemático, onde “não tivemos problemas”. Éramos considerados pelos professores como bons alunos em Matemática. Talvez pelo fato de termos nos adaptado bem a política avaliativa da disciplina e a sua forma de apresentação que, ao longo desses anos, não sofreu muitas mudanças significativas.

Destacamos este período, pois foi onde tivemos nossa primeira experiência com a Trigonometria, precisamente na fase final da educação básica. Tal conteúdo chamava-nos a atenção pelos seguintes aspectos: quantidade de fórmulas existentes e a necessidade de decorar/saber todas aquelas fórmulas para estruturar um pensamento trigonométrico coeso.

Embora tivéssemos trabalhado alguns problemas, estes eram resolvidos exclusivamente pelo professor. Ficávamos admirados com “aquelas contas”. Algumas preenchiam todo o quadro. Não havia discussões e nem explorações, no final se reduzia a decorar/saber fórmulas e manipulações algébricas. Escutávamos respostas como: “lá na frente vocês irão perceber a aplicabilidade”, ou “nem tudo na Matemática se consegue aplicar” – algumas vezes quando perguntávamos ao professor: pra que serve este conteúdo? Onde iremos aplicá-lo? Não dávamos importância a tais perguntas, porque gostávamos daquelas manipulações algébricas. E, como sabíamos fazer o que iria ser cobrado, bastava.

Por outro período de tempo, mais curto, quatro anos, vivenciamos a experiência do curso de Licenciatura Plena em Matemática de uma instituição pública. Neste momento aconteceu nossa segunda experiência com a Trigonometria, através da Componente Curricular “Complemento Elementar I”. Essa segunda experiência não foi muito diferente da primeira, um ensino centrado exclusivamente no rigor e receituário (definições, exemplos, teoremas e suas demonstrações, seguidos de exercícios e problemas) com nenhuma interação entre as pessoas que constituíam aquela sala de aula. Identificamos traços de que apenas mudamos de nível de escolaridade.

Percebemos que legitimava-se o ensino dessa Matemática pronta e acabada, sem levar em consideração sua construção social. Nesse sentido, a concepção de Matemática trabalhada em quanto aluno da escola básica e na licenciatura são as mesmas, embora essa última tenha dado um diploma em que estaríamos prontos a ensinar.

Ao nos tornarmos professores, aquelas perguntas de quando fora-nos alunos do 2º ano médio do ensino médio (pra que serve este conteúdo? Onde iremos aplicá-lo?), vieram à tona novamente, agora não perguntadas por nossos colegas de sala, mas por nossos alunos. Os papéis se inverteram! Tínhamos que dar respostas convincentes, mas não às tínhamos e não sabemos se iremos tê-las. Eram os reflexos de antigos professores expressos na prática de um professor no início do seu exercício profissional, que devido a uma formação sem muita reflexão, acaba por reproduzir situações vividas em sua formação escolar inicial.

Neste percurso, destacamos as disciplinas pedagógicas cursadas durante o curso de Matemática, como provocadoras de inquietações. Pois, questionávamos sobre possíveis alternativas para tornar o processo ensino-aprendizagem acessíveis a todos.

Entrelaçando as formações oriundas da educação básica e da educação superior com as experiências vivenciadas em sala de aula (três anos de trabalhos desenvolvidos com alunos do Ensino Médio) surgiram várias inquietações na perspectiva de desenvolver um trabalho que minimizasse as distâncias ainda presentes no ensino-aprendizagem.

Sendo assim, sentimos a necessidade de desenvolver um trabalho em que as distâncias, percebidas nesse processo da Matemática em nossa formação fossem aproximadas.

Nesta perspectiva, elaboramos e aplicamos o Trabalho de Conclusão do Curso (TCC), tendo como objetivo apresentar/discutir/refletir o conceito de Função a partir de situações problemas. Apontamos este trabalho como ponto de partida do que estamos aprofundando atualmente no Mestrado, pois, a partir das intervenções que vivenciamos no TCC, notamos os alunos mais envolvidos nas atividades e assumindo as situações problemas como suas. Aquelas aulas, que ministrávamos da forma que fomos habituados a fazer (definições – exercícios – correções – atividade avaliativa), se tornavam agora mais dinâmicas.

Durante a intervenção também percebemos alguns pontos negativos que nos fizeram amadurecer, tal como o tempo gasto em uma atividade, que não fazia sentido para o aluno, pois nosso trabalho ainda estava voltado para a execução, tendo pouca reflexão e contextualização do problema.

Tais inquietações originaram nosso interesse em pesquisar e especializar-mo-nos na área de Educação Matemática. Sentimos a necessidade de fazermos uma pós-graduação que nos ajudasse a responder nossas perguntas e que amenizasse nossas inquietações e

preocupações do cotidiano da sala de aula. Dentre as possibilidades, escolhemos o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática (MECM), proposta pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB).

Queríamos passar a viver como águia<sup>1</sup>, como definido por Leonardo Boff no livro “A águia e a galinha”. Queríamos nos tornar livres de uma pedagogia educacional que prioriza os predestinados ao sucesso, de imposições curriculares, que mais favorecem aos interesses econômicos de quem rege o capitalismo do que àqueles que já nasceram marginalizados por uma sociedade desigual. Queríamos voar, assim como a águia, pois nascemos águia. Nossos alunos “nasceram águias”, e, como explicado no texto original, eles precisam apenas de um especialista (professor) que os motive e encoraje a voar, pois, vivendo como galinhas, eles nunca irão desenvolver as habilidades compatíveis com suas especialidades (qualidades).

Queremos tocar e nos deixarmos tocar pelo cotidiano de sala de aula que nos será proporcionado, onde conteúdo e métodos moldam e deixam-se moldar. Cotidiano este esquecido, rico, chagado, fragmentado pela politicagem, onde os interesses deixam de ser comuns à categoria e passam a divergir, devido aos “cabrestos” postos pelo sistema político que está em vigor.

Mesmo imerso numa realidade onde os políticos ditam o que é ou não para fazer, – não de forma direta, mas por seus “fiéis escudeiros” – agradecemos pela oportunidade, pois neste período percebemos que o sistema educativo, na prática, é mais complexo do que havíamos imaginado. Pensávamos, ao iniciar no magistério, que os problemas didáticos-pedagógico seriam os mais difíceis de contornar. Percebemos que instruído por uma formação inicial não crítica, as experiências cotidianas, embora suscitasse impulsos para romper a realidade apresentada, não forneciam força suficiente para enfrentar tais “leões”, era preciso refletir “n vezes” antes de falar algo, pois, este poderia gerar diversas implicações, dentre elas a perda do emprego. Salientamos o fato que 75% dos funcionários desta escola vivem neste regime escravista, em busca de liberdade.

Em 15 de março de 2012, recebemos nossa “carta de alforria”. Acabáramos de ganhar voz e vez, pois neste dia, recebemos o ato governamental, pós um concurso realizado em janeiro do decorrente ano, para exercer a função de professor de Educação Básica 3. Fazíamos parte, a partir desta data, do quadro efetivo dos funcionários do Estado da Paraíba.

Após contarmos este episódio vivenciado, trazemos em nossa memória vozes que, através da prática docente, defendem uma educação descontextualizada. Uma educação que

---

<sup>1</sup> Livro a Águia e a Galinha do Leonardo Boff

não reflete o todo, que está mais interessada na quantidade de aprovados no vestibular, que ignora a realidade trazida pelo aluno, que centraliza os saberes naqueles “predestinados” ao sucesso, que acaba excluindo em sua própria prática.

Acreditamos na perspectiva da educação crítica, onde a escola é levada para dentro da vida. Leonardo Boff – na apresentação da edição brasileira do livro “A Vida nas Escolas” de Peter Maclaren, afirma entender “a escola como o lugar do aprendizado e da apropriação do saber acumulado de uma sociedade ou cultura, para depois frutificar na vida”. Nós defendemos que tal lugar de aprendizado não frutifica só depois. Ele frutifica no processo, pois a vida é vivida aqui e agora. Não se podem separar tais realidades, elas existem no contínuo.

Numa perspectiva crítica da educação, trazida por Leonardo Boff, ele, assim exposto por Boff, inverte a ordem:

(...) quer levar para dentro da escola, a vida com sua dinâmica e suas contradições, com sua base econômica e daí com sua dimensão de classe, com seu suporte político e daí com sua referência a relações de poder, com sua marca de gênero e daí com todas as singularidades e conflitos ligados ao masculino e ao feminino, com sua ideologia subjacente e daí com o sentido de vida e de mundo que se escondem por detrás dos vários estilos de vida (BOFF, 1977. pg.IX)

Sendo assim, numa visão crítica da educação, apresentamos a Resolução de Problemas como um método de ensino-aprendizagem que possibilita refletir, por meio de discussões-explorações – resoluções – explorações, o cotidiano da sala de aula. Ao mesmo tempo, percebemos que esta metodologia não dá conta de tamanha complexidade. Aliás, nenhuma metodologia é capaz de abarcar o cotidiano.

A forma como iremos observar/analisar os fatos ocorridos em sala de aula, depende das crenças que, de certa forma, foram se constituindo em nós. E se não nos deixarmos ser tocados pelo cotidiano, acabamos sendo moldado por verdades absolutas.

Dessa forma, não tínhamos dúvidas de que nossa caminhada como docente necessitava de reflexões trazidas pela educação Matemática. Já no mestrado, diante das nossas questões e tema de pesquisa, nos defrontamos com a resolução de problema, trazendo o desafio de fazermos uma pesquisa voltada para o ensino-aprendizagem de Trigonometria na perspectiva da Resolução de Problemas.

Especificamente, o interesse em pesquisar o conteúdo de Trigonometria se deu por vários motivos, dentre eles:

- pela necessidade de buscarmos outras formas de trabalhar tal conteúdo numa perspectiva que produzisse compreensão e aprendizagem;

- por percebermos que tal conteúdo é apresentado por alguns professores como difícil de ensinar, e, sendo assim, é sempre o último do plano anual de muitos profissionais e o primeiro a ser excluído caso não dê tempo de trabalhar todos os conteúdos;

- da necessidade de estabelecermos conexões entre a Trigonometria do triângulo retângulo e a Trigonometria no ciclo trigonométrico, explorando conjuntamente duas grandes áreas da Matemática – Geometria e Álgebra;

- da grande aplicação que tal conteúdo apresenta com diversas áreas de conhecimento, e mostrarmos que a mesma não é apenas uma ferramenta, mas também um campo de estudo.

As inquietações misturadas com nossos interesses configuram, embora numa visão ampla, o contexto em que nossa pesquisa quer adentrar: a Trigonometria e a necessidade de um ensino voltado para a compreensão por meio da Resolução de Problemas.

Particularmente, o conteúdo de Trigonometria apresenta inúmeras possibilidades de intervenção, tanto na parte metodológica (uso das tecnologias, exploração de problemas, modelagem Matemática, utilização de projetos, o uso de jogos, entre outros) quanto na parte histórica (desfazer alguns mitos históricos trazidos pelos livros didáticos, adentrar na história da Matemática para desfazer irregularidades conceituais, entre outras). Na necessidade de um ensino por meio da Resolução de Problemas, temos outro tanto de possibilidades.

Sendo assim, surge a necessidade de tornar mais claro e específico nossa questão de pesquisa ou pergunta norteadora.

Uma vez identificado o problema de pesquisa, podemos começar a tentar torná-lo mais claro e específico possível. Isso implica encarar o problema como uma situação ou circunstância que pode ser definida em termos de algo a ser resolvido, ou para o qual buscamos uma solução ou resposta. (LANKSHEAR e KNOBEL, 2008. pg.47)

Diante de tantas inquietações, é pretendido com essa pesquisa *investigar as potencialidades do ensino-aprendizagem da Trigonometria através da Resolução de Problemas, com o cotidiano da sala de aula, não ficando apenas no desenrolar do conteúdo, mas olhando também para a multicontextualidade<sup>2</sup> e da sala de aula.*

Portanto, imbuído por tal contexto, se caracteriza o seguinte questionamento: ***Quais contribuições a Resolução de Problemas pode oferecer como uma alternativa didática ao ensino-aprendizagem<sup>3</sup> da Trigonometria?***

Nessa pesquisa foi necessário:

<sup>2</sup> Multicontextualidade refere-se as diversas variáveis que ocorrem ou que podem ocorrer em uma sala de aula.

<sup>3</sup> Preferimos assim usar, ensino-aprendizagem, pôr acreditarmos que estes dois campos eles se completam, e no processo em sala de aula eles andam de “mãos dadas”. Para nós professores, sabemos que quando se trata de situações em sala de aula, o ensino ele é mais sólido/estruturado, enquanto que a aprendizagem é mais fluida.

- Proporcionar a formação do pensamento trigonométrico através de situações problemas;
- Explorar situações problemas de Trigonometria que dinamizem a sala de aula numa perspectiva de tornar os alunos mais atuantes do processo ensino-aprendizagem;
- Enxergar as múltiplas faces do cotidiano da sala de aula como determinantes do ensino-aprendizagem de Matemática.

Ao longo deste capítulo, destacamos o nosso interesse pelo ensino-aprendizagem da Trigonometria e em capítulos posteriores iremos confrontar com as dificuldades que pesquisadores apresentam no exercício desse conteúdo e possíveis alternativas para minimizar tais dificuldades.

Muito se tem falado sobre a Resolução de Problemas em pesquisas, livros, palestras, cursos de formação inicial ou continuada, bem como da perspectiva dessa abordagem como uma metodologia de ensino. Além disso, percebemos que existem várias interpretações se práticas por quem faz uso dela.

Nos livros didáticos, aprovados no PNLD (Plano Nacional do Livro Didático), encontramos a Resolução de Problemas desconectada da sua essência. Os problemas são apresentados no início dos capítulos como motivadores e muitos não são retomados! É comum encontrarmos a seguinte afirmação: “ao longo do capítulo vocês terão possibilidades de resolver problemas deste tipo”. (Machado, 2010)

Esta perspectiva, mesmo que intuitivamente, reflete a visão de muitos professores de ensino de Matemática para resolver problemas. Tal perspectiva se torna limitada, pois contribui muito pouco para a formação dos conceitos e ideias Matemáticas.

Temos uma literatura vasta, quando comparada há 30 anos, mesmo assim, poucas são as pesquisas que têm discutido o processo ensino-aprendizagem da Resolução de Problemas refletindo a sala de aula em sua totalidade, com pouca atenção aos aspectos sócio-político-culturais do cotidiano da sala de aula. Na verdade, quando trabalhamos com a Resolução de Problemas com uma metodologia de ensino não podemos desconsiderar esses aspectos, pois, como metodologia de ensino, ela pode nos proporcionar uma aproximação mais efetiva dessa realidade multifacetada da sala de aula.

Embora exista essa efervescência a nível mundial desde a década de 1980, percebemos que o foco dado por pesquisadores que trabalham com Resolução de Problemas é percebê-la como parte integrante no processo ensino-aprendizagem em salas de aulas de Matemática.

Dando continuidade, no Capítulo 2, situaremos a Trigonometria nas pesquisas, nas propostas curriculares e nos livros didáticos. Situaremos também, a Resolução de Problemas,

na qual, apresentaremos reformas curriculares que apontam para a necessidade de um ensino através da Resolução de Problemas, bem com reflexões sobre passado-presente-futuro do tema. E por fim, levantaremos reflexões sobre a pesquisa baseada no cotidiano da sala de aula.

No Capítulo 3, apresentaremos o planejamento da experiência. Situaremos os perfis da escola, dos alunos e da concepção de Matemática dos professores que lecionam na escola.

No Capítulo 4, trataremos dos retalhos e das impressões da experiência realizada. Neste capítulo, traremos as atividades, as descrições e as análises de cada encontro.

Finalizamos, apresentando nossas considerações finais do trabalho, apresentando os resultados e perspectivas de continuidade no campo explorado.

## **2. ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA, RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E COTIDIANO ESCOLAR: um olhar sobre a pesquisa e a sala de aula**

Neste capítulo apresentaremos um olhar sobre as pesquisas em Trigonometria e suas relações com a sala de aula. Desta forma organizamos o capítulo a partir das seguintes ideias: o que as pesquisas apontam sobre a Trigonometria, as dificuldades no ensino-aprendizagem deste conteúdo, as implicações do livro didático e dos documentos curriculares no ensino-aprendizagem da Trigonometria e o que pretendemos com esta temática.

### **2.1 Situando a Trigonometria: passado e presente**

Antes da exposição de nossa proposta falaremos um pouco da Trigonometria, fundamentado assim, a escolha e a sequencia das atividades desenvolvidas.

Como mencionamos, anteriormente, este tópico é visto por professores como complicado de estabelecer compreensões significativas no seu processo de ensino-aprendizagem. Destacamos também, que tais dificuldades, em muitas ocasiões, devem-se ao fato da amplitude de conceitos matemáticos envolvidos e por contemplarem duas áreas da Matemática: a Álgebra e a Geometria. Sendo assim, fundamentaremos a escolha e a sequencia das atividades desenvolvidas destacando traços do que achamos necessários para a construção do pensamento trigonométrico.

Quando pensamos em Trigonometria, ou quando lemos sobre o tópico, a primeira utilidade de estudar este conteúdo se reporta aos problemas do cálculo de distâncias inacessíveis. Historicamente, “a Trigonometria”<sup>4</sup> foi criada para resolver tais problemas. Hoje percebemos diversas aplicações!

Queremos olhar para o passado para entendermos melhor a construção dos conceitos trigonométricos explorados (ângulo, arco, seno, cosseno, função trigonométrica), “pois os erros e dificuldades superados pelos matemáticos, bem como as adaptações ocorridas ao longo da história, poderão fazer com que compreendamos melhor as dificuldades apresentadas pelos alunos” (LINDEGGER, 2000, p.39).

Historicamente percebemos que as primeiras ideias da exploração do pensamento trigonométrico estavam ligadas a Astronomia. Lindegger (2000, p.41) afirma que “na

---

<sup>4</sup> No período que apareceram os problemas de distâncias inacessíveis não se tinha conhecimento da palavra trigonometria, esta, segundo os historiadores, apareceu no século XVI depois de Cristo. Hoje, com todos os estudos realizados podemos afirmar que o cálculo de distâncias inacessíveis retrata o início do pensamento trigonométrico.



astronomia, é impossível estudar as fases da lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de medidas e uma escala”. A Trigonometria estudada pelos astrônomos era a Trigonometria esférica, que segundo Lindegger (2000) esta durante muito tempo foi a sua maior aplicação.

Indícios significativos apontam que os primeiros passos dados em relação à Trigonometria tenham sido dados pelos egípcios e babilônios. Pois, os babilônios tinham conhecimento do sistema sexagesimal, como também, eram muito interessados pela astronomia.

Os gregos aparecem como colaboradores também de ideias relacionadas a Trigonometria, devido suas grandes contribuições à Geometria, campo que a Trigonometria está ligada. Dentre vários sábios gregos, destacamos Tales de Mileto com seus estudos voltados a semelhança, onde ao passar pelo Egito estabeleceu relações para calcular a altura da Pirâmide de Quéops, o que hoje chamamos de tangente – ferramenta para o cálculo de distâncias inacessíveis – e Pitágoras cuja relação atribuída a ele, o quadrado da hipotenusa é igual ao quadrado dos catetos, ajuda no que hoje conhecemos como relação fundamental da Trigonometria.

Outros gregos, como Hípsicles (segunda metade do segundo século a.C.) – com influência dos babilônios é apontado como autor de uma obra de astronomia (*De ascensionibus*) cuja contribuição para a Trigonometria tenha sido a adoção da divisão do círculo em 360 partes –, Aristarco de Samos (310-230 a.C.) – com suas estimativas das distâncias relativas do Sol e da Lua, usou pela primeira vez a aproximação do seno de um ângulo pequeno, deduzindo relações significantes para o avanço da Trigonometria –, Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.) – usou semelhança de triângulos e razões trigonométricas, calculou a distância entre dois pontos da superfície terrestre, o raio e a medida da circunferência da Terra, procurava calcular o comprimento da corda geométrica de um círculo em função do ângulo central correspondente –, Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.) – grande astrônomo, introduziu uma única “função trigonométrica”, conhecida como função corda, e a partir dela associou a cada corda de um arco um ângulo central correspondente, estabelecendo assim, uma tabela trigonométrica com os ângulos variando de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ ; considerando a divisão de Hipsicles do círculo de 360 partes, denominou de arco de 1 grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida; dividiu cada arco de 1 grau em 60 partes; calculou a distância da Terra a Lua; e devido ao avanço ocorrido por meio de seus estudos ficou conhecido como o pai da Trigonometria – e Ptolomeu (100-180 d.C.) – autor do *Almagesto* (Síntese Matemática) obra mais importante da Trigonometria da antiguidade, na

qual aparecem, além das tabelas de cordas, as identidades trigonométricas, a demonstração de  $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}\alpha^2 = 1$  ( $\alpha$  sendo um ângulo agudo), a dedução do que hoje conhecemos ser o seno da soma e da diferença. Podemos considerar tais estudos como sendo os primeiros com indícios de Trigonometria (LINDEGGER, 2000).

Após a etapa da Trigonometria da antiguidade, aparecem na história os hindus, os quais, assim como os babilônios e os gregos, apresentavam a Trigonometria como aplicação da astronomia. Neste período, provavelmente século V d.C, aparece com os hindus as relações que hoje conhecemos como arco metade e arco duplo, por eles, diferentemente de Ptolomeu, trabalharem em seus experimentos com a semi-corda, o que segundo Lindegger (2000) “corresponde ao atual seno, à qual chamava de jiva”, proporcionado assim, a caracterização do círculo com raio unitário e estabelecendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

A Trigonometria hindu era essencialmente aritmética, ao contrário da grega, muito mais geométrica. Com as mudanças introduzidas (inclusive quanto ao comprimento do raio considerado), as tabelas de Ptolomeu foram refeitas, utilizando os métodos de tabulação. (LINDEGGER, 2000, p. 52).

Neste momento, destacamos na história a chegada da Trigonometria entre os árabes, os quais aprimoraram a aplicação na astronomia e ampliaram sua aplicação para a cartografia, devido à necessidade das navegações. Eles abraçaram os trabalhos desenvolvidos pelos hindus e a partir de seus resultados mostram que a razão seno vale para qualquer triângulo retângulo independentemente do tamanho do triângulo. Trabalharam também para melhorar a precisão das tabelas trigonométricas, pois, estudiosos da época pretendiam calcular a altitude do Sol.

Passados o período da Idade Média, onde os povos do ocidente passaram notoriamente um longo tempo nas “trevas”, chega o período do Renascimento. Período este, impulsionado pela expansão marítima na Europa, onde os estudos direcionam a Trigonometria para resolver problemas cartográficos (cálculos de latitudes e longitudes de cidades) e topográficos. Destacamos a figura de Johann Müller, conhecido como Regiomontanus, o qual estabeleceu a Trigonometria como um ramo da Matemática.

Regiomontanus escreveu diversos trabalhos, os principais listamos, sintetizando (Sampaio, 2008, p.59 – 64).

- ✓ Tratado *Epítome*: escrito em coautoria com Peurbach, onde sintetizou a Trigonometria plana e esférica;
- ✓ Tratado *De triangulisomnimodis* (triângulos de todos os tipos): neste tratado expôs sistematicamente a Trigonometria plana e esférica, tratou a Trigonometria

independente da astronomia, empregou as funções trigonométricas (seno e cosseno) e uma tabela da tangente;

- ✓ Tratado *Tabula directionum* (Tabela direta): expôs neste tratado a função tangente, cálculos de tabelas de tangentes e subdivisões decimais dos ângulos.

Ainda, neste período, destacamos o pesquisador Joachim Rhaeticus, onde em seu trabalho (*Canon Doctrinae Triangulorum*), citado por Lindegger (2000, p.56-57), destaca a presença das seis funções trigonométricas definidas como função de um ângulo, em vez de funções do arco e subtendidas como razões, embora não tenha dado os nomes pelo qual conhecemos hoje (seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente). Rhaeticus concebeu também a ideia de uma tabela de secantes. Aparece em seus trabalhos termos como perpendicular, hipotenusa, base, seno de  $90^\circ$ .

Sampaio (2008, p.65) apud Zeller (1944) afirma que Rhaeticus define:

“Em todo o triângulo com ângulo reto, o lado que subtende ao ângulo reto é chamado de hipotenusa”.

“Se AB é o raio ou sinustotus (seno total), então a perpendicular é o seno e a base é o cosseno”.

Destacamos também o Matemático Viète onde adicionou um tratamento analítico à Trigonometria, em 1580. Mas, foi Pitiscus quem publicou em 1595, onde corrigiu as tábuas de Rhaeticus, modernizando assim, o tratamento do assunto. Sendo assim, notamos que historicamente chegamos a um momento importante, a Trigonometria começa a passar da solução de triângulos retângulos para a investigação de relações funcionais, desempenhando assim, grande importância para o Cálculo e a Análise Matemática. Desta forma, a Trigonometria passa a ser tratada como ciência, tendo assim, fundamentos e estruturas bem definidas (da forma como concebemos e estudamos atualmente). (LINDEGGER, 2000, p.57-58).

Desta forma, notamos, que até o momento histórico “a Trigonometria evoluiu da experimentação, da realidade à generalização. Até ser incorporada às relações funcionais, ela partiu de aplicações concretas, chegando a se constituir numa ciência” (LINDEGGER, 2000, p.58)

Retomamos Viète para tentarmos compreender seu tratamento analítico da Trigonometria. Sampaio (2008) aponta suas principais contribuições: primeira elaboração sistemática dos métodos de cálculo dos triângulos planos e esféricos com o apoio das seis funções trigonométricas (apud CAJORI, 1919); preparou extensas tabelas de cordas de todas as seis funções de ângulos aproximados até minutos; reuniu fórmulas para a solução dos

triângulos planos oblíquos, incluindo a lei das tangentes; escreveu o teorema das Cotangentes; observou uma conexão importante entre suas fórmulas trigonométricas e a resolução de equações cúbicas, verificando que se poderia usar uma relação trigonométrica para solucionar uma equação algébrica, tornando-se um dos primeiros a relacioná-las.

As funções trigonométricas, a partir do século XVII, apresentam-se como maior objeto de estudo da Trigonometria, devido o “surgimento” da Geometria analítica e também, por possibilitar a descrição de fenômenos periódicos, oscilatório e vibratório, exercendo assim, grande importância para os cientistas. Desta forma, as funções trigonométricas apresentam-se como objeto de estudos devido os estudos das oscilações dos pêndulos dos relógios, e também para o aperfeiçoamento das técnicas de navegação e as vibrações de som dos instrumentos musicais.

Foi na primeira metade do século XVII que houve grande progresso na Trigonometria analítica, para descrever o mundo físico, fenômenos mecânicos da vida diária, enquanto os inventores de Trigonometria clássica estavam interessados na Trigonometria esférica, na sua utilidade para os cálculos astronômicos ptolomaicos e predominantes em relação à Trigonometria plana (SAMPAIO, 2008, p. 72 apud MAOR, 1998).

A partir da segunda metade do século XVII até a primeira metade do século XIX, notamos que através dos estudos desenvolvidos pelos cientistas propuseram avanços tanto na compreensão e no surgimento de conhecimentos trigonométricos, como também em sua representação. Destacamos os cientistas John Wallis (expressou fórmulas usando equações em vez de proporções), Isaac Newton (expandiu o  $\arcsen x$  nas séries por reversão quando deduziu as séries para o  $\sen x$ ), Roger Cotes (reconheceu a periodicidade das funções trigonométricas e o período das funções tangente e secante) e Moivre (relacionou as funções trigonométricas com os números complexos). (SAMPAIO, 2008, p. 72-73).

Destacamos ainda Euler (usou definitivamente a letra  $\pi$ , relacionando a razão da circunferência para o diâmetro num círculo; simbolizou por letras minúsculas os lados de um triângulo, por letras maiúsculas os ângulos opostos, como também usou para funções a notação  $f(x)$  e as abreviações –  $\sen$ ,  $\cos$ ,  $\text{tang}$ ,  $\text{cotg}$ ,  $\text{sec}$  e  $\text{cossec}$  –; desenvolveu uma representação de séries trigonométricas das funções; tornou a Trigonometria em um conjunto de relações entre números reais e complexos, depois de ter apresentado todos os teoremas da Trigonometria como corolários da teoria das funções complexas, fazendo com que o estudo do gráfico das funções trigonométricas tornasse parte da Geometria analítica); John Bernoulli (explorou o tratamento analítico da Trigonometria e usou as funções trigonométricas inversas); Abraham Gotthalf Kästner (escreveu as funções como números puros, onde,

afirmou que o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo são números que correspondem a esse ângulo) e Fourier (mostrou que as séries trigonométricas poderiam representar qualquer função). (SAMPAIO, 2008, p. 73-76).

A partir da segunda metade do século XIX, percebemos a aplicação do termo radiano por Thomson (SAMPAIO, 2008, p. 73 apud CAJORI, 1930) e o avanço dos estudos em outras ciências (óptica, mecânica, por exemplo), a partir da ligação entre a dependência funcional, a dependência da integração e diferenciação com a investigação de séries trigonométricas.

## 2.2 Trigonometria: o que as pesquisas apontam?

Ao observarmos as pesquisas em ensino-aprendizagem de Trigonometria, percebemos grupos de pesquisas que optam por diferentes alternativas metodológicas, tais como: o uso das tecnologias, o uso de sequências didáticas e da trajetória hipotética da aprendizagem; assim como outros que trazem um olhar histórico para se pensar a Trigonometria na sala de aula.

Pesquisamos em bancos eletrônicos de dissertações de algumas Universidades, sendo elas: USP, UNESP, PUC/SP, PUC/RS, UEL, UFSC, UFSCar, UFRJ, UNICAMP, UFRGS, UFPB e UFRN.

Damos ênfase as pesquisas concluídas ou apresentadas no período de 2004 a 2011, com o intuito de perceber o que, atualmente, elas estão discutindo acerca do ensino-aprendizagem da Trigonometria e quais as possíveis contribuições que, por ventura, venham a deixar através das discussões – reflexões.

As pesquisas observadas foram de Oliveira (2010); Sampaio (2008); Rosenbaum (2010); Quintaneiro (2010); Damasco (2010); Borges (2009); Barbosa (2009); Sormani (2006); Silva (2005); Fernandes (2010); Brito e Morey (2004). Essas pesquisas são desenvolvidas por diferentes alternativas metodológicas, assim como mostra a tabela abaixo.

<b>METODOLOGIAS</b>	<b>PESQUISAS</b>
Sequência Didática	Silva (2005)
Trajétoria Hipotética de Aprendizagem (THA)	Barbosa (2009)
	Rosenbaum (2010)
Uso das Tecnologias (Software: Geogebra)	Borges (2009)
	Fernandes (2010)
Uso das Tecnologias (Software Geogebra) com Registro de Representação Semiótica	Damasco (2010)
	Quintaneiro (2010)
Uso das Tecnologias (Software CabriGèomètre II)	Sormani (2006)

Abordagem histórico-filosófica (Construção de Uma Sequência Didática)	Sampaio (2008); Morey e Brito (2004)
Mista (Várias Metodologias)	Oliveira (2010)

**Quadro1:** Relação das Metodologias exploradas e as Pesquisas

As pesquisas de Barbosa (2009), Rosenbaum (2010) e Silva (2005) trazem uma alternativa metodológica para o trabalho da Trigonometria na sala de aula, seja por meio da Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), como também por meio de uma sequência didática.

Na pesquisa desenvolvida por Barbosa (2009), ele procura “analisar a possibilidade de compatibilizar perspectivas de aprendizagem com a planificação de ensino relacionada às razões e às funções trigonométricas” e percebe que não basta uma boa sequência de atividades, mas uma postura atuante e reflexiva diante das situações. Embasado por uma visão construtivista, desenvolve seu trabalho, tendo como referência a noção de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA), em três salas de aula do 2º ano médio, tendo como instrumento de coleta de dados, relatórios de observações.

Com este mesmo foco, Rosenbaum (2010), além de propor atividades que potencializassem a aprendizagem dos alunos sobre Funções Trigonométricas numa perspectiva construtivista, analisou diversas pesquisas em Educação Matemática que trazem resultados importantes sobre o assunto. A pesquisadora verificou ainda “como a atuação do professor de Matemática se revela, no que se refere às atividades de planejamento do ensino de Funções Trigonométricas”.

Já Silva (2005) pretendia introduzir as razões seno, cosseno e tangente por meio de investigações. Com isso elaborou uma sequência de quatro atividades, cujo foco era “responder se a produção de uma sequência didática e ensino enfatizando as construções e transformações geométricas articuladas ao tratamento figural proporciona uma apreensão significativa”, que foi explorada em sala de aula pelo próprio pesquisador.

As pesquisas de Borges (2009), Damasco (2010), Fernandes (2010) e Quintaneiro (2010) proporcionam, através do uso das tecnologias, especialmente o software de Geometria dinâmica Geogebra, propostas pedagógicas que visam mudanças no processo educacional.

Borges (2009) desenvolve uma sequência de 12 atividades, onde utiliza esse software para contribuir com o ensino da Trigonometria, no que diz respeito a transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico. A pesquisa não se

desenvolveu em sala de aula, mas a mesma foi aplicada por um grupo de oito alunos do 2º ano médio em horário extraclasse.

Nesta mesma perspectiva, Damasco (2010), em sua dissertação de mestrado, propõe através de sua pesquisa uma proposta de sequência didática para o estudo das funções trigonométricas com o uso do Geogebra. Tal proposta foi desenvolvida através de oficinas, cujo público alvo era alunos do ensino médio.

Fernandes (2010) trabalhou especificamente com a construção de conceitos básicos da Trigonometria na circunferência. O pesquisador, em sua intervenção, propôs, em um primeiro momento, a construção da circunferência trigonométrica, utilizando régua, transferidor e lápis; e, no segundo momento, a mesma atividade proposta foi desencadeada por meios tecnológicos (o software de Geometria dinâmica). Este trabalho foi desenvolvido com um grupo de 12 alunos do 2º ano do Ensino Médio. Como professor, numa visão antes da pesquisa, ele ressalta que “os alunos nada mais faziam além de decorar fórmulas e valores de uma tabela de seno e cosseno de ângulos, sem saber o real significado desses números”.

Quintaneiro (2010) elaborou um roteiro de atividades em um ambiente favorável ao uso das Tecnologias de Comunicação e Informação, tendo como conteúdo explorado a Trigonometria. Tais atividades foram elaboradas e aplicadas a três professores do ensino médio, após um estudo exploratório, com 16 professores, com intuito de analisar como a Trigonometria aparecia em dos livros didáticos e as concepções dos professores sobre o conteúdo.

Sormani (2006), tendo o conteúdo explorado como secundário em sua pesquisa, procurou “analisar como o uso do microcomputador pode auxiliar na Resolução de Problemas relacionados com o conteúdo de Trigonometria”. Para isso utilizou do software CabriGèomètre II. As atividades, desenvolvidas pelo pesquisador, foram aplicadas a 4 alunos do 2º ano do ensino médio.

Estando numa sociedade onde a maioria vive num processo de informatização, é perceptível que nas pesquisas o uso das Tecnologias de Comunicação e Informação (TIC) tem aparecido com mais frequência do que todas as outras perspectivas metodológicas. Os motivos são vários: necessidades de tornar as aulas atrativas; aspirações de tornar as aulas mais próximas do cotidiano; desejos de desenvolver atividades que atraíam os alunos, assim como as redes sociais (Orkut, Facebook, Twitter, entre outros) conseguem. Vale salientar que existem cotidianos ainda muito distantes do acesso a tais tecnologias onde mal estamos superando o analfabetismo funcional e temos que superar agora o “analfabetismo digital”.

Voltado para a História da Matemática, Sampaio (2008) “buscou investigar o processo de construção de uma abordagem histórico-filosófica por meio de uma reconstrução histórica da Trigonometria”. Propôs “como um dos objetivos a investigação da construção de uma sequência didática”, com foco nas funções trigonométricas. Aponta-se que a História da Matemática é mais do que um recurso didático, tendo um potencial pedagógico que enriquece a prática docente.

Apresentando diversas metodologias, Oliveira (2010) formulou atividades que “relacionassem tanto a necessidade do estudo da Trigonometria do Triângulo Retângulo, quanto sua relação com o Ciclo Trigonométrico gerando as Funções Trigonométricas”.

Revisitando tais trabalhos, é comum perceber que as pesquisas de cunho pedagógico tenham raízes em dificuldades, em sua grande maioria, oriundas do processo de ensino-aprendizagem no exercício profissional do docente. Portanto, no tópico a seguir, iremos apresentar o que as pesquisas apontam como principais problemas ou dificuldades no ensino da Trigonometria. A seguir, demonstraremos melhor as principais dificuldades apontadas por pesquisadores no ensino da Trigonometria.

Dessas pesquisas, destacadas acima, algumas são desenvolvidas no contexto da sala de aula por inteiro e outras com grupos isolados de alunos. Há também aquelas que são direcionadas ao professor. Sendo assim, na quadro 2, procuramos de forma sistemática, estabelecer relações entre as pesquisas e o contexto onde tais são exploradas.

<b>Pesquisas</b>	<b>Contexto</b>
Barbosa (2009) e Rosenbaum (2010)	Aplicada na sala de aula e para professores.
Borges (2009), Fernandes (2010), Damasco (2010) e Sormani (2006)	Grupo alunos
Quintaneiro (2010)	Aplicado apenas para professores
Sampaio (2008), Oliveira (2010), Silva (2005)	Aplicada na sala de aula apenas

**Quadro 2:** Contexto de desenvolvimento das pesquisas

Vale ressaltar que, das pesquisas desenvolvidas com o cotidiano da sala de aula, apenas as pesquisas de Sampaio (2008), Oliveira (2010), Silva (2005) apresentam a figura do professor-pesquisador, aquele que planeja suas atividades, às põe em prática, procurando refletir sua própria ação.



### **2.3 Dificuldades no ensino-aprendizagem da Trigonometria apontada pelas pesquisas e em nossas experiências de sala de aula**

Desde quando aluno do ensino médio, escutávamos colegas dizendo que o conteúdo de Trigonometria era difícil. Passando esse período, tornemo-nos professor e a impressão desse conteúdo foi se perpetuando ao longo do tempo.

Por que esse conteúdo é considerado tão difícil? O que podemos fazer para desmistificar tais impressões? Se fizéssemos os alunos vislumbrarem a aplicabilidade dos tópicos que enlaçam a Trigonometria, não se tornaria mais prazeroso ou de melhor compreensão o estudo desse conteúdo?

Essas e outras perguntas são feitas e refeitas tanto por professores interessados quanto por alunos que desejam aventurar-se no estudo da Trigonometria. Em nossas experiências de sala de aula, algumas imagens ficaram gravadas na nossa mente, tais como: não sei manusear o transferidor, nem o compasso; esse lado é cateto oposto ou adjacente; não sei se uso seno, cosseno ou tangente; é mais fácil trabalhar com o ângulo medindo em graus. Não precisa trabalhar com radianos; e são muitas fórmulas para decorar!

Assim, ao iniciar esse tópico, sentimos a necessidade de pesquisar o significado da palavra dificuldade, no dicionário Aurélio encontramos o significado a seguir: obstáculo; situação crítica.

De fato, temos e convivemos numa situação crítica. Uma rede de obstáculos que, quando não se dá importância, incitam um ensino que estimula o fracasso. Não apenas o escolar, como também o fracasso das convicções, das motivações, das possibilidades.

O interessante é que, ao realizarmos algumas leituras de pesquisas de mestrado e também artigos científicos (Morey e Brito (2004)), todas buscam na sua essência, assim como a nossa pesquisa, possibilidades na melhoria do ensino-aprendizagem. Isso se justifica pela necessidade de minimizar tais obstáculos e/ou situações críticas provenientes do cotidiano escolar.

Sendo assim, iremos expor através de reflexões/discussões, problemas ou dificuldades que as pesquisas apresentam com relação ao conteúdo explorado. Mas, antes disso, queremos expor um quadro demonstrativo que relacione as pesquisas com as dificuldades acerca do conteúdo que, por ventura, tenha estimulado as mesmas.

<b>PESQUISAS</b>	<b>DIFICULDADES APONTADAS PELAS PESQUISAS</b>
Silva (2005)	- abordagem do conteúdo trazido pelos livros didáticos

Barbosa (2009)	- conceitos fundamentais da Trigonometria
Rosenbaum (2010)	- abordagem superficial das funções trigonométricas; - não priorizar a construção dos conceitos.
Borges (2009)	- transição do seno como razão entre os lados de um triângulo para o seno de um número real em um ciclo trigonométrico.
Fernandes (2010)	- fazer com que os alunos apreendessem de forma significativa o conteúdo; - levar os alunos a entender de onde vêm os valores seno e cosseno.
Damasco (2010)	- provenientes do currículo da instituição a qual lecionava; - não havia aprofundamento na exploração de tópicos referentes à Trigonometria por falta de tempo.
Quintaneiro (2010)	- no processo ensino-aprendizagem, devido a não distinção entre conceitos referentes a arcos e a ângulos.
Sormani (2006)	- resistência dos alunos para com o conteúdo, pois a ênfase dada na exploração da Trigonometria, segundo o pesquisador, era em situações que não faziam parte da vida prática, o que não corresponde a realidade.
Sampaio (2008)	- necessidade de compreender as origens e a evolução e tornar a aula mais prazerosa e compreensiva.
Oliveira (2010)	- em adquirir significado sobre os elementos da Trigonometria; amontoado de fórmula sem nenhuma conexão.

**Quadro 3:** Dificuldades apresentadas nas pesquisas

Sabemos que algumas dificuldades apresentadas são originadas também de limitações conceituais dos professores, oriundas de sua formação escolar e de sua formação acadêmica (inicial e continuada) que, de certa forma, reflete em seu exercício. Algumas delas são: transição da Trigonometria do triângulo retângulo para a do ciclo trigonométrico; distinção entre arcos e ângulos; abordagem simultânea das razões e relações trigonométricas de grandezas angulares medidas em graus e as razões e relações trigonométricas de grandezas de medidas lineares medidas em radianos, sem perceber a importância de entender e diferenciar tais situações, as quais ajudarão na compreensão das funções trigonométricas; transmissão do conteúdo sem conhecimento histórico, favorecendo a um conhecimento limitado, pois a história nos coloca de frente a origem dos fatos, os quais e, muitas vezes, nos dá a

compreensão de dúvidas que nos acompanharam desde a formação básica e que ainda as transmitimos; entre outras.

O ensino da Trigonometria, desde a exploração inicial no triângulo retângulo, apresenta-se conectada com aplicações concretas, mas, mesmo quando muito exploradas, dá-se ênfase a repetição das regras, tornando o ensino mecanizado, sem compreensão. Quando explorado numa perspectiva histórica, a ênfase é dada as tábuas trigonométricas, devido sua utilidade e não como construção histórica do pensamento científico.

As dificuldades apresentadas pelos alunos dão-se no estudo analítico da Trigonometria e uma delas é a não diferenciação que, antes no triângulo retângulo, tinha um significado e agora apresenta outro foco. Evidencia-se exercícios mecânicos nas resoluções de equações e inequações sem contextualização, não familiarização com as fórmulas, dificuldade na interpretação de situações problemas, como também ênfase em atividades relacionadas a identidades trigonométricas.

A dificuldade encontrada por Borges (2009) acerca do conteúdo, a qual o motivou para desenvolver sua pesquisa, esteve voltada para problemas que podem ocorrer na aprendizagem dos alunos na transição do seno como razão entre os lados de um triângulo para o seno de um número real em um ciclo trigonométrico.

Além de dificuldades provenientes do currículo da instituição a qual lecionava, não havia aprofundamento na exploração de tópicos referentes à Trigonometria por falta de tempo (DAMASCO, 2010). A dificuldade proveniente do estudo da Trigonometria teve como foco a exploração das funções trigonométricas.

No caso de funções trigonométricas, via que os alunos sabiam o formato comum dos gráficos, mas não conseguiam perceber as transformações que o gráfico sofria ao se alterar um parâmetro qualquer da função, ou até mesmo a relação que havia entre o seu gráfico e o círculo trigonométrico. (DAMASCO, 2010, p.14-15)

Após analisar a sequência de livros didáticos que abordassem o conteúdo de Trigonometria, Quintaneiro (2010) percebeu que dificuldades no processo ensino-aprendizagem surgiam quando não se distinguiam conceitos referentes a arcos e a ângulos. Dificuldades eram acentuadas na sequência quando se tratava simultaneamente as razões e relações trigonométricas de grandezas angulares medidas em graus e as razões e relações trigonométricas de grandezas de medidas lineares medidas em radianos, sem perceber a importância de entender e diferenciar tais situações, as quais ajudarão na compreensão das funções trigonométricas.

Ao tratar ora de seno de grandezas angulares medidas em graus, ora de seno de grandezas lineares medidas em radianos, sem justificativa para esta passagem, os livros didáticos podem favorecer implicitamente a idéia de que, em Matemática, a

consistência das definições não é um imperativo. Isso pode se converter em um fator de conflito potencial, que mais tarde irá prejudicar a compreensão da idéia função seno. (QUINTANEIRO, 2010, p.11)

Por uma necessidade de compreender as origens e a evolução e tornar as aulas mais prazerosas e compreensivas, Sampaio (2008) identifica como dificuldades acerca da Trigonometria: prática docente superficial, sem dar ênfase ao processo histórico e evolutivo do conteúdo, que torna o ensino complicado, favorecendo a não compreensão por parte dos alunos; a não compreensão das funções trigonométricas, devido, muitas vezes, a uma ênfase demasiada da parte geométrica da Trigonometria, fazendo com que as mesmas não sejam tão bem exploradas; além disso, os próprios professores apresentam dificuldades acerca do conteúdo, provenientes de formação tanto escolar como universitária.

Oliveira (2010) enfatiza que os alunos apresentam dificuldades “em adquirir significado sobre os elementos da Trigonometria e, muitas vezes, eles se referem ao tema como um amontoado de fórmulas sem significado algum”. Sendo assim, é justificável que muitos alunos do ensino médio apresentem dificuldades em relação à Trigonometria, tornando esse um dos conteúdos a estimular o “fracasso escolar”.

Até agora, tentamos situar as principais dificuldades apresentadas por professores e alunos. Queremos discutir o por que, em nossa concepção, é tão difícil ensinar-aprender Trigonometria. Uma primeira percepção é a *distribuição curricular*. São muitos conteúdos a serem contemplados durante um ano letivo, gerando no professor uma “corrida contra o tempo” para vencer todos os tópicos ali contidos. A Trigonometria é um dos conteúdos que requerem maior quantidade de aulas, pois as formações de alguns conceitos demoram a ocorrer e serem percebidos pelo aluno como necessários, tanto para sua vida escolar como para sua vida diária.

Uma segunda percepção que temos é a necessidade de *integração entre os conteúdos*. A Trigonometria está situada em duas grandes áreas de conhecimento na Matemática, a Álgebra e a Geometria. Parece-nos que todas as vezes que se inicia um conteúdo, é como se estivéssemos iniciando uma nova história, sem qualquer ligação com o passado e tampouco com o presente e o futuro, afinal, rotineiramente trabalhamos os conteúdos de forma isolada.

Em conversas informais com professores de Matemática e Física<sup>5</sup>, seja no cotidiano escolar ou em reuniões de planejamento, percebemos que as principais dificuldades destacadas estão imbricadas em conteúdos não ministrados em séries anteriores. Exemplificando, temos que: a parte inicial da exploração do pensamento trigonométrico, a Trigonometria do triângulo

---

<sup>5</sup> Na escola em que trabalhamos existe professor licenciado em Matemática que ministra aulas de Física e vice-versa. Essa prática é comum em muitas escolas.

retângulo, se dá, inicialmente, pela efetivação dos conceitos de semelhança e proporcionalidade. Exemplificamos, mas não comungamos da ideia de que só haverá uma efetivação do ensino-aprendizagem da Trigonometria do triângulo retângulo se o aluno tiver apreendido tais conceitos (semelhança e proporcionalidade) em séries anteriores, pois, acreditamos que o professor na introdução do conteúdo pode ir construindo a ideia de proporcionalidade junto com o desenvolvimento do pensamento trigonométrico. Será até mais prazeroso para o aluno, cremos, pois o mesmo irá perceber uma implicação direta do que está estudando.

Uma terceira percepção nossa é a *falta de significado do conteúdo* para o nosso aluno, o que implica diretamente na aprendizagem. Na vida, em geral, fazemos o que gostamos e o que tem significado para nós. No cotidiano escolar não é diferente. Como professores, corremos o risco de focarmos nos fins, sem levarmos em consideração os meios/o processo. É como se quiséssemos que nossos alunos compreendessem os mecanismos para determinar as razões trigonométricas de um ângulo antes de empreender qualquer significado sobre o que venha a ser uma razão.

Sabendo da necessidade da significação da Trigonometria para o aluno, não queremos dizer que o aluno tem que aprender o que ele quer ou que deva decidir o que aprender. Falando sobre programas escolares, Meirieu (2005, p.79) afirma que “*a escolha das disciplinas e de seus conteúdos decorre de uma reflexão geral sobre o perfil do homem que se pretende formar*”, afirma também que:

Não se deve procurar associar seus conteúdos a supostos e mal-identificados interesses imediatos dos alunos, e sim articulá-los às questões a que esses saberes já responderam um dia. Trata-se de aproximar os saberes a sua gênese, inscrevendo-os à dinâmica que os trouxe à tona, remetendo-os ao lugar que ocuparam na história dos homens, fazendo deles não “utilidades escolares”, mas verdadeiros “objetos culturais” com seu próprio poder de atração. Não a nada de muito extraordinário nisso. Simplesmente a preocupação de estar atento à cultura em fase de elaboração, a saberes em fase de construção. (MEIRIEU, 2005, p.83)

Toda aprendizagem verdadeira requer mobilização do interesse do aluno, pois saberes impostos se tornam simples “utilidades escolares” (MEIRIEU, 2005, p.80-81).

Portanto, pretendemos minimizar as dificuldades existentes no ensino-aprendizagem de Trigonometria, suscitando no aluno o desejo de superá-las, acreditando que para tal é necessário tornarmos a sala de aula um espaço laboratorial do conhecimento.

Além das dificuldades apontadas, observa-se uma falta de consenso quanto à distribuição da Trigonometria no ensino médio nos livros didáticos, afinal, o livro didático, ainda hoje, é o principal recurso que o professor utiliza para ministrar suas aulas.

Vale salientar, que as sugestões trazidas no livro do professor acaba gerando certa acomodação. Visto que já ouvi professores dizendo que depois dessa contribuição, não

precisa fazer mais um plano de curso anual, é comum escutar em encontros de área nas escolas que leciono as seguintes afirmações:

*- Ficou bom demais, hoje não precisa mais fazer um plano de curso, pois ele já vem pronto no final do livro do professor;*

*- Os autores do livro que trabalham para fazê-los, sabem melhor que nós a sequência correta de se ministrar os conteúdos. Eles trabalham pra isso.*

*- Se foram aprovados é por que é bom.*

*- Se tirar o livro de mim não consigo dá aula. Fico perdido.*

Imbuídos por tais discursos e pela dependência que o professor tem com o livro didático, torna-se necessário investigar como a Trigonometria está sendo apresentada em tal recurso.

A Trigonometria se faz presente nos livros didáticos desde a série final do ensino fundamental II (9º ano) perpassando as duas primeiras séries do ensino médio, tendo sua ênfase maior no 2º ano.

Sabendo que a Trigonometria se enquadra em duas grandes áreas da Matemática – Geometria e Álgebra – a ênfase dada no livro do 9º ano está voltado para sua parte geométrica. São exploradas, neste momento, as razões trigonométricas do triângulo retângulo, as relações entre tais razões e as relações em triângulos quaisquer, sendo explorado no 4º bimestre.

No livro do 1º do ensino médio, as exigências ao aluno são semelhantes, a parte ainda explorada é a parte geométrica, sendo retomadas mais uma vez a Trigonometria do triângulo retângulo, enfatizando as diversas aplicações que muitas vezes apresenta preocupações demasiada com a memorização de tais razões.

Parece-nos que nos vários livros didáticos que estão no mercado, até os aprovados pelo PNLD, só haverá aprendizagem e sucesso na exploração da Trigonometria do ciclo se os alunos manipularem diversas situações onde tais razões possam ser aplicadas e, sendo assim, aos poucos serão memorizadas. Vale salientar que os primeiros indícios da Trigonometria deram-se na exploração no ciclo trigonométrico, quando o seno era relacionado a uma corda de uma circunferência, que é explorado nesta série no 4º bimestre.

No 2º ano médio, tendo como referência o livro adotado pela escola (Conexões com a Matemática), é proposta a Trigonometria no 1º bimestre. A ênfase neste momento volta-se para a Trigonometria do ciclo, sendo assim, é explorada sua parte algébrica. Estuda-se: a diferenciação de arcos e ângulos, a variação dos múltiplos dos ângulos notáveis (30º, 45º e

60°) analiticamente em todo ciclo, as funções trigonométricas, equações e inequações, adição e multiplicação de arcos.

	<b>Disposição do Conteúdo na Educação Básica, conforme PNLD</b>	<b>Tópicos Explorados</b>
<b>PARTE GEOMÉTRICA</b>	9º Ano Fundamental II	Razões trigonométricas do triângulo retângulo, as relações entre tais razões e as relações em triângulos quaisquer
	1º Ano Médio	Aprofundamento dos tópicos explorados na série anterior
	2º Ano Médio	Transição da Trigonometria do Triângulo Retângulo para o Ciclo Trigonométrico
<b>PARTE ÁLGBRICA</b>	2º Ano Médio	Funções Trigonométricas
	3º Ano Médio	Funções Trigonométricas

**Quadro 4:** Distribuição da Trigonometria nas séries do Ensino Básico

Dos livros avaliados no último PNLD, em 2010, apenas o de Smole e Diniz (2010) apresenta a Trigonometria perpassando por todas as séries do ensino médio. Tal livro assume a proposta de um currículo em espiral, proposta que se opõe ao desenvolvimento de um currículo que explorem os conteúdos de forma linear.

A realidade em si é complexa, temos três anos de magistério e nessa fase inicial torna-se natural a reprodução do ensino ao qual fomos submetidos, principalmente quando não fomos instigados em nossa formação inicial a uma reflexão da própria prática. Sempre trabalhamos este conteúdo apenas no 2º ano médio e percebemos que o mesmo era muito amplo, chegando a passar mais de um bimestre para vencer todos os tópicos.

Assim, pesquisas apontam que embora, os livros didáticos tenham melhorado, mesmo assim, existem distanciamentos consideráveis entre o que se propõe no livro e o que se é proposto nas pesquisas.

As pesquisas apontam necessidades por um ensino da Trigonometria diferente das que encontramos expostas em diversos livros didáticos que circulam em nosso país. Estes livros, em sua grande maioria, apresentam tópicos totalmente desconectados da realidade.

São livros extensos, com ênfase nas manipulações algébricas contribuindo para a memorização e não para o entendimento. Quando trazem situações da História da Matemática apresentam-nas descontextualizadas – como “historinhas”. Em relação ao uso da tecnologia, são raros os que apresentam alguma sugestão. No que se refere a aplicação em outras disciplinas, estas aparecem apenas como ferramenta, quando, na verdade, deveria ser um espaço para discutir tais interligações, gerando a tão “sonhada e encantadora” interdisciplinaridade.

Após fazer algumas leituras, percebemos que existem propostas as quais viabilizam o ensino através de um currículo em espiral, favorecendo o estudo de tópicos centrais ao longo da vida escolar do aluno.

Tivemos necessidade de analisar o que os documentos nacionais, que orientam o ensino de Matemática no Brasil, apresentam para um ensino de Trigonometria voltado para a compreensão. No estudo da Trigonometria explorada no triângulo retângulo é direcionada a ênfase para a discussão das diversas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis (inclinação de uma rampa, altura de um prédio, largura de um rio, entre outras), as quais desde o início da civilização inquietaram os homens. É viável, neste momento, atenção para a transição do seno e cosseno do triângulo retângulo – onde o ângulo é medido em graus; para o seno e o cosseno como sendo coordenadas de um ponto, que através de um arco percorre todo o círculo – onde o arco é medido em radianos. Na parte algébrica da Trigonometria, devemos ter um olhar especial para as funções trigonométricas (seno e cosseno), as quais em diversas situações modelam fenômenos periódicos (batimentos cardíacos, controle de pragas, pulsação sanguínea).

Vale aqui uma ressalva: parece até um pouco contraditório, que apesar do MEC apresentar todas as reformulações curriculares (OCEM, PCN, DCNEM, PNE) como também as diretrizes que regem o PNLN e os condicionantes da avaliação da educação no país (Prova Brasil e ENEM), exista incoerências.

Diante desse contexto trazido, essa pesquisa “gesta em seu ventre” uma proposta pedagógica, em que pretendemos explorar atividades de Trigonometria desenvolvidas na perspectiva da resolução e exploração de problemas, atuando como professor-pesquisador e, ao final, desenvolver um texto reflexivo sobre o ensino-aprendizagem de Matemática direcionada a professores do Ensino Médio, o qual contemple ideias essenciais para a formação e a exploração do pensamento trigonométrico, tomando como base a resolução e exploração de problemas e o cotidiano escolar da sala de aula. Temos consciência que essa proposta será apenas uma alternativa, dentre algumas existentes, onde a finalidade é



possibilitar ao professor de sala de aula algumas reflexões/problematizações críticas sobre o ensino-aprendizagem de Trigonometria.

O Quadro 5 relaciona a série onde as pesquisas foram desenvolvidas, como também o tópico Trigonometria explorado nas intervenções.

<b>Pesquisas</b>	<b>Série</b>	<b>Tópico da Trigonometria Explorado</b>
Silva (2005)	1º Ano	Trigonometria no Triângulo Retângulo
Barbosa (2009)	2º Ano	Razões Trigonométricas; Funções Trigonométricas.
Rosenbaum (2010)	2º Ano	Funções Trigonométricas
Borges (2009)	2º Ano	Transição das Razões Trigonométricas do Triângulo Retângulo para o Círculo Trigonométrico
Fernandes (2010)	2º Ano	Trigonometria da Circunferência
Damasco (2010)	2º Ano	Funções Trigonométricas
Quintaneiro (2010)	-	Conversões: geométricas, entre as unidades radiano e grau, e “múltiplo” de $\pi$ e décimas; Construção do gráfico da função.
Sormani (2006)	2º Ano	Resolução de Problemas de Trigonometria
Sampaio (2008)	2º Ano	Todos os Tópicos
Oliveira (2010)	1º e 3º Ano	Trigonometria do Triângulo Retângulo; Ciclo Trigonométrico; Funções Trigonométricas.

**Quadro 5:** Séries e Tópicos da Trigonometria explorados nas pesquisas

Ao observar o Quadro 5, percebemos que apenas Sampaio (2008) e Oliveira (2010) apresentam uma proposta que pretende explorar todos os tópicos relacionados à Trigonometria, assim como a nossa visa contemplar.

A Resolução e Exploração de Problemas aparecem em nossa pesquisa como metodologia de ensino.

Na perspectiva de um ensino de Matemática através da Resolução e Exploração de Problemas, tendência atual, as pesquisas mostram que a cada momento a REP se configurava de forma diferente, as mais conhecidas são: ensinar *para* REP, ensinar *sobre* REP e ensinar *através* da REP.

Ensinar Matemática *para* Resolução de Problemas se configura no ensino centrado numa boa exposição do conteúdo, tendo em vista resolver os problemas de aplicação no final do capítulo. Ensinar Matemática *sobre* Resolução de Problemas se encorpa no ensino de heurísticas e o grande destaque é às de Polya. Ensinar *através* da Resolução e Exploração de Problemas se caracteriza em uma metodologia de ensino.

Realizar o ensino da Matemática através da Resolução e Exploração de Problemas refere-se a necessidade do professor não preparar a aula que irá lecionar, mas preparar-se para a aula que irá ministrar. Pois a exploração de problemas favorece a um desfecho de aula que a princípio poderíamos não ter imaginado quando a pensamos. Isso não quer dizer que um trabalho via exploração de problemas seja algo desconectado, sem nexos. Pelo contrário, quando estimulamos a capacidade criativa dos alunos podemos chegar a resultados não antes esperados.

Sendo assim, possibilita-nos a necessidade do conhecimento ser formado; de transformar a sala de aula em um laboratório de pesquisa, do professor, deixar de ser o “dono do saber”. Do aluno, ser o construtor da sua aprendizagem, do desejo de termos cidadãos com uma postura crítica, onde antes de saber fazer se torna necessário saber pensar e, ainda mais, pensar sobre seu próprio fazer.

Fazendo uma analogia, percebemos que, ao proporcionar um ensino de Matemática através da REP, suscita a reflexão de que a sociedade é constituída, assim como a solução dos problemas. Se o aluno observa que apropriação do conhecimento é feita através de regras, o aluno enxergará uma sociedade hierárquica, onde não se tem voz e vez. Mas, se propomos um ensino numa perspectiva onde o aluno formula conjecturas, pensa sobre sua própria ação, avalia o seu próprio processo, taremos instigando o ser político adormecido, na perspectiva da construção de um ser humano reflexivo.

Após apresentarmos traços do que nós pretendemos com a Trigonometria e a Resolução e Exploração de Problemas, no próximo Capítulo procuraremos fundamentar o porquê de a nossa pesquisa adotar a Resolução de Problemas como metodologia de processo ensino-aprendizagem da Trigonometria.

## **2.4 Resolução de Problemas**

A Resolução de Problemas implica o envolvimento numa tarefa, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente. Para encontrar a solução, os alunos deverão explorar os seus conhecimentos e através deste processo desenvolvem, com frequência, novos conhecimentos matemáticos.

A Resolução de Problemas não só constitui um objetivo da aprendizagem Matemática, como é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem Matemática (NCTM, 2008, p.57).

Resolver problemas está no centro do desenvolvimento da Matemática. Desde a antiguidade, os problemas ocupam um lugar central nos currículos, mas não a Resolução de Problemas (STANIC, KILPATRICK, 1989). Segundo Andrade (1998), “problemas e Resolução de Problemas têm assumido vários significados e desempenhado diversas funções no currículo escolar de Matemática”.

Conhecemos problemas desde antigas civilizações (egípcios, chineses e gregos). Os problemas contidos no Papiro de Ahmes e a necessidade de Tales de encontrar a altura da pirâmide de Quéops exemplificam a presença dos problemas em Matemática.

No entanto, a ênfase dada a pesquisa em Resolução de Problemas surge no século XX, década de 1960. Onuchic (1999) atribui tal surgimento a Polya com seus estudos nos Estados Unidos. Andrade (1998) afirma que “embora grande parte da literatura hoje conhecida em Resolução de Problemas tenha sido desenvolvida a partir dos anos 70, os trabalhos de George Polya datam de 1944”.

English e Sriraman (2010) apontam o livro de Polya como uma publicação de boas-vindas para a Resolução de Problemas, pois introduziu a noção de heurísticas e estratégias. Eles dizem que “educadores matemáticos apoderaram-se do livro, encarando-o como um recurso valioso para melhorar as habilidades dos alunos para resolver problemas desconhecidos”. Mas, autores alegam que apesar da contribuição inovadora do livro de Polya, parece que o ensino de heurísticas e estratégias não fez avanços significativos na melhoria da capacidade dos alunos em resolver problemas. Esta afirmação também é enfatizada nos trabalhos de Schoenfeld (1992), Stanic e Kilpatrick (1989), Schroeder e Lester (1989).

Schoenfeld (1992), ao refletir o porquê da ênfase dada a Resolução de Problemas, concluiu que as tentativas de ensinar os alunos a aplicar estratégias e heurísticas no estilo de Polya geralmente não tinham provado ser bem sucedidos. Segundo ele, uma das razões dava-se ao fato de muitas das heurísticas de Polya parecerem ser descritivas e não prescritivas.

Lester e Kehle, apud English e Sriraman (2010, p.265), afirmam, de modo similar, que “ensinar os alunos sobre as estratégias e heurísticas de Resolução de Problemas e suas fases [...] contribui pouco para melhorar a capacidade dos alunos de resolver problemas de Matemática em geral”.

English e Sriraman (2010) defendem que “saber quando, onde, por que e como usar heurísticas e estratégias com ações metacognitivas estão no cerne do que significa entendê-las”. Exemplificando:

Nas primeiras fases da Resolução de Problemas, os alunos podem normalmente não aplicar as heurísticas específicas, diversas estratégias ou ações metacognitivas – eles podem simplesmente trocar ideias de forma aleatória. Ao avançar em direção a uma solução, no entanto, os processos de raciocínios eficazes e ferramentas na Resolução de Problemas são necessários – se essas ferramentas forem conceitual, estratégico, metacognitivo, emocional ou social. Mais uma vez, os alunos precisam saber quais ferramentas para aplicar, quando aplicá-las, e como aplicá-las (ENGLISH e SRIRAMAN, 2010, p.265).

Com isso, segundo English et al. (2008) apud English e Sriraman (2010), nós precisamos desenvolver definições operacionais úteis que nos habilite a responder as questões mais essenciais do que responder às perguntas seguintes: podemos ensinar heurísticas e estratégias? Será que elas têm impactos positivos na capacidade de Resolução de Problemas por parte dos alunos?

Nós precisamos também perguntar: o que significa ‘compreender’ as heurísticas e estratégias de Resolução de Problemas e outras ferramentas? Como e de que forma esses entendimentos se desenvolvem e como podemos fomentá-los? Como podemos observar, documentar e medir de forma confiável esse desenvolvimento? Como podemos integrar de forma mais efetiva o desenvolvimento do conceito com a Resolução de Problemas?

Tais questionamentos remetem-nos a perceber que embora a pesquisa em Resolução de Problemas tenha ganhado um espaço de destaque no cenário nacional e mundial (ICMI-2009 e 2012, ENEM-2010 e 2013, CIAM-2011, dentre outros), percebemos que há muita coisa a ser ainda desenvolvida por essas pesquisas.

É consenso entre os pesquisadores que a Resolução de Problemas precisa ser usada como um caminho, um meio de se ensinar Matemática, ou seja, ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, tendo, para a isso, a ideia de que o desenvolvimento de um conteúdo matemático começa sempre com um problema orientador e continua através dele. Entretanto, há ainda pouca clareza sobre o encaminhamento desse problema em sala de aula, tendo em vista o ensino de conteúdos e desenvolvimento de conceitos.

Mesmo sabendo que na última década, segundo Cai (2010), tenham diminuído drasticamente a pesquisa em Resolução de Problemas. Atualmente, pesquisadores do mundo inteiro têm mostrado forte interesse na pesquisa em Resolução de Problemas,

Atualmente, há uma variedade de perspectivas e enfoque na Resolução de Problemas, tais como exploração de problemas, investigação Matemática, proposição de problemas. Há também estudos que buscam interligar a Resolução de Problemas com a modelagem (GUSTINELI (1991); CAI (2010, p.251)).

Outros pesquisadores, ao longo dos últimos 20 anos, vêm procurando tornar claro esse encaminhamento da Resolução de Problemas em sala de aula. Sendo assim, vale a pena ressaltar alguns trabalhos de alternativas existentes sobre a Resolução de Problemas: exploração de problemas (ANDRADE, 1998); investigação (MENDES, 2009; AZEVEDO, 2004); proposição/formulação de problemas (D' AMBROSIO, 2003; MEDEIROS e DOS SANTOS, 2007).

No Brasil, os trabalhos desenvolvidos nessa temática têm aprofundado a compreensão de um ensino via/através Resolução de Problemas, com fortes experiências pedagógicas. Entretanto, há ainda pouca configuração/sistematização de como acontece tal perspectiva em sala de aula.

Na UEPB, a partir dos trabalhos orientados pelo professor Dr. Silvanio de Andrade, notamos uma chama acesa, dentre tantas, a respeito do zelo e da crença de um ensino-aprendizagem através da Resolução de Problemas, buscando explicitar/mapear como ocorre tal trabalho no continuum da sala de aula, na perspectiva do professor-pesquisador. Destacamos aqui os seguintes trabalhos: Salvino Araújo Segundo (2012); Ledevande da Silva (2013); Adeilson Silva (2013), como, também, Jefferson Brandão (pesquisa em andamento). Nossa pesquisa busca dar continuidade a isso.

Ledevande da Silva (2013) trouxe novas discussões acerca do estudo de Função, a partir das ideias essenciais propostas por Conney. Os problemas foram selecionados a partir de um conhecimento científico do conteúdo. Desta forma, a seleção dos problemas procurou dar conta da particularidade do conteúdo. Tal característica é imprescindível numa pesquisa de Resolução de Problemas, pois, quando não se tem um conhecimento profundo do conteúdo a ser explorado, os problemas selecionados acabam não favorecendo a uma implementação sólida tanto da metodologia quanto da formação dos conceitos do conteúdo estudado.

Apenas problemas que valem a pena dar aos alunos a chance de ambos solidificar e ampliar o que eles sabem e estimular sua aprendizagem. Problemas que valem a pena devem ser interessantes, com um nível de desafio que convida à exploração, a especulação, e trabalho duro. Problemas matemáticos que são verdadeiramente problemáticos e envolvem Matemática significativa têm o potencial de fornecer os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos (CAI, 2010, p.252).

Outra característica perceptível no trabalho de Ledevande da Silva (2013) é o da mediação. Assumir a função de mediador em qualquer processo de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas é essencial para o pesquisador e o professor.

Em Adeilson Silva (2013), encontramos a busca pela compreensão do pensamento combinatório. Notamos a mediação neste trabalho como característica fundamental para a exploração da Resolução de Problemas em sala de aula e observamos, em boa parte da intervenção, o processo mediático. As situações problemas não acabavam nas respostas, no gerenciamento do desenvolvimento dos problemas, o diálogo (aluno-aluno, aluno-professor) assumia papel imprescindível para o desenvolvimento dos conceitos.

É importante destacarmos que o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas não deve ser apresentado e/ou trabalhado num contexto fechado/isolado. Notamos que alguns trabalhos, como os mencionados anteriormente, apresentam avanço nessa direção. Nestes percebemos a interação da Resolução de Problemas com: as Representações Múltiplas, as ideias essenciais de Função, a partir dos estudos de Conney; o Cotidiano Escolar; a Engenharia Didática; o processo de mediação proposto por Vigotski.

Quando a sala de aula é pensada como um sistema, não faz mais sentido ver a Resolução de Problemas como uma parte separada da Matemática escolar. (...) Uma alternativa é fazer com que a Resolução de Problemas seja parte integrante da aprendizagem Matemática. Esta alternativa é muitas vezes chamada o ensino da Matemática através da Resolução de Problemas ricos matematicamente onde habilidades de Resolução de Problemas são desenvolvidas através da aprendizagem e compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos (CAI, 2010, p. 255).

Dentre tantas interações percebemos algo comum nestas pesquisas, elas apontam para um ensino-aprendizagem da Matemática, através da Resolução de Problemas, mais significativo e eficiente, devido o papel do professor-pesquisador, ou seja, aquele professor que investiga/reflete sua própria sala de aula, como também, ao uso da Resolução de Problemas como metodologia de ensino.

Sabemos que tais concepções presentes hoje em discussões sobre a Pesquisa em Resolução de Problemas são frutos de discussões/reflexões que há anos vem se arrastando. Desta forma, faz-se necessário trazermos apontamentos e reflexões sobre reformas curriculares que ocorreram na Matemática e que justificam a importância da pesquisa em Resolução de Problemas para uma boa compreensão do pensamento matemático.

A seguir, continuaremos as reflexões procurando descrever/entender algumas reformas no currículo de Matemática, ressaltando que desde o início o homem utilizava-se de formulação e Resolução de Problemas mesmo que intuitivamente.

#### **2.4.1 Reformas no Currículo de Matemática e Resolução de Problemas**

Pretendemos apontar algumas reformas ocorridas no currículo de Matemática e reflexões a respeito do surgimento da Pesquisa em Resolução de Problemas, apontando traços dela até o final do século XX.

Reformas no ensino de Matemática aconteceram durante o século XX Onuchic (1999) categoriza tais reformas ocorridas como: o ensino de Matemática por repetição; o ensino de Matemática com compreensão; a Matemática Moderna e a Resolução de Problemas.

O ensino da Matemática por repetição apresentava a seguinte metodologia: o professor explicava, o aluno escutava suas informações, escrevia, memorizava e repetia. A avaliação baseava-se em testes, onde o aluno concluía que sabia se ele repetisse bem o que o professor havia ensinado.

O ensino de Matemática com compreensão centra-se na necessidade do aluno entender o que está fazendo, descartando assim a reforma anterior. Mas, como pensar num ensino com compreensão se os professores não haviam sido preparados para trabalhar essas novas ideias? Sendo assim, o trabalho do professor recaía novamente aos treinamentos de técnicas operatórias.

Outra reforma no ensino da Matemática, segundo Onuchic (1999), aparece nas décadas de 1960 – 1970, denominado de Movimento da Matemática Moderna. Este movimento descartava as reformas anteriores, apresentando, agora, uma Matemática estruturada que enfatizava a teoria dos conjuntos. Houve muitas distorções, principalmente, no processo ensino e aprendizagem, pois, os próprios professores, por muitas vezes, ensinaram, mas não se sentiam seguros daquilo que diziam. Além disso, os alunos não identificavam a ligação que aquelas propriedades enunciadas pelo professor tinham a ver com a Matemática do dia-a-dia. Segundo Shoenfeld (1996):

“ao final do Movimento os estudantes não eram só incapazes de pensar matematicamente e resolver problemas, mas, também os que fizeram os exercícios e a prática eram piores no básico do que aqueles que tinham tido a Matemática Moderna”.

Após esse momento, matemáticos, preocupados com o ensino da Matemática e seu fracasso, questionavam se esta reforma estava voltada para a formação de um sujeito consciente e útil para a sociedade ou se estava preparando os sujeitos para o mundo do trabalho. Com isso, no final dos anos 1970, matemáticos preocupados com o ensino da Matemática começam a despertar seu interesse pela Resolução de Problemas (ONUChic, 1999).

Nas duas reformas anteriores, a imagem do aluno era a de um sujeito passivo. Aluno bom e inteligente era aquele que conseguia resolver todos os exercícios que o professor apresentava após expor o conteúdo na lousa. Onuchic (1999) expõe que hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos.

Shoenfeld (1996), afirma que “no final dos anos de 1970, era quase impossível localizar a Resolução de Problemas como um aspecto identificável dos currículos”. A Resolução de Problemas aparece pela primeira vez, como tópico, em um congresso, no primeiro ICME da década de 1980.

O ensino em Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática começou a ser investigado de forma sistemática sob a influência de Polya, nos Estados Unidos, nos anos 1960 (ONUChic, 1999).

Na década de 1980, a Resolução de Problemas é amplamente destacada nos Estados Unidos e no mundo todo. Muitas propostas curriculares e pesquisas dão forte atenção a Resolução de Problemas nesse período, considerado como sua idade de ouro. Segundo Huete e Bravo (2006, p.117):

É em 1980 que o National Council of Supervisors of Mathematics (Conselho Nacional de Supervisores de Matemática) afirma que “aprender a resolver problemas é o principal objetivo do momento de estudar Matemática”. Mas o documento mais fluente sobre o tema é o do National Council of Teachers of Mathematics – NCTM (1980), “Agenda for Action”, cuja primeira recomendação aconselha que a Resolução de Problemas seja o principal objetivo do ensino da Matemática nas escolas nos anos de 1980.

Sobre a publicação, em 1980, pelo NCTM, *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's*, Onuchic (1999, p.204), destaca que:

O desenvolvimento da habilidade em Resolução de Problemas deveria dirigir os esforços dos educadores matemáticos por toda essa década e que o desempenho em saber resolver problemas mediria a eficiência de um domínio, pessoal e nacional, da competência Matemática (...). É preciso preparar os indivíduos para tentar com problemas especiais com que irão se deparar em suas próprias carreiras.



Schroeder e Lester (1989), após uma década de tentativas em tornar a Resolução de Problemas como foco da Matemática escolar, afirmam que o papel mais importante para a Resolução de Problemas é desenvolver a compreensão da Matemática nos alunos.

A década de 1980 ficou conhecida como a década de ouro para a Resolução de Problemas, devido a muitas publicações e a perspectiva de um ensino que proporcionasse significado para o aluno dentro e fora da escola. Durante esta década, vários recursos acerca da Resolução de Problemas, foram desenvolvidos para uso em sala de aula, em forma de coleções de problemas, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho dos alunos, modelos de estratégias.

A maioria dos materiais produzidos, neste momento, tinha como objetivo ajudar os professores a fazer da Resolução de Problemas o foco do seu ensinar. Mas, devido aos materiais não proporcionarem para aos professores uma direção clara e coerente do que era necessário, muitos se sentiam perdidos ou faziam da Resolução de Problemas um conteúdo a ser ensinado.

Schroeder e Lester (1989) chegam ao final da década, enfatizado que a Resolução de Problemas tinha sido a mais falada, dentre as pesquisas, e a mais escrita parte do currículo de Matemática, porém, ao mesmo tempo, uma das menos compreendida.

Onuchic (1999) aponta que essa falta de concordância ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de ‘Resolução de Problemas serem o foco da Matemática escolar’.

Shoefeld (1996) afirma “que muito do que passava por Resolução de Problemas nos anos de 1980 era muito superficial, consistindo em ideias para a Resolução de Problemas de tipo truque ou, em métodos rotineiros, de resolução para problemas de história elementares”.

Imbuída por tantas reflexões e produções, a década de 1980 apresentou em seus estudos grande atenção ao processo da Resolução de Problemas. Processo esse que continua preso à busca da solução do problema, mesmo não se limitando, simplesmente, a isso.

Embora a década de 1980 seja considerada a década de ouro da Resolução de Problemas, nessa época, muitos estudos focalizavam-se em pequenos grupos e não no contexto da sala de aula como um todo. Isso faz com que surjam, na década de 1990, estudos de caráter mais críticos, pensados numa perspectiva sócio – político - cultural, como o de Andrade (1998), em que a sala de aula é olhada em toda sua multicontextualidade. Embora tenha sido uma forte bandeira no final da década de 1980. É apenas na década de 1990, que o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, um dos maiores avanços nessa área, mesmo com a redução de estudos e pesquisas nessa área, é melhor contextualizada,

entendemos que a assumir como uma metodologia de ensino implica em pensá-la num contexto muito mais amplo, não se limitando a processos e técnicas.

Para confrontar as diferentes concepções da Resolução de Problemas na década de 1980, fruto da grande concentração de pesquisas sobre o tema neste período, Schroeder e Lester (1989) apresentam três abordagens de ensino que procuram categorizar a Resolução de Problemas: o ensino *sobre* a Resolução de Problemas, o ensino *para* a Resolução de Problemas e o ensino *via* ou *através* da Resolução de Problemas.

O ensino *sobre* a Resolução de Problemas destaca o modelo de Polya ao resolver os problemas. O modelo de Polya apresenta quatro fases interdependentes: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e analisar a solução obtida. O professor que ensina nessa perspectiva procura desenvolver nos alunos a apreensão destas fases, para que eles, ao compreenderem, usem-nas na resolução dos problemas. Assim, os professores são responsáveis por encorajá-los a se tornarem conscientes de suas progressões pelas fases.

Schroeder e Lester (1989), acerca do ensino *sobre* a Resolução de Problemas dizem que:

se o ensino *sobre* Resolução de Problemas é o foco, o perigo é considerar a “Resolução de Problemas” como um vertente a ser adicionado no currículo. Ao invés da Resolução de Problemas servir como um contexto no qual a Matemática é aprendida e aplicada, ela pode tornar-se apenas mais um tema, ensinado de forma isolada a partir do conteúdo e das relações da Matemática.

O ensino *para* a Resolução de Problemas se concentra no propósito essencial para a aprendizagem da Matemática, que é ser capaz de usá-la, mesmo sabendo que a aquisição do conhecimento matemático é de suma importância. O professor que ensina nessa perspectiva fixa sua atenção na capacidade dos alunos transferirem para outros problemas o que aprenderam. Um bom resolvidor de problemas é aquele capaz de usar os conhecimentos adquiridos para resolver problemas, visto que essa seria a única razão para a aprendizagem Matemática.

Schroeder e Lester (1989), acerca do ensino *para* a Resolução de Problemas afirmam que:

quando esta abordagem é interpretada de forma restritiva, a Resolução de Problemas é vista como atividade. O objetivo é dar aos alunos uma oportunidade de aplicar conceitos e habilidades aprendidas recentemente para a resolução dos problemas do mundo real.

O ensino *via* ou *através* da Resolução de Problemas se configura na necessidade da aprendizagem gerar significado para o aluno. Os problemas são selecionados com a finalidade

de gerar e gerir a aprendizagem Matemática, os alunos são impulsionados a fazer. Um dos objetivos de se aprender Matemática é o de poder fazer com que os problemas não rotineiros se tornem rotineiros (ONUChic, 1999). O professor que ensina nessa perspectiva tem como foco tornar o seu ensino como um movimento do concreto para o abstrato, ou seja, partir de situações do mundo real para posteriormente representá-lo de forma simbólica.

Essas três abordagens de Resolução de Problemas em Matemática são todas importantes para a prática escolar, muitas vezes se sobrepõem e ocorrem simultaneamente. Mas a abordagem “via” incorpora no processo as outras duas e o seu foco maior está na formação de conceitos, sendo os conteúdos iniciados, desenvolvidos e finalizados a partir de problemas.

Onuchic (1999), ao refletir sobre o ponto central de interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, afirma que tal estudo baseia-se “na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática”.

Schroeder e Lester (1989) dizem que “em vez de fazer a Resolução de Problemas o foco do ensino da Matemática, professores, autores de livros didáticos, os organizadores de currículo e avaliadores deveriam centrar-se na compreensão”. Sendo assim, eles transformariam a concepção de enxergar a Matemática, simplesmente, como uma ferramenta para resolver os problemas, para uma concepção mais ampla, onde a Matemática passa a ser uma forma de pensar e organizar suas experiências.

Acreditamos que tornar o ensino da Matemática *via* Resolução de Problemas gera uma maior compreensão para quem está envolvido nesse processo. Destacamos algumas características percebidas em nossa intervenção, que são responsáveis por esse fato: curiosidade ao procurar entender o texto do problema proposto; surpresa ao realizar a avaliação do seu caminho ao resolver o problema e perceber que alguns tópicos podiam ser explorados de outras formas; consciência de uma boa parte no processo de resolução, satisfação ao perceber que alguns problemas poderiam ajudá-los em situações do cotidiano; dentre outras.

As abordagens de ensino da Resolução de Problemas desenvolvidos por Schroeder e Lester (1989), fizeram-nos refletir sobre posturas de compreensão que podemos trabalhar ao resolver problemas.

Stanic e Kilpatrick (1989), ao refletirem sobre a Resolução de Problemas, encontram, nas perspectivas históricas do currículo de Matemática das escolas, três temas gerais que

caracterizam o papel da Resolução de Problemas, os quais são interessantes discutir: Resolução de Problemas *como contexto*, Resolução de Problemas *como capacidade* e Resolução de Problemas *como arte*.

Percebemos que tanto as perspectivas históricas do currículo de Matemática, apresentadas por Stanic e Kilpatrick (1989), quanto as categorizações dada por Schroeder e Lester (1989), após analisar as produções e discussões oriundas da década de 1980, como marcos essenciais para compreendermos a importância que a pesquisa em Resolução de Problemas teve no século passado.

Até pouco tempo atrás, as pesquisas em Resolução de Problemas, embora fizessem relações com situações externas à Matemática, ainda fechavam-se em si e no processo de compreender como ela estava sendo desenvolvida durante o caminhar da resolução dos problemas.

Embora não haja um consenso universal sobre o ensino da Matemática por meio da Resolução de Problemas como realmente se parece, existem características comumente aceitas no ensino da Matemática através da Resolução de Problemas. Ensinar por meio da Resolução de Problemas começa com um problema. Os alunos aprendem e compreendem aspectos importantes de uma ideia ou um conceito matemático, explorando a situação problema. (...) Portanto, teoricamente, esta abordagem faz sentido de acordo com as perspectivas construtivistas sócio-cultural da aprendizagem. (CAI, 2010, p. 255).

Sendo assim, o horizonte a ser vislumbrado e vivido no contínuo para a Resolução de Problemas é bem promissor.

#### **2.4.2 Resolução de Problemas: olhando o horizonte**

Quando em 1980, através da Agenda para Ação, o NCTM determinou que a Resolução de Problemas fosse o foco do ensino da Matemática nas escolas dos EUA, ocorreram distorções na interpretação, fruto da crença que os professores tinham da Resolução de Problemas e da apreensão de conceitos matemáticos.

Alguns professores acreditavam que para os alunos tornarem-se bons resolvedores de problemas tinham que ter adquirido uma base conceitual sólida, antes de serem expostos aos problemas. Outros viam que para os alunos se destacarem na Resolução de Problemas o ensino deveria estar centrado em estratégias. Outros ainda percebiam que para ser bom resolvidor de problemas necessitava de um ensino fundamentado em problemas, desde a

formação conceitual até a sua resolução e exploração, ou seja, “pensar o ensino da Matemática como um sistema” (CAI, 2007, p.10).

Esse “sistema”, apontado por Jinfa Cai, é pensar o ensino da Matemática através da Resolução de Problemas de forma não isolada. Ela defende a visão de que existe uma conexão simbiótica entre a Resolução de Problemas e a aprendizagem de conceitos, pois “os alunos aprendem e entendem a Matemática resolvendo ricos problemas matemáticos e as habilidades de Resolução de Problemas são desenvolvidas através da compreensão Matemática e aprendizagem de conceitos e procedimentos”. Para isso, é necessário certo tempo de comprometimento para o ensino através da Resolução de Problemas.

Desde criança, fomos habituados a escutar mais afirmações do que perguntas. Com isso, sentimo-nos inconformados quando as respostas não aparecem de imediato. Cai (2007, p.11) afirma que “os alunos não podem tornar-se exímios resolvedores de problemas do dia para a noite, o sucesso exige compromisso a longo prazo dos alunos e dos professores”.

Lester (2007, p.153), em um curso dado para futuros professores do ensino básico, esclarecia a importância de motivar os alunos e convencê-los a perseverar. Para ele,

é importante que os alunos percebam que uma solução de problemas requer tempo para a compreensão, planejamento e avaliação, bem como o tempo para a realização do plano. Parte do processo do desenvolvimento da maturidade Matemática é aprender a entender que os bons solucionadores de problemas monitoram continuamente o seu próprio progresso, fazendo-se as perguntas que começam muitas vezes com o professor pedindo soluções de problemas. (LESTER, 2007, p.153)

Com base na ideia de que não se programa um ambiente de Resolução de Problemas em curto prazo. Notamos a necessidade de mudança no modo de ver o ensino da Matemática. Lester (2007, p.154), afirma que:

Fundamental para o ensino via a Resolução de Problemas é ver o ensino como um ato de ajudar os estudantes a entender uma profunda compreensão das ideias e processos matemáticos por envolvê-los em fazer Matemática: criando, conjecturando, explorando, testando e verificando.

Acreditamos que o papel da Resolução de Problemas na escola básica seja proporcionar um ensino de Matemática fundamentado na compreensão, onde a aprendizagem ocorra num ambiente em que a “arte de fazer” se torne prática constante, durante o processo ensino-aprendizagem.

Ao pensarmos num ambiente em que se desenvolva a “arte de fazer”, não podemos pensar num ambiente onde cada aluno esteja engajado, de forma fechada, ao seu problema.

Promover a aprendizagem cooperativa aumenta as possibilidades de interação, como também possibilidades de enriquecer o processo ensino-aprendizagem.

Uma ferramenta que deve estar presente nos trabalhos que envolvem a Resolução de Problemas, atualmente, é um ensino voltado para a aprendizagem cooperativa. Sobre a aprendizagem cooperativa, Lester (2007) acredita que a mesma beneficia os alunos das seguintes formas:

- Os alunos experimentam abordagens múltiplas para resolver um problema particular;
- Os alunos veem uma variedade de estratégias de pensamento modelado por seus membros de seu grupo;
- Os grupos podem enfrentar mais problemas desafiadores que um indivíduo poderia;
- Atividades de cooperação podem render mais trabalho perspicaz e estimular ainda mais a pensar;
- Trabalhar com os outros motiva os alunos a perseverar;
- Os alunos desenvolvem sua comunicação e habilidades de reflexão através da interação social que um grupo pequeno proporciona;
- O papel do professor muda de um distribuidor de conhecimentos para um facilitador dos esforços de aprendizagem cooperativa.

Nas discussões atuais, quando refletirmos, sobre “que ferramentas necessitamos”, para aprender Matemática, outras ideias, além da aprendizagem cooperativa, também são de fundamental importância para que o processo ensino-aprendizagem seja mais significativo. Essa mesma pergunta estava contida no Capítulo I, do documento destinado para os professores de Matemática da Califórnia em 1992, que embora não seja tão atual, apresenta para nós ferramentas que continuam sendo atuais, tais como: habilidades metacognitivas, ideias Matemáticas, comunicação e técnicas e ferramentas.

Com relação às habilidades metacognitivas, ou seja, alunos que ao resolver problemas desenvolvem a capacidade de analisar o seu próprio progresso ou adaptam suas estratégias quando encontram novos obstáculos, cabe aos professores a efetivação de um ambiente onde tais habilidades se desenvolvam de forma consciente e espontânea.

Ao alimentar um ambiente em que o desenvolvimento da compreensão é consistentemente verificado por meio da reflexão, os professores criam condições para que os alunos aprendam a tomar a responsabilidade de

refletir sobre o seu trabalho e a proceder aos ajustes necessários, aquando da Resolução de Problemas (NCTM, 2008, p.60).

A Resolução de Problemas deve assumir papéis significativos no processo de formação do pensamento matemático ao longo de todos os anos que compõem a escola básica. Alguns destes papéis são destacados por Lester (2007), tais como:

- Independentemente do modo que a Resolução de Problemas é implementada, esta deve favorecer ao aluno possibilidades que estimulem no processo compreensivo do ensino-aprendizagem;
- Tornar um ambiente favorável que suscite nos alunos o desejo em resolver problemas, como também, fazer com que assuma o propósito de que estudar Matemática implica em capacitar os alunos para resolver problemas. Assim como diz Di Mateo e Lester (2007), “ser capaz de resolver problemas deve ser um resultado importante da aprendizagem Matemática”;
- Se o ensino é para a Resolução de Problemas, este deve ser claro, sistemático e bem organizado, envolvendo os alunos na Resolução de Problemas de forma regular. Sabemos que o ensino para Resolução de Problemas tem como foco desenvolver nos alunos a capacidade de transferir o que aprenderam a partir de uma situação problema para outros. Sendo assim, os problemas utilizados no ensino devem estar associados a um conceito matemático, como também, a um processo;
- A Resolução de Problemas deve ser incluída em todo o currículo e não trabalhada isoladamente, para que ajude os alunos a construir conexões Matemáticas.

Vale ressaltar a importância que tais papéis assumem se trabalhados no contínuo da sala de aula, acreditamos neles! Mas percebemos que, embora os alunos devam desenvolver a capacidade de transferir o que aprenderam, a partir de uma situação problema para outros, esta não menciona explicitamente o fato de trabalhar a Resolução de Problemas para além da sala de aula. Sabemos que não é fácil, pois a Resolução de Problemas é uma tarefa complexa que envolve diversos fatores, dentre eles: conteúdos matemáticos, estratégias, processos de pensamento e raciocínio, motivações, crenças, fatores contextuais e culturais.

Para English e Sriraman (2010, p. 268), o conhecimento limitado dos alunos ao resolverem problemas além da sala de aula é um dos fatores limitantes em pesquisas de Resolução de Problemas. Com isso, destacam que “precisamos saber mais sobre por que os

alunos têm dificuldade em aplicar os conceitos e habilidades (que, presumivelmente, tiveram aprendido na escola) Matemáticas fora da escola”.

Segundo English e Sriraman (2010), tal preocupação “foi expressa por inúmeros pesquisadores e grupos de empregadores que as escolas não estão dando a devida atenção para os entendimentos e habilidades que são necessárias para o sucesso além da escola”. Justificamos tal preocupação, através do exemplo dado por Lesh (2008) apud English e Sriraman (2010, p. 270):

A demanda de trabalhadores com potencial em campos relacionados com a Matemática / ciência são aquelas que podem: interpretar e trabalhar eficazmente com sistemas complexos; comunicar e forma eficiente e significativamente sua função dentro de diversas equipes de especialistas; planejar, monitorar, e avaliar de dentro complexos progressos, projetos multi-estágio; e se adaptar rapidamente e continuamente ao desenvolvimento das tecnologias.

Para isso, é necessário que o professor faça o aluno perceber as conexões entre a Matemática escolar (preâmbulo da Matemática científica) e com a Matemática usada no dia-a-dia. Vejamos outras características necessárias que um professor deve estar sensível no processo de ensino-aprendizagem da Resolução de Problemas, as quais são destacadas por Di Mateo e Lester (2007):

- Usar a Resolução de Problemas nas atividades para que os alunos lidem com experiências complicadas, com situações da vida real;
- Manter o nível de dificuldade em atividades de Resolução de Problemas. Para isso, os professores devem: selecionar atividades que se baseiam nos conhecimentos prévios dos alunos, apoiar e estimular o pensamento dos alunos e persistir em pedir aos alunos para se envolver significativamente em tudo o processo de Resolução de Problemas;
- Incentivar os alunos a se engajarem no processo matemático de generalização, ou seja, proporcionar atividades que estimulem os alunos a encontrar padrões;
- Propor regularmente que os alunos resolvam problemas em grupos, pois se acredita que ao trabalharem juntos, os alunos estimulam uns aos outros a expressarem o seu pensamento, de forma que os outros possam entender;
- Avaliar o progresso nas atividades de Resolução de Problemas de forma diferente, ao invés de simplesmente verificar as respostas para os problemas;
- Desenvolver a conceituação de uma auto Matemática dos seus alunos;
- Ser um guia, ao invés de uma autoridade;



- Estabelecer uma comunidade Matemática na sala de aula, uma comunidade onde o pensamento de todos é respeitado e onde a participação ativa dos alunos na atividade Matemática seja a norma.

Já, segundo Cai (2007, p.11), “os professores devem desempenhar dois papéis cruciais na sala de aula: seleção de tarefas e orquestrar o discurso em sala de aula”. Em relação ao papel de selecionador de tarefas, Cai (2007, p.12) afirma que:

(...) os professores devem envolver os alunos em uma variedade de atividades de Resolução de Problemas de: encontrar várias estratégias de solução para um determinado problema, exercício de problematização e exploração Matemática, dando razões para as suas soluções e fazer generalizações.

Nos Princípios e Normas para a Matemática escolar, desenvolvido pelo NCTM, encontramos preocupações a respeito da importância na seleção de tarefas Matemáticas relevantes para a exploração de problemas e/ou situações problemas.

O papel do professor na seleção dos problemas e das tarefas Matemáticas relevantes é fundamental. Ao analisar e adaptar um determinado problema, ao antecipar as ideias Matemáticas que dele possam emergir e as próprias questões dos alunos, os professores podem decidir se determinados problemas poderão ou não ajudar a sua turma a atingir os objetivos propostos (...). A escolha sensata dos problemas e a utilização e adaptação dos problemas, revelam-se tarefas complexas no ensino da Matemática (NCTM, 2008, p.58).

Com relação ao papel de orquestrador do discurso em sala de aula, Cai (2007, p.12) relata que há uma série de fatores relacionados ao discurso que pode influenciar a realização do ensino a partir de problemas. Um deles é “a quantidade de tempo de discussão atribuído para resolver problemas”. Outro fator está relacionado ao fato dos professores retirarem “o desafio de uma tarefa Matemática, assumindo o pensamento e o raciocínio, dizendo aos alunos como resolver o problema”. As perguntas feitas pelo professor também são determinantes para orquestrar o diálogo em sala.

Através de reflexões como esta e de tantas outras que fizemos, percebemos que a pesquisa em Resolução Problemas tem amadurecido consideravelmente, levando em conta uma perspectiva mais complexa, incluindo fatores como: contexto social- político -cultural da sala de aula, interdisciplinaridade, dentre outros.

Grootenboer (2010, p. 292) ao fazer a análise do capítulo de English e Sriraman (2010), “Resolução de Problemas para o século XXI”, enfatiza que:

A pesquisa mais recente tem proporcionado uma compreensão mais perceptiva e complexa da Resolução de Problemas, mas isto não significa

que os resultados têm sido mais úteis na prática. Um desafio que enfrenta os pesquisadores de educação Matemática e professores de Matemática enfrenta agora é traduzir esses resultados em uma melhor prática em sala de aula para obter resultados melhores.

Sendo assim, os trabalhos produzidos pelo nosso grupo de estudos na UEPB, descritos anteriormente, têm se apresentado como um desafio, pois todos eles pretendem dialogar a pesquisa em Resolução de Problemas com as salas de aula de Matemática nessa perspectiva mais ampla.

Nessa busca constante, estão implícitos reflexões sobre o processo de ensino-aprendizagem em relação aos aspectos sócio-político-cultural, procurando refletir o cotidiano da sala de aula a partir da figura do professor pesquisador.

Sabemos que este movimento e este foco ainda estão engatinhando, mas, quando pensamos a Resolução de Problemas como metodologia do processo ensino-aprendizagem da Matemática, procuramos refletir dando voz e vez às vozes que perpassam em torno de todo o cotidiano da sala de aula, a partir da figura do professor pesquisador.

Desta forma, refletiremos, no próximo tópico, o contexto do cotidiano escolar, particularmente no cotidiano da sala de aula de Matemática. Buscaremos apresentar os elementos presentes no processo ensino-aprendizagem da Matemática, alguns dos quais, muitas vezes, são esquecidas em nossas aulas.

## **2.5 COTIDIANO ESCOLAR: refletindo a sala de aula de Matemática a partir de uma perspectiva libertadora**

Apresentaremos a seguir algumas reflexões, a partir desta primeira parte do estudo, que têm como objetivo investigar as potencialidades do ensino-aprendizagem da Trigonometria, na perspectiva da Resolução e Exploração de Problemas, com o cotidiano da sala de aula, portanto, mas, ficando apenas limitado ao conteúdo em si mesmo, mas olhando também para a multicontextualidade da sala de aula.

Para isto, refletiremos sobre algumas perguntas que insistem em nos “incomodar”, propondo deixar “emergir as múltiplas redes que tecem o cotidiano” (AZEVEDO, 2003, p.128).

O incômodo muitas vezes nos impulsiona ao deserto, em busca do desconhecido, momento em que precisamos nos distanciar um pouco, para que possamos escutar/ver/olhar o que acontece nas tramas que o cotidiano nos proporciona, fazendo com que nossa

sensibilidade mergulhe nos dois mundos opostos nos quais não precisamos estar, são eles: a proximidade de nos prendermos nas tentações absolutistas que a todo o momento vem nos seduzir e a fuga sem rumo em propostas didático-metodológicas que mais estimulam o tecnicismo do que um processo ensino-aprendizagem reflexivo.

Como Cemí, na metáfora trazida por Larrosa para ilustrar a transfiguração poética do caminho que Lezama percorreu até a conquista das condições de possibilidades de sua forma de escrever, procuramos “em seu distanciamento, aproximar-se mais: deixa-se interpelar, coloca-se verdadeiramente à escuta, afina seu olhar, atenta sua sensibilidade” (LARROSA, 2006, p.84).

Começamos observando a forma como os alunos se comportam quando estão esperando o sinal para entrar na escola. Em nossa realidade, a maioria necessita do ônibus estudantil para chegar até a escola. Para esses alunos, o dia letivo começa muito antes daqueles que moram na parte urbana do município, aproximadamente duas horas antes do sinal tocar<sup>6</sup>. Acompanhando o transporte escolar, percebemos que tal veículo favorece familiares dos alunos que o utilizam para resolver situações do lar, como também para irem e virem do trabalho, já que não existe linha de ônibus que liga os sítios mais distantes com o centro da cidade<sup>7</sup>.

A frente da escola, 15 minutos antes do toque, é sinal de festa. É um espaço de reencontros, conversas, algazaras, piadas, paqueras, enfim, é um espaço de liberdade. Liberdade das “amarras familiares”, do namorado, da rotina diária, em poucos instantes eles serão pegos pelas “amarras da escola”.

Enquanto educadores que somos, será que observamos a forma/maneira como nossos alunos entram na unidade escolar e se dirigem para suas respectivas salas? O itinerário predominante é o seguinte: deixam o caderno na sala, em seguida dirigem-se para o pátio, onde continuam suas ações iniciadas antes do toque, e ficam esperando que os professores passem para de fato irem para sala. Existem ainda alunos que precisam do chefe de disciplina e do próprio professor chamando para entrarem em sala.

Continuando a reflexão, notamos que existem diferenças significativas na postura dos alunos quando estão fora da escola esperando o toque ou no pátio, para a postura desempenhada por eles dentro de sala de aula. Parece-nos que, fora de sala de aula, eles estão

---

<sup>6</sup> Informação coletada quando conversava com duas alunas (uma do 9º ano e outra do 2º ano) ao voltar para casa no ônibus escolar.

<sup>7</sup> O município apresenta duas linhas de ônibus. Uma perpassa os seguintes sítios: covão, alvinho, almeida e pai domingos (uma parte). A outra linha de ônibus trafega nos seguintes sítios: vila ipuarana e vila florestal. O município de Lagoa Seca apresenta mais de 30 sítios.

mais vivos, produtivos, úteis, significativos, importantes. Parece-nos que dentro da sala eles perdem as forças. Muitos não perguntam, não interagem, não expõem suas posições, e quando o fazem são tendenciosas, pois perguntam, respondem aquilo que o professor quer escutar. Por trás dessa trama, existe o interesse de executar tais ações para receberem uma nota boa.

Será que é a falta de uma metodologia diferenciada pelo professor? Será que é o aluno que “não quer nada com a vida”<sup>8</sup>? Será que a escola não dá condições adequadas para que o aluno desenvolva suas habilidades específicas, sabendo que cada um tem potencialidades diferentes? Será? Será?

Nós trazemos tais indagações, porque queremos refletir/discutir tais situações, pois, em diversos momentos, o sistema escolar apresenta-as como muito natural. Fazemos tais perguntas e outras, pois queremos entender melhor esse cotidiano que nos cerca, nos surpreende, nos encanta, nos desafia.

São perguntas que, necessariamente, não procuram respostas prontas, acabadas, também não sabemos se existem. Não comungamos da ideia positivista causa e efeito, das influências cartesianas sobre a linearidade. Percebemos que tais perguntas acabam traduzindo-se em inquietações pessoais, as quais acabam ajudando-nos a encontrar os nossos próprios resquícios, pois fazemos parte desse meio.

Somos caçadores de nós mesmos, como diz Ferraço.

Apesar de pretendermos, nesses estudos, explicar os “outros”, no fundo estamos nos explicando. Buscamos nos entender fazendo de conta que estamos entendendo os outros. Mas nós somos também esses outros e outros “outros”.

Por vezes, quando nós nos explicamos, pensando explicar os outros, falamos coisas próximas daqueles que queremos explicar. Mas, mesmo assim, ainda somos os sujeitos explicados em nossas explicações. Somos *caçacaçador*. E com essas explicações nos aproximamos das explicações dos outros. (FERRAÇO, 2003, p.160)

Por isso, pretendemos esclarecer e ao mesmo tempo diferenciar onde nossa pesquisa está situada. Não pretendemos escutar/ver/sentir/cheirar/ perceber o cotidiano simplesmente porque ele está lá. Não pretendemos atuar como médicos, que desenvolvem suas ações segundo suas especificidades. Com isso, não estamos negando as especificidades que cada um pode desempenhar, mas sim expondo que é necessário ampliar os horizontes. Queremos, como diz Nilda Alves, mergulhar neste contexto. “É preciso ter claro de que não há outra maneira de se compreender as tantas lógicas dos cotidianos senão sabendo que estou

---

<sup>8</sup> Fala de alguns professores, inclusive minha, quando estamos em reuniões de planejamentos.

inteiramente mergulhada nelas, correndo todos os perigos que isto significa” (ALVES, 2008, p.18), e, nesse mergulho, tocar e deixar-se ser tocado por ele.

Buscar entender, as atividades dos cotidianos escolares ou dos cotidianos comuns, exige que esteja disposta a ver além daquilo que outros já viram e muito mais: que seja capaz de mergulhar inteiramente em uma determinada realidade buscando referências de sons, sendo capaz de engolir sentido a variedade de gostos, caminhar tocando coisas e pessoas e me deixando tocar por elas, cheirando os odores que a realidade coloca a cada ponto do caminho diário. (ALVES, 2008, p.18-19)

Não é possível desenvolver qualquer pesquisa com o cotidiano com uma perspectiva metodológica rígida, engessada, estática. Tal perspectiva segue notoriamente uma linearidade, um padrão. Percebemos algo, isso gera-nos inquietações, procuramos fundamentar tais arguições para que, assim, fruto de tais leituras, possamos extrair um modo possível para voltar a campo e aplicar tais contribuições adquiridas. Onde fica a imprevisibilidade, a surpresa, o encanto, os improvisos, a fluidez diária da vida na escola?

Para entender a “realidade” da vida cotidiana, em qualquer dos *espaçotempos* em que ela se dá, é preciso estar atenta a tudo o que nela se passa, se acredita, se repete, se cria, se inova, ou não. Mas é preciso também reconhecer que isso não é fácil, pois o *aprendidoensinado* me leva, quase sempre, a esquemas bastante estruturados de observação e classificação e é com grande dificuldade que consigo sair da comodidade do que isto significa, inclusive a aceitação pelos chamados “meus pares”, para me colocar à disposição para o grande “mergulho” na realidade. (ALVES, 2008, p.21)

Não se trata de uma proposta de intervenção “sobre” o cotidiano, pois, pesquisar sobre traz a marca da separação entre sujeito e objeto (FERRAÇO, 2007, p.77). Ainda, segundo Ferraco (2007, p.77), a pesquisa desenvolvida em tal perspectiva, – sobre o cotidiano – “*traz a possibilidade de identificarmos o cotidiano como objeto em si, fora daquele que o estuda, que o pensa sobre o pensar*”. Pesquisar sobre o cotidiano reforça uma “prática de ensino distanciada”. Tal prática está alicerçada em discursos que podem estar até bem teorizados (fundamentados), mas traduzirá o objeto numa perspectiva de superioridade. Pesquisar sobre o cotidiano sugere a intenção de poder falar do outro a partir do outro, isentando-se desse outro, colocando-nos separado desse outro (FERRAÇO, 2007, p.77), tornado, assim, este espaço engessado.

Também nossa pesquisa não é simplesmente “no” cotidiano. Nessa perspectiva, emerge também um distanciamento entre o sujeito e o objeto. É um envolvimento de fora, onde observo, analiso, prescrevo, dou até sugestões, mas é uma relação muito casual. Estar

“no” cotidiano sinaliza para um estar sem envolvimento. Estar “no” cotidiano não implica estar totalmente envolvido. Estou lá, e daí?

Podemos conhecer a escola “como a palma da mão”<sup>9</sup>, como também, podemos até ter as *lentes de aumento*<sup>10</sup>, para conhecer a escola mais de perto percebendo “a dinâmica das relações e interações que constituem o dia-a-dia, apreendendo as forças que a impulsionam ou retêm, identificando as estruturas de poder e os modos de organização do trabalho pedagógico e compreendendo o papel e a atuação de cada sujeito” (ANDRÉ, 2008, p.141). Se temos todos esses atributos, isso não dá nenhuma garantia de que estamos envolvidos, de que estamos mergulhados nesse cotidiano.

Nossa pesquisa vislumbra a possibilidade do envolvimento, do tocar e deixar-se tocar, do mergulhar de forma consciente. Trata-se de uma pesquisa com o cotidiano, que entende que não dá para trazer novas propostas e metodologias de ensino na sala de aula sem levar em conta o cotidiano escolar em que estamos mergulhados.

Mergulhar de forma consciente remete-nos não a consciência do que iremos encontrar, mas a predisposição de conhecer a cultura que estamos adentrando, com suas potencialidades e desafios.

O cotidiano não é simplesmente um local. Então, o que seria o cotidiano? O que pesquisadores do cotidiano dizem sobre ele? Ferrazo (2007, p.78) considera “o cotidiano como o próprio movimento de tessitura e partilha das redes de *fazersaberes*”. Victorio (2007, p.106) afirma que “o cotidiano escolar é um dinâmico atravessamento das potencialidades do imaginário que forjam muitas imagens de formidável consistência”. Prado e Cunha acreditam que “o cotidiano é o contexto de nossas invenções, contradições, e superações. É o espaço e tempo de interrogações sobre os nossos fazeres e saberes”.

E o que pesquisadores dizem sobre o que é pesquisar o cotidiano? Oliveira e Sgarbi (2007, p.20) entendem “que pesquisar o cotidiano é um processo de (re) invenção permanente do ato de pesquisar”. Oliveira (2008, p.59) expõe que “pesquisar o cotidiano escolar é, assim, um trabalho de busca de compreensão das táticas e usos que os professores desenvolvem no seu fazer pedagógico, penetrando astuciosamente e de modo peculiar, a cada momento, no espaço de poder”. Prado e Cunha defendem que “pesquisar o cotidiano é buscar ler a experiência e assumir o lugar de protagonista da própria formação e profissão”.

---

<sup>9</sup> Expressão popular para designar um conhecimento amplo, de perto, total.

<sup>10</sup> Expressão usada por Marli E. D. A. de André num artigo – pesquisa sobre a escola e pesquisas no cotidiano da escola – da Revista Eccos no ano de 2008.

### **2.5.1 A PESQUISA EM MATEMÁTICA COM O COTIDIANO DA SALA DE AULA COMO PRÁTICA DE LIBERDADE**

A essência do título desse item baseia-se em Paulo Freire, em seu livro “Educação como prática da liberdade”, que nos trouxe reflexões, ajudados por alguns colaboradores, sobre a necessidade da emancipação do ser por completo.

Durante muito tempo enfatizou-se, e, conseqüentemente, praticou-se uma educação escolar sem qualquer vínculo com a vida externa do sujeito, uma educação centrada na tecnicidade do processo ensino-aprendizagem. Os sujeitos desse contexto eram vistos como seres passivos e o professor como ser ativo e único responsável por transferir as informações.

Frutos das reflexões sobre Educação surgiram reformas curriculares que favoreceram melhorias na educação, fazendo-nos enxergar alternativas promissoras, tais como: presença das massas nas escolas; inserção das Tic no ambiente escolar; valorização do trabalho docente; incentivo a um ensino dinâmico-interativo; dentre outras.

No entanto, parece que as preocupações ainda estão centradas no conteúdo, em propostas que vislumbram alternativas para a exposição de determinados conteúdos, principalmente, os considerados, ao longo da história, como difíceis de serem aprendidos e apreendidos. E também em propostas que defendem que professores abertos para metodologias alternativas tornam o ensino mais atraente e não rotineiro.

Mas por que em nossas salas de aula (pequenas culturas), mesmo munido de diversas alternativas metodológicas, o ensino ainda centra-se na dependência? O aluno só realiza a atividade se o professor mandar, se vale nota.

Questionamo-nos, pois em nossa intervenção notamos que em algumas situações havia uma dependência excessiva dos encaminhamentos que o professor fornecia.

Sabemos que estabelecer relações entre a realidade do aluno e a realidade proposta pela educação escolar é fator de suma importância para as aproximações das distâncias existentes entre o saber do senso comum e o saber científico. O que observamos em nossa prática, como também em leituras, é que, quando queremos aproximar tais realidades através de situações problemas que apresentam temas político-sociais (custo de vida, inflação, formação de cooperativas, entre outros), acabamos de certa forma enxertando discussões provenientes de tais situações, ficando assim deslocado do contexto matemático explorado em questão.

Duarte (1987), sobre o incremento de algo político ao ensino de Matemática, afirma que “alguns educadores, no intuito de contribuir para as transformações sociais, têm

procurado dar um caráter mais politizante ao ensino da Matemática”. Algumas tentativas centram-se num ensino centrado em temas tais como: justiça social, juros, estimativas, etc.

Leonardo Boff (1977), na apresentação à edição brasileira do livro “A Vida nas Escolas: uma introdução à pedagogia crítica nos fundamentos da educação”, retrata a necessidade de inverter a ordem lógica do espaço educacional, onde as dores precisam ser sentidas, as lágrimas possam ser derramadas sem nenhum constrangimento, as alegrias possam ser compartilhadas e os sonhos possam ser partilhados numa perspectiva de liberdade movida pelo bem comum.

Levar a vida para dentro da escola, a vida com sua dinâmica e suas contradições, com sua base econômica e daí com sua dimensão de classe, com seu suporte político e daí com sua referência a relações de poder, com sua marca de gênero e daí com todas as singularidades e conflitos ligados ao masculino e ao feminino, com sua ideologia subjacente e daí com o sentido de vida e de mundo que se escondem por detrás dos vários estilos de vida. (BOFF, 1977, p.IX)

Notamos que ainda são escassas as pesquisas que apresentam o professor mergulhado em seu cotidiano, comprometido com essa prática da liberdade. Professores pesquisando suas próprias salas de aula, favorecendo, assim, um ensino centrado não apenas no ensinar, mas no aprender. Para isto, vale ressaltar o que Silva (2002) como educador aspira:

Esperamos que um dia as escolas, que se dizem pomposamente estabelecimentos de ensino, se tornem estabelecimentos de aprendizagem e, com isto, entendam a importância de uma educação – e em particular educação Matemática – voltada para a realidade dos educandos, permitindo-lhes manejar esta realidade em suas dimensões quantificáveis e estatísticas, pois será inevitável que este tipo de tratamento quantitativo e matematizado da realidade se expanda, invadindo todas as esferas possíveis da vida concreta. Haja visto o avanço tecnológico que tem levado a sociedade a depender cada vez mais da eletrônica e da informática em todas as áreas, seja na medicina, no esporte, no lazer, no supermercado, nas fábricas, nas oficinas e até mesmo nas artes. (SILVA, 2002, p. 80).

Entendemos que, para assumir o compromisso com essa prática de liberdade, “não se pode perder de vista que o objetivo central da atividade daquele que se propõe a ensinar Matemática é o ensino desta” (DUARTE, 1987, p. 79). Não deve ser uma “prática de liberdade oculta”, onde discutimos temáticas político-sociais, relegando a um segundo plano o ensino matemático propriamente dito. Concordamos com Duarte (1987, p. 79) quando afirma que “possibilitar a assimilação dessa ferramenta cultural não é suficiente”.

Existe uma dimensão política entrelaçada com o ensino da Matemática através da prática do professor que contribui diretamente para uma prática de liberdade.



Mesmo que nós trabalhemos com afinco no ensino da Matemática, procurando contribuir para que as camadas populares assimilem essa ferramenta cultural tão necessária à sua luta, nosso trabalho pode estar sendo guiado subliminarmente por objetivos opostos a essa contribuição. É o que ocorre quando, sem perceber, transmitimos, através do fazer pedagógico, uma visão estática do conteúdo matemático, como se ele fosse pronto e acabado, como se ele tivesse sido sempre assim, como se seus princípios, suas regras, fossem absolutos no tempo e no espaço. (DUARTE, 1987, p. 80).

Um exemplo disso ocorre quando, ao ensinar as razões trigonométricas, o fazemos nos atendo somente aos alunos saberem que o seno é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa e que o cosseno é a razão do cateto adjacente pela hipotenusa, mas esquecendo de refletir questões importantes como: por que estudar Trigonometria, em especial, as razões trigonométricas? Além do fato de estarmos trabalhando com duas grandes áreas do conhecimento matemático (Álgebra e Geometria), a resposta para o estudo das razões trigonométricas decorre da necessidade de calcular distâncias inacessíveis. No entanto, com a demanda tecnológica atual é necessário calcularmos tais distâncias se máquinas a fazem com mais rapidez e precisão? O que está implícito aqui é a necessidade da construção dos conceitos envolvidos no estudo e não a técnica operatória em si.

Outras perguntas podem e devem ser feitas para que os conceitos ganhem sentido e significado para os educandos, tais como: o que é uma razão? Como se deu o processo de construção para o que hoje chamamos de razão trigonométrica? De que forma se deram as aplicações dessas razões? Quais ligações podem ser feitas entre a forma como foi inicialmente utilizada para a que hoje é aplicada?

Se apresentarmos o conteúdo já dizendo o que representam as razões trigonométricas, sem nos preocuparmos com as questões apresentado acima, o que fazemos é o apresentar como se ele sempre tivesse existido por si mesmo.

Os alunos poderão até aprender, com facilidade, a aplicar as razões trigonométricas. Mas, Duarte (1987, p. 81) expõe que “embora tenham aprendido a manipular essa ferramenta cultural, não terão captado o processo de evolução da mesma”. Desta forma, “é incoerente com a proposta de contribuir para a transformação social, pois se vemos a Matemática estaticamente, estaremos contribuindo para que esse modo de ver as coisas seja adotado com relação ao restante da prática social do indivíduo” (DUARTE, 1987, p. 81).

Ainda segundo Duarte (1987, p. 81):

Se pretendemos contribuir para que os educandos sejam sujeitos das transformações sociais e do uso da Matemática nessas transformações, é necessário que contribuamos para que eles desenvolvam um modo de pensar e agir que possibilite captar a realidade enquanto um processo, conhecer as

leis internas do desenvolvimento desse processo, para poder captar possibilidades de transformação do real. (DUARTE, 1987, p. 81).

Nesse processo de uma educação Matemática como prática de liberdade, vemos outro fato importante a ser destacado, o próprio professor em sua maioria não se sente livre. Uns porque preferem acomodar-se a lutar. Outros porque não encontram oxigênio suficiente para inflar seus pulmões na correria da vida, e, sendo assim, acabam rendendo-se aos braços do comodismo-conformismo.

Concordamos com Weffort (2011, p.11) quando diz que:

O ponto de partida para o trabalho no círculo de cultura está em assumir a liberdade e a crítica como o modo de ser do homem. E o aprendizado só pode efetivar-se no contexto livre e crítico das relações que se estabelecem entre os educandos e entre estes e o seu coordenador.

Iluminado por uma educação centrada numa postura de conhecer por conhecer, sem dar ênfase a implicações sociais, como é realizado na escola pretende, não transforma a vida (BOFF, 1977). O que vem a transformá-la é uma postura de transmutação desse conhecimento sabido em ação, ou seja, é colocar a teoria na prática. O que seria essa prática? Segundo Boff (1977), a prática vem a ser:

O movimento dialético entre conversão da ação transformadora em conhecimento e a conversão do conhecimento em ação transformadora. Esta transformação não apenas muda a vida, mas muda também o sujeito, fazendo-o um ser livre, capaz de pensar a sua própria prática individual e social, articulando o local com o global, tirando das experiências da vida e dos vários conhecimentos sobre ela um direcionamento estratégico para o seu projeto de vida. Somente uma educação prática como esta capacita e forma o ser humano para gestar uma democracia sócio-cósmica, solidária e benfazeja para com a natureza, democracia de que tanto temos necessidade nos dias de hoje, tanto nos países tecnicamente desenvolvidos quanto nos países que buscam a sua sustentabilidade. (BOFF, 1997, p.X)

Então, qual a função da Escola hoje, neste mundo globalizado, vivendo numa modernidade líquida<sup>11</sup> como defende Bauman? Meirieu (2005, p.33) afirma que “a missão fundamental da Escola é transmitir às jovens gerações os meios de assegurar, ao mesmo tempo, seu futuro e o futuro do mundo”. Será que estamos dando tais meios? E se estamos, qual futuro está sendo assegurado e que com qualidade o teremos?

A escola é, antes de tudo, a instituição que faz do futuro seu princípio. E que, para preparar o futuro, assume a missão de transmitir o passado. Ela é habitada pela preocupação de encarnar o passado no presente para viabilizar o futuro. E pela vontade de projetar-se no futuro para dar sentido ao passado.

---

<sup>11</sup> Modernidade líquida é uma expressão usada por Bauman para caracterizar, segundo ele, o tempo em que estamos vivendo. Um tempo onde as estruturas sólidas estão se liquefazendo, ou seja, deixando suas formas totalizantes para preencher espaços até então não visitados.

É uma criação dos homens para corporificar a continuidade do mundo.  
(MEIRIEU, 2005, p.35)

Mas essa ação não é promovida simplesmente pelo ato de transferir o conhecimento, pois, assim como nos alerta Freire (2011), “ensinar não é transferir o saber, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção”.

Esta função da escola deve sinalizar para um processo de ensino-aprendizagem da Matemática, que busque a popularização da Matemática, como afirma Josias Silva (2002):

Linguagem esta que se não for devidamente compreendida, poderá nos tornar reféns, dependentes, dominados e manipulados por quem detenha tal conhecimento. Assim, cabe à escola a função de oportunizar a seus usuários educação Matemática propedeuticamente constituída de qualidade formal e política. Política no sentido de construir a competência necessária para a cidadania participativa e produtiva. (SILVA, 2002, p. 80-81).

A pesquisa com o cotidiano pode assumir prática de liberdade, não importa, inicialmente, se as predisposições são favoráveis ou não. Freire (2011) dizia que quando entrava numa sala de aula “estava sempre aberto a indagações, curiosidade, às perguntas dos alunos, as suas inibições; um ser crítico e inquiridor, inquieto a tarefa que tenho – a de ensinar e não a de transferir conhecimentos”.

Esta afirmação tem forte relevância para a prática de Resolução e Exploração de Problemas, nutrida pelo ato do professor não preparar a aula que ele vai ministrar para expor aos alunos, mas preparar-se para ela. Pois ao prepará-la corre o risco de fechar todas as lacunas que incitam a discussão, a partilha, a argumentação, a novidade, o inesperado. Quando nos preparamos para ela, corremos também o risco de não assumirmos o controle do inesperado, perdendo-se assim alguns fios que compõem esse tear.

Para nós é melhor perdermo-nos nas tramas desses fios do que bancarmos uma postura onde não sobre espaço para o novo, o inacabado.

Será que existem possibilidades de nos tornarmos autônomos e elucidarmos para nossos jovens a busca de sua autonomia sem mergulhar no contexto no qual estamos inseridos? Não existe autonomia sem liberdade, não existe autonomia sem conhecimento profundo do que nos é favorecido.

A seguir, trataremos as tessituras do nosso cotidiano, como também o planejamento da experiência.

### **3. TESSITURAS DO COTIDIANO ESCOLAR E PLANEJAMENTO DA EXPERIÊNCIA**

#### **3.1 Considerações Iniciais**

Ao planejarmos qualquer experiência, imaginamos sempre algumas situações a pôr em prática. Planejamento esse que nos inquieta pelo movimento natural de construção e desconstrução proporcionado pela escolha das atividades. Inicialmente temos a imagem de um contexto ideal, mas, ao colocarmos nosso plano em ação somos muitas vezes surpreendidos por contextos jamais imaginados, ou seja, o contexto real, encontrado, aquele que é-nos apresentado.

Muitas vezes deixarmos-nos seduzir por pretensões idealistas, obscurecendo, assim, a visão do real apresentado. Portanto, o planejamento deve ser seguido num processo reflexão-ação-reflexão, sem estabelecer uma dicotomia entre teoria e prática. Nesse sentido, a partir de Álvaro Vieira Pinto (apud Andrade, 1998) podemos dizer que a prática é a teoria intencionalizada, projetada e a teoria é a prática refletida. Não queremos dizer que devemos fazer um planejamento “às cegas”<sup>12</sup>.

Sendo assim, pretendemos com a experiência pesquisar nossa própria sala de aula. Queremos transformar esse ambiente num laboratório, onde alunos e professores investigam, exploram, refutam, constroem e desconstroem o saber.

Como dizia anteriormente, não tem como pensar numa proposta pedagógica desligada do contexto real de sala de aula e da escola como um todo. Por isso, antes de falar sobre a proposta pedagógica, se torna necessário expor o contexto institucional (escola) e os sujeitos, partes constituintes da pesquisa.

#### **3.2 Perfil da escola**

A pesquisa realiza-se numa escola do Estado da Paraíba. É uma instituição escolar marcada por grande influência de política partidária numa tradição ainda coronelista, a família acaba votando no vereador e prefeito que “deu” emprego ao filho ou filha, etc. Tal sistema é financiado devido acerca de 60% dos professores estarem como prestadores de serviços, que,

---

<sup>12</sup> Planejamento “às cegas” refere-se a um tipo de planejamento em que o pesquisador vai a campo sem objetivos, sem reflexões próprias. Sua prática estará condicionada por imprevistos e análises superficiais do contexto ao qual está explorando.

de certa forma, ficam subordinados as autoridades políticas locais. Passamos três anos neste regime de trabalho, e vivenciei alguns dissabores relacionados a sutis perseguições políticas (tinha que ir para alguns eventos onde a autoridade política local estava, caso não fosse poderia ser visto como uma ameaça; pediram certa vez, um litro de uísque como forma de agradecimento ao emprego dado). Desses três anos de trabalho, sem faltar a nenhum compromisso escolar, passei quatro meses de uma gestão e quatro meses de outra, sem receber nosso salário. Vale salientar que os ofícios foram solicitados com a finalidade de receber o retroativo, mas acredito ter sido ele depositado na “caixinha das almas”<sup>13</sup>.

Relato tais fatos com o objetivo de deixar claro o cotidiano institucional que temos. Mas, mesmo assim, sou grato pela oportunidade que tive, pois esta etapa ajudou-me a tomar consciência da realidade em que estava entrando e, mesmo com esta um tanto cruel, não me deixei seduzir pelo negativismo.

Nesta escola estudam aproximadamente 2000 alunos, distribuídos nos seguintes seguimentos: Ensino Fundamental II, Ensino Médio, Educação de Jovens Adultos e Projovem Urbano. Em termos de espaços, a escola dispõe de 15 salas de aulas, uma biblioteca e um laboratório de informática, com cerca de 10 computadores.

Ao observamos a comunidade Local, seja nos ônibus, em conversas informais, nas praças, com parentes de alunos, percebemos que as pessoas não dão credibilidade à instituição escolar. A escola não é valorizada pela comunidade. Devido à proximidade, uma boa parte dos alunos, que residem no município, acaba se deslocando para outros municípios à procura de escolas que tenham ensino médio.

### **3.3 Para quem estamos planejando?**

Os alunos que compõem o turno da tarde, horário em que os alunos dessa pesquisa estudam, são em sua maioria da zona rural do município. Por isso, “o público” que temos ou fez o Ensino Fundamental II na própria escola ou vivenciou seus estudos em uma das quatro escolas municipais (duas na cidade e as outras duas da zona rural).

São alunos que, em sua maioria, precisam do ônibus dos estudantes para chegar à escola. Alunos que necessitam tomar o ônibus às 11h45min. Em muitas ocasiões vêm para a escola sem almoçar.

---

<sup>13</sup> Expressão usada para se referir que o nosso pedido financeiro não foi atendido.

A faixa etária dos alunos que temos varia dos 16 aos 24 anos de idade. Portanto, temos alunos do ensino regular e alunos que vieram do EJA.

São alunos que não apresentam muita motivação em relação ao estudo acadêmico, como também ao estudo técnico. Nos últimos três anos, são poucos os alunos no 3º ano do ensino médio, deste turno, presta seleção para algum curso, seja ele para nível superior ou técnico.

### **3.4 O ensino de Matemática em nossa escola**

De modo geral, o ensino de Matemática em nossa escola apresenta-se de forma predominantemente tradicional, centrado na exposição do conteúdo e na resolução de listas de exercícios proposto pelo livro didático, onde são selecionadas as que mais se aproximam da forma como foi exposto conteúdo.

A maioria dos professores não vem para o planejamento de área, o que resulta numa discrepância em termos de conteúdo de um turno para o outro.

No corpo docente da escola tem 11 professores Matemáticas, destes 02 professores ministram suas aulas com livros cuja ano de edição é de 1983.

Há três professores que geralmente participam do planejamento e procuram trabalhar na perspectiva de projetos através de alternativas metodológicas, como: jogos, exploração de situações cotidianas, peças teatrais, modelagem, tecnologias de informação, entre outras.

Observa-se um ensino centrado na perspectiva de como está sendo cobrado nos processos seletivos, sem uma preocupação maior com o pleno desenvolvimento do educando e sua cidadania plena. Desta forma, esquece a tripla finalidade da Educação, que segundo Carneiro (1998, p. 33) são: “o pleno desenvolvimento do educando, o preparo para o exercício da cidadania e a qualificação para o trabalho”.

A não consciência do saber o sentido de nossas práticas pedagógicas resulta em práticas sem significado e sem compreensão. Sendo assim, tais finalidades da Educação não levadas em consideração resulta no não sentido também da modalidade de ensino em que está sendo trabalhada. Destacamos o Art.35 da Lei 9394/96 onde estão expostas as finalidades do ensino médio, já que nossa pesquisa será desenvolvida em tal modalidade e a realidade descrita trata-se também desta.

**Art.35** O ensino médio, etapa final da educação básica, duração mínima de três anos, terá como finalidades:

- I. A consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

- II. A preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
- III. O aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
- IV. A compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (CARNEIRO, 1998, p.106)

Destacamos também as finalidades do ensino de Matemática imbuídas por objetivos que apontam para a necessidade de resultar aprendizagem real e significativa para o aluno.

As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias Matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas Matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e Resolução de Problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de Resolução de Problemas para desenvolver a
- compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações Matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades Matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 2000, p. 42).

Tais objetivos, aos serem considerados além de favorecer uma aprendizagem real e significativa sinalizam para um ensino com sentido e pautado na compreensão, contribuindo assim, para a efetivação de um processo de ensino-aprendizagem emancipador. Mesmo podendo ser pensado de forma isolada ensino e aprendizagem, acreditamos que este processo ocorre não de forma isolada, mas, simultaneamente.

### 3.5 A Proposta

#### 3.5.1 Preâmbulo da Proposta

Inicialmente trazemos um pouco da nossa experiência com o ensino de Trigonometria, como também as dificuldades que percebemos com relação a esse tema. Sendo assim, situamos nossa experiência em três momentos: quando alunos da educação básica, quando alunos de licenciatura em Matemática e quando professores.

Quando éramos alunos da educação básica tivemos nossa primeira experiência com a Trigonometria, precisamente na fase final (ensino médio – 2º e 3º anos). Tal conteúdo chamava-nos a atenção, pelos seguintes aspectos: quantidade de fórmulas existentes e, para estruturar um pensamento trigonométrico coeso, era necessário decorar/saber todas aquelas fórmulas. Embora tivesse trabalhado alguns problemas, estes eram resolvidas exclusivamente pelo professor. Não havia discussões e nem explorações, e no final se reduzia a decorar/saber fórmulas e manipulações algébricas. Escutávamos algumas vezes quando perguntado ao professor – pra que serve este conteúdo? – resposta como: “lá na frente vocês irão perceber a aplicabilidade”...

Como alunos, não dávamos importância a tais perguntas porque gostávamos daquelas manipulações algébricas. E, por sabermos fazer aquilo que iria ser cobrado, bastava.

Quando éramos alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática a Trigonometria apareceu na Componente Curricular Elementar I, o ensino era centrado exclusivamente no rigor obedecendo ao seguinte receituário (definições, exemplos, teoremas e suas demonstrações, seguidos de exercícios e problemas), onde não havia nenhuma interação entre as pessoas que constituíam aquela sala de aula. Identificava-nos traços de que só mudamos de nível de escolaridade.

Desta forma, a concepção de Matemática trabalhada quanto aluno da escola básica e na licenciatura eram as mesmas.

Quando professores, sentimos falta de uma formação que tivesse nos proporcionadas alternativas para explorar o conteúdo de Trigonometria. Desta forma, colocamos em prática a única alternativa que sentíamos mais seguro a fazer, que era ensinar a Matemática de forma pronta e acabada, sem levar em consideração sua construção social.

As perguntas citadas anteriormente, quando fomos aluno do 2º ano médio da educação básica (pra que serve este conteúdo? Onde iremos aplicá-lo?), vieram à tona novamente, agora não perguntadas por meus colegas de sala, mas por meus alunos. Era necessário darmos respostas convincentes, mas não às tínhamos e não sabemos se iremos tê-



las. Nossa prática era conduzida por reflexos de professores passados que devido a uma formação sem muita reflexão, acaba por reproduzir situações vividas em sua formação escolar inicial.

Entrelaçando as formações oriundas da educação básica e da educação superior (formação inicial como docente) com as experiências vivenciadas em sala de aula sugeriram as primeiras inquietações em desenvolver um trabalho que minimizasse as distâncias ainda presentes entre o ensino-aprendizagem no contexto escolar.

Tais inquietações ganharam fundamentos que nos proporcionaram um olhar diferenciado para o conteúdo de Trigonometria, fazendo-nos perceber, através de leituras e observações de conversas com colegas, dificuldades no processo ensino-aprendizagem que nos convidavam a refletir, procurando minimizá-las.

Desta forma, destacamos algumas dificuldades percebidas no ensino-aprendizagem de Trigonometria:

- ✓ Transição do seno como razão entre os lados de um triângulo para o seno de um número real em um ciclo trigonométrico;
- ✓ Superficialidade na exploração das funções trigonométricas;
- ✓ Muitas fórmulas sem conexão;
- ✓ Uso de alternativas metodológicas que impulsionassem uma aprendizagem compreensiva;
- ✓ Muitos professores veem a Trigonometria como difícil de ensinar;
- ✓ Estabelecer conexões entre a Trigonometria do triângulo retângulo e a Trigonometria no ciclo trigonométrico, explorando conjuntamente duas grandes áreas da Matemática – Geometria e Álgebra;
- ✓ Mesmo tendo muitas aplicações, a exploração das mesmas requer uma formação sólida dos conceitos que circundam a Trigonometria, devido este apresentarem, diversas conexões com outras diversas áreas de conhecimento, para que possamos perceber que a mesma não é apenas uma ferramenta, mas também um campo de estudo.

Destacamos também nesta busca por reflexões espaços que apresentam em uma de suas finalidades aproximarem a Universidade da sala de aula. Estamos falando dos Programas de Pós-graduação da UEPB, onde fazemos parte do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática que tanto tem contribuído em nossa caminhada.

Dentro do nosso Programa acontecem Seminários semanais, como espaço de diálogos e reflexões onde podemos dialogar sobre nossas pesquisas com os colegas mestrandos e pesquisadores doutores. Em um destes seminários(SECEM)que ministramos em maio de 2012, onde expusemos nossa proposta de atividades, duas perguntas chamaram-nos atenção. Não seria melhor focar em uma parte da Trigonometria, tendo em vista que ela é muito ampla? Como irás dá conta de tudo, pois alguns alunos vêm com pouca base dos conceitos essenciais de Geometria, os quais serão necessários para a exploração da Trigonometria? Tais perguntas vieram à tona também no GEPEP (Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação e Pós-Modernidade) quando discutíamos nossas pesquisas.

Tais perguntas reforçaram a necessidade de justificar o porquê trabalhar com o todo. Na verdade, no início do projeto pretendíamos uma proposta que contemplasse a formação-exploração do conceito das Funções Trigonométricas. Ao longo da caminhada, percebemos que era forte em nossa proposta a necessidade de verificar-analisar-interpretar o contínuo (cotidiano) da sala de aula. Você pode está se perguntando, não poderia fazer tudo isso apenas com o foco nas Funções Trigonométrica? Sim, poderia! Mas queríamos passar pelo menos um semestre em exercício. Tempo suficiente para percebermos as variantes e as variações do processo ensino-aprendizagem, e, sendo assim, nos desprendermos da visão do ideal (aquilo que é só favorável) para o real (aquilo que pode ser ou não favorável). Pois, como afirmava anteriormente, temos que o ideal em nossa proposta é o real que nos é apresentado.

Nesta perspectiva, aparece em nossa proposta o pesquisar com o “Cotidiano”. Em nossas reflexões indagávamos: cotidianamente, que Matemática é importante para o aluno da escola pública? É uma Matemática inferior ao das escolas particulares? O conhecimento matemático escolar deve ser reduzindo apenas a problemas do cotidiano? Ou Há um conhecimento acumulado pela humanidade que precisa ser transmitido? Um bom ensino de Trigonometria seria aquele que tratasse apenas de problemas do cotidiano?

A Matemática importante para o nosso aluno de escola pública não é uma Matemática inferior nem superior ao das escolas privadas. Em nossa concepção, acreditamos que a Matemática importante seria aquela que envolvesse o aluno no processo de construção e coo criação do processo ensino-aprendizagem, onde tal processo levasse em consideração o “cotidiano matemático”<sup>14</sup> em que cada aluno se encontra.

Acreditamos que o conhecimento matemático escolar não deve ser reduzido apenas a problemas do cotidiano, da mesma forma, não acreditamos que um bom ensino de

---

<sup>14</sup> Entendemos cotidiano matemático como sendo o que o aluno dispõe ou pode oferecer para contribuir em seu processo de ensino-aprendizagem.

Trigonometria seja aquele que trate somente de problemas do cotidiano. Pois, além do seu “papel formativo”<sup>15</sup>, segundo o PCN de Matemática do Ensino Médio, o qual aponta para a necessidade de trabalhar tais problemas, temos também, que explorar o “caráter instrumental”<sup>16</sup> da Matemática no Ensino Médio, onde deve ser vista “como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la” (BRASIL, 2000, p.40). Tanto o “papel formativo” como o “caráter instrumental” da Matemática, segundo o PCN de Matemática do Ensino Médio, justifica a necessidade de explorarmos a Matemática a partir de situações do cotidiano.

Contudo, precisamos fazer com que a Matemática explorada, observando o cotidiano da nossa sala de aula, seja percebida pelos nossos alunos como uma ciência. E por ser uma ciência tem suas características estruturais específicas. Desta forma, “é importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas” (BRASIL, 2000, p. 40-41). Nesta perspectiva, é importante mostrar que como toda ciência, suas estruturas não apareceram do acaso, mas, foram-se constituindo ao longo dos Tempos.

A Trigonometria, como sendo uma parte da Matemática, mostra-se em seu processo de construção, resultados obtidos, teor do que estudamos na escola, como também, várias lacunas, os quais impulsionam pesquisadores a empenharem-se na busca de soluções. Oliveira (2010) destaca o movimento da ciência sendo percebida, inicialmente, até chegar a uma teoria fundamentada. Desta forma, destaca que “desde os tempos remotos, o homem teve a curiosidade sobre o tamanho das coisas, mas medi-las nem sempre foi uma tarefa simples. Quando se deseja medir distâncias inacessíveis, como a largura de um rio, a altura de um prédio, por exemplo, precisamos de instrumentos específicos e uma teoria fundamentada: a Trigonometria” (OLIVEIRA, 2010, p. 29). A nossa prática deve está pautada por tais elementos: divulgar o conhecimento adquirido e motivar para o avanço da pesquisa.

---

<sup>15</sup> Contribuir para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (BRASIL, 2000, p.40).

<sup>16</sup> Deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno (BRASIL, 2000, p.40).

### 3.5.2 Trigonometria: o caminhar da exploração do pensamento trigonométrico

Sendo assim, após este levantamento histórico, desenvolvemos nosso projeto dividindo o estudo da Trigonometria em: Trigonometria do triângulo retângulo, Trigonometria do ciclo trigonométrico e funções trigonométricas. Nesta divisão, notamos que embora, no percurso histórico, as ideias não surgirem de forma sequenciada, como costumamos trabalhar em nossas salas de aula, preferimos assim dividir para melhor explorar as áreas da Geometria e Álgebra que estão contidas na Trigonometria, mesmo sabendo que há situações em que tais áreas interagem.

Na Trigonometria do triângulo retângulo focaremos nas ideias geométricas. Através dos problemas, traremos nas discussões em sala de aula o percurso histórico trilhado pelos povos da antiguidade. Embora, não seguimos fidedignamente o caminhar histórico, procuramos dá ênfase chamando a atenção para o processo construtivo.

Na Trigonometria do ciclo trigonométrico exploraremos as ideias que transitam entre a Geometria e a Álgebra.

Nas funções trigonométricas trabalharemos as ideias algébricas. Enfatizaremos o movimento e o avanço para a ciência através de tais funções.

### 3.5.3 Os Problemas

Fazendo um pouco do percurso histórico, notamos o quanto um conhecimento para ser legitimado precisa de vários olhares, implicando assim, em diversas interpretações. Nossa proposta não é um trabalho que vise fazer um resgate histórico da Trigonometria. Achamos pertinente, pois pretendemos desenvolver ao longo das atividades a formação dos conceitos inerentes a Trigonometria, fazendo com que os tópicos explorados sejam desenvolvidos assim como a história nos mostra, em espaços de construção e colaboração. Que a sala de aula seja um ambiente de investigação e construção científica.

Para isso, necessitaremos da metodologia da Resolução de Problemas, de onde esperamos extrair interações, mediações, formação dos conceitos, cooperações, produções individuais e coletivas, exploração de situações cotidianas, diálogos, dentre outras.

Sendo assim, como as atividades estão pautadas por problemas, concordamos com Onuchic e Allevato (2011, p. 81) afirmam que para elas, problema “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer”.

Portanto, o cotidiano da sala de aula será determinante para a exploração dos conceitos que as atividades favoreceram. Pois, quando falamos problemas do cotidiano, estamos falando

dos problemas epistemológicos e dos didáticos que estarão envolto do nosso ambiente, onde as atividades iram se desenvolver.

Desta forma, pensar os problemas que iriam atender as nossas necessidades não foi tarefa fácil. No início pesquisamos diversas atividades na literatura (AMORIM, 2006), (LEDUR, 2001), (OLIVEIRA, 2010), nos livros didáticos (BARROSO, 2010), (DANTE, 2010), (SMOLE e DINIZ, 2010) e em livros específicos de Trigonometria (IEZZI, 2004) e (LIMA et.all, 2006).

O principal critério de seleção dos problemas estabelecido por nós foi o de percebermos nas atividades quais poderiam proporcionar interações em sala de aula, onde o cotidiano da mesma fosse percebido por todos, com suas potencialidades e limitações. Com esta mesma finalidade, uma boa parte das atividades foi elaborada por nós. Queríamos elaborar uma proposta, com este conteúdo, que não priorizasse o produto e sim o processo.

Sendo assim, achamos mais oportuno, por uma questão de organização, dividir a proposta em blocos, tais como:

- **Bloco 1:** Exploração da Trigonometria do Triângulo Retângulo

- **Bloco 2:** Estabelecendo a Transição da Trigonometria do Retângulo para o Ciclo Trigonométrico

- **Bloco 3:** Estudo das Funções Trigonométricas

Fruto do planejamento, nós achamos conveniente preanunciar cada Bloco enfatizando o conteúdo a explorar, como também os objetivos, a duração e os materiais necessários para a execução dos problemas. Tal disposição tem a finalidade de situar a nós primeiramente, mas também para subsidiar o leitor.

### ***3.5.3.1 Informações Gerais do Bloco 1***

**Conteúdo:** Trigonometria do Triângulo Retângulo

**Objetivos**

- Perceber as razões trigonométricas como constantes obtidas a partir de experimentos, semelhantes, ao que fizeram cientistas na construção das tábuas trigonométricas;

- Explorar as razões trigonométricas por meio de situações problemas que modelam relações com o cotidiano.

**Duração:** 16 aulas de 40 minutos

**Material necessário:**

Régua;

Ficha com as atividades;  
Lápis e Borracha;  
Tábua Trigonométrica;  
Calculadora;  
Transferidor;

### ***3.5.3.2 Informações Gerais do Bloco 2***

**Conteúdo:** Transição da Trigonometria do Triângulo Retângulo para o Ciclo Trigonométrico

#### **Objetivos**

- Explorar os conceitos de arcos e ângulos, proporcionando a distinção dos mesmos;
- Tratar simultaneamente as razões e relações trigonométricas de grandezas angulares medidas em graus e as razões e relações trigonométricas de grandezas de medidas lineares medidas em radianos;
- Realizar a transição da Trigonometria do triângulo retângulo para a do ciclo trigonométrico.

**Duração:** 16 aulas de 40 minutos

#### **Material necessário:**

Ficha com as atividades  
Régua  
Caneta  
Folha Milimetrada  
Borracha  
Compasso  
Transferidor

### ***3.5.3.3 Informações Gerais do Bloco 3***

**Conteúdo:** Estudos das Funções Trigonométricas

**Objetivos**

- Explorar a Trigonometria analítica a partir das funções trigonométricas por meio de situações problemas do cotidiano.

- Realizar construções e interpretações dos gráficos das funções trigonométricas destacando os elementos principais (domínio, imagem, período), bem como a sua representação.

**Duração:** 12 aulas de 40 minutos

**Material necessário:**

Régua;

Ficha com as atividades;

Lápis e Borracha;

Tábua Trigonométrica;

Calculadora;

Transferidor;

Os problemas selecionados aparecem juntamente com os retalhos e as impressões da experiência. Desta forma, o próximo capítulo apresenta a realização da nossa proposta, contendo, além dos problemas, as descrições das aulas e as análises das experiências.

#### **4. RETALHOS E IMPRESSÕES DA EXPERIÊNCIA REALIZADA**

As descrições a seguir são o resultado de aulas ministradas na disciplina de Matemática, numa turma de 2º ano do ensino médio, do turno tarde, da Escola Francisca Martiniano da Rocha, instituição escolar pública da cidade de Lagoa Seca-PB, na qual exercemos a função de professor-pesquisador. Os horários das aulas nessa turma eram sempre os últimos (quinta-feira: “5ª e 6ª aulas” e sexta-feira: “3ª e 4ª aulas”). Foram realizadas observações escritas durante e, principalmente, após as aulas. Todos os problemas foram fotocopiados ou impressos, ora na escola, ora por nós mesmos. Quando estes problemas eram impressos por nós, a instituição nos dava as folhas necessárias.

Nestas descrições, fruto das leituras e, principalmente, do levantamento de dados iniciado, fizemos uso da observação participante, na perspectiva da pesquisa pedagógica, em que o professor assume a postura de professor-pesquisador. É importante ressaltar que todas as atividades desenvolvidas foram arquivadas. O foco dado nas observações esteve vinculado a investigação das contribuições que a Resolução de Problemas poderiam nos favorecer ou não para o processo ensino-aprendizagem, como também, verificar o comportamento dos alunos no transcurso das atividades.

Sendo assim, as descrições realizadas até o momento são recortes de aulas. As observações trazidas aqui são extratos de atividades realizadas com os alunos e de situações vivenciadas que influenciam diretamente no contexto da sala de aula. Portanto, ao planejarmos essa intervenção, desde o início, assumimos a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, não porque ela daria conta de tudo que queríamos. Aliás, ao propormos analisar as nossas próprias salas de aula, fica em suspeição o fato de que nenhuma metodologia dá conta do todo. Convidamos, pois, a todos para se aventurarem na caminhada não falível de nossas descrições e análises.

##### **4.1 Retalhos das Atividades do Bloco 1: Trigonometria do triângulo retângulo**

Procuramos desenvolver nossa pesquisa sem interferir no calendário e no planejamento escolar. Com isso, as aulas realizadas obedeceram ao que havia sido planejado pela escola, desde o início do ano letivo, referente à disciplina de Matemática.

As intervenções foram realizadas no período de 01/06/2012 a 02/08/2012, numa turma de 2º ano do ensino médio, com 32 alunos entre 16 e 22 anos. Foram realizados 08 encontros (16 aulas) para este Bloco 1. Tínhamos planejado, inicialmente, 5 encontros (10 aulas), sendo



cada aula com a duração de 40 minutos. Esse tempo nunca funcionou para a última aula da quinta-feira, chegando a durar entre 20 a 30 minutos.

	<b>Data da Realização</b>	<b>Alunos Presentes</b>	<b>Alunos Ausentes</b>
<i>Encontro 1</i>	01/06/2012	32	0
<i>Encontro 2</i>	12/07/2012	23	9
<i>Encontro 3</i>	13/07/2012	24	8
<i>Encontro 4</i>	19/07/2012	28	4
<i>Encontro 5</i>	20/07/2012	26	6
<i>Encontro 6</i>	26/07/2012	25	7
<i>Encontro 7</i>	27/07/2012	27	5
<i>Encontro 8</i>	02/08/2012	26	6

**Quadro 6:** Relação da Frequência dos alunos em Relação aos Encontros do Bloco 1

Observando o Quadro 6, podemos nos perguntar por que um distanciamento tão grande do 1º para o 2º encontro. Minhas aulas nesta turma se concentram nas quintas e nas sextas-feiras. Desta forma, houve vários imprevisto, tais como: feriados; paralisações estaduais; realização das festividades juninas; dentre outras.

Nas descrições seguintes, apresentamos o diálogo dos alunos intercalados por algumas análises<sup>17</sup>.

#### **4.1.1 Descrição e análise do encontro 1 (01/06/2012) – Aulas 1 e 2**

##### **Problema1: – Descobrimo algumas razões**

**Objetivo:** *Perceber que fixando um ângulo num triângulo retângulo não importa o “tamanho” do triângulo e as razões entre os lados gerarão algumas constantes, denominando-as razões trigonométricas.*

Sabemos que o ângulo é formado por duas semirretas de mesma origem, que são os lados do ângulo e a origem é o vértice do ângulo. Vale salientar que, cada vez que as semirretas se “afastam”, temos um medida de ângulo diferente.

- Faça um triângulo retângulo na folha milimetrada, tendo um dos ângulos internos 25°.

<sup>17</sup> O recuo dado e a diminuição da letra presente neste capítulo, refere-se a comentários e análises que vamos fazendo durante as descrições das aulas.

- Indique os vértices do triângulo.
- Registre com a régua a medida dos lados.
- Encontre a razão do lado oposto pela hipotenusa (não falar de lado oposto e hipotenusa – falar nomeando os seguimentos). Conferir as respostas com os outros colegas. Após estas explicações falar que esta razão chama-se seno – a razão entre o lado oposto pela hipotenusa.
- Encontre a razão do lado adjacente pela hipotenusa. Conferir as respostas com os outros colegas. Após estas explicações, devemos falar que esta razão chama-se cosseno – a razão entre o lado oposto pela hipotenusa.
- Encontre a razão do lado oposto pelo lado adjacente. Conferir as respostas com os outros colegas. Após estas explicações falar que esta razão chama-se tangente – a razão entre o lado oposto pelo lado adjacente.

Devido a um evento a ser divulgado, nossa primeira aula teve apenas 20 minutos. Nos 20 minutos finais, começamos a explorar as atividades. É comum em nossa escola momentos como esses, em sua maioria só ficamos sabendo no dia. Desta forma acaba comprometendo o nosso planejamento.

Pedimos aos alunos que fizessem um triângulo retângulo com um dos ângulos internos sendo  $25^\circ$ . Para nossa surpresa, por unanimidade, nenhum aluno sabia esboçar a situação pedida. Vale salientar, que os mesmos estavam com todos os instrumentos suficientes para a execução da atividade (régua, transferidor e esquadro). Nesse instante, percebemos que os alunos não sabiam manusear o transferidor.

Em um breve momento de reflexão pensávamos: como pode alunos do 2º ano médio não saber utilizar um transferidor? Através desse fato, sentimo-nos mais desafiados. Se os alunos não sabiam utilizar um transferidor, iríamos ter muitas dificuldades no desenvolvimento de atividades práticas como, por exemplo, a construção empírica da tábua trigonométrica. Se eles não sabem utilizar esse instrumento, talvez seja pelo fato de que ninguém tenha trabalhado com eles! Em muitas salas de aula de Matemática, fatos como esse ou semelhante, não são percebidos. Muitas vezes a atenção está sendo voltada para o final (aonde se quer chegar) ao invés de observarmos o processo (os rumos por onde a atividade pode nos levar). Quando observamos o processo da atividade, estamos dando som as vozes do cotidiano da sala de aula que todos os dias ecoam, mas, só são escutadas (percebidas) se ações

desenvolvidas ao longo das atividades possibilitarem espaços em que as dificuldades dos alunos sejam levadas em consideração.

Dessa forma, fomos mostrar no quadro o processo de construção do ângulo de 25°. Pedimos para que fizessem uma “reta” de tamanho qualquer. Em seguida, com um “transferidor para o professor” em mãos, mostramos no quadro como se usava o transferidor. Após a demonstração, passamos analisando em cada carteira quem havia realizado o procedimento correto. Constatamos que 08 alunos haviam feito de modo correto, enquanto os demais apresentavam dificuldades. Com o processo de mediação, apenas 03 alunos ficaram não conseguiram realizar a atividade, sendo que dois ( $A_{21}$  e  $A_{31}$ ) propuseram-se a continuarem o processo, enquanto que  $A_{16}$  alegou que não estava bem. Nesse instante, percebemos a aluna  $A_{26}$  ajudando a colega, a aluna  $A_{21}$ , a fazer a atividade.

Feito isso, compomos o triângulo retângulo com um dos ângulos internos sendo 25°. O aluno  $A_{21}$ , apresentou dificuldades em relação à perpendicularidade.

Em seguida, propomos que marcassem os vértices do triângulo com A, B e C, sendo que o ângulo de 25° ficasse indicado pelo vértice A e o ângulo reto pelo vértice C. Na sequência, pedimos que medissem os três segmentos com a régua. Quatro alunos apresentaram dificuldades, pois não sabiam se começavam do zero ou do um. Após ajudarmos a esses quatro alunos que apresentaram dificuldades no posicionamento de início da régua, perguntamos:

**Professor:** *Quem sabe o que significa uma razão?*

**$A_5$ :** *Está associada à divisão!*

Pegando a ideia dela, propomos que fizessem as seguintes anotações e cálculos:

$$\frac{BC}{AB} \qquad \frac{AC}{AB} \qquad \frac{BC}{AC}$$

Na primeira razão,  $\frac{BC}{AB}$ , alguns alunos apresentaram dúvidas em relação à aproximação. Pedimos, portanto, para que deixassem os números com três casas decimais e comparamos as respostas para surpresa deles, as respostas eram, aproximadamente, iguais.

Dessa forma, concluímos que, independentemente do tamanho do triângulo, já que, inicialmente, a construção do mesmo foi aleatória, tais razões permanecem constantes.

Depois disso, expusemos no quadro que a 1ª razão,  $\frac{BC}{AB}$ , onde chamamos de seno do ângulo de 25°; a 2ª razão,  $\frac{AC}{AB}$ , chamava-se cosseno e a 3ª razão,  $\frac{BC}{AC}$ , chamava-se tangente.

Sendo assim, solicitamos que entregassem a atividade. Logo após, esse momento, nos despedimos terminando o encontro.

É importante fazer com que os alunos percebam esse fato observando, tendo dificuldade com as aproximações, perguntando se o posicionamento da régua é o zero ou no um e com todas as outras situações que forem aparecendo no caminhar da atividade. Temos a convicção, ao entrarmos em sala de aula com postura investigativa, assumindo-a como um laboratório de nossas “experiências” (dos objetivos que almejamos chegar e dos possíveis caminhos que a aula pode tomar), que, além de a aula ter um sentido, percebemos que o ensinar ganha mais sentido e significado, favorecendo assim um ensino-aprendizagem voltado para a compreensão. Nossa concepção de ensino compreensivo comunga com a concepção defendida por Perrone (2007): “a ideia de que aquilo que os alunos aprendem precisa ser internalizado e pode ser usado em muitas circunstâncias diferentes dentro e fora da sala de aula, servindo de base para um aprendizado contínuo e prolongado, sempre repleto de possibilidades”.

#### **4.1.2 Descrição e análise do encontro 2(12/07/2012) – Aulas 3 e 4**

A aula iniciou com uma conversa acerca do Programa de Mestrado, enfatizando a importância deles na minha pesquisa. Após essa conversa, pedi para que a turma se dividisse em duplas ou em trios. Formaram-se 7 duplas e 3 trios espontaneamente, contando assim 23 alunos.

#### **<sup>18</sup>Problema2: Leitura Coletiva**

**OBJETIVO:** *Identificar as razões trigonométricas como um processo inicial que se origina da semelhança de triângulos*

No primeiro momento, realizamos uma leitura coletiva de um texto elaborado por Oliveira (2010, pg. 37-41). O texto continha algumas considerações históricas sobre o triângulo retângulo, bem como, a nomenclatura de alguns termos. O mesmo foi xerocado e distribuídos entre aos alunos, que realizaram uma leitura coletiva. Tal leitura foi interrompida em três momentos.

---

<sup>18</sup> Texto extraído do Capítulo 2 da dissertação de Oliveira, 2010, p. 37-41.

Sentimos a necessidade de esclarecer quando triângulos são semelhantes. Nesse momento, fomos ao quadro e esboçamos de forma ampliada os triângulos e enfatizamos a questão da proporcionalidade dos lados, percebemos aí a constância.

*A<sub>5</sub>: Professor, sempre será constante?*

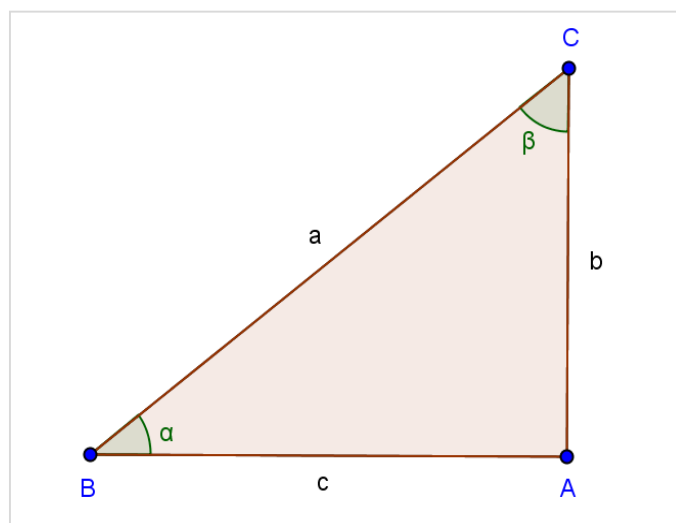
*Professor: Sim. Pois, não importa o tamanho das dimensões da figura, a proporcionalidade continua a mesma. Veja o exemplo de uma fotografia. Por causa da proporcionalidade temos uma imagem nossa bem fidedigna ao que somos. A mesma coisa acontece com os mapas que vemos no livro. O Brasil é daquele tamanho? Seria estranho se num mapa territorial do Brasil o Amazonas fosse menor que a Paraíba!*

Na sequência, demos ênfase ao surgimento da palavra seno. Tal palavra, hoje assim conhecida, passou por diversas traduções (indiana, árabe, europeia, latim). Em seguida, foi enfatizado que o complemento do seno de um ângulo originou o que conhecemos hoje com cosseno.

Ao tratarmos da nomenclatura de alguns termos, foi necessário destacar a diferenciação entre hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente. O texto referia-se a esses termos do seguinte modo:

- **Hipotenusa:** lado oposto ao ângulo reto;
- **Cateto Oposto:** lado oposto ao ângulo agudo determinado;
- **Cateto Adjacente:** lado que com a hipotenusa compõe o ângulo determinado.

Nesse instante, desenhamos no quadro um triângulo retângulo destacando o ângulo reto e os dois agudos.



**Figura 1:** Identificando hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente.

Esboçamos a relação dos catetos referente a cada ângulo agudo do seguinte modo:

Tomando como referência o ângulo  $\alpha$ , temos:

- **Hipotenusa:** BC
- **Cateto Oposto:** AC
- **Cateto Adjacente:** AB

Tomando como referência o ângulo  $\beta$ , temos:

- **Hipotenusa:** BC
- **Cateto Oposto:** AB
- **Cateto Adjacente:** AC

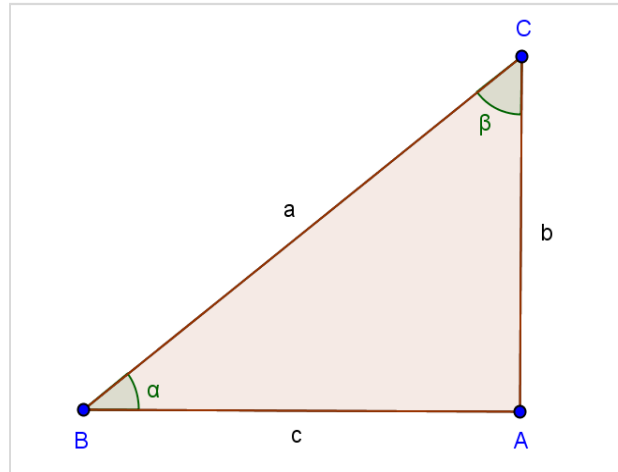
A terceira parada na leitura deu-se no momento de fazer a conexão entre o que acabávamos de ler e o que tínhamos executado no **problema1**. O aluno deveria perceber que aquelas proporcionalidades gerariam três constantes: seno, cosseno e tangente. O seno de um ângulo foi caracterizado pela razão entre o cateto oposto e hipotenusa; o cosseno de um ângulo como sendo a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa e a tangente de um ângulo, além de ser identificado como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente, é caracterizada também pela razão entre o seno e o cosseno.

No segundo momento do encontro exploramos o **problema 3**, cujo objetivo foi “*aplicar as razões trigonométricas e investigar caracterizações e semelhanças que podemos extrair com relação aos ângulos complementares de um triângulo retângulo*”. A dinâmica de execução processou-se de forma análoga ao primeiro momento.

### **Problema3: Aplicando as razões trigonométricas**

**Objetivo:** *Aplicar as razões trigonométricas e investigar caracterizações e semelhanças que podemos extrair relações com os ângulos complementares de um triângulo retângulo.*

#### **Problema 3.1**



**Figura 2:** Aplicando as razões trigonométricas.

Dado o triângulo retângulo acima, determine:

- As medidas dos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ .
- As medidas dos ângulos internos.
- A soma dos ângulos  $\alpha + \beta$ .
- As razões trigonométricas referentes ao ângulo  $\alpha$ .
- As razões trigonométricas referentes ao ângulo  $\beta$ .
- Preencha a tabela abaixo com os valores obtidos nos itens acima.

ÂNGULOS RAZÕES	$\widehat{ABC} = \alpha =$	$\widehat{ACB} = \beta =$
<b>Seno</b>	$\frac{AC}{BC} =$	$\frac{AB}{BC} =$
<b>Cosseno</b>	$\frac{AB}{BC} =$	$\frac{AC}{BC} =$
<b>Tangente</b>	$\frac{AC}{AB} =$	$\frac{AB}{AC} =$

- O que podemos perceber em relação aos valores expostos na tabela? Existem semelhanças, em relação aos ângulos complementares? O que podemos concluir?
- Em relação à razão entre o seno e o cosseno do ângulo  $\alpha$ . O que podemos constatar?
- Em relação à razão entre o seno e o cosseno do ângulo  $\beta$ . O que podemos constatar?
- Em relação à soma do quadrado do seno e do quadrado do cosseno do ângulo  $\alpha$ . O que podemos constatar?

k) Em relação à soma do quadrado do seno e do quadrado do cosseno do ângulo  $\beta$ . O que podemos constatar?

**EXISTEM AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS ÀS QUAIS CHAMAMOS: COSSECANTE (INVERSA DO SENO), SECANTE (INVERSA DO COSSENO) E COTANGENTE (INVERSA DA TANGENTE).**

l) As razões trigonométricas inversas referentes ao ângulo  $\alpha$ .

m) As razões trigonométricas inversas referentes ao ângulo  $\beta$ .

n) Preencha a tabela abaixo com os valores obtidos nos itens acima.

ÂNGULOS RAZÕES	$\widehat{ABC} = \alpha =$	$\widehat{ACB} = \beta =$
<b>Cossecante</b>	$\frac{BC}{AC} =$	$\frac{BC}{AB} =$
<b>Secante</b>	$\frac{BC}{AB} =$	$\frac{BC}{AC} =$
<b>Cotangente</b>	$\frac{AB}{AC} =$	$\frac{AC}{AB} =$

De 14 itens a serem explorados nesta atividade, foram trabalhados os 06 primeiros em sala. A maioria das duplas e/ou trios fez apenas os três primeiros itens. Apenas duas duplas conseguiram realizar os 06 itens iniciais.

O **item b** caracterizou-se como o “campeão” de dúvidas.

*A<sub>5</sub> e A<sub>17</sub>: Como assim a medida dos ângulos internos?*

*Professor: Ângulos são medidos com o transferidor.*

Após essa explicação, só 02 duplas e 01 trio conseguiram utilizar o transferidor de forma coerente.

Percebemos que a maioria ainda não sabia manusear o transferidor. Sendo assim, passamos por todas as outras duplas e trios mostrando como utilizar o transferidor, só que agora individualmente.

Mais uma vez, notamos que os alunos não tiveram uma formação em que o processo ensino-aprendizagem estivesse pautado no fazer como prática de construção do saber. Pelo contrário, o fazer nas aulas de Matemática está voltado para a repetição de procedimentos em



novas situações semelhantes a que o professor trabalhou no exemplo primeiro. Tal cultura é comum, quando se trata do ensino de Matemática, pois, quase todo professor de Matemática teve uma formação, seja na Educação Básica, seja na Inicial, pautada num ensino conteudístico procedimental. Dessa forma, é natural que a forma de trabalhar os conceitos matemáticos, a princípio, seja da forma como aprenderam. Por isso, defendemos a necessidade da presença e da prática do professor-pesquisador (professores pesquisando suas próprias salas de aula) para refletir sobre as posturas que assumimos no cotidiano da sala de aula, pois, nem conseguimos fazer o que temos como essência em nossos.

No final do encontro, observamos que um trio ( $A_{12}$ ,  $A_{19}$  e  $A_{21}$ ) estava com dificuldades de retirar as medidas dos segmentos AB, AC e BC do triângulo. O procedimento era utilizar a régua, verificar a medida e anotar.

Antes de tocar o sinal, propusemos que fizessem o restante da atividade em casa.

#### **4.1.3 Descrição e análise do encontro 3 (13/07/2012) – Aulas 5 e 6**

O encontro iniciou muito antes da nossa entrada em sala de aula. No início da 1ª aula do dia letivo, cerca de 10 alunos vieram pedir para que adiantasse as duas primeiras aulas. Essas aulas não seriam executadas por falta de professor da disciplina. Segundo os alunos, o professor tinha deixado a turma porque desde o início do ano, o mesmo não havia recebido por tais aulas. Vale ressaltar que essa turma só teria nossas aulas, já que as duas últimas eram vagas.

Falamos que o encontro iniciou muito antes da nossa entrada, pelo fato, de que após conversarmos com os alunos, percebemos que eles entenderam nossa proposta e nenhum aluno foi embora depois de saber que as aulas não iriam ser adiantadas.

Parece um fato normal, mas no cotidiano que lecionamos tornou-se prática comum, alunos se rebelarem com professores que não têm a cultura de adiantar as aulas. Nisso, percebemos o respeito que os alunos têm pelo nosso trabalho, e, principalmente, por estarem cientes da importância deles em nossa pesquisa. Sendo assim, quando esclarecemos a responsabilidade do trabalho, bem como a importância da colaboração das partes envolvidas, participantes da atividade entenderam, não sabemos se de imediato, o seu papel. Dessa forma, concordamos com a ideia de Freire (2011, p.132) ao afirmar que “ensinar exige disponibilidade para o diálogo”.

Após passarem as duas aulas de espera, encontramos uma turma agitada, mas isso serviu de motivação para começar a aula contando histórias que serviram para atrair a atenção deles. Feito isso, conseguimos cativar a concentração da turma e começamos a introduzir o conteúdo através de uma revisão do que tínhamos trabalhado no encontro anterior. Houve necessidade da revisão, pois percebemos que 04 alunos ( $A_{23}$ ,  $A_{26}$ ,  $A_{31}$  e  $A_{34}$ ) não estavam presentes nas aulas anteriores, então pedimos para que eles formassem duas duplas. O foco inicial do encontro esteve voltado para a aplicação das razões trigonométricas (**Problema3: d, e, f, g, h, i, j, k, l, m**).

A atividade aconteceu entre 02 trios e 09 duplas. Na revisão, demos ênfase ao processo de identificação da hipotenusa e o cateto oposto e o cateto adjacente relacionado ao ângulo analisado. Com isso, expusemos as três razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no quadro e tal exposição, serviu de referência no decorrer da atividade.

Ao atender a chamada dos alunos, verificamos que algumas dificuldades no desenrolar da atividade, eram oriundas da não confiança em si mesmos. Na maioria das vezes, os alunos solicitavam-nos para perguntar se o que haviam feito estava certo.

Foram poucas as duplas que fizeram o item f (preencher a tabela com os valores obtidos nos itens  $d$ ,  $e$ ), talvez tenha sido pela praticidade do item, em colocar também a razão indicando os lados do triângulo.

ÂNGULOS RAZÕES	$\widehat{ABC} = \alpha =$	$\widehat{ACB} = \beta =$
<b>Seno</b>	$\frac{AC}{BC} =$	$\frac{AB}{BC} =$
<b>Cosseno</b>	$\frac{AB}{BC} =$	$\frac{AC}{BC} =$
<b>Tangente</b>	$\frac{AC}{AB} =$	$\frac{AB}{AC} =$

O quarto e quinto itens da atividade pediam as razões trigonométricas, referentes primeiro ao ângulo  $\alpha$  e, na sequência, referente ao ângulo  $\beta$ .

Nessa parte da atividade, só não tiveram dificuldades 02 duplas, chegamos a pegar até no lápis de alguns alunos mostrando como se processava a atividade.

No 2º momento do encontro, após o intervalo, foi dada ênfase nos itens (g, h, i, j, k), devido à dificuldade dos alunos em interpretar situações que mudam a forma do processo que vinham fazendo. Era preciso agora refletir e analisar para expor uma resposta; já que nos itens

(d, e, f), a solução era mais prática. Dessa forma, eles deveriam perceber a diferenciação de cada razão trigonométrica e fazer os cálculos.

Um fato que chamou a atenção de alguns alunos ( $A_5$ ,  $A_{11}$ ,  $A_{20}$ ,  $A_{23}$ ) esteve presente na resolução dos itens j e k. Esses ficaram surpresos, pois a resposta dava 1.

*A<sub>9</sub>: Professor, vai dar sempre 1?*

*Professor: O que é que você acha?*

*A<sub>9</sub>: Acho que sim. Pois deve estar relacionado à questão dos ângulos serem complementares.*

Por outro lado, alguns alunos ( $A_8$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{18}$ ) apresentaram dificuldades nos cálculos, não perceberam que o quadrado de um número é esse número elevado ao expoente dois. Outro fato que passou despercebido pelos alunos é que somaram os valores do seno e cosseno referente a um determinado ângulo sem elevar ao quadrado.

O final do encontro se desencadeou pela explicação das razões trigonométricas inversas (cossecante, secante e cotangente). Apenas quatro duplas não entenderam a proposta pedida pelos itens ( $l$ ,  $m$  e  $n$ ).

*A<sub>26</sub>: Professor como assim inverso? Eu estou percebendo que após comparar a tabela exposta pelo item h e a tabela exposta pelo item n, o que muda é que há uma troca. O que está no numerador é trocado com o que está no denominador e vice-versa.*

*Professor: Isso mesmo! Cada inversão torna-se satisfeita porque gera também constante.*

No final do encontro, entregamos a **Problema3.2** para ser feita em casa. Tal atividade tinha como objetivo reforçar o que havíamos explorado em sala – as razões trigonométricas, através de duas situações semelhantes.

### **<sup>19</sup>Problema3.2: Percebendo regularidades**

Registre no próprio triângulo as medidas de seus três ângulos e de seus três lados. Em seguida, encontre o valor das razões: seno, cosseno e tangente dos ângulos complementares.

a)

---

<sup>19</sup>Atividade adaptada, da dissertação de mestrado de Oliveira, 2010, p. 194.

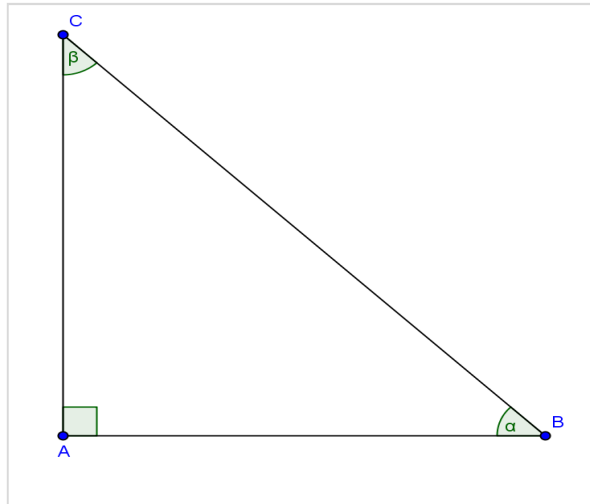


Figura 3: Percebendo regularidades 1.

$\frac{AC}{BC} =$	$\frac{AB}{BC} =$
$\frac{AB}{BC} =$	$\frac{AC}{BC} =$
$\frac{AB}{AC} =$	$\frac{AC}{AB} =$

ÂNGULOS RAZÕES	$\widehat{ABC} = \alpha =$	$\widehat{ACB} = \beta =$
<b>Seno</b>		
<b>Cosseno</b>		
<b>Tangente</b>		

b)

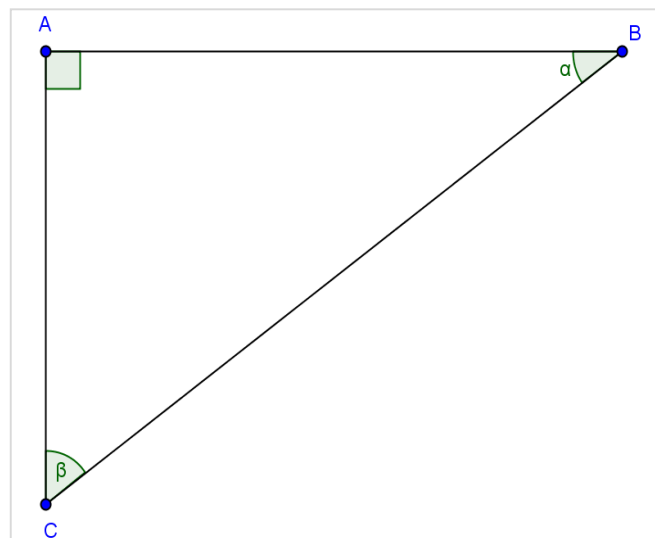


Figura 4: Percebendo regularidades 2.

$\frac{AC}{BC} =$	$\frac{AB}{BC} =$
$\frac{AB}{BC} =$	$\frac{AC}{BC} =$
$\frac{AB}{AC} =$	$\frac{AC}{AB} =$

ÂNGULOS RAZÕES	$\widehat{ABC} = \alpha =$	$\widehat{ACB} = \beta =$
<b>Seno</b>		
<b>Cosseno</b>		
<b>Tangente</b>		

#### 4.1.4 Descrição e análise do encontro 4 (19/07/2012) – Aulas 7 e 8

Este encontro iniciou com o seguinte diálogo:

**Professor:** Gente! Quem fez a atividade proposta para casa (**problema3.2**)?

**A<sub>02</sub> e A<sub>24</sub>:** Professor, nós não conseguimos!

**Professor:** Por quê? O problema não era semelhante ao que fizemos em sala?

**A<sub>02</sub> e A<sub>24</sub>:** Professor, na verdade nós esquecemos! Foram marcadas muitas provas pra essa semana! Só hoje fizemos duas! Uma de Geografia e uma de Português.

Notamos, através dos discursos dos alunos, o quanto eles associam o não fazer as atividades, ao fato de simplesmente dizer que não conseguiram. Esses que não conseguiram vêm como uma reclamação para o professor no sentido de que não foi dado um modelo/uma regra anterior do problema proposta para que pudesse aplicar sem muito esforço, sem um pensar mais refinado, sem pensar o seu próprio pensar, faltando nisso o desenvolvimento de habilidades metacognitivas. Talvez, os alunos quisessem chamar a atenção do professor para que ele, o mesmo fizesse a atividade. É perceptível que ao investigarmos o cotidiano escolar devemos está abertos à realidade. Se não tivéssemos feito aquela pergunta no início da aula, talvez não houvesse percebido que a turma estava desgastada psicologicamente. Infelizmente, nós professores às vezes somos insensíveis aos apelos dos alunos. Mas, também reconhecemos

que pela realidade de alunos que temos, fica um pouco difícil “acreditar” em certas considerações.

Depois disso, mais duas duplas e dois trios se manifestaram de forma parecida. Então, cedi 15 minutos da 1ª aula para que tais alunos concluíssem a atividade. Uma dupla se manifestou, dizendo que havia esquecido como se fazia o problema. Nesse instante, pedimos que revissem o que haviam feito até o momento nas atividades anteriores e observamos que os alunos conseguiram progredir na atividade.

Passados alguns minutos, iniciamos o que havia planejado para o encontro, mostrando uma tabela de razões trigonométricas e, expusemos pra eles que as atividades executadas até o momento, eram semelhantes as que os matemáticos antigos realizaram para encontrar as razões trigonométricas dos ângulos agudos.

Hoje, encontramos a tabela de razões trigonométricas pronta nos livros didáticos. Tais livros, em sua grande maioria, não fazem alusão a tais conhecimentos, induzindo o aluno a não perceber a Matemática como uma construção, e sim como algo que deve ser aceito. É necessário, sempre que possível, fazermos tais pontes, pois é através delas que percebemos a Matemática como parte integrante da sociedade.

Na sequência da aula, sugerimos que se dividissem em grupos de três ou quatro pessoas. O resultado foi a composição de 4 trios e 4 quartetos. Entregamos para cada grupo duas fichas de atividades idênticas para facilitar o manuseio na equipe.

O **problema4** era intitulada como: *explorando situações do cotidiano por meio das razões trigonométricas*. O objetivo foi *modelar situações do cotidiano e explorar o pensamento matemático aí existente como ferramenta construtiva e desenvolvimentista*.

#### **Problema 4.1: Problema da Rampa**

Uma rampa de 3 m de altura forma com o solo um ângulo de  $35^\circ$ .

- a) Represente a situação acima por meio de um desenho.
- b) Encontre o valor do comprimento dessa rampa. ( $\text{sen } 35^\circ = 0,5736$ ;  $\text{cos } 35^\circ = 0,8192$  e  $\text{tg } 35^\circ = 0,7002$ ).

Propusemos que fizessem a **problema 4.1** (Problema da Rampa). E pedimos, que a princípio não chamassem para tirar dúvidas.

Nesse momento, escutei algumas falas:

**Discussão do grupo 5** ( $A_{02}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{17}$  e  $A_{24}$ ): Uma rampa é subindo?

**Discussão do grupo 1** ( $A_{08}$ ,  $A_{26}$ ,  $A_{28}$  e  $A_{31}$ ): Faz tu mulher! Tu és boa de desenho. Professor, uma rampa é uma tira assim?

Ao observar a dinâmica que cada equipe traçava para resolver o problema, a mais forte era a inquietação. Talvez nós, professores de Matemática não estejamos dando o devido tempo, em nossas atividades, para os alunos pensarem.

Passados 10 minutos da execução da atividade, a aluna  $A_{20}$ , integrante do **grupo 6** falou:

$A_{20}$ : Professor, por que o senhor não resolve logo? Eu já estou ficando agoniada. Nós não vamos conseguir mesmo!

**Professor:** Leia o problema pra mim.

$A_{20}$ : Uma rampa de 3 m de altura forma com o solo um ângulo de  $35^\circ$ .

**Professor:** Você entendeu o enunciado?

$A_{20}$ : Sim! Entendi!

**Professor:** O que está sendo pedido no item a.

$A_{20}$ : Que eu represente o enunciado por meio de um desenho.

**Professor:** Quais são as partes principais do enunciado?

$A_{10}$ : A rampa faz com o solo um ângulo de  $35^\circ$ .

**Professor:** Pronto! Façam o que está sendo pedido.

Notamos que a aluna que iniciou o desabafo, após tais explicações ao aluno  $A_{20}$ , já havia construído a figura pedida.

Para todos os outros grupos que apresentaram dúvidas acerca do enunciado, utilizamos o mesmo artifício utilizado com esse grupo.

O segundo item do problema pedia para que encontrássemos o comprimento da rampa. Nesse instante, ao ser acionado pelo **grupo 7** ( $A_{05}$ ,  $A_{07}$  e  $A_{09}$ ), realizamos o seguinte diálogo:

$A_{05}$ : Professor, como podemos encontrar o comprimento?

**Professor:** Utilizando as razões trigonométricas.

$A_{09}$ : (Inserir a imagem do grupo de Ayanne) Professor, observe! Se eu elevar esses dois catetos ao quadrado e somar os resultados, será igual à hipotenusa ao quadrado.

**Professor:** *Correto! Mas para esse problema será necessário esse resultado? O que a altura da rampa representa em relação ao ângulo de  $35^\circ$ ?*

**A<sub>05</sub> e A<sub>09</sub>:** *Cateto Oposto!*

**Professor:** *O que está sendo pedido?*

**A<sub>09</sub>:** *O comprimento da rampa!*

**Professor:** *O que o comprimento da rampa representa no triângulo?*

**A<sub>09</sub>:** *A hipotenusa!*

**Professor:** *Qual a razão trigonométrica relacionada ao cateto oposto e a hipotenusa?*

Nesse momento, o aluno **A<sub>07</sub>** procura no caderno os resultados encontrados nas atividades anteriores e responde:

**A<sub>07</sub>:** *Seno!*

**A<sub>05</sub>:** *O seno de  $35^\circ$  foi dado no problema então é só substituir, e aplicar a razão trigonométrica.*

Ao traçarmos esse diálogo, professor e aluno invertem a ordem lógica milenar que ainda prevalece em nossas salas de aula: professor, suserano do ensino, detentor de todo o saber e o aluno, vassalo do processo, sempre à espera das determinações do seu senhor. Fica evidente que essa atividade favoreceu-nos a percepção de quanto o aluno, quando instigado, reage de forma positiva. É o conhecimento sendo formado; é a sala de aula transformando-se em um laboratório de pesquisa; é o professor deixando de ser o dono do saber; é o aluno sendo construtor da sua aprendizagem; é um cidadão sendo formado numa postura crítica. Antes de saber fazer tornar-se necessário saber pensar, e ainda mais, pensar sobre seu próprio fazer.

Ao ser chamado pelo **grupo 5** (**A<sub>02</sub>, A<sub>13</sub>, A<sub>17</sub> e A<sub>24</sub>**) fui questionado.

**A<sub>17</sub>:** *Professor, mostra como se faz? Hoje nós não estamos com cabeça. Fizemos duas provas muito extensas!*

**Professor:** *Que coisa boa! (tom de brincadeira para descontrair). Utilizei dos mesmos artifícios direcionados ao grupo 7.*

Acrescentamos, para distrair o grupo, que estava muito aflito com as provas que haviam executado, contando a seguinte história:

Certo dia, “um lavrador acordou e, após tomar o café, percebeu que a lida do dia seria ‘encamar terra’. Foi no quarto, onde guardava suas ferramentas e observou que lá tinha:



machado, foice, serrote, enxada, pá, picareta, furadeira, carroça de mão, dentre outras. O lavrador não hesitou e pegou a enxada, colocou sobre o ombro e foi realizar sua atividade”

Em seguida,  $A_{02}$  e  $A_{13}$  perguntaram:

$A_{02}$  e  $A_{13}$ : *Professor, o que essa história tem a ver com a atividade que estamos fazendo?*

**Professor:** *Vocês, ao longo da formação, tiveram oportunidade de estudar vários conteúdos e aprenderam “diversas ferramentas”.*

Quando contei a história, queria dar ênfase aos resultados que obtivemos, quando realizamos as atividades anteriores. Tais atividades tinham como objetivo determinar as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente). Temos conhecimento das razões trigonométricas e sabemos qual a funcionalidade de cada uma. É necessário agora, refletirmos o problema e percebermos, diante das ferramentas que temos, a que convém, para que nos ajude a solucionar o problema.

Após a explicação, eles perceberam que:

- O cateto oposto ao ângulo de  $35^\circ$  está representando a altura da rampa.
- O cateto adjacente ao ângulo de  $35^\circ$  está representando a distância da base da rampa até o ponto que indica a sua altura no solo.
- A hipotenusa está representando o comprimento da rampa.

**Professor:** *O que temos e o que queremos encontrar?*

$A_{13}$ : *O que temos representa o cateto oposto ao ângulo estudado e o que queremos encontrar representa a hipotenusa do triângulo.*

**Professor:** *Ótimo! E que razão indica essa situação? Olhem os resultados que pedi para anotar, dos encontros passados. Em seguida, resolvam!*

Após esse diálogo, atendemos aos **grupos 4, 3 e 1**, que apresentavam dúvidas similares as do **grupo 5**. Quando voltamos das explicações, percebemos que a aluna  $A_{05}$ , do **grupo 7**, estava com a folha de sua resolução explicando às integrantes do **grupo 5**. Pedimos que não fizesse a atividade pra elas, mas que continuasse auxiliando, quando necessário. Solicitamos para que tentasse fazer o **problema 4.2**.

### **Problema 4.2: Determinando a Altura de um Prédio**

A sombra de um prédio, num terreno plano, numa determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m. Determine a altura, em metros, do prédio.

É interessante perceber que as integrantes do *grupo 5* sabiam qual razão utilizar, mas encontravam dificuldades em operar. Esse episódio acontece com frequência nas aulas de Matemática quando explicamos conteúdos novos. Muitas dificuldades não são provenientes do conteúdo em questão, mas sim de procedimentos operatórios que não foram bem explorados nas fases iniciais dos alunos.

Faltando 7 minutos para o término da aula chamei a atenção de todos no quadro para a resolução da atividade. Nesse instante, 95% dos alunos já tinham propriedade do entendimento da atividade e 40% já haviam encontrado o valor do comprimento da rampa. Os demais estavam presos nos cálculos, e não no entendimento do problema, ou seja, a maioria estava com dificuldade em “fazer as continhas”.

Tendo em vista que o processo ensino-aprendizagem acontece de forma diferente para cada aluno, em momentos diferentes, em estágios diferenciados, parece evidente que a aplicação da Trigonometria em situações problemas aumenta as dificuldades, por dois motivos. Primeiro, por não ser constância nas salas de aulas um ensino movimentado pela investigação; segundo, por dificuldades acumuladas ao longo da formação escolar sobre conceitos importantes em Matemática, principalmente quando se pede aos alunos para interpretar situações problemas e, através dessas interpretações, desenharem uma figura que representa a situação explorada. Tornar nossas salas de aula um espaço de construção do conhecimento é favorecer a possibilidade do aluno perceber que ele é muito mais do que um depósito de informações, é despertar a voz que insiste em ficar calada, devido a não oportunidade.

#### **4.1.5 Descrição e análise do encontro 5 (20/07/2012) – Aulas 9 e 10**

A motivação que encontramos para iniciarmos, esse encontro, pautou-se na necessidade de ler algum texto sobre o dia do Amigo. Lemos o texto “Marceneiro e as Ferramentas”, de um autor desconhecido. Esse texto foi enviado a nós, durante um encontro de tutores do proinfo, pelos coordenadores da formação.

Os alunos apresentam muita desmotivação, que muitas vezes é consequência de pessoas que não valorizam seus conhecimentos. Também existe a carência de um referencial seja na família, na política, na religião, na amizade. Ao trabalharmos um texto reflexivo, que continha valores essenciais para a formação cidadã, foi como uma “chave mestre”, favorecendo aos alunos possibilidades para eles se abrissem, contassem suas experiências. Não enxergamos a educação distante de tais possibilidades, acreditamos que educar é muito mais do que favorecer a aprendizagem de conteúdos programáticos. Não conseguimos ser indiferente quando eles sinalizam, sejam verbalmente ou através do olhar, necessidades extraclases. Como diz Freire (2011, p. 110) “ensinar exige saber escutar”. O educador que escuta aprende a difícil lição de transformar o seu discurso, às vezes necessário, ao aluno, em uma fala com ele (FREIRE, 2011, p. 111).

A leitura e discussão do texto perpassaram 15 minutos da 1ª aula. A discussão girou em torno das relações de amizades, sobre a necessidade de uma relação alicerçada na verdade, no companheirismo e não no interesse!

Após a discussão, sugerimos que formassem os mesmos grupos do encontro anterior e dessem continuidade a **problema 4**. Faltaram duas alunas ( $A_{18}$  e  $A_{29}$ ), em relação ao encontro passado. Sendo assim, a turma ficou dividida em três grupos de quatro pessoas, seis grupos de três pessoas e uma dupla.

Na atividade 4, pedimos que discutissem a **problema 4.2**. Apenas o **grupo 6** e o **grupo 7**, não tiveram dificuldade em realizar a atividade. Especialmente para eles, pedi que passassem para a **problema 4.3**.

### **Problema 4.3: Determinando a Altura de uma Torre**

(UNESP- modificado) Uma pessoa, no nível do solo, observa o ponto mais alto de uma torre vertical, à sua frente, sob o ângulo de  $30^\circ$ . Aproximando-se 40 metros da torre, ela passa a ver esse ponto sob o ângulo de  $45^\circ$ .

- a) Represente a situação acima por meio de um desenho.
- b) Determine a altura aproximada da torre, em metros.

Mediando os demais grupos, as alunas  $A_{17}$  e  $A_{02}$  do **grupo 5**, perguntaram:

*$A_{17}$ : Professor! Não entendi o enunciado!*

*Professor: Leia novamente o texto. Em seguida, tente dizer para uma colega sua, do grupo, o que entendeu.*

**Professor:** *O que provoca a sombra?*

**A<sub>24</sub>:** *O sol!*

**A<sub>13</sub>:** *A luz!*

**Professor:** *Ok!*

**A<sub>02</sub>:** *Professor! O problema nos oferece o valor da sombra do prédio, a altura do poste e a sombra do poste.*

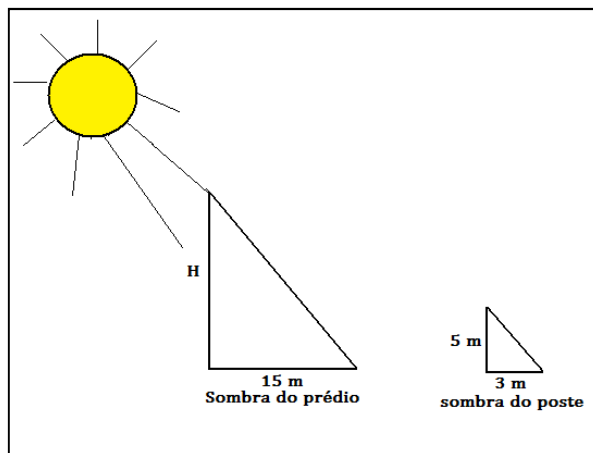
**Professor:** *Tente fazer um desenho que caracterize tais informações.*

**A<sub>02</sub>:** *Tá bom professor! Já entendi.*

Mesmo não sendo um problema do nosso tempo, pois, munido de várias ferramentas tecnológicas, quem calcularia, atualmente, a altura de um prédio realizando tal atividade? O importante nesse problema é perceber que tais aparelhos tecnológicos têm implícito em seus sistemas de códigos as ideias primárias. Por isso, torna-se valioso o problema para mostrar aos alunos que o estudo da Trigonometria apresenta o cálculo de distâncias inacessíveis como uma ferramenta significativa para a exploração de tal conteúdo.

Outra observação pertinente do problema, é que acreditamos que a primeira é a exploração da visualização espacial dos alunos. Muitos alunos não conseguiram fazer um desenho para esboçar o problema. Talvez seja pelo fato de não ter sido dada a ênfase necessária durante a vida escolar, pois na vida cotidiana é comum estabelecermos relações. Os parâmetros curriculares nacionais orientam-nos no seguinte aspecto: “deslocar-se mentalmente e perceber o espaço de diferentes pontos de vista são condições necessárias à coordenação espacial e nesse processo está a origem das noções de direção, sentido, distância, ângulo e muitas outras essenciais à construção do pensamento geométrico” (BRASIL, 1997, p. 126).

Passando por outros grupos, notamos que os alunos apresentavam as mesmas dificuldades encontradas pelo grupo 5. Eles não conseguiam esboçar um desenho que representasse a situação proposta pelo texto. Dirigimo-nos de forma análoga ao grupo 5, e mesmo assim os demais integrantes não conseguiram concluir a atividade. Neste instante, fomos ao quadro e desenhamos a fonte de luz (Sol), incidindo os raios solares no prédio e no poste, provocando assim, as respectivas sombras.



**Figura 5:** Imagem semelhante à realizada no quadro.

Mostramos para eles que pela semelhança de triângulos a razão entre a altura do prédio e a altura do poste é igual à razão entre a sombra do prédio e a sombra do poste.

$$\frac{H}{5} = \frac{15}{3}$$

Pela proporcionalidade,

$$\frac{H}{5} = \frac{15}{3} \Rightarrow H = \frac{5 \cdot 15}{3} = 25 \text{ m}$$

Tendo como foco observar o cotidiano da sala de aula de Matemática, toda atividade é pertinente, mesmo o problema sendo fechado (sem aparentes possibilidades para a exploração, característica imprescindível da Resolução de Problemas). Mesmo assim, percebemos a interação e a mediação (outras características da Resolução de Problemas), mudando o cotidiano da nossa sala de aula, pois, em muitas ocasiões elas são percebidas estaticamente. Tais características (interação e mediação) proporcionaram o diálogo entre o professor e os alunos e entre eles mesmos. Além disso, apontam para a flexibilidade do planejamento que por sua vez, abre as portas do encantamento, fruto das possibilidades que podem surgir. “Impossível investigar o cotidiano pres@ aos limites da visão disciplinar, pois, se assim o fazemos, da realidade veremos apenas o que o nosso estreito ponto de vista unidisciplinar nos permite ver” (GARCIA, 2003, p. 196).

#### **4.1.6 Descrição e análise do encontro 6 (26/07/2012) – Aulas 11 e 12**

Dando continuidade a **Problema4**, assumimos como propósito explorar a **Problema**

#### **4.4.**

**Problema 4.4: Determinando os Ângulos Complementares**

Uma escada de 10 m de comprimento está encostada em uma parede. A distância entre o pé da escada e a parede é de 5 m.

- Represente a situação acima por meio de um desenho.
- Determine o ângulo formado entre a escada e a parede.
- Determine o ângulo formado entre a escada e o chão onde está apoiada.

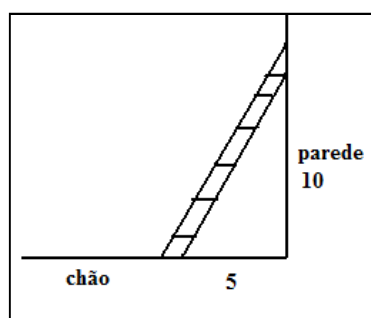
Inicialmente, propomos aos alunos fazer uma leitura do problema e perguntamos se haviam entendido.

**Professor:** Entenderam o enunciado do problema?

**A<sub>5</sub>:** Não!

**A<sub>21</sub>:** Entendi! Consigo até fazer uma figura que represente o texto acima, mas não consigo resolver.

No momento que **A<sub>21</sub>** falava, procurava observar, ao caminhar pela sala se os alunos tinham representado o enunciado através do desenho. Chamou-nos a atenção as representações das alunas **A<sub>14</sub>** e **A<sub>20</sub>**.



**Figura 6:** Imagem semelhante a um desenho realizada por um aluno no quadro.

**Professor:** O que vocês poderiam nos explicar sobre essa figura?

**A<sub>20</sub>:** É o que diz o enunciado! A distância da escada até a parede é 5 metros e a escada tem 10 metros.

**Professor:** Certo! Onde vocês colocaram os 10 metros não representa a altura que a escada alcança em relação ao chão?

**A<sub>20</sub>:** É, professor! E pode colocar em cima da escada o 10?

**Professor:** Sim! É apenas uma representação.

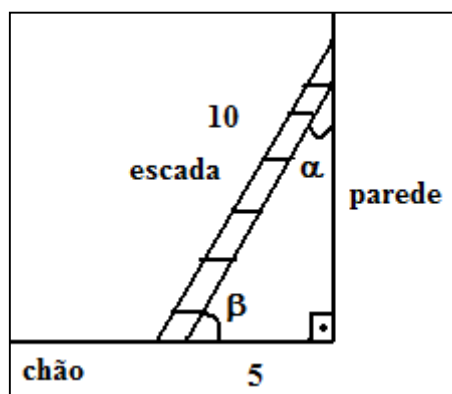
Em muitas ocasiões encontramos alunos que, na pressa de atender o que está sendo pedido, acabam por cometer “erros de representação”. Tais erros são originados através da não reflexão entre enunciado-desenho-resolução e vice-versa. Se fosse numa avaliação, certamente indicariamos que tais alunas erraram, pois a representação não está correta. Como tivemos a oportunidade de conversarmos sobre o fato, notamos que elas entenderam o enunciado, que a representação, na leitura delas, estava certa, porém não conseguiram traduzir de maneira fidedigna, o que proporcionou o equívoco. Algumas incoerências cometidas por alunos no processo ensino-aprendizagem seriam minimizadas se estivéssemos mais próximos, antes de darmos a sentença certa ou errada.

Sabendo que o problema pedia-nos três situações, os alunos conseguiram, em sua maioria, esboçar resolução relativa ao *item a*. Em relação aos *itens b e c*, apenas uma aluna conseguiu perceber o uso da proporcionalidade ao fazer uso das atividades realizadas nos dois primeiros encontros, em que fazíamos os alunos perceberem que as razões trigonométricas são frutos das proporcionalidades entre os lados de triângulos.

*A<sub>5</sub>*: Professor, neste *item b*, eu uso o seno e, no *item c*, o cosseno, não é?

**Professor:** Poderia nos explicar?

*A<sub>5</sub>*: Olhe. Aqui, no item b, eu pego o lado oposto e a hipotenusa e, no item c eu pego o lado adjacente e a hipotenusa.



**Figura 7:** Desenho da aluna *A<sub>5</sub>* em relação à atividade 4.4.

Após o comentário da aluna *A<sub>5</sub>*, socializamos os procedimentos utilizados para resolver o problema.

**Item b:**

$$\text{sen } \alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}. \text{ Equivale ao ângulo de } 30^\circ.$$

**Item c:**

$\cos \beta = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ . Equivale ao ângulo de  $60^\circ$ .

Percebemos que, em alguns momentos, acabamos nos perdendo no que havíamos pensado como essência a respeito da Resolução de Problemas. Mesmo percebendo que os alunos interagem (perguntando), favorecendo assim a mediação e o diálogo, notamos que as arguições dos alunos ainda estão pautadas na busca das respostas, não havendo a exploração. Em contra partida, percebemos que cada atividade proporciona características para a constituição dos conceitos explorados até o momento (proporcionalidade, semelhança, medida e forma). Dessa forma, notamos, mesmo que timidamente uma atenção no processo da construção das respostas dada as atividades. Por isso, comungamos da ideia de Duarte (1987, p. 87), quando afirma que “através da relação entre o conteúdo e a forma da transmissão-assimilação do saber matemático, possibilita-se aos educandos o desenvolvimento de um modo de conhecer a realidade e agir sobre ela, coerente com o objetivo de criação de uma nova organização social”.

Notamos sinais evidentes no processo de construção do conhecimento matemático desenvolvido em nosso cotidiano, apontando assim, através das relações estabelecidas, uma possível postura reflexiva fora da sala de aula. Não temos garantia se o aluno irá utilizar esse modo de pensar e agir durante sua prática no dia-a-dia, mas, “o fato dele ter exercitado esse modo no aprendizado da Matemática, por certo, contribui para que o utilize no restante da sua prática social (DUARTE, 1987, 88)”.

Ao expormos a resolução de tais itens no quadro, encerramos o encontro pedindo aos alunos para procurarem resolver a **Problema 4.5**.

#### **Problema 4.5: Um Banhista Curioso**

Um banhista pretendia ir de uma margem à outra de um açude. No entanto, quando ainda estava na margem, avistou uma bananeira e uma mangueira no outro lado do açude. A mangueira estava bem à sua frente e a bananeira estava um pouco afastada. Sendo assim, o banhista nadou em direção à bananeira.

Do local aonde chegou, avista-se o ponto de partida sob um ângulo de  $60^\circ$  com a margem em que está e constatou que a distância da mangueira para a bananeira era de 24 m. Observando que as margens do açude eram paralelas, fez-se algumas perguntas:

- a) Como poderia representar esta situação através de uma figura?



- b) Qual é a largura desse açude?
- c) Quantos metros nadei?

Ajude esse banhista a encontrar as respostas para suas perguntas.

#### 4.1.7 Descrição e análise do encontro 7 (27/07/2012) – Aulas 13 e 14

Iniciamos o encontro questionando quem havia feito a **problema 4.5**. Notamos que a maioria tinha procurado resolvê-la.

*A<sub>24</sub>: Professor! Eu li. Achei interessante, pois já tomei banho em açudes e nunca tinha parado para pensar que haveria possibilidade de encontrar a largura do rio sem usar um equipamento próprio. Mas, não consegui montar os cálculos.*

Percebemos essa situação como um problema do cotidiano. Se ele tivesse pego uma corda e amarrasse num ponto fixo da margem em que estava, atravessando o açude em linha reta até a outra margem e depois verificasse o comprimento da corda, ele teria encontrado a largura do rio. Muitas situações do cotidiano apresentam conhecimentos matemáticos implícitos, se tais conhecimentos fossem percebidos, as situações teriam respostas mais rápidas e talvez, mais significativas. Por exemplo, quantas vezes não vemos pessoas ao contar uma situação com  $m$  filas na vertical e  $n$  filas na horizontal. Ao invés de contar uma a uma esquecem que o resultado poderia ser obtido multiplicando a quantidade de filas na horizontal pela a quantidade de filas na vertical e vice-versa! Ao expormos que tais respostas sejam mais rápidas e, talvez, mais significativas, isso vai depender dos sujeitos envolvidos em cada situação, pois o cotidiano é apresentado e vivenciado diferentemente por cada pessoa.

Depois dessa afirmação, alguns alunos manifestaram-se de maneira parecida ( $A_{18}$ ,  $A_2$ ,  $A_{11}$  e  $A_{26}$ ).

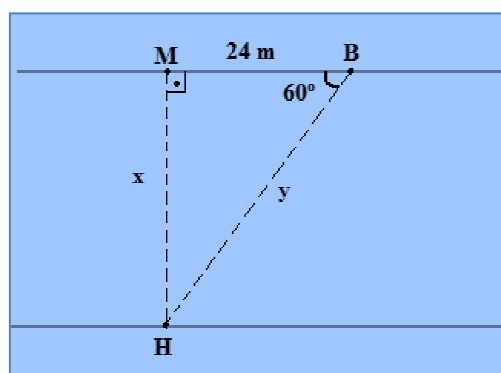
Após essas afirmações, expusemos de forma dialogada a resolução da atividade. Com relação ao *item* da **problema 4.5**, lemos o enunciado e fomos tirando os dados do enunciado e montando a representação da figura.

*Professor: Alguém poderia ler o enunciado da atividade? (Após a leitura, pedimos que nos indicasse os dados principais do enunciado).*

*A<sub>21</sub>: 60° e 24m.*

**Professor:** Gente! A parte principal para entendermos o enunciado de questões deste tipo é tentarmos retirar os dados associando as suas correlações com o desenho que estamos fazendo. Às vezes, ficamos preocupados apenas com os números que aparecem no texto. Pois bem! Vamos ler o texto mais uma vez e, a cada informação, paramos e vamos compondo a imagem que represente com o enunciado.

**Professor:** Representemos a bananeira por **B**, a mangueira por **M** e o banhista por **H**. Como nos itens *b* e *c*, respectivamente, teremos que encontrar a largura do açude e a quantidade de metros que o banhista nadou, representaremos por *x* a largura do rio e por *y* a distância nadada pelo banhista. Sendo assim, tivemos no final a seguinte imagem:



**Figura 8:** Representação por meio de um desenho do problema 4.5.

Aplicando as razões trigonométricas, tangente de  $60^\circ$  para o *item b* e o cosseno de  $60^\circ$  para o *item c*, os alunos chegaram tranquilamente às respostas.

A dificuldade que encontraram esteve relacionada ao *item b* devido à tangente de  $60^\circ$  ser  $\sqrt{3}$ . Pedimos que representassem  $\sqrt{3} = 1,7$ .

Ao refletirmos sobre nossa prática, notamos que nos prendemos à resolução do problema em si, com isso, não tiveram tantas interações. Mesmo que a exposição da representação do enunciado fosse realizada de forma dialogada, concentramos em nossa participação. Atividades como essa estão presentes no livro didático, muitas vezes, apenas com a figura desenhada pedindo *x* e *y*. Mesmo centrado na busca das respostas, e o professor sendo o fator central, o processo foi feito de forma dialogada.

#### 4.1.8 Descrição e análise do encontro 8 (02/08/2012) – Aulas 15 e 16

Estamos fechando o Bloco com uma atividade conclusiva propondo contemplar todos

os tópicos até então estudados/explorados. Tal atividade foi preparada pós a exploração do bloco.

Ao prepararmos essa atividade lembramo-nos do que Hoffmann (1998, p.93) dizia:

A realização de testes e trabalhos ao longo do processo permitem o acompanhamento individual dos alunos, mesmo em turmas numerosas, pela frequência de contato com suas produções. As tarefas finais, globalizantes, oferecem uma complementação importante sobre a competência do aluno na disciplina.

O objetivo desta atividade foi avaliar o processo ensino-aprendizagem, por isso, propomos uma atividade com 12 questões. Deixamos claro que não era obrigado fazer todas.

Esta atividade foi desenvolvida em sala de aula, no horário normal das aulas, e preferimos não fazer nenhuma intervenção. Sendo assim, foi sugerido aos alunos que procurassem fazer o máximo de questões que conseguissem, durante as duas aulas, e desta forma, a nota quantitativa que deveria ser atribuída não iria ser proporcional ao número de questões feitas, mas segundo a apreensão dos conceitos explorados pelas questões realizadas.

A atividade foi realizada individualmente, por acreditarmos que nesse momento seria pertinente, tendo em vista, que todas as outras atividades foram realizadas em grupos ou em duplas. Participaram desta atividade 28 alunos.

Os critérios abordados (quatro) que serviram de parâmetros para a correção da atividade foram:

- ✓ Identificar e determinar as razões e as relações trigonométricas a partir da exploração do triângulo retângulo;
- ✓ Aplicar as razões trigonométricas e investigar caracterizações e semelhanças que podemos extrair com relação aos ângulos complementares de um triângulo retângulo;
- ✓ Modelar situações do cotidiano e explorar o pensamento matemático aí existente como ferramenta construtiva e desenvolvimentista;
- ✓ Resolver situações diversas aplicando os conhecimentos trigonométricos.

## ATIVIDADE CONCLUSIVA SOBRE A TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

**01)** Diante do estudo de Trigonometria foram trabalhadas as razões e algumas relações trigonométricas. Com base neste estudo, relacione a 2ª coluna de acordo com a 1ª:

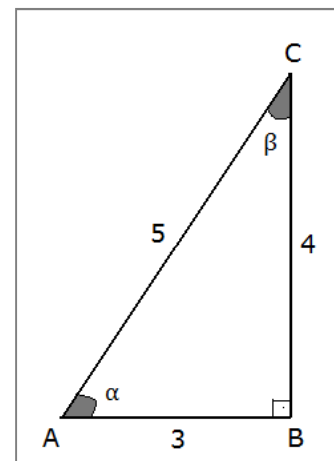
- |                         |  |
|-------------------------|--|
| ( 1 ) $tgx$             | ( ) $\frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa}$        |
| ( 2 ) $sec\ x$          | ( ) $\frac{Cateto\ Adjacente}{Cateto\ Oposto}$ |
| ( 3 ) $sexx$            | ( ) $\frac{Hipotenusa}{Cateto\ Oposto}$        |
| ( 4 ) $cotgx$           | ( ) $\frac{Hipotenusa}{Cateto\ Adjacente}$     |
| ( 5 ) $sen^2x + cos^2x$ | ( ) $\frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa}$     |
| ( 6 ) $cossecx$         | ( ) $\frac{senx}{cosx}$                        |
| ( 7 ) $cos\ x$          | ( ) 1  |

**O enunciado a seguir refere-se às questões 02 e 03.**

Observe o triângulo ABC ao lado.

**02)** Considere o triângulo retângulo representado, analise as afirmações abaixo e as julgue como verdadeira ou falsa:

- ( ) O vértice onde está o ângulo de  $90^\circ$  é o vértice B.
- ( ) O cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  é o segmento AB.
- ( ) O segmento AC é a hipotenusa do triângulo.
- ( ) Em relação ao ângulo  $\beta$  BC é o cateto adjacente.
- ( ) A soma dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , ou seja,  $\alpha + \beta$  pode ser maior que  $90^\circ$ .
- ( ) O seno do ângulo  $\alpha$  é igual ao cosseno do ângulo  $\beta$ .



**03)** Determine:

- |                  |                 |
|------------------|-----------------|
| a) $sen\ \alpha$ | d) $sen\ \beta$ |
| b) $cos\ \alpha$ | e) $cos\ \beta$ |
| c) $tg\ \alpha$  | f) $tg\ \beta$  |

**04)**<sup>20</sup> Sabendo que o seno e o cosseno de um ângulo  $\alpha$  de um triângulo retângulo são iguais, qual é o valor da tangente?

**05)**<sup>21</sup> Um triângulo retângulo tem um ângulo medindo  $30^\circ$ . Sabendo que a hipotenusa desse triângulo mede 8 cm, quanto medem seus catetos?

**06)** Um avião alça voo sob um ângulo de  $30^\circ$  e percorre 5000 m nessa mesma inclinação.

a) Represente a situação acima por meio de um desenho indicando os dados mencionados.

<sup>20</sup> Adaptada do livro de BARROSO, 2010.p.331.

<sup>21</sup> Adaptada do livro de BARROSO, 2010.p.331.

b) Qual a altura do avião em relação ao chão?

07)<sup>22</sup> Observe os dados de 5 rampas diferentes construídas para facilitar o acesso a um desnível de 0,5 m.

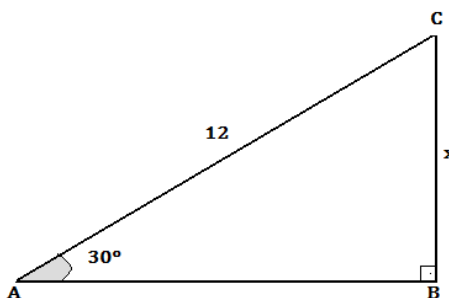
Rampa	Comprimento da rampa	Altura do desnível
A	5,0 m	0,5 m
B	4,0 m	0,5 m
C	3,0 m	0,5 m
D	2,0 m	0,5 m
E	1,0 m	0,5 m

Qual rampa tem a maior inclinação? Justifique.

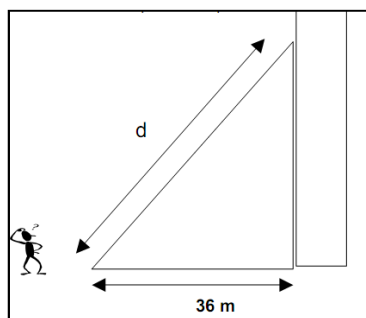
08) Uma escada está apoiada no topo de uma parede de 4 m. Esta escada forma com a parede um ângulo de  $60^\circ$ .

- Esboce um desenho que represente a situação acima indicando os dados mencionados.
- Determine o comprimento da escada.
- Qual o ângulo formado pela escada e o chão?

09) Determine a altura de uma árvore que projeta uma sombra de 13 m quando os raios solares formam um ângulo de  $30^\circ$  com o solo.



10) Quando os raios solares formam um ângulo de  $60^\circ$  com o solo, um prédio projeta uma sombra de 36 m e um observador está localizado no extremo dessa sombra. Qual é a distância entre o ponto onde ele está e o topo desse prédio?

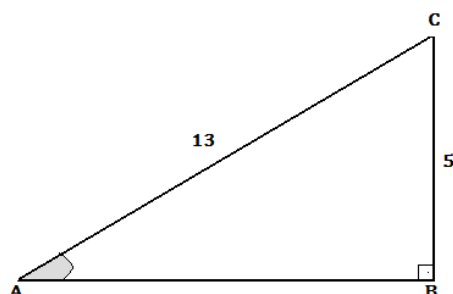


11)<sup>23</sup> Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em B.

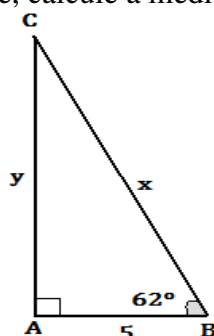
<sup>22</sup> BARROSO, 2010.p.328

<sup>23</sup>(UFC adaptado-CE)

- Determine o seno do ângulo  $\hat{A}$
- Determine o ângulo  $\hat{A}$ .
- Determine o ângulo  $\hat{C}$
- Determine o cosseno do ângulo  $\hat{A}$ . (utilizando o teorema de Pitágoras determine o segmento AB)



12) No triângulo retângulo seguinte, calcule a medida de  $x$  e  $y$  indicada:



Após a verificação da atividade de cada aluno, montamos um quadro demonstrativo, estabelecendo a relação dos alunos com os parâmetros estabelecidos em cada questão. Deixamos claro que nenhum aluno fez as 12 questões, isso não significa que ninguém obteve o padrão máximo.

<b>Critérios Explorados</b>	<b>Questões</b>	<b>Relação dos Alunos</b>
Identificar e determinar as razões e as relações trigonométricas a partir da exploração do triângulo retângulo.	1 e 3	26
Aplicar as razões trigonométricas e investigar caracterizações e semelhanças que podemos extrair com relação aos ângulos complementares de um triângulo retângulo.	2, 4 e 7	20
Modelar situações do cotidiano e explorar o pensamento	6, 8, 9 e 10	10

matemático aí existente como ferramenta construtiva e desenvolvimentista.		
Resolver situações diversas aplicando os conhecimentos trigonométricos.	5, 11 e 12	17

**Quadro7:** Relação dos Alunos em relação aos parâmetros estabelecidos na atividade conclusiva 1

Não queremos esmiunçar análises referentes a cada questão proposta nesta atividade, pois acreditamos que a essência do nosso trabalho está nas discussões apresentadas ao longo do transcorrer de cada encontro.

Destacamos que, embora tenham sido trabalhadas situações que modelassem o cotidiano, as questões referentes a esse critério foram as que os alunos deixaram mais sem fazer.

Sabemos que uma atividade não representará a totalidade de uma avaliação do processo ensino-aprendizagem, não tínhamos e não temos essa pretensão. A avaliação foi construída ao longo dos 08 encontros, cada atividade tinha a sua peculiaridade avaliativa. Notamos que não é dessa forma que os processos avaliativos em nossa escola acontecem, como também não é assim que os sistemas que se avaliam o Ensino Básico e o Ensino Superior. E ainda, não é dessa forma que os processos seletivos procuram avaliar, em todas estão intrínsecas as provas objetivas, que mais servem para nutrir a competitividade entre as classes, estabelecendo, cada dia mais, veementemente, as desigualdades já existentes, sejam elas perceptíveis ou camufladas pelos diversos tipos de programas governamentais que mais se preocupa com as estatísticas do que com a qualidade.

Esses encontros preparados e a forma de avaliação sugerida na parceria com o Professor Dr. Silvanio de Andrade (orientador deste trabalho) mudaram nossas concepções. Fizeram-nos pensar que o processo ensino-aprendizagem de forma reflexiva e mediadora acompanha intrinsecamente uma dinâmica de avaliação diferenciada. “A ação avaliativa, enquanto mediação, não está ao final do processo, mas pretende se fazer presente entre uma tarefa do aluno e etapa posterior de construção, por ele, de um saber enriquecido, complementado” (HOFFMANN, 1998, p.100).

## 4.2 Retalhos das Atividades do Bloco 2: Estabelecendo a transição da Trigonometria do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico

As intervenções foram realizadas no período de 09/08/2012 a 25/10/2012, numa turma de 2º ano do ensino médio, com 32 alunos entre 16 e 22 anos. Foram realizados 10 encontros (20 aulas) para este Bloco 2. Tínhamos planejado, inicialmente 7, encontros (14 aulas), mas, devido às várias imprevisões no planejamento escolar, tivemos que utilizar mais 03 encontros (06 aulas).

Abaixo, descrevemos através de uma tabela a disposição dos encontros, com suas respectivas datas, e a relação de alunos presentes e ausentes.

	<b>Data da Realização</b>	<b>Alunos Presentes</b>	<b>Alunos Ausentes</b>
<i>Encontro 1</i>	09/08/2012	26	6
<i>Encontro 2</i>	10/08/2012	21	11
<i>Encontro 3</i>	17/08/2012	27	5
<i>Encontro 4</i>	13/09/2012	28	4
<i>Encontro 5</i>	14/09/2012	24	8
<i>Encontro 6</i>	21/09/2012	25	7
<i>Encontro 7</i>	11/10/2012	27	5
<i>Encontro 8</i>	18/10/2012	26	6
<i>Encontro 9</i>	19/10/2012	25	7
<i>Encontro 10</i>	25/10/2012	26	6

*Quadro 8:* Relação da Frequência dos alunos em Relação aos Encontros do Bloco 2

Segundo o calendário anual, a partir do dia 09/08/2012, éramos para ter 08 encontros (16 aulas), mas tivemos apenas 03 (06 aulas). Neste período, houve a preparação e a realização da gincana estudantil, por isso não tivemos aulas nos dias 16, 23, 24, 30 e 31/08/2012.

### 4.2.1 Descrição e análise do encontro 1 (09/08/2012) – Aulas 17 e 18

#### <sup>24</sup>**Problema 01:** A relação entre $\pi$ e o $\pi$ radianos

<sup>24</sup>Atividade adaptada, da dissertação de mestrado de Oliveira, 2010, p. 166-167.



**Objetivo:** *Construir a relação  $\pi$  e estabelecer conexões entre esse número e a unidade de medida radiano*

Experimento: o Radiano e o  $\pi$  (pi)

- Desenhe na folha sulfite uma circunferência de raio 7 cm.
- Pegue um CD e, sobre uma folha sulfite, trace o contorno desse objeto.
- Pegue uma moeda de 1 real e, sobre uma folha sulfite, trace o contorno desse objeto.
- Evidencie o centro das circunferências correspondentes a cada situação acima.
- Sobreponha o barbante, em cima do raio evidenciado, e, com o lápis de tinta façam as marcações nas circunferências. Tome muito cuidado e faça com capricho as medições; procure ser fiel ao transportar o comprimento do barbante com o tamanho de cada raio, minimizando erros, e, logo em seguida, recorte os pedaços de barbante encontrados, cada um deles tendo o comprimento do raio.
- Passe cola por todo o comprimento de cada uma das circunferências e cole os raios recortados anteriormente acompanhando a curvatura da circunferência. Alterne as cores dos raios consecutivos em cada circunferência para destacar a quantidade de raios colados.

a) Preencha a tabela abaixo:

<b>OBJETO</b>	<b>DESENHO DA CIRCUNFERÊNCIA</b>	<b>CD</b>	<b>MOEDA</b>
<b>MEDIDA DO RAIO</b>			
<b>MEDIDA DO DIÂMETRO</b>			
<b>COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA EM RAIOS</b>			
<b>COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA EM cm</b>			
<b><u>COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA</u> <u>DIÂMETRO</u></b>			

b) Em uma circunferência, quantos de seus raios cabem no seu comprimento? O que podemos concluir?

- c) <sup>25</sup>A partir dessa atividade, podemos constatar que um *radiano* é o ângulo central que corresponde a um arco de comprimento igual ao raio da circunferência a que pertence. Sendo assim, 1 radiano equivale a quantos graus?

Entregamos, inicialmente, os objetos necessários para a execução do problema e, ao mesmo tempo, desenvolvemos um clima favorável na turma, dividindo-a em grupos de quatro pessoas.

**Professor:** Pessoal, este nosso encontro será bastante prático. Por isso, procurem realizar a atividade com seriedade para que os resultados se aproximem do esperado.

**A<sub>10</sub>:** (Interrompe o professor) Professor, como usa esse “troço”?

**Professor:** Que “troço”?

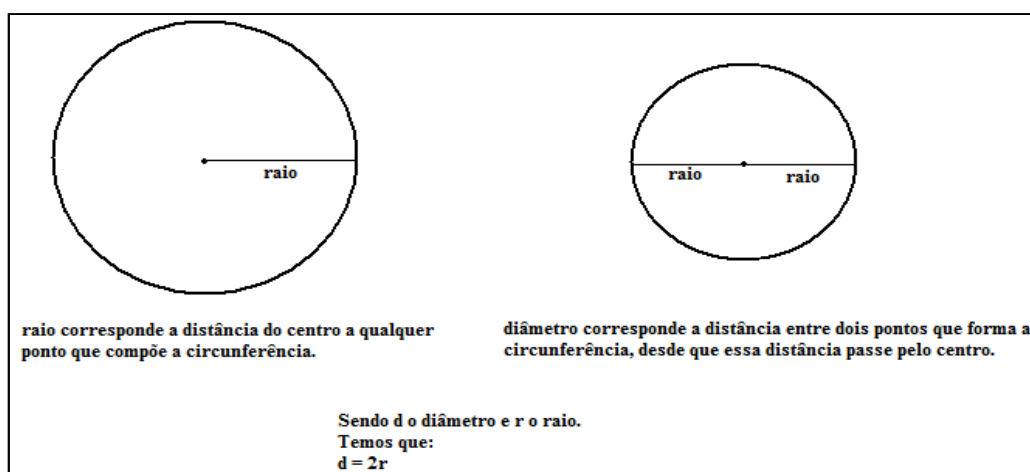
**A<sub>10</sub>:** (Mostra o instrumento)

**Professor:** Este troço chama-se compasso.

Nesse momento, percebemos que poucos alunos sabiam manusear o compasso, eles não sabiam o que era o raio nem o que era o diâmetro. Passando pelos grupos, mostramos como se usa o instrumento.

**A<sub>18</sub>:** Professor o que quer dizer “raio”? E o que quer dizer “diâmetro”?

**Professor:** Mostramos uma situação no quadro por meio de um desenho para explicar o que seria o raio e o que seria o diâmetro.



**Figura 9:** Exposição no quadro para tentar explicar a diferença entre o raio e o diâmetro de uma circunferência.

<sup>25</sup>Trecho retirado de Ledur, 2001, p.30.

Após a exposição na lousa, a atividade desenrolou-se conforme a dinâmica apresentada. Foram coletados os seguintes dados: medida do raio, do diâmetro, comprimento da circunferência em raios e em centímetros, e, por fim, a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência.

Esse problema realizado em grupo culminou com a exposição do preenchimento da tabela, por meio de cartolinas. Essa dinâmica proporcionou-nos momentos extremos: por um lado, uma movimentação diferente no espaço sala de aula (conversas e alunos indo e vindo de grupo a grupo) com os grupos perguntando sobre situações que para nós, articuladores da atividade, eram simples, mas, para os alunos eram de suma importância. Por outro lado, a satisfação de termos proposto uma atividade que movimentasse os alunos para a execução da mesma como também, a percepção da regularidade que se estabeleceu com a constatação do número  $\pi$  ( $\pi$ ). Muitos dos alunos já sabiam que o valor dele era, aproximadamente, 3,14, mas perceber que essa informação era obtida pela razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência, foi para eles surpreendente.

A aproximação da exploração do conteúdo com situações práticas favorece um interesse natural do aluno, por causa da quebra da rotina, como também, a percepções de que a Matemática faz parte de um processo construtivo. Mas não é qualquer situação prática! Concordamos com Lorenzato (2009) quando afirma que “temos sempre em mente que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem”. É preciso, além do conhecimento e da intencionalidade, verificar se esta será a melhor opção para a transmissão do conteúdo. Não é simplesmente pelo fato da aula ficar mais divertida! Tínhamos uma intenção inicial (construir a razão  $\pi$ ) para depois estabelecermos relações entre o  $\pi$  e o radiano.

**Professor:** *Em uma circunferência, quantos de seus raios cabem no seu comprimento?*

**A<sub>5</sub>, A<sub>21</sub>, A<sub>12</sub>:** *Cabem 6 raios e pouco.*

**A<sub>24</sub> e A<sub>10</sub>:** *Cabem, exatamente, 6 raios.*

**Professor:** *O que podemos concluir?*

**A<sub>18</sub>:** *Que se medirmos em raios, precisaremos de 6 medidas de raios e poucos para dar uma volta na circunferência.*

Percebendo que já havia tocado o sinal, concluímos a atividade expondo essas últimas informações na lousa. Assim, chegaremos a algumas relações que podemos estabelecer entre medida de arcos:

$$360^\circ \rightarrow 2\pi \text{ radianos } (\cong 6,28)$$

$$180^\circ \rightarrow \pi \text{ radianos } (\cong 3,14)$$

$$90^\circ \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ radianos } (\cong 1,57)$$

$$45^\circ \rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ radiano } (\cong 0,785)$$

$$1\text{rad} \rightarrow \frac{360^\circ}{\pi} \cong 57^\circ.$$

Percebemos a má administração do tempo durante a realização da atividade. “Perdemos” tempo com a parte inicial da atividade e acabamos o encontro sem explorar o essencial: explorar os dados obtidos na tabela para chegarmos às relações referentes ao radiano. Sendo assim, acabamos dando as respostas que deveriam aparecer após a exploração da atividade. É comum tal acontecimento! Os alunos ficam mais empolgados, mas também é necessária certa maturidade do professor para perceber onde ocorreram os exageros e as precipitações do querer que os alunos enxerguem o que irá ser estabelecido.

#### 4.2.2 Descrição e análise do encontro 2 (10/08/2012) – Aulas 19 e 20

Explorando as relações que podemos estabelecer entre a medida de arcos, diferenciaremos a medida angular e a medida linear.

**Professor:** Boa tarde, pessoal! Como passaram de ontem para hoje? (alguns alunos comentaram). Lembram-se do nosso último encontro? O que trabalhamos?

**A<sub>5</sub>, A<sub>7</sub> e A<sub>9</sub>:** Preenchemos uma tabela através de informações extraídas do CD, da moeda e do desenho da circunferência, em que o intuito era percebermos que a divisão entre o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro dava sempre um mesmo valor.

**Professor:** Qual era o valor dessa divisão?

**A<sub>12</sub> e A<sub>20</sub>:** 3,14! Que o senhor chamou de  $\pi$ .

**Professor:** Sobre a atividade do nosso último encontro, quantos raios eram necessários para dar uma volta na circunferência?

**A<sub>21</sub>:** Professor, foram 6 raios e poucos.

**Professor:** A partir dessa atividade, podemos constatar que um radiano é o ângulo central que corresponde a um arco de comprimento igual ao raio da

circunferência a que pertence. (momento de silêncio, em que os alunos tentavam entender a informação)

**A<sub>5</sub>:** Então quer dizer que serão 6 radianos e poucos para dar uma volta na circunferência.

**Professor:** Ok! Sendo assim, 1 radiano equivale a quantos graus?

**A<sub>18</sub>:** Professor, se uma volta na circunferência em graus é igual a 360°, só é dividir 360 por 6 e poucos. Vou fazer como sendo 6,2, porque esse pouco que sobrou é menos do que a metade para dar outra medida do raio. Fazendo essa divisão vou encontrar aproximadamente 58,06.

**Professor:** A partir dessas informações cedidas por A<sub>18</sub>, sentimos necessidade de expor informações, a fim de podermos chegar a algumas relações que podemos estabelecer entre medida de arcos:

$$360^\circ \rightarrow 2\pi \text{ radianos } (\cong 6,28)$$

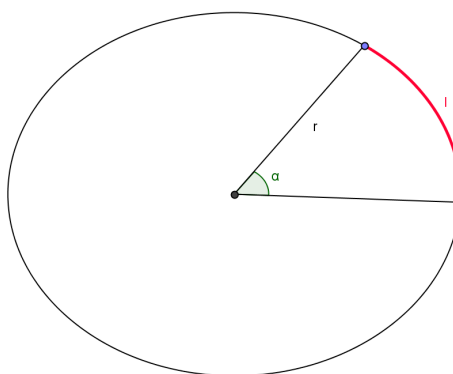
$$180^\circ \rightarrow \pi \text{ radianos } (\cong 3,14)$$

$$90^\circ \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ radianos } (\cong 1,57)$$

$$45^\circ \rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ radiano } (\cong 0,785)$$

$$1 \text{ rad} \rightarrow \frac{360^\circ}{\pi} \cong 57^\circ.$$

Na sequência expusemos no quadro que a medida de um arco poderia ser feita de duas maneiras: linear e angular. A unidade referente à medida linear é o radiano (rad) e a unidade referente à medida angular é o grau (°). Justificamos que essas relações e outras são possíveis devido ao fato da medida do ângulo central ser igual à medida do arco correspondente a esse ângulo.



**Figura 10:** Imagem da representação da medida de um arco

Ao final da exposição, afirmamos que a partir dessas medidas de arcos, podemos obter outra relação.

- O comprimento de uma circunferência de raio  $r$ :  $C = 2\pi r$ .
- Medida de uma circunferência em graus:  $360^\circ$ .
- Relação entre o comprimento  $l$  e a medida  $\alpha$  (em graus) do arco:

$$l = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r, \text{ pois } \frac{2\pi r}{360} = \frac{l}{r}$$

Caso  $\alpha$  esteja em radianos temos:

$$l = \alpha \cdot r, \text{ pois } r = \frac{l}{\alpha}$$

Como já havia tocado o sinal do término da aula, entregamos uma atividade e solicitamos que tentassem fazer em casa, mas que retomariam no próximo encontro.

Mesmo esta aula tendo ficado centrada na figura do professor, percebemos que os alunos ficaram atentos para saber o que aconteceria na sequência. Notamos que esta atenção ocorreu devido ao fato da exploração da atividade do encontro anterior e que, neste encontro, foi retomado, gerando nos alunos uma busca do que poderia ainda vir daquela atividade.

#### 4.2.3 Descrição e análise do encontro 3 (17/08/2012) – Aulas 20 e 21

**Professor:** Boa tarde! Como estão? As atividades, conseguiram fazer?

**A<sub>5</sub> e A<sub>13</sub>:** Professor, conseguimos fazer algumas.

**Professor:** E os demais?

**A<sub>12</sub>, A<sub>24</sub> e A<sub>8</sub>:** Professor, não conseguimos porque o senhor não colocou nenhum exemplo no quadro.

**Professor:** Então vamos retomar as considerações estabelecidas no encontro passado. Quanto equivale  $360^\circ$  em radianos?

**A<sub>5</sub>:**  $2\pi$  radianos, professor.

**Professor:** Um radiano equivale a aproximadamente quantos graus?

**A<sub>3</sub>:** Aproximadamente  $57^\circ$ .

**Professor:** Qual a principal diferença entre as unidades utilizadas para medir um arco (grau e radiano)?

**A<sub>12</sub> e A<sub>20</sub>:** Após a realização da atividade de preencher a tabela e, depois, quando o senhor colocou no quadro, notamos que quando a medida é angular, utilizamos o grau e quando é linear utilizamos o radiano.

**Professor:** Ao final da exposição, no último encontro, apresentamos no quadro a relação entre o comprimento  $l$  e a medida  $\alpha$  (em graus) do arco. A relação era a seguinte:

$$l = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r, \text{ pois } \frac{2\pi r}{360} = \frac{l}{r}$$

Também, expusemos a relação entre o comprimento  $l$  e a medida  $\alpha$  (em radianos) do arco. A relação era a seguinte:

$$l = \alpha \cdot r, \text{ pois } r = \frac{l}{\alpha}$$

**Professor:** Sendo assim, vamos retomar o **problema2**.

Nesse diálogo, notamos que o cotidiano de nossa sala de aula precisava de mais autonomia. Quando alunos dizem que não conseguiram fazer porque o professor não mostrou um exemplo semelhante, isso demonstra falta de autonomia, tanto por parte do professor, que muitas vezes em sua prática deixa implícito esse argumento, quanto pelos alunos, que ficam à espera do professor, não procurando buscar respostas para suas próprias conclusões.

Acreditamos que esse contexto está presente em muitas salas de aula. A autonomia é adquirida quando tomamos consciência das nossas limitações e buscamos condições para superá-las e quando não consideramos ser objeto dos processos de ensino-aprendizagem, pois, como diz Freire (2011, p. 25), “quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender”.

## **Problema 2: Medindo arcos e medindo ângulos**

**OBJETIVO:** *Favorecer conexões entre a medida de arcos e a medida de ângulos.*

### **Problema 2.1**

Sabendo que um arco de 18 cm de comprimento contido numa circunferência de raio 6 cm.

- a) Qual a medida desse arco em radianos?
- b) Qual a medida desse arco em graus?

**Professor:** A<sub>5</sub>, qual das situações você conseguiu fazer? Expõe no quadro, seu caminhar até encontrar as respostas.

**A<sub>5</sub>:** Consegui fazer a **Atividade 2.1**. Fiz da seguinte forma.

18 cm é o comprimento do arco ( **$l = 18 \text{ cm}$** ).

6 cm é o raio da circunferência ( **$r = 6 \text{ cm}$** )

Na primeira alternativa, o enunciado pedia a medida do arco em radianos. Pois bem, peguei a expressão  $l = \alpha \cdot r$ , e substituí os valores do enunciado.

$$18 = \alpha \cdot 6 \Rightarrow \alpha = \frac{18}{6} \Rightarrow \alpha = 3 \text{ rad.}$$

No item b, utilizei a outra expressão,  $l = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$ , também substituí os valores do enunciado.

$$18 = \frac{\alpha}{360} \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \Rightarrow \alpha = \frac{360 \cdot 18}{12 \cdot 3,14} \Rightarrow \alpha = \frac{6480}{37,68} \Rightarrow \alpha \cong 172^\circ.$$

**Professor:** Ok! A turma tem alguma consideração a fazer?

**A<sub>11</sub>:** Nesse caso é só aplicar as fórmulas?

**Professor:** Antes de aplicar fórmulas, é interessante perceber que estes resultados foram encontrados a partir da proporção existente entre o comprimento do arco e o comprimento da circunferência; e o ângulo referente ao arco e o ângulo que corresponde a uma volta na circunferência.

**Professor:** Quem conseguiu fazer o **problema 2.2**?

Mesmo sendo uma atividade que se dá uma ênfase na aplicação de fórmulas, assim como **A<sub>11</sub>** afirmou, deixamos claro para os alunos que as “fórmulas” encontradas foram resultados de regularidades estabelecidas, que uma vez compreendida, o seu uso é de relativa significância, assim como todas as “fórmulas”.

Uma coisa seria o professor chegar ao quadro, colocar a fórmula, mostrar um exemplo e dizer aos alunos que fizessem exercícios correlatos; outra coisa seria o professor mostrar, através do diálogo construtivo todo o processo, e, que o resultado fosse apenas uma parte do processo. Procuramos seguir a segunda opção dada.

## <sup>26</sup>**Problema 2.2: A Trigonometria do relógio**

Calcule a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos quando são:

- a) 4 horas.
- b) 6 horas e 20 minutos.

**A<sub>13</sub>:** Professor, eu fiz alguns rabiscos.

**Professor:** Exponha seus rabiscos aqui no quadro.

**A<sub>13</sub>:** Professor! Pensei assim:

---

<sup>26</sup>Atividade extraída de Smole e Diniz, 2010, p. 19.



Para dar uma volta completa, o ponteiro das horas gasta 12 horas.  
Então fiz:

$$360 : 12 = 30^\circ$$

1 hora corresponde a  $30^\circ$

2 horas corresponde a  $60^\circ$

3 horas corresponde a  $90^\circ$

4 horas corresponde a  $120^\circ$

Dessa forma cheguei à resposta (do item a).

(No item b) fiz:

6 horas e 20 minutos = 6 horas + 20 minutos

1 hora corresponde a  $30^\circ$

20 minutos representam  $\frac{1}{3}$  de hora.

$\frac{1}{3}$  de hora corresponde a  $10^\circ$ .

Então, 6 horas e 20 minutos =  $6 \cdot 30^\circ + 10^\circ = 180^\circ + 10^\circ = 190^\circ$ .

**Professor:** Alguém quer complementar algo? (silêncio). O **problema 2.3** quem conseguiu fazer? (silêncio).

### <sup>27</sup>**Problema 2.3:**

O ponteiro dos minutos de um relógio mede 10 cm. Qual é a distância que sua extremidade percorre em 30 minutos?

**A<sub>8</sub> e A<sub>14</sub>:** Professor! Não ficou bem claro o enunciado. Como assim, o ponteiro dos minutos mede 10 cm?

**Professor:** Considerando o relógio como uma circunferência, o ponteiro dos minutos se encontra em qual região dela?

**A<sub>8</sub>:** No centro.

**Professor:** Então, se está no centro, o que esse ponteiro representa?

**A<sub>8</sub>:** O raio.

**Professor:** Para estabelecermos uma relação é necessário conhecermos o raio e o ângulo. Com isso, o raio é 10 cm. Alguém poderia identificar o ângulo percorrido pelo ponteiro dos minutos após 30 minutos?

---

<sup>27</sup>Atividade extraída de Dante, 2010, p. 33.

**A<sub>14</sub>:** Professor, **A<sub>13</sub>** estabeleceu algumas relações referentes ao deslocamento do ponteiro das horas. Então, de forma parecida, pensei assim:

A cada hora o ponteiro dos minutos dá uma volta completa.

Em 30 minutos o ponteiro dos minutos dá meia volta, ou seja, 180°.

**Professor:** Muito bem! Então para encontrarmos a distância que sua extremidade percorre após 30 minutos, basta aplicarmos a relação  $l = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$ .

$$l = \frac{180}{360} \cdot 2,3,14 \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{1}{2} \cdot 62,8 \quad \Rightarrow \quad l = 31,4 \text{ cm.}$$

Situações como essas abordadas nos problemas 2.2 e 2.3 podem se caracterizar como uma aplicação forçada do tópico explorado. Quem, no dia-a-dia, está interessado em saber qual o ângulo menor formado pelos ponteiros das horas e dos minutos em uma determinada hora, ou ainda, saber a distância percorrida por um ponteiro do relógio durante certo tempo? Acreditamos que ninguém! Então, quais as contribuições que tais atividades trazem para a exploração do conteúdo?

Até então trabalhamos com a representação da circunferência dividindo-a em 360 partes iguais que representará um grau. Tais situações fazem com que os alunos percebam que não é obrigatório que toda figura que modele uma circunferência esteja dividida em 360 partes. Podemos estabelecer relações com essa ideia primeira! Ao observarmos um relógio, notamos que ele está dividido em 12 partes e não em 360. Ao estabelecermos relações, percebemos que a unidade irá mudar, por exemplo, o ponteiro das horas se desloca 30° a cada hora passada. Pode-se dizer que o aluno que percebeu tal variação está no processo de compreensão dos conceitos estabelecidos pela exploração do conteúdo tratado.

Chamamos atenção para tais situações que trouxeram o relógio como mediador do processo ensino-aprendizagem e que proporcionou uma dinâmica diferente para o cotidiano da sala de aula, devido ao fato do relógio estar presente em seus cotidianos extraclasse.

## <sup>28</sup>**Problema 2.4: Uma aplicação na Física**

Um pêndulo tem 15 cm de comprimento e, no seu movimento, suas posições extremas formam um ângulo de 60°. Qual é o comprimento do arco que a extremidade do pêndulo descreve?

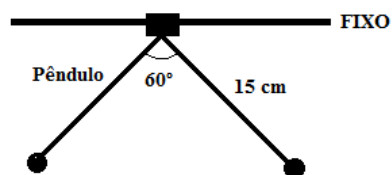
**Professor:** Alguém tentou resolver esta atividade?

**A<sub>5</sub>, A<sub>13</sub>, A<sub>20</sub> e A<sub>7</sub>:** Professor, o que é pêndulo?

---

<sup>28</sup>Atividade extraída de Dante, 2010, p. 34.

**Professor:** É algo que oscila a partir de um ponto fixo. Observem esta imagem, acredito que melhorará a compreensão de vocês.



**Figura 11:** Representação através de um desenho do problema 2.4

**A<sub>5</sub>:** Então, professor, o raio é 15 cm e o ângulo é 60°. Só é estabelecer a relação e encontrar o comprimento do arco.

**Professor:** Aplicando a relação, encontramos:

$$l = \frac{60}{360} \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 15 \Rightarrow \quad l = \frac{1}{6} \cdot 6,28 \cdot 15 \Rightarrow \quad l = \frac{1}{6} \cdot 94,2 \Rightarrow \quad l = 15,7 \text{ cm}$$

Com essa exposição, chegamos ao final do encontro estabelecendo relações entre arcos e ângulos.

Destacamos nesse encontro a presença efetiva do diálogo, talvez porque na última orientação. Perceber que os diálogos estavam ficando ocultos. Lembramo-nos, pois, de Lankshear e Knobel (2008, p. 14), da importância do professor pesquisador, quando afirma que “a pesquisa pedagógica ajuda a melhorar a percepção do papel e da identidade profissional dos professores” e “a pesquisa pedagógica pode contribuir para um ensino-aprendizagem de melhor qualidade nas salas de aula”. Procuramos desenvolver nossa pesquisa assumindo a postura de professor pesquisador, em que pesquisamos nossa própria sala de aula.

#### 4.2.4 Descrição e análise do encontro 4 (13/09/2012) – Aulas 21 e 22

**Professor:** Boa tarde, pessoal! Como passaram estes dias? Tudo tranquilo?!

**A<sub>9</sub>:** Professor pra quê ter gincana na escola? Quase um mês que não temos aulas de Matemática. É tanto preparativo pra uma gincana em que, a maioria das provas não são educativas e estimulam a competição.

**Professor:** Faz quase um mês que não entro aqui na sala de vocês! Já discutimos sobre tais eventos na escola e vocês conhecem nossa opinião. Sendo assim, vamos retomar os trabalhos. Ainda se lembram do que estávamos trabalhando?

**A<sub>17</sub>:** Fizemos alguns problemas sobre ângulo.

**Professor:** Abram o material de vocês nos registros do último encontro. O que está escrito?

**A<sub>5</sub>:** A exploração de quatro problemas sobre a diferenciação entre ângulo e arco.

**Professor:** Ok! Alguém lembra quais as unidades utilizadas para medir ângulos? (Uns nove alunos levantaram a mão)

**Professor:** Vocês que levantaram a mão, quais são as unidades utilizadas para medir ângulo?

**A<sub>10</sub>:** Acho que é o metro! Não! Metro é de comprimento.

**A<sub>5</sub>:** Professor, é o grau e o radiano.

**Professor:** É isso mesmo! Relembrando, utilizamos a unidade grau quando se trata de medida angular (símbolo: °) e utilizamos a unidade radiano quando se trata de medida linear (símbolo: rad). Hoje iremos trabalhar situações em que iremos converter as unidades de medidas e ao mesmo tempo fazer a diferenciação.

**Professor:** Entreguei aos alunos uma ficha que continha as informações que descrevo na sequência.

Se observarmos os últimos encontros percebemos que há repetições constantes sobre os tópicos trabalhados (relações entre as medidas angulares e lineares de arcos). Em nosso cotidiano isso foi necessário devido a não sequência dos encontros, desta forma, acreditamos ser necessário retomar o que estávamos trabalhando anteriormente para darmos continuidade. Em reuniões de planejamento da escola, é comum acontecer essa dispersão na continuidade das aulas; os professores passam trabalhos para cumprir os conteúdos estabelecidos no plano bimestral e anual. Preferimos “perder tempo”, retomando tópicos trabalhados anteriormente, do que exaltarmos, no final do ano, afirmando ter cumprido todos os conteúdos propostos. Preferimos optar pela qualidade à quantidade.

### **Problema3: Convertendo unidades de medidas**

**OBJETIVO:** *Favorecer através da conversão de unidades possibilidades de estabelecer um domínio mais amplo do conceito explorado.*

Para convertermos, da unidade, graus para radianos ou, da unidade, radianos para graus, utilizamos a proporcionalidade, também chamada, nesse caso, de regra de três.

Vejamos um exemplo:

Qual a representação de um arco de 25° em radianos?

$$\frac{\pi \text{rad}}{180^\circ} = \frac{x}{25^\circ} \Rightarrow x = \frac{25\pi}{180} \text{rad} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{36} \text{rad} \Rightarrow x \cong 0,139 \pi \text{rad} \Rightarrow x \cong 0,44 \text{rad}.$$

### **Problema 3.1**

Usando a proporção destacada acima, preencha a seguinte tabela:

<b>Ângulo em Grau</b>	<b>30°</b>	<b>60°45'</b>			<b>80°</b>		<b>14°</b>	
<b>Ângulo em Radiano</b>			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$		<b>5,50</b>		$\frac{\pi}{12}$

**A<sub>5</sub>:** Professor! Quando temos o ângulo em radiano, como por exemplo  $\frac{\pi}{12}$ rad, eu fiz assim?

$$\pi \text{rad} = 180^\circ$$

$$\frac{\pi \text{rad}}{12} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$

**A<sub>5</sub>:** Pode ser assim!

Os alunos fizeram as conversões utilizando a propriedade fundamental da proporção. A maioria das dificuldades encontradas pelos alunos estava relacionada à simplificação de frações, quando faziam a conversão dos ângulos em grau para radiano. O nosso cotidiano de sala de aula, neste momento, pedia para que nós déssemos atenção a um “obstáculo”: a dificuldade em simplificar frações. Desenvolver pesquisa olhando o cotidiano é demonstrar e dar atenção aos pequenos fragmentos, que decorrem no interior da sala de aula, os quais podem contribuir para a não efetivação do processo ensino-aprendizagem.

**Professor:** Quem sabe o que significa a palavra congruente? (ninguém se pronunciou). Congruente quer dizer “mesma medida”. O que iremos notar agora é quando dois ângulos têm arcos côngruos. Observe o que está escrito no verso da ficha que entreguei a vocês no início do encontro.

Uma circunferência está dividida em 360 partes iguais, e cada parte determina 1°. Portanto, temos numa circunferência 360°.

O que acontece com o arco de 361°?

A resposta intuitiva é a seguinte: ora,  $361^\circ = 360^\circ + 1^\circ$ . Sendo assim, esse arco é correspondente ao arco de 1°. É como se tivesse dado uma volta completa e parado no arco de 1°. Com isso, 361° e 1° são arcos que têm a mesma origem e a mesma extremidade, mas

diferem na quantidade de voltas dadas na circunferência. *Quando isso ocorre, dizemos que tais arcos são côngruos.*

Se  $0 \leq x \leq 2\pi$  (ou  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ ), o arco de medida  $x$  é a determinação principal ou a 1ª determinação não negativas.

Qual a determinação principal dos arcos de medida  $4100^\circ$  e  $-11\pi$  rad?

- Dividindo 4100 por 360, temos:

$$\begin{array}{r} 4100 \overline{)360} \\ \underline{50011} \\ 140 \end{array} \quad 4100 = 11 \cdot 360^\circ + 140^\circ$$

A determinação principal tem medida  $140^\circ$ .

- “Dividindo”  $11\pi$  por  $2\pi$ , temos:

$$\begin{array}{r} 11\pi \overline{)2\pi} \\ \underline{\pi \quad 5} \end{array} \quad \begin{array}{l} 11\pi = 5 \cdot 2\pi + \pi \\ -11\pi = -5 \cdot 2\pi - \pi \end{array}$$

A determinação principal tem medida  $x = 2\pi - \pi = \pi$ .

**Professor:** Com essas informações, será que conseguiremos encontrar os arcos côngruos correspondentes a determinação principal dos dois itens propostos pelo **problema 3.2**? Tentem fazer em casa e amanhã corrigiremos o **problema 3.1** e **3.2**. Bom resto de dia pra todos! Um cheiro no coração!

### <sup>29</sup>**Problema 3.2: A determinação principal**

Calcule a medida da determinação principal dos arcos de medida:

- a)  $2380^\circ$
- b)  $-790^\circ$
- c)  $\frac{20\pi}{3}$
- d)  $-\frac{29\pi}{5}$

O que tais problemas têm a ver com Resolução de Problemas? Tais situações configuram-se como problemas? Onuchic e Allevato (2011, p. 81) afirmam que para elas, problema “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer”. Concordamos com Onuchic e Allevato (2011), pois acreditamos que esses problemas favorecem a formação do conceito explorado. Transformar uma medida de ângulo de graus para radianos, e, determinarmos a posição primeira de um determinado arco maior que  $360^\circ$  está inerente no processo de construção do conceito explorado.

<sup>29</sup> Atividade extraída de Smole e Diniz, 2010, p. 24.

#### 4.2.5 Descrição e análise do encontro 5 (14/09/2012) – Aulas 23 e 24

**Professor:** Boa tarde! Fizeram as atividades?

**A<sub>25</sub>:** Eu fiz professor, não sei se está certo!

**Professor:** Quem mais?

**A<sub>12</sub>:** Professor! Não consegui converter 60°45' para radiano!

**Professor:** Alguém fez essa conversão?

**A<sub>18</sub>:** Fiz assim!

**Professor:** Venha expor aqui no quadro seus resultados. (A<sub>18</sub> expõem)

$$\frac{\pi \text{rad}}{180^\circ} = \frac{x}{60^\circ 45'} \Rightarrow x = \frac{60^\circ 45' \pi}{180} \text{rad} \Rightarrow x = \frac{12^\circ 9' \pi}{36} \text{rad} \Rightarrow x = \frac{4^\circ 9' \pi}{12} \text{rad}$$

**Professor:** Alguém fez diferente? (Ninguém se pronunciou)

**Professor:** Pois bem! 1° = 60'. Dividindo 60' por 4 obtemos 15'. 45' é 3 vezes 15'. Sendo assim, 45' =  $\frac{3}{4}$  de 1°, ou seja, 45' = 0,75°. Portanto, 60°45' = 60,75°.

**Professor:** Na situação acima 60°45' tínhamos duas unidades representando um ângulo. Precisávamos vê-lo nesse ângulo representado por apenas uma unidade, por isso a importância de fazermos essa consideração.

**A<sub>18</sub>:** Toda vez que tivermos situação semelhante, temos que fazer tudo isso é?

**Professor:** É sim! Se pretenderes utilizar a proporção estabelecida no início do encontro anterior.

**A<sub>18</sub>:** Então é só trocar o 60°45' por 60,75° e fazer todo o processo de novo?

**Professor:** Substitua na situação que você colocou no quadro. (A<sub>18</sub> substituiu as novas considerações)

$$\frac{\pi \text{rad}}{180^\circ} = \frac{x}{60,75} \Rightarrow x = \frac{60,75 \pi}{180} \text{rad} \Rightarrow x = \frac{12,15 \pi}{36} \text{rad} \Rightarrow x = \frac{4,5 \pi}{12} \text{rad} \Rightarrow x = 0,375 \pi \text{rad}.$$

**Professor:** Ok! Entenderam?

**Professor:** Encontraram alguma resistência ao fazer a atividade 3.2?

**A<sub>5</sub>:** Professor! A o item c,  $\frac{20\pi}{3}$  rad, eu fiz diferente da forma que o senhor colocou no quadro, quando estava explicando. Eu fiz assim:

$$\frac{20\pi}{3} \text{rad} = \frac{20 \cdot 180^\circ}{3} = 20 \cdot 60^\circ = 1200^\circ$$

1200°  $\left\{ \begin{array}{l} 360^\circ \\ \hline \end{array} \right.$

$$\frac{-1080}{0120^{\circ}} \quad 3$$

A determinação principal tem medida  $120^{\circ}$ .

Após a exposição dos resultados de **A<sub>5</sub>**, caminhei na sala para verificar que havia feito alguma situação de forma diferente ao que havia sido mostrado no encontro anterior. Fazendo isso, parei ao ver o que **A<sub>17</sub>** havia feito.

**Professor:** Como foi que você chegou a esse resultado?

**A<sub>17</sub>:** Professor! Tenho dificuldade na divisão. Como cada volta é  $360^{\circ}$  eu ia tirando do ângulo dado esse valor. Tá certo assim também?

**Professor:** Com certeza. Mas, venha expor aqui seus resultados para os colegas?

**A<sub>17</sub>:** Não, professor!

Desta forma, expus no quadro a forma como **A<sub>17</sub>** havia realizado sua atividade.

$$2380^{\circ} - 360^{\circ} = 2020^{\circ}$$

$$2020^{\circ} - 360^{\circ} = 1660^{\circ}$$

$$1660^{\circ} - 360^{\circ} = 1300^{\circ}$$

$$1300^{\circ} - 360^{\circ} = 940^{\circ}$$

$$940^{\circ} - 360^{\circ} = 580^{\circ}$$

$$580^{\circ} - 360^{\circ} = 220^{\circ} \quad \text{A determinação principal tem medida } 220^{\circ}.$$

**Professor:** Com essa forma de resolução fica mais compreensível a divisão?

**A<sub>24</sub>, A<sub>16</sub> e A<sub>5</sub>:** Fica professor! Mas gasta muito tempo.

Os questionamentos realizados nesse encontro justificam os questionamentos do encontro anterior sobre o que seria um problema. Podem parecer triviais tais atividades, quando comparamos ao que já havíamos explorados sobre essa parte inicial do conteúdo, mas, mesmo assim, percebemos que a dificuldade ainda esteve presente. Ela faz parte do processo ensino-aprendizagem, mas muitas vezes são desconsideradas. Dessa forma, nos encantamos mais ainda com as múltiplas facetas do nosso cotidiano, pois estamos sensíveis à multicontextualidade da sala de aula que configura-se como elemento primordial no processo de fazer Matemática através da Resolução de Problemas.



Após o comentário dos alunos despedi-me deles antes da última aula acabar, justificando que haveria uma reunião com a direção da escola para os informes da Amostra Cultural, que está programada para acontecer na próxima semana.

#### **4.2.6 Descrição e análise do encontro 6 (21/09/2012) – Aulas 25 e 26**

As preocupações que movimentam a escola nas últimas semanas estão vinculadas à amostra cultural. Temos alunos que gostam dessa movimentação e alunos que não gostam. O cenário escolar apresenta-se inquieto em que comentários, discussões e entusiasmo ocorrem por parte dos alunos, e, também dos professores.

Dessa forma, iniciamos o encontro expondo para os alunos a dinâmica do nosso encontro: tínhamos planejado duas atividades para trabalharmos neste dia. Devido a toda movimentação em torno da Amostra Cultural, a direção e o corpo docente da escola decidiu que as aulas terminariam mais cedo para a ornamentação das salas.

Sendo assim, vamos à matéria!

**Professor:** Esse **problema 4.1** é bastante procedimental. Ela é dividida em tópicos.

Não entregamos esse problema aos alunos, pois preferimos expor tópico a tópico, dando a ideia de que estamos construindo-a. Avançaremos para os tópicos da sequência quando todos os alunos tiverem realizado o tópico em exploração.

#### **Problema4: Da razão entre segmentos para as coordenadas de um ponto**

**OBJETIVO:** *Fazer a transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico.*

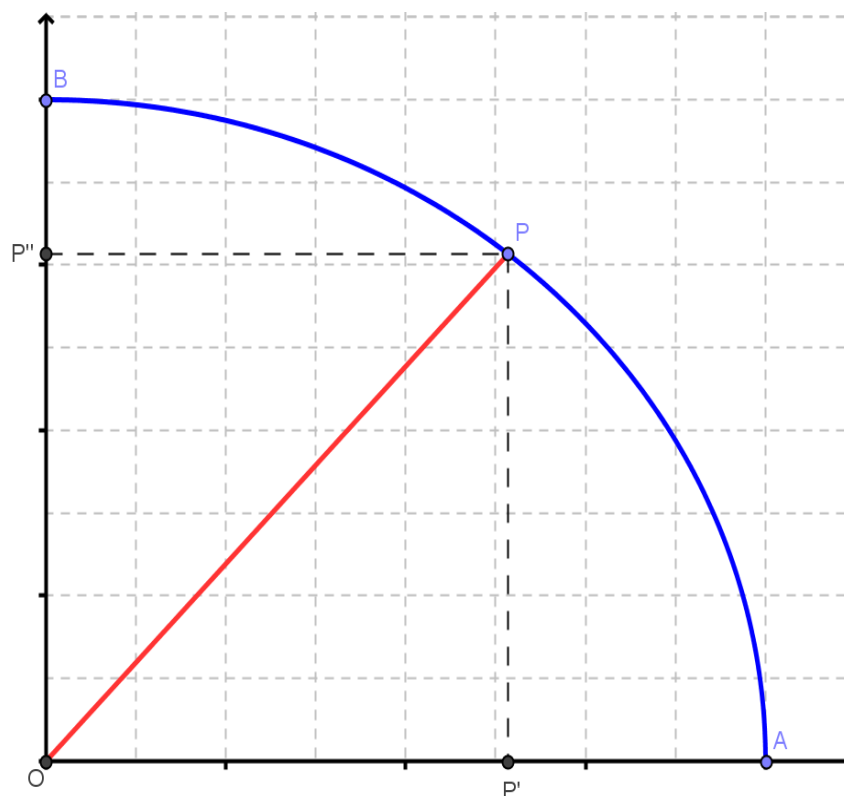
#### <sup>30</sup>**Problema 4.1: Construindo as razões trigonométricas no ciclo**

- i. Trace no papel milimetrado os eixos x e y, demarcando o ponto de intersecção dos eixos o ponto O (0,0).
- ii. Em seguida, construa um círculo de raio 8 cm, com centro em O.

---

<sup>30</sup>Atividade adaptada de Amorim, 2006, p. 35.

- iii. Reforce com o compasso, o arco AB, correspondente a um quarto da circunferência ( $90^\circ$ ).
- iv. Marque um ponto P qualquer entre o arco AOB.
- v. Marque com o transferidor o ângulo AOP.
- vi. Iremos ter como representação da situação descrita acima, a seguinte figura.



**Figura 12:** Transição das Razões trigonométricas no ciclo trigonométrico

Entregamos o papel milimetrado aos alunos, causou certa curiosidade por parte deles, pois era como se nunca tivessem usado, ou estivesse imaginando que, por conta do material, a atividade seria interessante.

**Professor:** Alguém sabe qual o nome desse papel? (a maioria dos alunos sabia)

**Professor:** Já utilizaram esse papel em alguma aula durante esse tempo de estudos?

**A<sub>5</sub> e A<sub>14</sub>:** Usamos no 9º ano com o professor Wanderlley, nas aulas de Ciências.

**Professor:** Nas aulas de Ciências?!

**A<sub>5</sub>:** No 9º ano, o professor dividiu as aulas dele em Química e Física, e nas aulas de Física tinha uns tópicos que ele mandava a gente construir os gráficos.

**Professor:** Nas aulas de Matemática, vocês já utilizaram esse material para fazer gráficos, ou outras atividades?

**A<sub>12</sub>, A<sub>5</sub> e A<sub>17</sub>:** Que eu lembre, não!

**Professor:** Pois bem! Vamos iniciar, pois o nosso tempo hoje é curto.

**Professor:** Trace no papel milimetrado os eixos x e y, demarcando o ponto de intersecção dos eixos o ponto O (0,0).

**A<sub>11</sub>:** Professor! Como assim? É pra fazer uma cruz, e no meio marca o ponto O?

**Professor:** Essa cruz é o Plano Cartesiano!

**A<sub>10</sub>:** Por que Plano Cartesiano?

**Professor:** Sendo bem breve! Como poderia explicar? Sim! Esse Plano é um tipo de representação criado no século XV – XVI por um Matemático chamado René Descartes. Por ter sido ilustrado por ele tal representação, acompanhou o sobrenome dele, ficando assim, Plano Cartesiano.

**Professor:** OK!

**A<sub>10</sub>:** Quando as pessoas descobrem ou representam pela primeira vez uma coisa, têm que colocar o nome dele é professor?

**Professor:** Geralmente é, Mas é interessante perceber que muitas descobertas são divulgadas sem mensurar pessoas de suma importância que contribuíram durante o processo. Por exemplo, o Teorema de Pitágoras, não só era ele que estava pensando/refletindo. No tempo em que ele vivia, talvez fosse o matemático de maior nome, pois, graças aos historiadores, hoje sabemos que no tempo dele tinha um grupo que se reunia constantemente para pesquisar/analisar/estudar/refletir sobre situações que lhes davam prazer em fazer. Esse grupo era chamado de escola Pitagórica.

**Professor:** Pois bem! Entendeu **A<sub>10</sub>**! (Outras conversas foram surgindo, mas preferimos continuar, após percebermos que todos já haviam feito o plano cartesiano).

**Professor:** Em seguida, construa um círculo de raio 8 cm, com centro em O.

**A<sub>3</sub>:** Professor! Como mexe com esse negócio?

Era perceptível a dificuldade da maioria dos alunos com o compasso, apenas dois alunos conseguiram manusear o instrumento sem auxílio. Solicitei aos dois alunos que me auxiliassem para mostrar a forma de usar o compasso.

Controlada a euforia, retornamos à sequência da atividade.

**Professor:** Reforce com o compasso o arco AB, correspondente a um quarto da circunferência ( $90^\circ$ ).

**Professor:** OK! (sinal de positivo através do olhar e do silêncio)

**Professor:** Próxima etapa. Marque um ponto P qualquer, de coordenadas  $P'$  e  $P''$ , entre o arco AOB e na sequência, marque com o transferidor o ângulo AOP.

**A<sub>1</sub>:** Professor! Tenho dificuldade no uso do transferidor!

**A<sub>5</sub>:** Professor! É de forma parecida como fizemos numa atividade logo no início com os triângulos retângulos?

**Professor:** Sim! Quem tem dificuldades em manusear ainda o transferidor? (uns 10 alunos se pronunciaram). Mais uma vez, solicitei a ajuda dos alunos para que pudessemos dar continuidade ao que estava proposto.

**Professor:** Como todos vocês já estão com os ângulos representados, então podemos agora explorar as ideias necessárias.

Notamos nesse encontro traços significantes da metodologia Resolução de Problemas. Além do diálogo estabelecido entre professor-aluno e aluno-aluno, característica essencial de tal metodologia. Percebemos a presença da orientação colaborativa de alguns alunos, como no caso do uso do compasso. E ainda, a forma construtiva como cada problema foi sendo desenvolvido e como os discursos inerentes em seu desenvolvimento foram conduzidos, apontaram o nosso cotidiano como, efetivamente, um espaço de construção. Esse espaço não prioriza o acabado, mas, as pequenas superações que aos poucos foram fazendo do acabado algo significativo.

Os enlaces estabelecidos neste encontro reforça uma das ideias de Resolução de Problemas exposta por Onuchic e Allevato (2011, p.82) quando afirmam que “Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam” e ainda “a formalização dos conceitos e teorias Matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos”.

Pedimos que esperassem um pouco para algumas recomendações. Entregamos uma ficha investigativa do que havíamos explorado em consonância com o que já havíamos realizado durante todas essas vinte e cinco aulas.

Sendo assim, solicitamos que tentassem fazer e que no próximo encontro retomáramos com tal investigação.

### FICHA DE INVESTIGAÇÃO REFERENTE A ATIVIDADE 4.1

Referente à construção, proposta pela Atividade 4.1, faça as seguintes investigações:

- A medida  $OP$ .
- Comparando com o que estudamos nas explorações de situações com o triângulo retângulo, o que representa a medida  $OP$ ? Lado oposto, lado adjacente ou hipotenusa?
- A medida  $OP'$ .
- O que representa a medida  $OP'$  em relação ao ângulo  $P'\hat{O}P''$ ? Lado oposto ou lado adjacente?
- A medida  $OP''$ .
- O que representa a medida  $OP''$  em relação ao ângulo  $P'\hat{O}P''$ ? Lado oposto ou lado adjacente?
- As razões seno, cosseno e tangente de  $\hat{O}$ .

ÂNGULO RAZÕES	$AOB = \hat{O} =$
<b>Seno</b>	
<b>Cosseno</b>	
<b>Tangente</b>	

#### 4.2.7 Descrição e análise do encontro 7 (11/10/2012) – Aulas 27 e 28

Por conta da movimentação em torno da Amostra Cultural tivemos que retomar as abordagens iniciais sobre a construção das razões no ciclo trigonométrico. Já presentindo que poderia ocorrer isso, preparamos a representação construída, como também, as etapas da construção e organizamos no Power Point para a apresentação.

**Professor:** Boa tarde! Quanto tempo! Quase três semanas que não nos vemos?

**A<sub>10</sub>:** Professor! É um absurdo o quanto somos prejudicados! Teve a gincana passamos quase um mês sem aula de Matemática, agora a Amostra Cultural, que parece mais um evento pra mostrar a comunidade que a escola está bem!

**A<sub>12</sub>:** Quem veio percebeu que as salas mais visitadas eram aquelas que tinham meninas dançando, para não dizer, meninas mostrando as pernas com roupas curtíssimas. E a aprendizagem onde ficou?

**A<sub>17</sub>:** Professor! Já que os colegas falaram vou falar. Na gincana mesmo, a temática era Drogas, e foi preciso a diretora da escola chamar os policiais para retirar pessoas que entraram com bebidas alcoólicas. Sem falar que tinham pessoas fumando droga.

**Professor:** Calma gente! Tudo que vocês falaram é pertinente! Mas, por exemplo, que tal olharmos o que foi positivo? Outra coisa, eu senti isso tudo que vocês falaram. Uma boa parte dos professores foram contra a forma como estava sendo estruturados tais eventos. Mas, às vezes sentimos sem força. Não temos uma representação de alunos que reclamem, cobrem seus direitos! Sabe o que parece? Que quando não tem aula ao invés de cobrar ou saber o porquê não vai haver, prefere-se cair no comodismo e dizer: é bom, graças a Deus, não vai ter aula a reivindicar...

**Professor:** O que foi bom?

**A<sub>5</sub>:** O Projeto “Luiz Gonzaga: a voz do Povo”.

**Professor:** Por que foi bom? Ao visitar o que você aprendeu?

**A<sub>20</sub>:** A professora de Português apresentou o que ela trabalhou em sala, e nós fizemos parte junto com ela.

**A<sub>5</sub>:** O que **A<sub>20</sub>** falou foi o que mais me chamou atenção, mas também, percebemos que esse Projeto tinha várias coisas interessantes. Tinha uma sala só de comidas típicas do Nordeste e a sala mostrando a publicação de Luiz Gonzaga em gráficos estatísticos, como também paródias Matemáticas.

**A<sub>16</sub>:** Tinha também uma sala com cordéis e apresentações das manifestações culturais da dança (xote, xaxado, baião, forró) influenciada pelas canções de Luiz Gonzaga.

**Professor:** Pois bem! Olha quanta coisa bacana percebida na Amostra Cultural! Vamos retomar as atividades, pois, assim como vocês falaram, estamos prejudicados com a perda de aulas e o que temos proposto para hoje é extenso.

Não há como desperceber tais influências do cotidiano da sala de aula. Expusemos isso, para mostrar que pesquisar com o cotidiano é dar ouvidos para escutar as vozes como

essas descritas acima, que insistem em querer ser ouvidas por alguém que está inserido no processo ensino-aprendizagem, e ainda mais, não apenas ser ouvida, mas, correspondidas em suas singularidades múltiplas, porque vem em nossa memória momentos de quando éramos alunos, onde tais eventos aconteciam na escola e no dia seguinte de aula os professores entravam na sala como se nada tivesse acontecido.

**Professor:** Quem fez as investigações solicitadas no último encontro?

**A<sub>8</sub>:** Algumas eu não entendi?

**A<sub>11</sub>:** Eu fiz pegando aquelas atividades do triângulo que o senhor fez com a gente, por isso, pra mim ficou fácil.

**Professor:** Como chegaram à medida OP? E qual resultado obteve?

**A<sub>2</sub>, A<sub>12</sub>, A<sub>15</sub>, A<sub>18</sub>, A<sub>23</sub>, A<sub>26</sub> e A<sub>27</sub>:** Professor! Eu fiz com a régua. Encontrei 8 cm.

**Professor:** Alguma surpresa?

**A<sub>2</sub>, A<sub>15</sub> e A<sub>27</sub>:** Não! Eu só medi.

**Professor:** Alguém fez de forma diferente?

**A<sub>12</sub>:** Eu comecei a medir com a régua, daí percebi que nem precisava porque o raio é 8 cm.

**A<sub>5</sub>:** Professor! A distância do centro, a qualquer parte da circunferência, é igual.

**Professor:** OK! Tanto quem usou a régua como quem percebeu tal condição da circunferência, chegou à medida. Comparando com o que estudamos nas explorações de situações com o triângulo retângulo, o que representa a medida OP? Lado oposto, lado adjacente ou hipotenusa? (Neste momento expusemos a imagem na lousa, através do Power Point).

**A<sub>1</sub>, A<sub>5</sub>, A<sub>8</sub> e A<sub>17</sub>:** OP é a hipotenusa.

**Professor:** Só os quatro perceberam isso, e os demais? (silêncio, mas sentimos que tinham percebido. Apenas dois afirmaram uma resposta diferente).

**A<sub>12</sub> e A<sub>20</sub>:** É a hipotenusa porque é o maior lado, não é?

**Professor:** Sim. Também, no momento anterior, chegamos à conclusão de que a hipotenusa era o lado oposto ao ângulo de  $90^\circ$  (ângulo reto).

**Professor:** Qual foi a medida de OP' que vocês encontraram?

As respostas foram diversas (4 cm; 3,2 cm; 6,4 cm; 2,4 cm; 2 cm; 2,5 cm; 3 cm)

**Professor:** Por que foram tantas respostas diferentes?

**A<sub>17</sub>:** Nem todo mundo fez igual?

**Professor:** OK! Olhem para o ângulo AOP que vocês tiraram a medida utilizando o transferidor no encontro passado! Comparem com os do colega!

**A<sub>17</sub>:** Há, professor, é porque os ângulos são diferentes.

**Professor:** A medida de OP' é lado oposto ou adjacente do triângulo AOP? (A maioria dos alunos respondeu que era lado adjacente, mas uma boa parte da turma tinha dúvidas na hora da diferenciação).

Observando a projeção da imagem que ainda estava na lousa, tentamos explicar a diferença entre lado oposto e lado adjacente. Dissemos que o lado oposto era o lado que estava de frente para o ângulo analisado, e o lado adjacente seria aquele que compunha o ângulo junto com a hipotenusa.

**Professor:** Em relação à construção da tabela, alguma dificuldade? (Os que fizeram o problema a atividade compararam com o preenchimento da tabela do **problema 2**).

**Professor:** Vocês que fizeram o problema, comparem com aquela tabela trigonométrica que entregamos para vocês e verifiquem se as respostas, referente ao ângulo obtido por vocês, aproximam-se do valor referido na tabela. (alguns alunos ainda ficaram admirados com a comparação).

**Professor:** Alguém se lembra da consideração que construímos após aquele **problema 2**? (Depois de alguns segundos de silêncio um aluno responde).

**A<sub>5</sub>:** O senhor falou que não depende do tamanho do triângulo, a razão referente ao ângulo seria a mesma.

**Professor:** É a partir dessa consideração que tentaremos observar/perceber que as razões não dependem do tamanho do raio.

#### **Problema 4.2: As razões não dependem do tamanho do raio**

Faça a construção agora, utilizando o mesmo ângulo, só que com o raio diferente de 8 cm.

- a) Obtenha as medidas OP' e OP''.
- b) Encontre o valor das razões trigonométricas do ângulo estudado.
- c) Compare os seus resultados com os obtidos pelos outros grupos, e com os encontrados na atividade anterior.
- d) A medida do raio influencia no resultado obtido das razões trigonométricas que vocês encontraram? Justifique.



**Professor:** Através dessas últimas atividades, podemos concluir que os valores das razões trigonométricas não dependem da medida do raio. Sendo assim, para minimizar nossos cálculos e padronizar uma referência, vamos considerar o raio medindo uma unidade de comprimento ( $r = 1uc$ ).

É interessante percebermos que muitos livros didáticos (a maioria), induzem os professores e, principalmente, os alunos de que o raio tem que ser uma unidade ( $r = 1uc$ ), quando, na verdade, isso é apenas uma padronização. O raio pode ter qualquer medida.

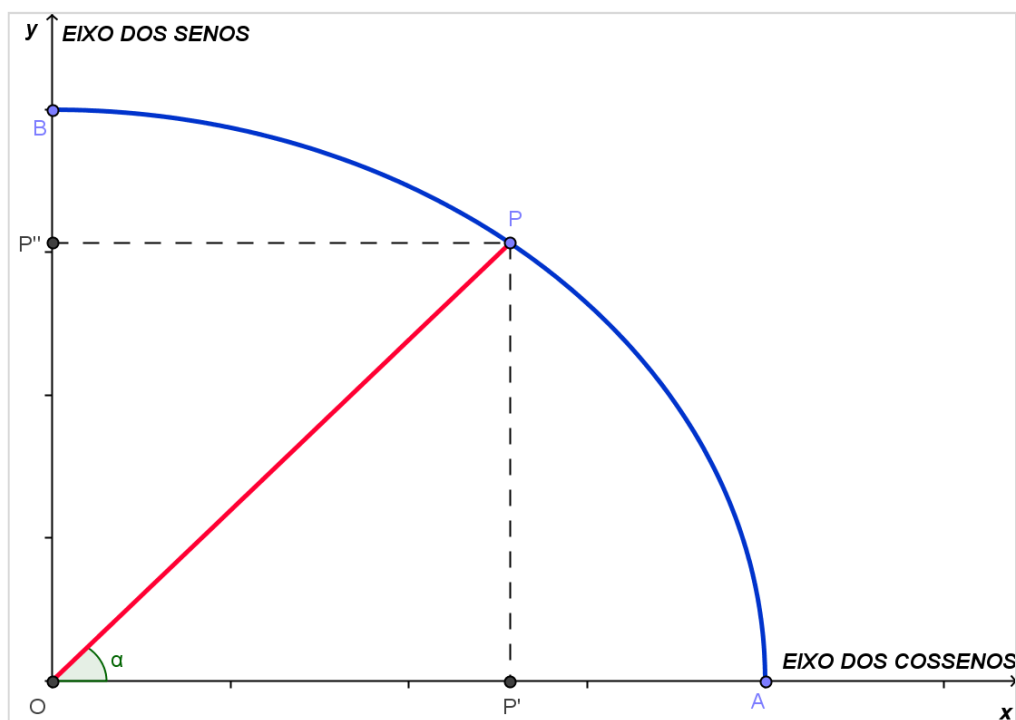
Na última parte do nosso, expusemos no quadro o seguinte problema:

**Professor:** Volte ao **problema 4.1**, considerando o mesmo ângulo, mas, o raio como sendo uma unidade de comprimento ( $r = 1uc$ ).

- a) Encontrem os valores das medidas  $OP'$  e  $OP''$ , pelo método da contagem.
- b) Qual é a relação que há entre o valor do lado oposto e o seno do ângulo estudado?
- c) Qual é a relação que há entre o valor do lado adjacente e o seno do ângulo estudado?

Após as observações constatadas pelos alunos, concluímos que para uma circunferência de raio = 1:

- ✓ O cosseno e o seno de um ângulo representam um ponto  $P(\cos x, \sin x)$ .
- ✓ O eixo das abscissas será a representação dos cossenos e, conseqüentemente, o eixo das ordenadas será a representação dos senos.
- ✓ O eixo das tangentes será representado por uma reta perpendicular ao eixo x que passa por A.
- ✓ A tangente de um ângulo qualquer estará representada pelo prolongamento do raio OP até interceptar o eixo das tangentes.



**Figura 13:** Representação do seno e do cosseno como um ponto da circunferência.

**Professor:** Bom feriado e feliz final de semana pra todos.

Os diálogos realizados proporcionaram o desenvolvimento do conteúdo, mas observamos uma centralização em chegar de imediato ao objetivo da atividade, talvez pelo fato das preocupações com o tempo (o que ainda precisávamos explorar em nossa pesquisa, tendo em vista que as imprevisibilidades do cronograma da escola eram constantes). Pesquisa com o cotidiano escolar requer um planejamento flexível, mas quando não se tem, aparenta desorganização.

#### 4.2.8 Descrição e análise do encontro 8 (18/10/2012) – Aulas 29 e 30

Exploraremos uma atividade que teremos como objetivo construir e analisar o ciclo trigonométrico. (**problema 4.3**). A metodologia utilizada nesse encontro será parecida com a do encontro 6 desse mesmo bloco.

**Professor:** Bom dia, pessoal! Como passaram esses dias? Vieram dispostos a se aventurar em mais um encontro trigonométrico?

**A<sub>12</sub>:** Professor estes encontros estão aperreando o meu juízo!

**Professor:** Pois bem! Nosso encontro de hoje tem como objetivo construir, observar e analisar o ciclo trigonométrico. Para isso, teremos primeiro que

construir nosso objeto de estudo: o ciclo trigonométrico. Iremos utilizar a mesma metodologia aplicada no **problema 4.1**. (Após esta fala, entregamos o papel milimetrado).

**Professor:** Construa uma circunferência de raio unitário no papel milimetrado e considere um sistema de eixos cartesianos ortogonais com origem coincidindo com o centro da circunferência.

**A<sub>9</sub>:** Professor! Espere aí!

**Professor:** Construíram? Podemos ir para o próximo tópico?

**Professor:** Fixem dois pontos A (1, 0) e B (0, 1), em que o ponto A representará a origem dos arcos.

**A<sub>15</sub>:** Professor! Quando cruzamos a circunferência ao meio por duas retas perpendiculares, dividimos, em quatro partes. Cada parte dessas é 90°?

**Professor:** Correto! Mas, por que essa pergunta?

**A<sub>15</sub>:** Só queria saber.

Essa informação do aluno já proporcionou uma futura retomada para explorar o deslocamento do seno, do cosseno e da tangente.

**Professor:** Agora, marquem um ponto P de coordenadas P' e P'', sobre a circunferência, formando o arco  $\widehat{AP}$ , cuja medida é x, sendo, P' a projeção do ponto P, no eixo-x, e P'' a projeção do ponto P, no eixo-y.

**A<sub>12</sub> e A<sub>20</sub>:** Pode ser em qualquer parte do círculo?

**Professor:** Pode sim! Não há nenhum problema! Mas, para facilitar o nosso auxílio vamos colocar esse ponto P no primeiro quadrante.

**A<sub>4</sub> e A<sub>7</sub>:** Professor! Por que primeiro quadrante? O que é quadrante?

**A<sub>15</sub>:** Está vendo, professor, o que eu estava perguntando era o que incomodava meus colegas aqui atrás.

**Professor:** Foi bom ter surgido essa pergunta, pois havia esquecido de comentar no início dessa atividade. Ao dividir a circunferência em quatro partes iguais, cada parte dessa divisão é chamado de quadrante.

**A<sub>4</sub>:** Qual dos quatro? É o primeiro quadrante?

**Professor:** Quando solicitei que vocês marcassem o ponto A (1,0) como sendo a origem dos arcos, na verdade, estávamos estabelecendo um marco.

**A<sub>12</sub>:** Então, professor, o primeiro quadrante pode ser o de cima ou o de baixo?

**Professor:** O sentido anti-horário, ou seja, o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio é caracterizado como o sentido da circunferência. O ano passado, quando explorávamos o plano Cartesiano nas representações gráficas das funções, não havia falado tais considerações? É o mesmo plano Cartesiano!

**A<sub>12</sub>:** Ah! Então quando **A<sub>15</sub>** falava que cada parte fica com  $90^\circ$ , o senhor disse correto. O que isso significa?

**Professor:** Que cada parte dessas fica compreendida continuamente por  $90^\circ$ , ou seja, o primeiro quadrante fica compreendido entre  $0$  e  $90^\circ$ ; o segundo entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$ ; o terceiro entre  $180^\circ$  e  $270^\circ$  e o quarto quadrante entre  $270^\circ$  e  $360^\circ$ !

**A<sub>12</sub>:** OK!

**Professor:** Mais alguma consideração a fazer? (neste instante, acreditamos que o silêncio estabelecido caracterizava que podíamos avançar).

Uma voz, que passou despercebida, mudou o curso da trama pensada por nós ao preparamos a exploração da atividade, trazendo mais compreensões e possibilitando aproximações dos diálogos estabelecidos. Notamos que os alunos estão envolvidos, por isso a mudança no curso da aula. Eles estão coparticipando e colaborando com as compreensões estabelecidas no cotidiano da sala de aula. Compreensão é entendida por nós como não redução ao conhecimento. Perkins (2007, p. 37) afirma, e concordamos com ele, que “compreensão é a capacidade de pensar e agir de maneira flexível com o que se sabe”. Tal cotidiano apresenta-se como espaços compreensivos de saberes e fazeres quando são dadas oportunidades para que tais vozes surjam.

**Professor:** Neste momento, tracem uma reta perpendicular ao eixo  $y$ , passando por  $A$ . Em seguida, marque nessa reta um ponto  $T$  originado pela intersecção da reta que passa por  $O$  e  $P$ .

**A<sub>5</sub>:** Pra que isso professor?

**Professor:** Calma! Estamos no processo de construção.

**A<sub>17</sub>:** Professor! A gente vai prolongar a reta de  $P$  até tocar nessa reta que está em pé?

**Professor:** Isso! Agora, façam de forma parecida só que em relação ao eixo  $x$ .

**A<sub>10</sub>:** Professor como assim?

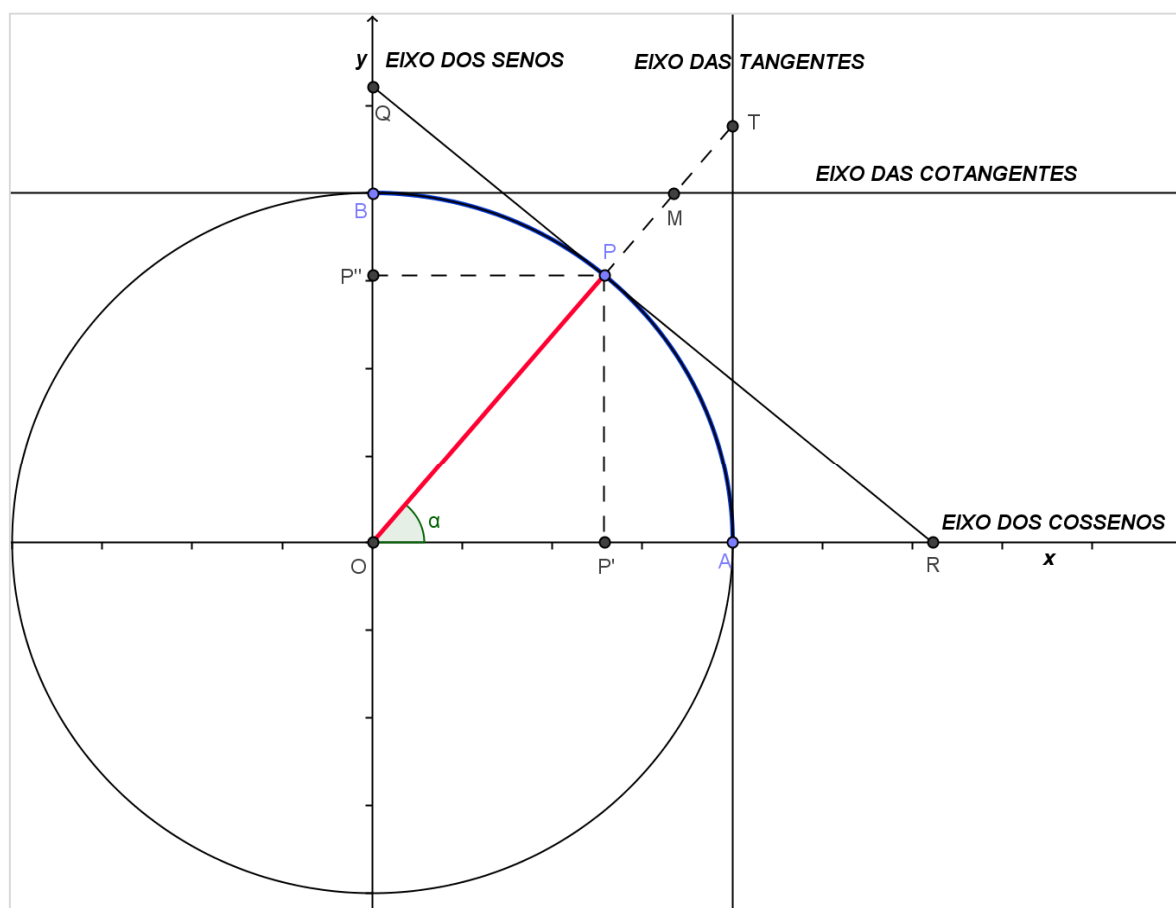
**Professor:** Vocês vão traçar uma reta perpendicular ao eixo  $x$ , passando por  $B$ . Em seguida, marque na reta paralela a  $x$ , um ponto  $M$ , originado pela intersecção da reta que passa por  $O$  e  $P$ .

**A<sub>10</sub>:** Ah!

**Professor:** Por fim, tracem uma reta tangente ao ponto  $P$ , fazendo com que o mesmo intersecte, no eixo  $y$ , em  $Q$  e, no eixo  $x$ , em  $R$ .

**A<sub>8</sub>, A<sub>10</sub>, A<sub>15</sub> e A<sub>16</sub>:** Professor! Essa parte não entendi?

Nesse momento foi necessário mostrar a imagem da representação de toda a construção. A partir da imagem foi que compreenderam a representação da reta tangente ao ponto  $P$ .



**Figura 14:** Representação das razões trigonométricas no ciclo trigonométrico.

No encontro passado, estabelecemos que o eixo- $x$  seria a representação do cosseno e que o eixo- $y$  seria a representação do seno. Completamos essa informação caracterizando para a turma que todas as razões estavam representadas nessa imagem. O ponto  $P$  era caracterizado

pelo cosseno e seno do ângulo  $x$ ; o ponto T estaria representado a tangente de  $x$ ; o ponto M a cotangente de  $x$ ; o ponto R a secante de  $x$  e o ponto Q a cossecante de  $x$ .

Após a imagem, mostramos, através do software de Geometria Dinâmica (Geogebra), uma representação em movimento, fazendo percorrer o ponto P por toda a circunferência, observando assim, a variação de cada razão trigonométrica durante todo o percurso do ponto P.

Solicitamos aos alunos que realizassem a seguinte atividade de investigação:

- a) Sabendo que a circunferência acima está dividida em quatro partes iguais (quatro quadrantes). Qual delimitação de cada quadrante?
- b) Em quais quadrantes o seno é positivo? Em quais o seno é negativo?
- c) Em quais quadrantes o cosseno é positivo? Em quais o cosseno é negativo?
- d) Em quais quadrantes a tangente é positiva? Em quais a tangente é negativo?
- e) O que acontece se  $x > 2\pi rad$ ? E se  $x < -2\pi rad$ ?

**Professor:** Analisando a situação construída acima, investiguem: (neste momento entregamos uma ficha contendo os itens a serem investigado).

Após a realização do problema, que durou aproximadamente 20 minutos, observamos os seguintes comentários:

**A<sub>7</sub>:** Professor! O do seno e o do cosseno foi bom de perceber, pois eu comparei com a representação do eixo-x e do eixo-y (pra cima de x o eixo-y é positivo, pra baixo de x, o eixo-y é negativo; pra frente de y, o eixo-x é positivo, pra trás de y o eixo-x é negativo).

**Professor:** OK! Bela ligação. (os alunos que estavam com dúvidas nos itens b e c, depois dessa exposição de **A<sub>7</sub>** parece ter clareado o entendimento).

Quando possibilitamos a participação efetiva dos alunos, intrinsecamente proporcionamos aprendizagens colaborativas, ou seja, as dúvidas ou as afirmações contribuem para os esclarecimentos dos demais que não se pronunciaram. Essa é uma característica da Resolução de Problemas, que por sua vez, é a senha de qualquer pesquisa com o cotidiano.

**A<sub>5</sub>, A<sub>10</sub> e A<sub>15</sub>:** Professor! O da tangente como podemos perceber?

**Professor:** Vou mostrar mais uma vez o ponto P “passeando” por todo o ciclo trigonométrico. Fixem o olhar nos valores da tangente de  $x$  durante o

percurso! (o professor realiza esse percurso através do Geogebra – software de Geometria dinâmica)

**Professor:** O que vocês observam no primeiro quadrante?

**A<sub>5</sub>:** É positivo!

**Professor:** OK! Observem agora! Estamos percorrendo o segundo quadrante. O que podem observar?

**A<sub>12</sub>:** É negativo!

**Professor:** Todos conferem?

**Turma:** Sim!

**Professor:** Observem agora o terceiro quadrante! O valor da tangente de  $x$  é positivo ou negativo?

**A<sub>10</sub>:** Positivo.

**Professor:** E no quarto quadrante?

**A<sub>17</sub>:** Negativo!

**Professor:** E aí, deu pra perceber direitinho?

**A<sub>5</sub>:** Com essa movimentação toda fica fácil!

Costa (2010, p. 93) afirma que “na Escola, as tecnologias podem beneficiar professores e alunos quando usadas como ferramentas para as atividades, para o desenvolvimento de projetos e para a criação de condições que permitam uma participação mais ativa do aluno na aprendizagem”. Notamos que tal uso foi significativo por ter criado condições que favorecessem a uma participação mais ativa dos alunos.

**Professor:** Sendo assim, podemos estabelecer que quando todas as razões dos ângulos que estão no primeiro quadrante são positivas, podemos estabelecer o seguinte resumo: 12, 13 e 14 – o “12” corresponde ao seno (positivo no 1º e no 2º quadrantes); o “13” corresponde a tangente (positivo no 1º e no 3º quadrantes) e o “14” corresponde ao cosseno (positivo no 1º e no 4º quadrantes).

**A<sub>8</sub>, A<sub>16</sub>e A<sub>27</sub>:** É bom pra memorizar!

**Professor:** Pois bem! Amanhã discutiremos mais coisas. Felicidades a todos!

#### 4.2.9 Descrição e análise do encontro 9 (19/10/2012) – Aulas 31 e 32

Neste encontro iremos estabelecer algumas conexões entre as relações e as razões trigonométricas. Em seguida, construiremos a tabela do seno, cosseno e tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ . Na sequência ampliamos a tabela colocando os múltiplos desses ângulos compreendidos entre  $90^\circ$  e  $360^\circ$ .

**Professor:** Boa tarde! Nosso encontro de hoje está recheado de alguns problemas. Vamos nos empenhar para cumprirmos o que está programado.

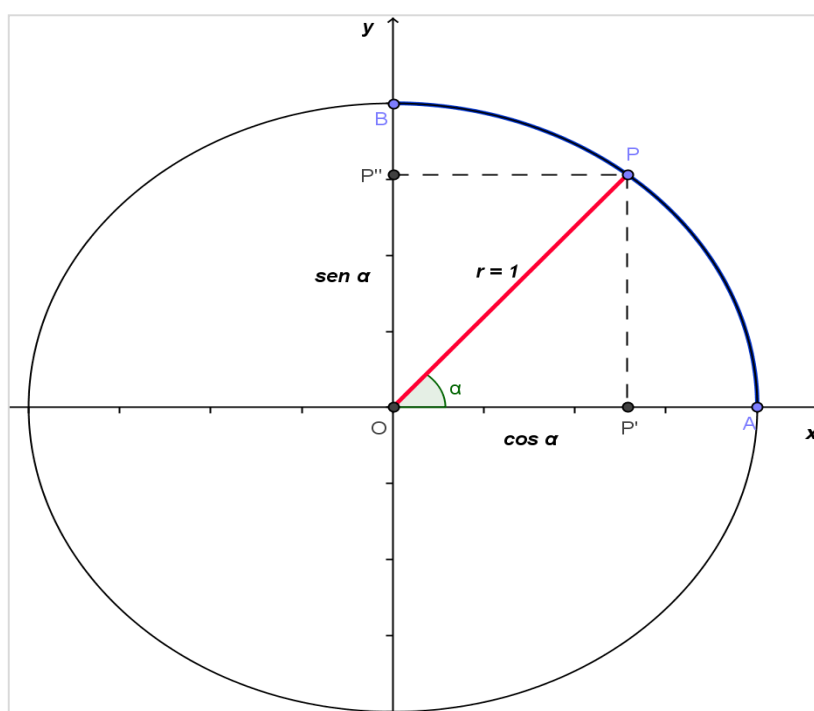
**A<sub>11</sub>:** O professor hoje veio com tudo!

**Professor:** Gente! Iremos entregar uma ficha denominada de **problema 5**. Vocês irão observar a figura contida na ficha e procurar determinar o que está sendo pedido.

#### **Problema5:** Conexões entre as relações e as razões trigonométricas

**OBJETIVO:** *Verificar as conexões existentes entre as relações trigonométricas e as razões trigonométricas*

Observe a figura abaixo. Temos uma circunferência de raio unitário e um ponto  $P(P', P'')$ .  $OP'$  que representa o cosseno do ângulo  $\alpha$  e  $P'P'' = OP''$  que corresponde ao seno do ângulo  $\alpha$ .



**Figura 15:** Circunferência para exploração das relações a partir das razões trigonométricas.



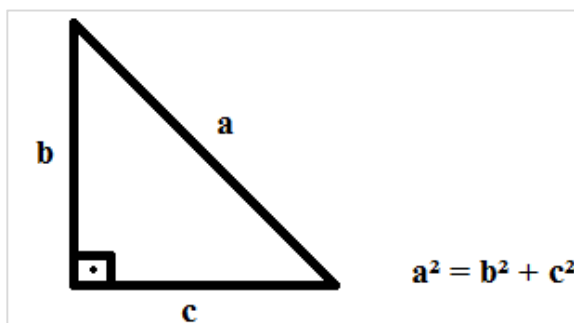
- a) Considerando o triângulo retângulo POP', determine a relação que obtemos ao aplicarmos o teorema de Pitágoras.
- b) Considerando o estudo do ângulo  $\alpha$  e aplicando as razões trigonométricas nesta situação acima, preencha a tabela abaixo.

RELAÇÕES	
$Tg\alpha = \frac{CatetoOposto}{CatetoAdjacente} =$	
$Cotg\alpha = \frac{CatetoAdjacente}{CatetoOposto} =$	
$Sec\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto Adjacente} =$	
$Cossec\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto Oposto} =$	

- c) Dividindo a relação obtida no *item a* por  $\text{sen}\alpha^2$ , que outra relação obtemos?
- d) Dividindo a relação obtida no *item a* por  $\text{cos}\alpha^2$ , que outra relação obtemos?

**A<sub>16</sub>:** Professor, qual é a relação de Pitágoras?

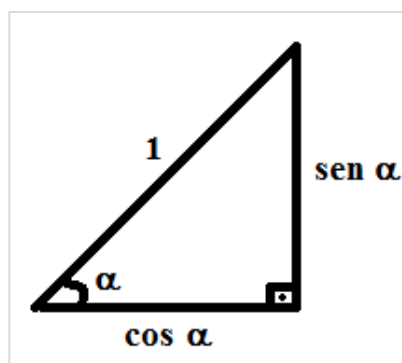
**Professor:** Pitágoras, juntamente com seus colegas de trabalho estabeleceram uma relação que hoje conhecemos como Teorema de Pitágoras. O Teorema diz o seguinte: “o quadrado feito sobre a hipotenusa é igual a soma dos quadrados feitos sobre os catetos”. Então, se eu tenho um triângulo retângulo ABC, sendo  $a$  a medida da hipotenusa e  $b$  e  $c$  sendo os catetos, encontramos a seguinte relação:  $a^2 = b^2 + c^2$ . (Foi exposto no quadro as informações citadas).



**Figura 16:** Exposição de um triângulo retângulo para representar o Teorema de Pitágoras.

**A<sub>5</sub>:** Então, professor, no triângulo da ficha que o senhor entregou, a hipotenusa é 1, o cateto oposto a  $\alpha$  é o sen de  $\alpha$  e o cateto adjacente a  $\alpha$  é o  $\cos \alpha$ .

**Professor:** É isso mesmo! A figura ficaria assim: (professor expõe no quadro)



**Figura 17:** Relação fundamental a partir do Teorema de Pitágoras.

**A<sub>12</sub>:** Substituindo, temos,  $1^2 = \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha$ .

**Professor:** Organizando a relação encontramos:  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ .

No preenchimento da tabela não houve problema. Estabelecemos outras quatro relações, são elas:

- ✓  $\text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha}$
- ✓  $\text{cotg} \alpha = \frac{\text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha}$
- ✓  $\text{sec} \alpha = \frac{1}{\text{cos} \alpha}$
- ✓  $\text{cosec} \alpha = \frac{1}{\text{sen} \alpha}$

**Professor:** Alguém conseguiu fazer o item c?

**A<sub>5</sub>:** Professor, eu fiz! Não sei se está certo. (O professor olhou e verificou as construções feitas por A<sub>5</sub>).

**Professor:** Exponha aqui para os colegas suas construções!

**A<sub>5</sub>:** OK!

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} + \frac{\text{cos}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \text{cotg}^2 \alpha = \text{cosec}^2 \alpha \Rightarrow \text{cosec}^2 \alpha = 1 + \text{cotg}^2 \alpha$$

**Professor:** Beleza! Então o item d é só substituir por  $\text{cos}^2 \alpha$ . Sendo assim, obtemos:

$$\text{sec}^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$$

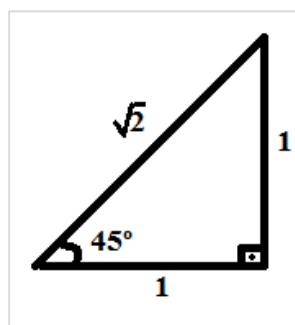
**Professor:** Ao todo são sete relações.

- ✓  $\text{sen}\alpha^2 + \text{cos}\alpha^2 = 1$
- ✓  $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha}$
- ✓  $\text{cotg}\alpha = \frac{\text{cos}\alpha}{\text{sen}\alpha}$
- ✓  $\text{sec}\alpha = \frac{1}{\text{cos}\alpha}$
- ✓  $\text{cosseca} = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$
- ✓  $\text{cosseca}^2 = 1 + \text{cotg}\alpha^2$
- ✓  $\text{seca}^2 = 1 + \text{tg}\alpha^2$

Após estabelecermos as relações trigonométricas, iremos encontrar o seno, cosseno e tangente de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ . Pretendíamos desenvolver essa construção da mesma forma como encontramos alguns resultados, mas, devido o tempo e à imprevisibilidade das aulas, preferimos expor no quadro todo o processo.

Encontrando o seno, o cosseno e tangente de  $45^\circ$ .

**Professor:** Iremos trabalhar com um triângulo retângulo isósceles, sendo as medidas dos catetos iguais a 1 u.c e a hipotenusa igual a  $\sqrt{2}$  u.c (encontrada a partir do Teorema de Pitágoras).



**Figura 18:** Representação de um triângulo retângulo isósceles.

Utilizando as razões trigonométricas, temos que:

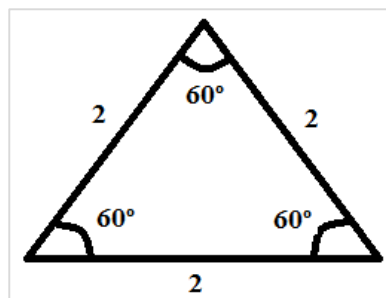
$$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

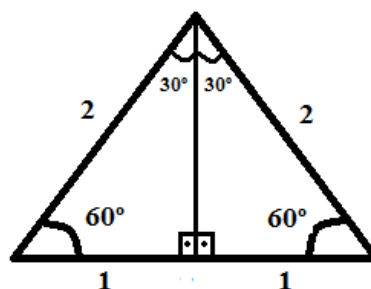
Encontrando o seno, cosseno e tangente de  $30^\circ$  e  $60^\circ$ .

**Professor:** Para encontrarmos o seno, o cosseno e a tangente de  $30^\circ$  e  $60^\circ$  será necessário um triângulo equilátero cujos lados terão 2u.c.



**Figura 19:** Representação de um triângulo equilátero de lado 2.

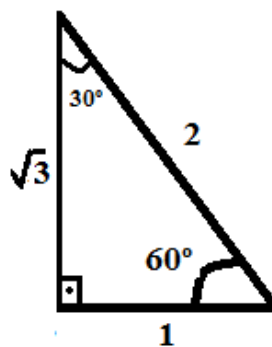
**Professor:** Na sequência iremos traçar altura do triângulo equilátero. Por ser equilátero, esse segmento é bissetriz (divide o ângulo em dois de mesma medida) e mediana (divide o lado em duas partes de mesma medida).



**Professor:** Iremos encontrar a medida da altura do triângulo aplicando o Teorema de Pitágoras, chamemos a altura desse triângulo de  $h$ . Sendo assim, teremos:

$$2^2 = h^2 + 1^2 \Rightarrow 4 = h^2 + 1 \Rightarrow h^2 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

**Professor:** Para chegarmos ao objetivo da atividade, utilizaremos um dos triângulos retângulo.



**Professor:** Primeiro encontraremos as razões trigonométricas referentes ao ângulo de  $30^\circ$ . Para isso, temos: o cateto oposto ao ângulo de  $30^\circ$  é 1, o cateto adjacente ao ângulo de  $30^\circ$  é  $\sqrt{3}$  e a hipotenusa é 2. Dessa forma:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Professor:** Agora encontraremos as razões trigonométricas referentes ao ângulo de  $60^\circ$ . Para isso, temos: o cateto oposto ao ângulo de  $60^\circ$  é  $\sqrt{3}$ , o cateto adjacente ao ângulo de  $60^\circ$  é 1. Dessa forma:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

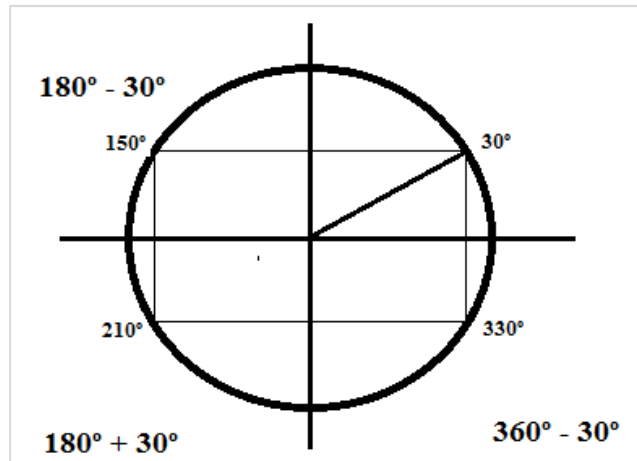
$$\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

**Professor:** Vamos organizar esses valores em uma tabela:

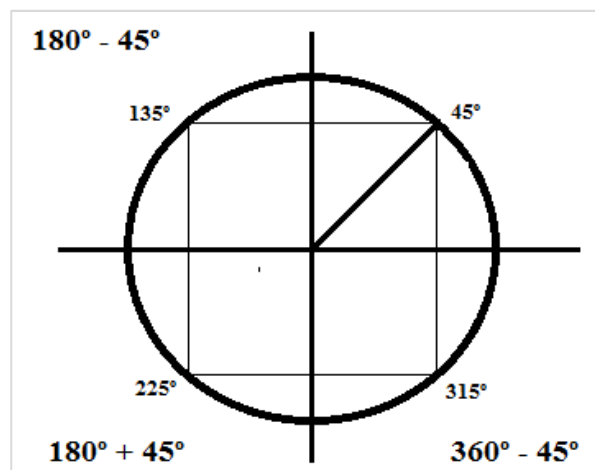
	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

**Professor:** Observem agora o ângulo de  $30^\circ$  “percorrendo” todo o ciclo trigonométrico, ou seja, o ângulo correspondente a  $30^\circ$  no segundo, no terceiro e no quarto quadrante.



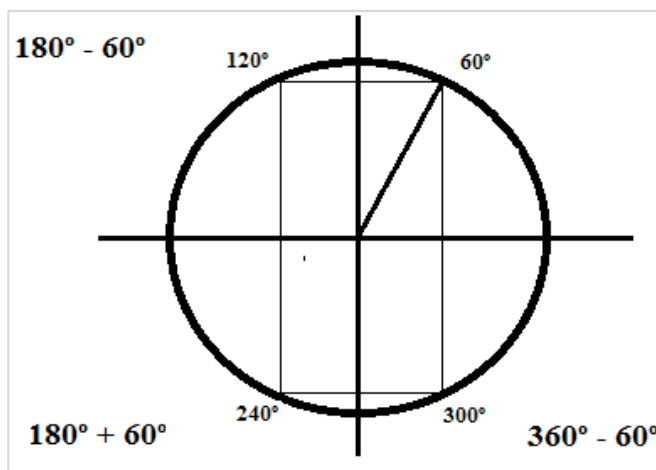
**Figura 20:** Representação do ângulo de  $30^\circ$  nos demais quadrantes.

**Professor:** Vejamos o ângulo de  $45^\circ$  “percorrendo” todo o ciclo trigonométrico!



**Figura 21:** Representação do ângulo de  $45^\circ$  nos demais quadrantes.

**Professor:** E por fim, verifiquemos o ângulo de  $60^\circ$  “percorrendo” todo o ciclo trigonométrico.



**Figura 22:** Representação do ângulo de  $60^\circ$  nos demais quadrantes.

**Professor:** Coloquemos os valores do seno, cosseno e tangente dos principais ângulos numa tabela. Vale salientar que é necessário levarmos em consideração os quadrantes onde estão localizados os ângulos, pois, as razões variam quanto à positividade ou à negatividade.

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$
<b>Sen</b>	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
<b>Cos</b>	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
<b>Tg</b>	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

**Professor:** Concluimos nosso encontro após passarmos 25 minutos do tempo previsto. Bom fim de tarde para todos e um ótimo final de semana.

A busca por cumprir o conteúdo estabelecido foi maior do que a necessidade de fazermos os alunos perceberem o processo de como vínhamos fazendo. Sentimo-nos ao final desse encontro como se houvéssemos perdido nossa referência. Reproduzimos o que achávamos ir contra um ensino dialógico-reflexivo.

Quando se pretende mudar, esta não ocorre de forma instantânea, uma ora ou outra voltamos para onde desejávamos sair. Percebemos que implicações desta pesquisa mudaram concepções antes defendidas em nossas práticas, mas, como em todo processo, foram modificadas. Estamos em permanente modificação.

Costa (2010, p. 90) afirma que:

A formação docente é um processo de aprendizagem que ocorre num *continuum*, ao longo de toda a vida. Isso não significa apenas fazer com que voltem a se comportar como aprendizes, mas induzi-los a um constante processo de elaboração e reelaboração conceitual do conteúdo, integrando esse processo ao saber da experiência docente, (...) e também, articulando-o à constituição de um juízo de valor. Uma vez que, se o professor não acredita que o conteúdo é importante para o aluno, ele resiste a abordá-lo, mesmo que tal assunto esteja incluído no currículo escolar.

Nos livros didáticos os ângulos notáveis ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ) são abordados, pouco depois das identificações das razões trigonométricas. Preferimos inverter um pouco a sequência curricular, por acreditarmos, que neste momento é mais propício devido às percepções e variações que cada ângulo apresenta. Percebemos as representações de cada ângulo referente aos outros quadrantes. Em nossa concepção, ao explorarmos situações problemas envolvendo distâncias inacessíveis, estes se apresentam os valores das razões dos ângulos envolvidos. Percebemos ainda, que a exploração dos ângulos notáveis, quando abordados após as identificações das razões trigonométricas, suas aplicações restringem apenas aos alunos terem que saber para usar em situações problemas.

#### **4.2.10 Descrição e análise do encontro 10 (25/10/2012) – Aulas 33 e 34**

Fechamos o Bloco com uma atividade conclusiva propondo contemplar todos os tópicos até então estudados/explorados. Tal atividade foi preparada pós a exploração do bloco.



**ATIVIDADE CONCLUSIVA SOBRE A TRIGONOMETRIA DO CICLO TRIGONOMÉTRICO**

- 1) (BARROSO) Indique a medida do ângulo reto em radiano.
- 2) (BARROSO) Determine, em grau, a medida do ângulo de  $\frac{2\pi}{3}$  rad.
- 3) (BARROSO) Calcule o comprimento de uma circunferência de 15 cm de diâmetro.
- 4) (BARROSO) Um atleta corria em uma pista circular de 48 m de raio. Quando faltava a quarta parte para completar a primeira volta, ele teve de interromper a corrida. Quantos metros, aproximadamente, ele percorreu?
- 5) (DANTE) A extremidade de um arco de  $960^\circ$  está no:
  - a) 4º quadrante
  - b) 3º quadrante
  - c) 2º quadrante
  - d) 1º quadrante
  - e) nda.
- 6) (DANTE) Responda:
  - a) Convertendo  $\frac{7\pi}{4}$  rad em graus, quanto obtemos?
  - b) Qual é o comprimento de um arco correspondente a um ângulo central de  $60^\circ$  contido numa circunferência de raio  $r = 1,5$  cm?
  - c) Quanto mede o menor arco não negativo cômgruo de  $2650^\circ$ ?
- 7) (BARROSO) Desenhe um ciclo trigonométrico e assinale os pontos que são extremidades dos arcos de:  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $315^\circ$ ,  $330^\circ$  e  $360^\circ$ .
- 8) (DANTE) A que quadrante pode pertencer  $\alpha$  se:
  - a)  $\text{Sen}\alpha = -\frac{1}{4}$
  - b)  $\text{Cos}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
  - c)  $\text{Cos}\alpha = \frac{2}{5}$
  - d)  $\text{Sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$
- 9) Calcule a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos quando são 7 horas.
- 10) (Unifor-CE) O arco  $\alpha$  mede  $7632^\circ$ . O arco  $\beta$ , tal que  $0 < \beta < 90^\circ$ , é cômgruo a  $\alpha$ . A medida de  $\beta$ , em graus, é:
  - a)  $30^\circ$
  - b)  $36^\circ$
  - c)  $60^\circ$
  - d)  $72^\circ$
  - e)  $51^\circ$
- 11) (DANTE) Determine  $x$  tal que:
  - a)  $0^\circ < x < 360^\circ$  e  $\cos x = \frac{1}{2}$

- b)  $0^\circ < x < 360^\circ$  e  $\sin x = \frac{1}{2}$   
 c)  $0 < x < 2\pi$  e  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**12)** (DANTE) Calcule o valor das expressões:

- a)  $\sin 45^\circ + \cos 90^\circ =$   
 b)  $\sin (30^\circ + 60^\circ) =$   
 c)  $2 \cdot \sin 60^\circ =$   
 d)  $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} =$

**13)** (UFPB) No estudo de Trigonometria, Maria e João se depararam com as seguintes desigualdades:

- I)  $\cos (-20^\circ) < \cos 35^\circ$   
 II)  $\sin 20^\circ < \sin 35^\circ$   
 III)  $\cos (-20^\circ) < \sin (-35^\circ)$

Está (ão) correta(s) apenas:

- a) I.  
 b) II.  
 c) III.  
 d) I e II.  
 e) I e III.

**14)** (DANTE) Determine os valores das demais “funções” trigonométricas de um arco  $x$  quando

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

A atividade conclusiva foi proposta com o intuito de fazermos uma sondagem dos tópicos explorados ao longo do Bloco 2, como também de avaliarmos a nossa prática. Após a verificação da atividade de cada aluno, montamos um quadro demonstrativo estabelecendo a relação dos alunos com os parâmetros estabelecidos em cada questão. Deixamos claro que nenhum aluno fez as 14 questões, isso não significa que ninguém obteve o padrão máximo.

<b>CrITÉrios Explorados</b>	<b>Questões</b>	<b>Relação dos Alunos</b>
Favorecer conexões entre a medida de arcos e a medida de ângulos Favorecer através da conversão de unidades possibilidades de estabelecer um domínio mais amplo do conceito explorado	1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10	24
Fazer a transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico	7, 8, 11, 12, 13	8

Verificar as conexões existentes entre as relações trigonométricas e as razões trigonométricas	14	2
--	----	---

**Quadro9:** Relação dos alunos em relação aos parâmetros estabelecidos na atividade conclusiva 2

Como destacamos anteriormente, não detalharemos as análises referentes a cada questão proposta nesta atividade, pois acreditamos que a essência do nosso trabalho está nas discussões apresentadas ao longo do transcorrer de cada encontro.

É perceptível que apenas a questão 4 apresenta alguma relação com o cotidiano. Ao procurarmos questões para compor esta atividade e que atendesse aos critérios estabelecidos, sentimos falta de questões que explorassem o cotidiano.

A nossa avaliação foi construída ao longo dos 10 encontros. Não pretendíamos utilizar tal avaliação como reguladora da aprendizagem e esta aconteceu ao longo do processo. Tínhamos como fundamento as informações contidas no Princípio da Avaliação, princípio este que está contido nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, publicado pelo NCTM.

Ao longo do processo, procuramos atender às seguintes condições: refletir a Matemática que os alunos deveriam saber e ser capazes de fazer; procurar estabelecer a equidade e proporcionar um processo transparente e coerente.

A avaliação deverá ser mais do que um teste no final do período de ensino, com o intuito de verificar o desempenho dos alunos perante determinadas condições; ela deverá constituir uma parte integrante do ensino, que informa e orienta os professores nas suas decisões. A avaliação não deverá ser meramente feita aos alunos; pelo contrário, ela deverá ser feita para os alunos, para os orientar e melhorar a sua aprendizagem (NCTM, 2008, p.23)

### 4.3 Retalhos das Atividades do Bloco 3: Estudando as Funções Trigonométricas

As intervenções foram realizadas no período de 26/10/2012 a 16/11/2012, em que foram realizados 06 encontros (12 aulas) para este Bloco 3. Tínhamos planejado, inicialmente 8 encontros (16 aulas), mas devido a necessidade de terminar o IV bimestre, tivemos que compactar nosso planejamento.

Descreveremos abaixo, através de uma tabela, a disposição dos encontros, com suas respectivas datas, e a relação de alunos presentes e ausentes.

	<b>Data da Realização</b>	<b>Alunos Presentes</b>	<b>Alunos Ausentes</b>
<i>Encontro 1</i>	26/10/2012	27	5
<i>Encontro 2</i>	01/11/2012	16	16
<i>Encontro 3</i>	08/11/2012	27	5
<i>Encontro 4</i>	09/11/2012	27	5
<i>Encontro 5</i>	15/11/2012	25	7
<i>Encontro 6</i>	16/11/2012	27	5

*Quadro10:* Relação da Frequência dos alunos em Relação aos Encontros do Bloco 3

Diferentemente dos Blocos anteriores, este não houve descontinuidade na sequência dos encontros planejados.

Apresentaremos os diálogos científicos, motivados pelo sentimento de estarmos estabelecendo conexões significativas no ensino-aprendizagem da Matemática através da Resolução de Problemas numa perspectiva holística da sala de aula.

#### 4.3.1 Descrição e análise do encontro 1 (26/10/2012) – Aulas 35 e 36

**Professor:** Bom dia pessoal! Como estamos?

**A<sub>13</sub>:** Depois da atividade de ontem acredito que estamos bem.

**Professor:** Iniciaremos hoje o **Bloco 3**, onde iremos estudar as Funções Trigonométricas. Para isso, sugiro a vocês que abram o livro na página 48, onde iniciaremos a caracterização das ideias a partir da leitura do texto.

**Professor:** Primeiro vamos entender o que são funções periódicas! Leiam o texto e procure entender o que caracteriza uma função periódica.

**A<sub>5</sub>:** Função periódica representa a variação de algo cíclico, ou seja, algo que se repete a cada determinado período de tempo.

**Professor:** OK! Muitos fenômenos que admitem essa periodicidade podem ser modelados por funções trigonométricas. Exploreemos a **Atividade 1**. (professor entrega uma ficha contendo a Atividade 1).

### **Problema 1: O comportamento da maré**

**OBJETIVO:** *Relacionar funções trigonométricas com fenômenos periódicos*

#### **Parte 1:**

Em certa cidade litorânea, a altura ( $h$ ) da maré (em metro), em função do tempo  $t$ , é dada pela função  $h(t) = 2 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ , na qual o tempo é medido em horas, a partir da meia noite.

a) Determine a altura da maré às 12 horas.

**Professor:** A ficha que vocês receberam está contida apenas o enunciado e a primeira parte da atividade.

**Professor:** Pronto! Juntem-se em duplas e tentem fazer e quando terminarem venha aqui no quadro e coloque do jeito que fizeram.

**A<sub>12</sub>:** No lugar de  $t$  eu coloco 12?

**Professor:** No momento não vou interferir! Quero que com os conhecimentos que vocês têm procurem resolver.

**A<sub>8</sub>:** Professor  $\frac{\pi}{6}$  é o mesmo que  $30^\circ$ ?

**Professor:** Acredito que no seu caderno deve ter algo que lhe ajude a encontrar essa resposta que você está fazendo a mim.

**A<sub>8</sub>:** É professor! Tem aqui! Então,  $\cos$  de  $\frac{\pi}{6}$  é o mesmo que  $\cos$  de  $30^\circ$ , ou seja,  $\frac{1}{2}$ .

**Professor:** Lembre-se que é  $\frac{\pi}{6}$  rad e o arco é  $\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ !

**A<sub>5</sub>:** Professor! A altura da maré é 2,5 metros. Tá certo?

**Professor:** Depois conferiremos!

**A<sub>12</sub> e A<sub>21</sub>:** Professor! Também encontrei esta resposta.

**A<sub>17</sub> e A<sub>23</sub>:** Encontramos 2 metros.

**Professor:** **A<sub>5</sub>!** Exponha aqui no quadro a forma como você fez para encontrar sua resposta.

**A<sub>5</sub>:** Eu fiz assim! Substituir no lugar  $t$  o valor 12 e fui resolvendo da seguinte forma:

$$h(12) = 2 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 12\right)$$

$$h(12) = 2 + 0,5 \cdot \cos(2\pi)$$

$$h(12) = 2 + 0,5 \cdot \cos(360^\circ)$$

$$h(12) = 2 + 0,5 \cdot 1$$

$$h(12) = 2,5 \text{ m}$$

**Professor:** Beleza!

**A<sub>17</sub> e A<sub>23</sub>:** Nós pensamos que o cosseno de 360° era zero.

**A<sub>12</sub> e A<sub>21</sub>:** Fizemos desta forma! Essa parte nos lembrou das atividades de função que agente substituía no valor de x.

**Professor:** Vamos para a segunda parte do problema!

## Parte 2:

**b)** Determine o horário em que a altura da maré atingirá 2 metros.

**A<sub>12</sub>:** Professor! Agente substitui o 2 no lugar de t também?

**Professor:** A dinâmica é mesma da primeira parte.

**A<sub>10</sub> e A<sub>13</sub>:** Encontramos 2,25.

**Professor:** 2,25 horas?

**A<sub>10</sub> e A<sub>13</sub>:** Sim!

Neste momento percebemos que as duplas não conseguiram chegar a solução, assim como chegaram à primeira parte da atividade.

**Professor:** **A<sub>10</sub>** e **A<sub>13</sub>** exponham no quadro seus achados!

**A<sub>10</sub> e A<sub>13</sub>:** Agente substituiu t por 2 e chegamos ao resultado da seguinte forma.

$$h(12) = 2 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right)$$

$$h(12) = 2 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$h(12) = 2 + 0,5 \cdot \cos(60^\circ)$$

$$h(12) = 2 + 0,5 \cdot \frac{1}{2}$$

$$h(12) = 2 + 0,25$$

$$h(12) = 2,25 \text{ horas.}$$

**Professor:** A variável t está representando quem?

**A<sub>5</sub>:** O tempo!

**Professor:** No enunciado esse 2 está indicando quem?

**A<sub>10</sub> e A<sub>13</sub>:** Está indicando 2 metros. Ah! Nós pensamos que era do mesmo jeito da primeira.

Tais escritos dos alunos são comuns, talvez por serem acostumados a sempre reproduzir fidedignamente o que o professor faz. Essas situações são alimentadas quando o conteúdo é trabalhado de forma linear, não fazendo assim, interconexões com os tópicos passados ou com os que estão por vir. Com essa prática inibimos a postura crítica necessária na formação do estudante. O aluno não refletiu sobre a postura das variáveis envolvidas na situação, contribuindo assim para o equívoco ao resolver a atividade.

Quando pensamos neste problema, estávamos preocupados em trabalhá-la de forma fragmentada por dois motivos: proporcionar a exploração da atividade de forma construtiva, onde os alunos fossem percebendo que a partir do olhar que dermos teremos uma motivação nova para explorá-lo; fazer com que os alunos não se assustassem com vários itens a serem explorados, bem como, não se desmotivassem ao ver a quantidade.

**Professor:** É de fundamental importância entender bem o que o enunciado está dizendo. Desta forma, 2 metros irá substituir  $h(t)$ , que corresponde a variável altura.

**A<sub>12</sub> e A<sub>21</sub>:** Substituímos assim! Só que não conseguimos chegar ao resultado.

**Professor:** Exponha no quadro o percurso que vocês trilharam!

**A<sub>12</sub> e A<sub>21</sub>:** Substituímos  $h(t)$  por 2 e o restante ficou:

$$2 = 2 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

$$2 - 2 = 0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

$$0 = 0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

**Professor:** Concluindo, temos:

$$0 = 0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

$$\frac{0}{0,5} = \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = 0$$

**Professor:** Em quais ângulos o cosseno é zero.

**A<sub>5</sub>:** Em  $90^\circ$  e em  $270^\circ$

**Professor:** Em grau, quanto vale  $\frac{\pi}{6}$  rad?

**A<sub>12</sub>:**  $30^\circ$ !

**Professor:** Vamos substituir primeiro 0 por cosseno de  $90^\circ$  e depois por  $270^\circ$ . Ficará assim:

$$\cos(30^\circ \cdot t) = \cos 90^\circ$$

$$30^\circ \cdot t = 90^\circ$$

$$t = \frac{90}{30}$$

$$t = 3 \text{ horas}$$

$$\cos(30^\circ \cdot t) = \cos 270^\circ$$

$$30^\circ \cdot t = 270^\circ$$

$$t = \frac{270}{30}$$

$$t = 9 \text{ horas}$$

**Professor:** Essas respostas nos dizem que a maré atingiu 2 metros em dois momentos diferentes: às 3 horas e às 9 horas.

**Professor:** Vou entregar a terceira parte para vocês tentarem fazer em casa e trazer na próxima aula respondida. A terceira parte da atividade consiste em vocês preencherem uma tabela registrando de 3 em 3 horas as alturas registradas nas marés.

### Parte 3

c) Preencha a tabela abaixo:

Tempo (h)	Altura (m)

**Professor:** Boa tarde! E bom final de semana a todos! Juízo na cabeça para não fazer besteira!

O processo de construção do conhecimento irá se tornando compreensivo quando este possibilita espaços onde favorecem o diálogo, a mediação do professor, como também, atividades que despertem curiosidades. Curiosidade, no aspecto de encontrar as respostas para confrontar com as ideias primeiras que tinham, como por exemplo, alguns alunos achavam que a maré se comportava da seguinte maneira: durante o dia começa baixa e no decorrer do dia iria aumentando ficando cheia durante a noite. E também, ao propormos a atividade, mesmo sem os alunos falarem, percebemos que os mesmos ficavam questionando-se o que teria a Matemática com o fluxo e o refluxo da maré. Desta forma, notamos, mesmo que intuitivamente, ao pedirmos para que fizessem a atividade, pois, acreditávamos que esta possibilitaria, ao tentar explicar, resolver o problema, construir a resposta, movimentos de compreensão por parte dos alunos. Perkins (2007, p.38) afirma que “o que os aprendizes fazem em respostas não apenas demonstra seu nível de compreensão atual, mas também, muito provavelmente, o expande. Ao trabalharem por meio de sua compreensão em resposta a um determinado desafio, eles passam a compreender melhor”.



### 4.3.2 Descrição e análise do encontro 2 (01/11/2012) – Aulas 37 e 38

**Professor:** Bom dia! Neste encontro iremos retomar a situação que iniciamos a exploração no encontro passado e procurarmos estabelecer relações entre funções trigonométricas e funções periódicas. Para isso, quem fez a terceira parte da atividade? (apenas dois alunos levantaram a mão dizendo que não haviam feito).

**Professor:** Alguém venha colocar aqui no quadro as respostas.

**A<sub>5</sub>:** Minha tabela ficou assim!

Tempo (h)	Altura (m)
0	$h(0) = 2 + 0,5 \cdot \cos(30 \cdot 0) = 2 + 0,5 \cdot \cos 0 = 2 + 0,5 = 2,5$
3	$h(3) = 2 + 0,5 \cdot \cos(30 \cdot 3) = 2 + 0,5 \cdot \cos 90^\circ = 2 + 0 = 2$
6	$h(6) = 2 + 0,5 \cdot \cos(30 \cdot 6) = 2 + 0,5 \cdot \cos 180^\circ = 2 + 0,5 \cdot (-1) = 1,5$
9	$h(9) = 2 + 0,5 \cdot \cos(30 \cdot 9) = 2 + 0,5 \cdot \cos 270^\circ = 2$
12	2,5
15	$h(15) = 2 + 0,5 \cdot \cos(30 \cdot 15) = 2 + 0,5 \cdot \cos 450^\circ = 2 + 0 = 2$
18	1,5
21	2
24	2,5

**Professor:** O que percebemos depois das 12 horas?

**A<sub>8</sub>:** Começa a repetir.

Percebemos o compromisso dos alunos nas atividades de casa. Defendemos a importância destas por possibilitar aos alunos o gosto por estudarem sozinhos, enfrentarem suas próprias limitações. As atividades em sala de aula, mesmo o professor tendo uma postura crítico-reflexiva em seu processo de ensino-aprendizagem, o aluno o vê como um suporte quando a dificuldade chegar.

Chamamos a atenção que a nossa atividade de casa não é vista como o treino dos itens explorados em sala de aula. Pelo contrário, as nossas atividades de casa são extensões do que estamos trabalhando em sala de aula.

**Professor:** Vamos representar os dados dessa tabela no plano cartesiano e construirmos o gráfico. (essa é a quarta parte da atividade).

**Professor:** O período é o intervalo necessário para que um fenômeno possa ocorrer. Por exemplo, qual o período de uma semana?

**A<sub>12</sub>:** Como assim? É a quantidade de dias que compõe a semana?

**Professor:** Sim! A partir de quantos dias, os dias da semana se repetem? Ou seja, hoje é quinta-feira depois de quantos dias será quinta-feira de novo?

**A<sub>12</sub>:** Sete dias. É claro!

**Professor:** Outro exemplo. Qual o período de um relógio de parede?

**A<sub>7</sub>:** 12 horas.

**Professor:** A partir de 12 horas começa outro ciclo! Sendo assim, nesta atividade que estamos realizando, qual o período dessa função?

**A<sub>7</sub>:** 12 horas.

**Professor:** É a partir do meio dia que o ciclo começa a se repetir.

**Professor:** Qual o valor máximo? E, qual o valor mínimo dessa função?

**A<sub>14</sub>, A<sub>18</sub>, A<sub>20</sub>e A<sub>23</sub>:** O valor máximo é 2,5 metros. E, o valor mínimo é 1,5 metros.

**Professor:** Agora vejamos o seguinte. Algum de vocês sabe o que significa amplitude.

**A<sub>5</sub>:** No ano passado o professor mostrou em Estatística o significado de amplitude. Era o valor máximo menos o valor mínimo dividido por dois.

**Professor:** Ok! Então, qual a amplitude dessa função?

**A<sub>5</sub>:**  $2,5 - 1,5 = 1$ . Dividindo por dois, temos: 0,5.

Neste diálogo percebemos a importância dada pelo professor na fala dos seus alunos. A noção de período, as percepções dos valores máximo e mínimo e a lembrança do que seria amplitude, potenciaram as discussões; e estas só aconteceram devido a inserção das falas dos alunos promovidas pelo professor. Desta forma, um ensino que não prioriza a fala de quem está na condição de aprender, seja o professor, o aluno ou quem demais esteja envolvido, pode implicar na falta do significado e como consequência, na não compreensão de quem está ensinando. Mesmo não acreditando que o ensino e a aprendizagem funcionam de forma separada, queremos contar a seguinte história.

Rafael tinha um cachorrinho e certo dia, precisou deixá-lo com seu amigo, Pedro. Pedro não hesitou em ficar com o cachorrinho do seu melhor amigo. Passadas algumas horas, Rafael reaparece em busca do seu cachorrinho e surpreende-se com o que Pedro lhe dissera:

Pedro: Rafael! Neste período em que fiquei com seu cachorrinho, ensinei ele a assoviar.

Rafael: Não acredito! Cachorrinho assovia para o seu amigo?! (Nada do cachorro assoviar).

Rafael: Cachorrinho assovia para o seu amigo?! (Nada do cachorro assoviar).

Rafael: Cachorrinho assovia para o seu amigo?! (Nada do cachorro assoviar).

Rafael: Pedro! Estás mentindo! Dissestes que havias ensinado meu cachorrinho a assoviar?!

Pedro: Falei que havia ensinado não que ele havia aprendido!

Esta historinha remete-nos a refletir sobre relações/comportamentos frequentes de várias salas de aulas. Principalmente, salas de aula de Matemática. Onde, muito se ensina e pouco se aprende.

Se nesta historinha, no lugar do cachorrinho, fosse um ser humano, jamais, em nossa concepção, poderíamos afirmar que ele não aprendeu. Quem ensinou aprendeu algo! Quem estava como sujeito, mesmo que não tenha exercido com exatidão os contratos estabelecidos, não podemos afirmar que não houve resquícios de aprendizagem. Pois, em tais relações o ensino e a aprendizagem eles se complementam, e já não podemos trata-los de forma separada, mas de forma conjunta, tornando assim, ensino-aprendizagem.

Após explorarmos a **problema1** solicitamos que os alunos dividissem em grupos de 4 pessoas para a realização da **problema2**.

<sup>31</sup>**Problema2: As funções seno e cosseno num experimento com canudos**

**OBJETIVO:** *Construir o gráfico da função seno e cosseno e explorar suas principais características.*

**Procedimentos**

- i.** Dobre a folha de papel quadriculado ao meio, de forma que o vinco formado seja paralelo ao maior lado da folha. Recorte no vinco, dividindo esta folha em dois pedaços. Vamos chamar um desses pedaços de folha de trabalho. Serão necessárias uma folha e meia de trabalho para cada grupo.
- ii.** Em uma metade de uma folha de trabalho, o grupo deve traçar: uma circunferência com raio unitário, tomando-se como unidade 10 lados de quadradinhos da própria folha quadriculada; eixos de um sistema cartesiano, com a origem coincidindo com o centro da circunferência construída. Com um transferidor, o grupo deve graduar a circunferência de 15 em 15 graus. Trace os eixos coordenados sobre linhas do papel quadriculado, tomando o centro da circunferência mais ou menos ao centro da folha.
- iii.** No outro pedaço, uma folha de trabalho, o grupo deverá traçar eixos coordenados  $x$  e  $y$ , de um segundo sistema cartesiano, para a construção de um gráfico. Importante: trace o eixo  $y$  bem próximo à margem esquerda da folha, logo após duas colunas de

---

<sup>31</sup> OLIVEIRA (2010)

quadrinhos da folha quadriculada. Trace o eixo  $x$ , perpendicularmente ao eixo  $y$ , mais ou menos ao meio da folha de trabalho.

- iv.** Agora, vamos colar um pedaço de barbante ao longo da extensão da circunferência. Essa etapa é para fazer a correspondência de pontos da circunferência com pontos do eixo  $x$  do gráfico. A cola bastão é mais adequada para este experimento, pois o barbante deverá ser deslocado do círculo após o próximo passo.
- v.** Com o barbante colado à circunferência, use a caneta de tinta permanente e marque todos os pontos correspondentes às graduações da circunferência (15 em 15 graus). Atenção: deixe bem evidenciado o início (marca de  $0^\circ$ ) em uma extremidade do barbante e o fim (marca de  $360^\circ$ ) na outra.
- vi.** Agora é preciso deslocar o barbante, esticá-lo ao longo do eixo  $x$ , fazendo coincidir a primeira marcação do barbante com a origem do plano cartesiano. Use fita adesiva para fixar apenas as extremidades do barbante no gráfico. Transporte cada uma das marcações do barbante para o eixo  $x$  e depois retire o barbante.
- vii.** Agora é a hora de construir o gráfico de uma função trigonométrica (função seno). Para isso, vamos usar sempre triângulos retângulos no plano do ciclo trigonométrico, cada um tendo como hipotenusa um raio da circunferência e como altura a projeção da hipotenusa sobre o eixo vertical, a partir de cada marca da circunferência.
- viii.** Para cada um dos pontos previamente marcados na circunferência, devemos marcar em cada canudo a medida da altura encontrada. Para facilitar use caneta de tinta permanente.
- ix.** Uma vez marcada essa medida, recorte o canudo no tamanho da altura do triângulo (seno do ângulo demarcado na circunferência) e cole-o no gráfico perpendicularmente ao eixo  $x$ , sobre o ponto de abscissa correspondente ao ângulo. Tome o cuidado de observar se o triângulo, no plano do ciclo trigonométrico, tem sua altura tomada acima ou abaixo das abscissas. Se a altura for tomada, no plano do ciclo trigonométrico, acima dos eixos das abscissas, o canudo recortado será colado, no sistema  $Oxy$ , acima

do eixo  $x$ . Se a altura for tomada abaixo do eixo das abscissas, o canudo será colado abaixo do eixo  $x$ .

Os procedimentos foram entregue 1 a 1, onde só avançávamos para o próximo quando todos já haviam realizado o procedimento em estudo. Desta forma, esta atividade nos proporcionou em sala um espaço de construção do conhecimento mais dinâmico, interativo e com mais sentido no processo ensino-aprendizagem. Nesta perspectiva concordamos com Rêgo e Rêgo (2009, p.42-43) quando afirmam que:

Acreditava-se, há até relativamente pouco tempo, que os alunos aprendiam de igual maneira, acumulando informações e regras. Sabemos entretanto, que cada aluno tem um modo próprio de pensar e que este varia em cada fase de sua vida, estando seu pensamento em constante processo de mudança. A aprendizagem pela compreensão é um processo pessoal e único que acontece no interior do indivíduo, embora relacionando a fatores externos, exigindo do raciocínio o que quase é deixado apenas como tarefa para a memória.

Ainda segundo Rêgo e Rêgo (2009, p.43), “por meio de experiências pessoais bem-sucedidas, o aluno desenvolve o gosto pela descoberta, a coragem para enfrentar desafios e para vencê-los, desenvolvendo conhecimentos na direção de uma ação autônoma”.

Distribuímos o material utilizado na exploração da atividade e na sequência entregamos, por meio de uma ficha, os dois primeiros procedimentos a cada grupo.

A realização do procedimento *i* foi tranquila. Todos compreenderam e realizaram com facilidade. Já o procedimento *ii* esbarrou no uso dos instrumentos: compasso e transferidor.

**A<sub>13</sub>:** Professor! Minha circunferência não fica certinha! Toda vez que vou fazendo o giro o compasso sai do apoio.

**Professor:** É interessante que em seu grupo enquanto, você vai girando outra pessoa fica pegando no ponto de apoio para não sair do lugar.

**Professor:** Após fazem a circunferência, marquem toda ela de 15 em 15 graus. Fixem o centro do transferidor no centro da circunferência que vocês fizeram e de 15 em 15 vocês vão marcando um pontinho. (todos os grupos realizaram sem nenhum problema).

**Grupo<sub>5</sub>:** Professor já fizemos!

**Professor:** Vocês vão unir o centro da circunferência a cada pontinho que vocês marcaram com o transferidor.

**Professor:** Agora, no outro pedaço, uma folha de trabalho, o grupo deverá traçar eixos coordenados  $x$  e  $y$ , de um segundo sistema cartesiano, para a construção de um gráfico. Importante: trace o eixo  $y$  bem próximo à margem

esquerda da folha, logo após duas colunas de quadradinhos da folha quadriculada. Trace o eixo x, perpendicularmente ao eixo y, mais ou menos ao meio da folha de trabalho. (não houve problema diante do procedimento iii).

**Professor:** Dando sequência, vamos para o procedimento iv, que se caracteriza em colar um pedaço de barbante ao longo da extensão da circunferência. Essa etapa é para fazer a correspondência de pontos da circunferência com pontos do eixo x do gráfico. (também não houve nenhum problema neste procedimento).

Como havíamos destacado em outras atividades práticas, os alunos apresentam dificuldades com instrumentos de simples uso e utilidade, como o compasso e o transferidor. Que bom que nossas aulas fossem mais práticas do que teóricas. Tais instrumentos proporcionam se bem direcionado, o desenvolvimento da inteligência lógico-Matemática e a inteligência espacial<sup>32</sup>.

Neste momento o professor entrega a cada grupo os procedimentos v e vi.

- ✓ Com o barbante colado à circunferência, use a caneta de tinta permanente e marque todos os pontos correspondentes às graduações da circunferência (15 em 15 graus). Atenção: deixe bem evidenciado o início (marca de 0°) em uma extremidade do barbante e o fim (marca de 360°) na outra.
- ✓ Agora é preciso deslocar o barbante, esticá-lo ao longo do eixo x, fazendo coincidir a primeira marcação do barbante com a origem do plano cartesiano. Use fita adesiva para fixar apenas as extremidades do barbante no gráfico. Transporte cada uma das marcações do barbante para o eixo x e depois retire o barbante.

**Grupo<sub>3</sub>:** Professor! Como assim: transportar cada uma das marcações do barbante para o eixo x?

**Professor:** O barbante de vocês não está todo marcado!

**Grupo<sub>3</sub>:** Está sim! Professor!

**Professor:** Pois bem! Cada marcação dessas corresponde a um ângulo da circunferência. A primeira marquinha no barbante corresponde a quantos graus?

---

<sup>32</sup> Tais inteligências são exploradas pelo pesquisador Howard Gardner. Ele afirma que todo ser humano está propício a desenvolver tais inteligências, se bem trabalhada.

**Grupo<sub>3</sub>:** 15°.

**Professor:** Pronto! No eixo x a primeira marquinha depois do zero é 15°. A segunda será 30° e assim por diante. Prestem atenção! A distância de um para o outro tem que ser a mesma. (passamos cerca de 10 minutos nestes dois procedimentos).

**Professor:** Podemos ir para a próxima etapa. (professor entrega o próximo procedimento).

- ✓ Agora é a hora de construir o gráfico de uma função trigonométrica (função seno). Para isso, vamos usar sempre triângulos retângulos no plano do ciclo trigonométrico, cada um tendo como hipotenusa um raio da circunferência e como altura a projeção da hipotenusa sobre o eixo vertical, a partir de cada marca da circunferência.

**Professor:** Entenderam? (após uns dois minutos, percebemos que tal procedimento não ficou bem entendido, então tentamos reconstruir o texto, explicando de forma diferente).

**Professor:** Bem! Toda a circunferência de vocês está marcada. Não está?

**Grupo<sub>1,2,3,4,5</sub>:** Está professor!

**Professor:** Para tirarmos o valor do seno referente a cada ângulo é preciso que vocês coloquem um canudo paralelo ao eixo y e a distância que for, por exemplo, do ângulo de 15° para o eixo x vocês marcam e em seguida cortam.

**Grupo<sub>1</sub>:** Tem que fazer pra todos

**Professor:** Sim! Para cada ângulo.

Após uns cinco minutos que os alunos estavam envolvidos neste procedimento a aula acaba. (recolhemos o material utilizado e despedimo-nos da turma).

**Professor:** No próximo encontro continuaremos! Felicidades a todos!

A movimentação em sala de aula com atividades desta natureza é intensa, seja a movimentação física, seja da movimentação cognitiva. Expressões como “eu não sei!”, “é muita coisa” e “faz pra mim professor” são quase como obrigatórias. Estas estão acompanhadas do interesse em contribuir com a construção.

Na realidade, apenas o reconhecimento de nossa impotência educativa permite-nos encontrar um verdadeiro poder pedagógico: o de autorizar o outro a assumir seu próprio lugar e, com isso, a agir sobre os dispositivos e os métodos; o de lhe propor saberes a serem apropriados, conhecimentos a serem dominados e pervertidos, que talvez lhe permitam, e quando ele decidir, fazer-se si mesmo (MEIRIEU (2002) apud MEIRIEU (2005, p.9))

### 4.3.3 Descrição e análise do encontro 3 (08/11/2012) – Aulas 39 e 40

**Professor:** Boa tarde! Alguém lembra o que fazíamos no nosso último encontro?

**A<sub>5</sub>:** Professor! Fazíamos uma atividade cheia de procedimentos! Paramos no procedimento vii.

**Professor:** Vamos dar continuidade! (professor entrega os materiais necessários para a execução da atividade e os alunos retomam a atividade).

**Grupo<sub>2e4</sub>:** Professor esquecemos como faz?

**Professor:** Pra todo mundo! Vou explicar do mesmo modo como havia explicado no último encontro. Vocês vão colocar o canudo paralelo ao eixo y e marcar a distância entre cada ângulo ao eixo x, após fazer a marcação vocês cortam.

**Professor:** Como os procedimentos viii e ix são consequências do que vocês estão fazendo agora, acho melhor entregar para vocês tais procedimentos.

- ✓ Para cada um dos pontos previamente marcados na circunferência, devemos marcar em cada canudo a medida da altura encontrada. Para facilitar use caneta de tinta permanente.
- ✓ Uma vez marcada essa medida, recorte o canudo no tamanho da altura do triângulo (seno do ângulo demarcado na circunferência) e cole-o no gráfico perpendicularmente ao eixo x, sobre o ponto de abscissa correspondente ao ângulo. Tome o cuidado de observar se o triângulo, no plano do ciclo trigonométrico, tem sua altura tomada acima ou abaixo das abscissas. Se a altura for tomada, no plano do ciclo trigonométrico, acima dos eixos das abscissas, o canudo recortado será colado, no sistema Oxy, acima do eixo x. Se a altura for tomada abaixo do eixo das abscissas, o canudo será colado abaixo do eixo x.

Os alunos passaram toda a primeira aula, envolvidos nesta atividade. Após a construção dos gráficos, entregamos uma ficha investigativa/avaliativa do gráfico da função seno.



### ALGUNS QUESTIONAMENTOS APÓS A CONSTRUÇÃO DOS GRÁFICOS

- 1) Como poderia ser construído o seno e o cosseno para os ângulos de  $390^\circ$ ?
- 2) Qual é o período da função seno? Ou seja, a partir de quantos graus o gráfico começa a se repetir?
- 3) Calcule a razão entre a altura e a hipotenusa (raio da circunferência) de um triângulo, construído com ângulos de  $30^\circ$  (isto é, com altura a partir da marca de  $30^\circ$  no círculo). Este número é o seno de  $30^\circ$ ?
- 4) Calcule as razões entre a altura e a hipotenusa, dos triângulos construídos com os ângulos de  $150^\circ$ ,  $330^\circ$  e  $570^\circ$ .
- 5) Calcule as razões entre a altura e a hipotenusa, dos triângulos construídos com os ângulos de  $45^\circ$ ,  $135^\circ$  e  $225^\circ$ .
- 6) Escreva um parágrafo para explicar aos seus colegas de classe por que o seno de  $30^\circ$  equivale ao seno de  $150^\circ$ .
- 7) Classifique a função do gráfico obtido com relação à monotonicidade (crescente ou decrescente) em cada um dos quadrantes:

Quadrante	Função Seno
1º	
2º	
3º	
4º	

- 8) Qual o conjunto imagem da função?
- 9) Descreva os pontos de mínimos e máximos encontrados, e os valores máximos e mínimos correspondentes.
- 10) Para o intervalo estudado  $[0, 360^\circ]$ , resolva a equação trigonométrica  $\text{sen}x = \frac{1}{2}$ .

Deste problema, destacamos que a construção da função seno por meio de canudos proporcionou compreensões significativas. Tais percepções foram notadas durante a exploração da atividade proposta por alguns questionamentos investigativos sobre a construção do gráfico da função seno. Nestes questionamentos percebemos revisitações de arcos côngruos, de periodicidade, das razões trigonométricas, da monotonicidade da função, como também, exploração da imagem da função seno e entendimento de equações trigonométricas.

Ensinar não significa apenas pôr em prática um conjunto de competências separadamente: escolher um exercício e fazer com que reine a ordem, explicar um texto e corrigir trabalhos... Significa tudo isso, sem dúvida, mas com “alguma coisa mais”, “alguma coisa” que, de resto, os alunos reconhecem suficientemente bem, “alguma coisa” que não é redutível ao carisma individual e, menos ainda, a uma capacidade relacional. “Alguma coisa” que, ao contrário, remete a uma “força interior”, uma “força” que expressa uma coerência e testemunha um projeto. Uma força da qual emana o sentimento de que o homem e a mulher que ensinam aqui estão no lugar do certo. Seu ofício tem sentido para eles (MEIRIEU, 2005, p. 18).

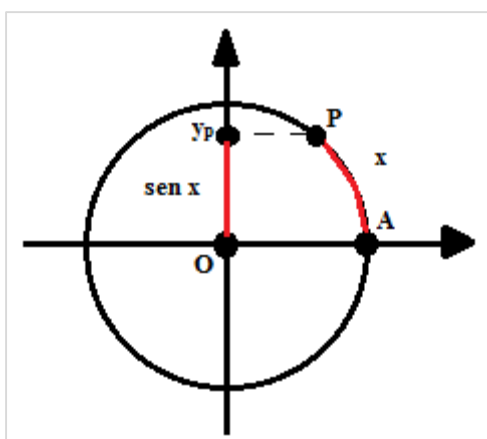
#### 4.3.4 Descrição e análise do encontro 4 (09/11/2012) – Aulas 41 e 42

**Professor:** Boa tarde! Vamos explorar a função seno e cosseno procurando destacar as características principais.

Conversamos com os alunos para que este encontro se estendesse por mais uma aula, tendo em vista, que os alunos não tinham as últimas aulas. Eles aceitaram normalmente pois, sentiam-se prejudicados por tantos dias sem aulas.

**Professor:** Para iniciar, façam a leitura da página 55 e destaquem o que lhes chamou mais atenção. (após darmos um tempo expomos no quadro o que para nós ajudaria na percepção das características da função seno).

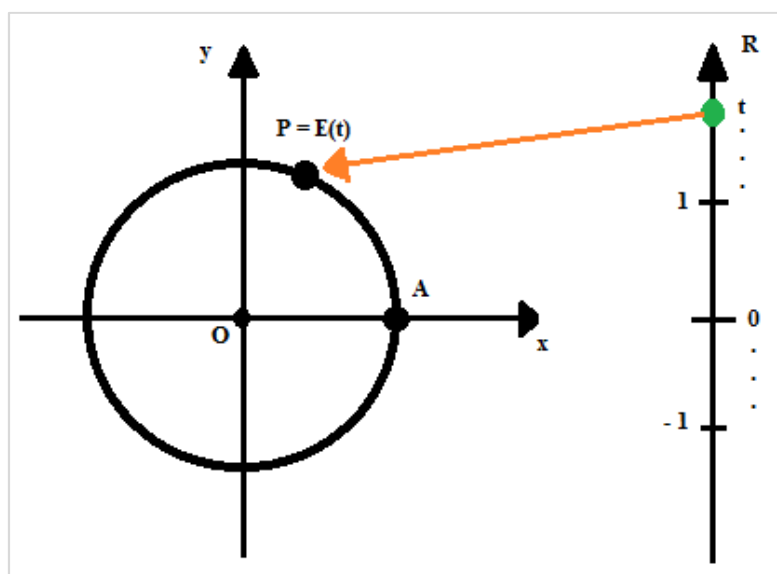
**Professor:** Em um dos encontros passados, dissemos que o seno de um ângulo é representado pela ordenada de um ponto.



**Figura 23:** Representação do seno no ciclo trigonométrico.

**Professor:** Um matemático chamado Euler estabeleceu uma relação entre os números reais e uma circunferência, essa relação ficou conhecida como

função de Euler. Nesta função cada número real está associado a um ponto  $P$  localizado na circunferência.



**Figura 24:** Representação da função de Euler.

Segundo BARROSO (2010): “Na prática, a função de Euler consiste em “enrolar” a reta  $R$  sobre a circunferência  $\Omega$  de modo que o zero da reta coincida com o ponto  $A(1, 0)$ , e que o sentido da reta enrolada seja o sentido anti-horário”.

**Professor:** Após vermos a representação gráfica da função seno, expomos no quadro as principais características da função seno.

- i. O domínio e o contradomínio da função seno são iguais ao conjunto dos números reais ( $R$ );
- ii. Chamamos seu gráfico de senóide;
- iii. É limitada, pois seus valores estão compreendidas no intervalo  $[-1, 1]$ , ou seja, seu conjunto imagem é  $Im = [-1, 1]$ ;
- iv. Considerando a primeira volta no ciclo trigonométrico, a função seno é crescente nos intervalos  $[0, 90^\circ]$  e  $[270^\circ, 360^\circ]$ ;
- v. Considerando a primeira volta no ciclo trigonométrico, a função seno é decrescente nos intervalos  $[90^\circ, 180^\circ]$  e  $[180^\circ, 270^\circ]$ ;
- vi. A função seno é positiva para  $x$  nos intervalos  $]0, 180^\circ[$ ,  $]360^\circ, 540^\circ[$ , etc;
- vii. A função seno é negativa para  $x$  nos intervalos  $]180^\circ, 360^\circ[$ ,  $]540^\circ, 720^\circ[$ , etc.

**Professor:** Solicitamos a **Atividade 3**. (professor entregou uma ficha contendo os itens referente à Atividade 3 e deu cerca de 30 minutos para a realização da atividade).

Meirieu (2005, p. 183) afirma que “a vida na sala refere-se sempre às aprendizagens e estas são preparadas e organizadas pelo professor”. Embora percebamos traços de uma aula estritamente expositiva, notamos que os alunos sentiram-se envolvidos durante a explicação. Talvez seja pelo fato das relações interativas entre a correspondência do percurso de um determinado ponto na circunferência com a reta numérica.

### **Problema 3: Explorando a Função Seno**

**OBJETIVO:** *Explorar a função seno percebendo e aplicando suas principais características*

1) Determine o sinal de:

a)  $\text{sen} \frac{16\pi}{3}$

b)  $\text{sen} \left(-\frac{16\pi}{3}\right)$

c)  $\text{sen} \frac{25\pi}{24}$

d)  $\text{sen} \left(-\frac{25\pi}{24}\right)$

2) Calcule:

a)  $\text{sen} 3465^\circ$

b)  $\text{sen} \frac{13\pi}{4}$

c)  $\text{sen} (-4230^\circ)$

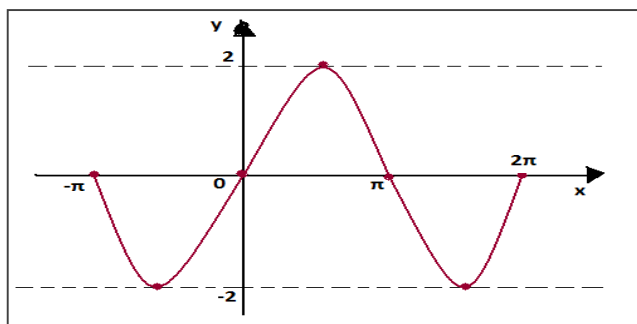
d)  $\text{sen} \left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

3) Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com o tempo. Considere que, em determinada região, onde leões são predadores e zebras são as presas, a população de presas tenha variado de acordo com a função dada por  $Z(t) = 850 + 400 \cdot \text{sen} \frac{\pi t}{4}$ , sendo o tempo  $t$  medido, em anos, a partir de janeiro de 2012 ( $t = 0$ ). Pergunta-se:

a) Qual era a população de zebras em janeiro de 2012?

- b) De acordo com a função dada, qual foi a população máxima de zebras atingida nessa região?
- c) Determine a primeira vez em que a população de zebras foi máxima.

4) Observe a figura abaixo:



Ela apresenta um trecho da função  $f(x) = 2 \text{ sen}x$ . Responda as seguintes perguntas:

- Qual é o período da função?
- Qual é a amplitude da função?
- Para quais valores de  $x$   $f(x)$  é positivo?
- Qual o domínio dessa função?
- Qual o conjunto imagem dessa função?

Após entregarmos esta atividade, combinamos 30 minutos para a exploração, antes de fazermos intermediações. A atividade foi realizada em duplas, pois, acreditamos que as parcerias colaborativas proporcionam aprendizagens significativas se estas forem assumidas por ambos.

**Professor:** Vamos fazer a correção!

**A<sub>10</sub> e A<sub>14</sub>:** Encontramos mais dificuldades nos itens 3 e 4. Deu para fazer!

**A<sub>5</sub> e A<sub>21</sub>:** Encontramos dificuldade no item 3!

**Professor:** Vamos fazer a correção! Algum problema encontrado nos itens 1 e 2? (ninguém da turma se manifestou).

**Professor:** Pois bem! Vamos para o item 3. Entenderam o enunciado da situação?

**A<sub>7</sub> e A<sub>15</sub>:** Entendemos professor! Só que não ficou claro o item c!

**Professor:** Alguém quer mostrar como fez o item a?

**A<sub>12</sub>:** Eu faço! (aluna se dirige ao quadro e expõe a seguinte solução para o item a).

$$Z(t) = 850 + 400.\text{sen} \frac{\pi t}{4}$$

$$Z(0) = 850 + 400.\text{sen} \frac{\pi.0}{4}$$

$$Z(0) = 850 + 400.\text{sen} 0$$

$$Z(0) = 850 + 0$$

$$Z(0) = 850 \text{ zebras}$$

**Professor:** OK! O item b, alguém conseguiu?

**A<sub>5</sub>:** O maior valor do seno é quando o seno do ângulo da 1. O seno da 1 quando o ângulo for 90°. Então, eu fiz assim: (aluno vai ao quadro e expõe sua resposta).

$$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Pra dar 90° é duas vezes 45°. Substitui t por 2 e ficou assim:

$$Z(2) = 850 + 400.\text{sen} \frac{\pi.2}{4}$$

$$Z(2) = 850 + 400.\text{sen} \frac{\pi}{2}$$

$$Z(2) = 850 + 400.1$$

$$Z(2) = 850 + 400$$

$$Z(2) = 1250 \text{ zebras}$$

**A<sub>5</sub>:** Essa resposta já responde o item c, pois, 90° é a primeira vez que o seno é máximo. Então dois anos depois a população de zebra será máxima pela primeira vez.

**Professor:** Beleza! Todos entenderam o que **A<sub>5</sub>** fez?

**A<sub>12</sub>:** Ficou claro professor!

**Professor:** No item 4 temos que fazer uma boa leitura gráfica. Observando o gráfico e lembrando-se da situação 1, qual o período da função?

**A<sub>11</sub> e A<sub>13</sub>:** O período é  $2\pi$ !

**Professor:** E a amplitude?

**A<sub>18</sub> e A<sub>22</sub>:** É o maior menos o menor dividido por dois. Ficou a amplitude igual a dois.

**Professor:** Para quais valores a função é positiva?

**A<sub>5</sub>:** É a parte do gráfico que está acima de x! Vai de 0 a  $\pi$ .

**Professor:** Finalizando, qual o domínio e a imagem?

**A<sub>12</sub> e A<sub>21</sub>:** Pelas características que o senhor colocou no quadro, um dos itens era que a função seno era limitada. Nós entendemos assim: é o maior e o menor. Vai de  $-2$  a  $2$  nos números reais.

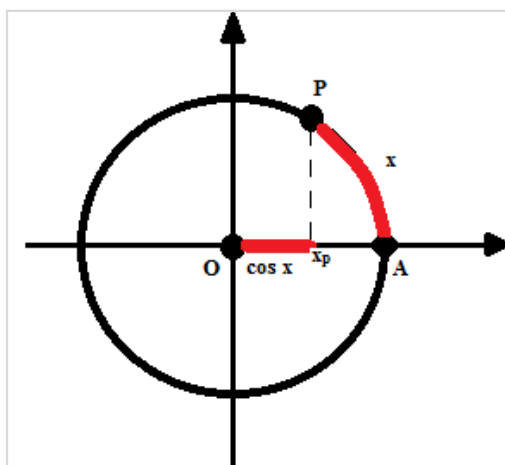
**Professor:** OK!

A comunicação é parte importante da Matemática. A partilha das formas como procuraram resolver as situações impulsionaram a compreensão da atividade explorada, como também, da exploração da função seno. Segundo o NCTM (2008, p. 66) a comunicação “é uma forma de partilhar ideias e de classificar a compreensão Matemática. Através da comunicação as ideias tornam-se objetos de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correção”.

O processo de comunicação também contribui para a construção de significado e para a consolidação das ideias e, ainda, para a sua divulgação. Quando os alunos são desafiados a pensar e raciocinar sobre a Matemática, e a comunicar as ideias daí resultantes oralmente ou por escrito, aprendam a ser claros e convidados. Ouvir as explicações de outros permite que os alunos desenvolvam a sua própria compreensão Matemática. As conversas, nas quais as ideias Matemáticas são exploradas a partir de múltiplas perspectivas, ajudam os participantes a aprimorar o seu pensamento e a estabelecer conexões (NCTM, 2008, p. 66).

Acabado a correção do **problema 3**, situamos a função cosseno e suas características principais, onde utilizamos a mesma dinâmica do procedimento utilizado com a função seno.

**Professor:** Em encontros passados percebemos que o cosseno de um ângulo seria a abscissa de um ponto. (expono no quadro a seguinte representação).



**Figura 25:** Representação do cosseno no ciclo trigonométrico.

**Professor:** Após vermos a representação gráfica da função cosseno, expono no quadro as principais características da função cosseno.

- i. O domínio e o contradomínio da função cosseno são iguais ao conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ );
- ii. Chamamos seu gráfico de cossenóide;

- iii. É limitada, pois seus valores estão compreendidas no intervalo  $[-1, 1]$ , ou seja, seu conjunto imagem é  $\text{Im} = [-1, 1]$ ;
- iv. Considerando a primeira volta no ciclo trigonométrico, a função seno é crescente nos intervalos  $[180^\circ, 360^\circ]$ ;
- v. Considerando a primeira volta no ciclo trigonométrico, a função seno é decrescente nos intervalos  $[0^\circ, 180^\circ]$ ;
- vi. A função seno é positiva para  $x$  nos intervalos  $]0, 90^\circ[, ]270^\circ, 360^\circ[, \text{ etc}$ ;
- vii. A função seno é negativa para  $x$  nos intervalos  $]90^\circ, 270^\circ[, \text{ etc}$ .

**Professor:** Chegando ao fim do nosso encontro solicitamos a **Atividade 4** para ser realizada em casa. (professor entregou uma ficha contendo os itens referente à Atividade 4).

#### **Problema 4: Explorando a Função Cosseno**

**OBJETIVO:** *Explorar a função cosseno percebendo e aplicando suas principais características*

1) Anote o sinal de:

- a)  $\cos \frac{12\pi}{5}$
- b)  $\cos 560^\circ$
- c)  $\cos \frac{32\pi}{15}$
- d)  $\cos (-650^\circ)$

2) Calcule:

- a)  $\cos 1485^\circ$
- b)  $\cos (-6000^\circ)$
- c)  $\cos \left(-\frac{19\pi}{4}\right)$

3) Calcule o valor da expressão  $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \dots + \cos 78x + \cos 80x$  para  $x = \frac{\pi}{4}$ .

4) (Vunesp) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que ele era periódico e podia ser aproximado pela expressão  $P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos(60^\circ t +$



$225^\circ$ ), em que  $t$  é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação ( $t = 0$ ) e  $P(t)$  é a profundidade da água (em metros) no instante  $t$ .

- Resolva a equação  $\cos(60^\circ t + 225^\circ) = 1$ , para  $t > 0$ .
- Determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta.

**Professor:** Bom fim de tarde! Um cheiro no coração de vocês e até amanhã com as situações respondidas.

#### 4.3.5 Descrição e análise do encontro 5 (15/11/2012) – Aulas 33 e 44

**Professor:** Boa tarde! Gente! Todas essas atividades que estamos realizando fazem parte do processo avaliativo de vocês. Falo isto, porque ontem percebia que alguns de vocês estavam preocupados porque estava chegando o final do bimestre e ainda não se tinha feito nenhuma prova.

**Professor:** Hoje vamos corrigir a atividade 3 e percebemos o comportamento da função tangente, bem como, explorarmos algumas características. Quem fez as atividades? (oito alunos levantaram a mão dizendo que não haviam feito). Várias foram as justificativas!

**A<sub>7</sub>:** Tive que arrumar a casa! Dia de sexta-feira é dia de faxina!

**A<sub>5</sub> e A<sub>13</sub>:** Fui pra Ceasa e chegando em casa só deu tempo para almoçar!

**A<sub>17</sub> e A<sub>19</sub>:** Não fiz porque não deu tempo!

**Professor:** Algum problema encontrado nos itens dois e três? (os que fizeram alegaram não terem tido dificuldade nesses dois itens).

**A<sub>14</sub>:** É parecido com os dois primeiros itens da atividade sobre a função seno?

**Professor:** Sim! Alguém fez o item 3? (dois alunos levantaram a mão).

**A<sub>12</sub>:** Professor! Não consegui fazer! É muito grande! Até 80!

**Professor:** Observem! (professor vai ao quadro e constroem a resolução junto com os alunos).

$$\frac{\pi}{4} = 45^\circ. \text{ Substituindo, temos:}$$

$$\begin{aligned} &\cos 2.45^\circ + \cos 4.45^\circ + \cos 6.45^\circ + \dots + \cos 78.45^\circ + \cos 80.45^\circ \\ &\cos 90^\circ + \cos 180^\circ + \cos 270^\circ + \cos 360^\circ + \dots + \cos 3510^\circ + \cos \\ &3600^\circ \end{aligned}$$

$3600 : 360 = 10$  voltas. Desta forma, esta soma (1 volta) está se repetindo dez vezes. Então:

$$[1 + 0 + (-1) + 0] \cdot 10 = 0 \cdot 10 = 0$$

Logo,  $\cos 2.45^\circ + \cos 4.45^\circ + \cos 6.45^\circ + \dots + \cos 78.45^\circ + \cos 80.45^\circ = 0$ .

**A<sub>12</sub>:** Eu estava fazendo todos!

**Professor:** Em situações como essa é interessante percebermos se existe alguma regularidade para que simplifique nossos cálculos. Voltando! E o item 4, quem fez? (três alunos levantaram a mão).

**Professor:** Um de vocês exponha os resultados aqui no quadro (nenhum quis vir expor as respostas no quadro).

**Professor:** Vamos lá! O item a pedi-nos para que resolvamos a equação  $\cos(60^\circ t + 225^\circ) = 1$ . Sendo assim:

$$\cos(60^\circ t + 225^\circ) = 1$$

Para que o cosseno seja 1 é necessário que os ângulos sejam: 0 ou 360°. Desta forma, teremos:

$$\cos(60^\circ t + 225^\circ) = \cos 0 \qquad \cos(60^\circ t + 225^\circ) = \cos 360^\circ$$

$$60^\circ t + 225^\circ = 0 \qquad 60^\circ t + 225^\circ = 360^\circ$$

$$60^\circ t = -225^\circ \qquad 60^\circ t = 360^\circ - 225^\circ$$

$$t = \frac{-225}{60} \qquad 60^\circ t = 135^\circ$$

$$t = -3,75 \text{ horas.} \qquad t = \frac{135}{60}$$

Não satisfaz!  $t = 2,25$  horas ou 2 horas e 15 minutos.

**Professor:** Desta forma, o item b também já está resolvido. Quantas horas depois ocorreu a primeira maré alta?

**A<sub>5</sub>:** Duas horas e 15 minutos depois.

Após a correção da **problema 4** solicitamos que os alunos construíssem o gráfico da função cosseno da mesma forma como fizeram na construção da função seno.

**A<sub>6</sub>:** Professor como assim?

**Professor:** Vocês agora farão o seguinte! Vocês farão o mesmo plano cartesiano colocando todos os ângulos, assim como fizeram para representar a função seno. Depois, vocês irão colocar o canudo agora paralelo ao eixo x e marcaram a distância de cada ângulo representado na circunferência até o eixo y. Após essa marcação vocês cortem e cole no plano cartesiano na referida representação do ângulo (essa atividade durou cerca de 30 minutos).

Após a construção do gráfico da função cosseno com canudinhos não houve nenhuma exploração, pois, era o último encontro de conteúdo referente ao Bloco 3. Achamos melhor estabelecermos algumas características da função tangente.

**Professor:** Façam a leitura da página 60 do livro didático procurando estabelecer diferenças entre as funções seno e cosseno.

**A<sub>5</sub>:** Professor! A função tangente ela não é limitada como as outras funções estudadas.

**A<sub>12</sub>:** Tem ângulo que não tem tangente.

**Professor:** OK! São duas características importantes da função tangente. Junto a essas características colocaremos no quadro outras.

Características da Função Tangente:

- i. O domínio da função tangente é  $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , ou seja,  $\mathbb{R} - \{90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
- ii. O contradomínio é todo o conjunto dos números reais;
- iii. O período da Função Tangente é  $180^\circ$ ;
- iv. Ela não é limitada, pois o conjunto imagem é todos os Reais.
- v. Ela tem assíntotas (retas verticais que passam pelos pontos da abscissa  $\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$ ). “Quando um ponto se move ao longo de uma parte extrema dessa curva, a distância desse ponto à assíntota se aproxima de zero” (BARROSO, 2010, p.61)

**Professor:** Boa tarde! Fiquem com Deus e até amanhã!

Não existe uma metodologia perfeita que modele uma prática sólida de um bom professor. São várias metodologias entrelaçadas na prática de um professor. Ora nos percebemos “tradicionais” e ora nos notamos progressistas. Concluimos nossa intervenção imersos nesta mistura.

#### 4.3.6 Descrição e análise do encontro 6 (16/11/2012) – Aulas 45 e 46

Fechamento do Bloco com uma atividade conclusiva propondo contemplar todos os tópicos até então estudados/explorados. Tal atividade foi preparada pós a exploração do bloco.

**ATIVIDADE CONCLUSIVA SOBRE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS**

**01)** Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada três horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica  $f(x) = 900 - 800 \operatorname{sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right)$ , onde  $f(x)$  é o número de clientes e  $x$ , a hora da observação ( $x$  é um inteiro tal que  $0 \leq x \leq 24$ ).

- a) Determine o número de clientes às 12 horas.  
 b) Determine o horário em que o número de clientes é de 1700.  
 c) Preencha a tabela abaixo:

Tempo (h)	Altura (m)
0	
3	
6	
9	
12	
15	
18	
21	
24	

- d) A partir da tabela construa o gráfico.  
 e) Qual o período dessa função?  
 f) Qual a amplitude dessa função?  
 g) Qual o valor máximo e o valor mínimo dessa função?

**02)** A que quadrante pode pertencer  $\alpha$  se:

- a)  $\operatorname{Sen}\alpha = -\frac{1}{4}$   
 b)  $\operatorname{Cos}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 c)  $\operatorname{Cos}\alpha = \frac{2}{5}$   
 d)  $\operatorname{Sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$

**03)** Calcule o valor das expressões:

a)  $\text{sen } 45^\circ + \text{cos } 90^\circ =$

b)  $\text{sen } (30^\circ + 60^\circ) =$

c)  $2 \cdot \text{cos } 60^\circ =$

d)  $\text{sen}^2 \frac{\pi}{6} + \text{cos}^2 \frac{\pi}{6} =$

**04)** No estudo de Trigonometria, Maria e João se depararam com as seguintes desigualdades:

I)  $\text{cos } (-20^\circ) < \text{cos } 35^\circ$

II)  $\text{sen } 20^\circ < \text{sen } 35^\circ$

III)  $\text{cos } (-20^\circ) < \text{sen } (-35^\circ)$

Está (ão) correta(s) apenas:

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e II.

e) I e III.

**05)** A procura por emprego em certa empresa obedece a função  $f(t) = 2500 + 1215 \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi \cdot t}{3} \right)$ , com t em meses contados a partir de janeiro de 2010 e f(t) o número de pessoas.

a) Determine o número máximo de pessoas que procuram emprego nessa empresa por mês.

b) Determine o número mínimo de pessoas que procuram emprego nessa empresa por mês.

**06)** Determine o sinal de:

a)  $\text{sen} \frac{3\pi}{4}$

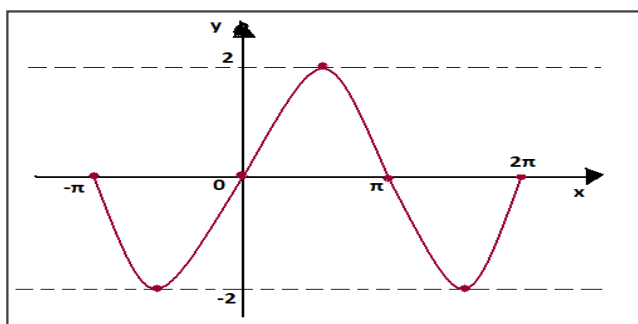
b)  $\text{cos} \frac{5\pi}{3}$

c)  $\text{sen} - \frac{3\pi}{4}$

d)  $\text{cos} - \frac{5\pi}{3}$

e)  $\text{tg} \frac{7\pi}{3}$

07) Observe a figura abaixo:



Ela apresenta um trecho da função  $f(x) = 2 \text{ sen } x$ . Responda as seguintes perguntas:

- f) Qual é o período da função?
- g) Qual é a amplitude da função?
- h) Para quais valores de  $x$   $f(x)$  é positivo?
- i) Qual o domínio dessa função?

A atividade conclusiva foi proposta com o intuito de fazermos uma sondagem dos tópicos explorados ao longo do Bloco 3, como também, de avaliarmos a nossa prática. Após a verificação da atividade de cada aluno montamos um quadro demonstrativo estabelecendo a relação dos alunos com os parâmetros estabelecidos em cada questão. Deixamos claro que nenhum aluno fez todas as questões, isso não significa que ninguém obteve o padrão máximo.

<b>Crítérios Explorados</b>	<b>Questões</b>	<b>Relação dos Alunos</b>
Relacionar funções trigonométricas com fenômenos periódicos	1, 5	20
Construir o gráfico da função seno e cosseno e explorar suas principais características	2, 3, 4, 6	18
Explorar a função seno percebendo e aplicando suas principais características	1, 5, 7	20

**Quadro 11:** Relação dos Alunos em relação aos parâmetros estabelecidos na atividade conclusiva<sup>3</sup>

A proposta não foi verificar se os alunos aprenderam. Realizamos essa atividade por causa da exigência de uma prova que o sistema pedagógico da escola solicita. Não detalharemos as análises referentes a cada questão pois as discussões realizadas ao longo dos 05 encontros, constitui a essência do nosso trabalho.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Antes de iniciar a descrição e as primeiras análises das observações, expunha a seguinte afirmação “convido a todos para aventurarem-se na certeza que não temos e na conquista infalível de nossas descrições e análises”. Não temos resultados prontos e acabados. Não sei se iremos ter. Quando realizamos uma pesquisa em busca de resultados, acabamos nos deixando seduzir pelo fim, não desfrutando assim dos encantos promovidos pelo processo.

Que potencialidades a Resolução de Problemas pode propiciar ao ensino-aprendizagem de Trigonometria no que diz respeito a formação de conceitos científicos? Que possibilidades se têm para trabalhar o ensino-aprendizagem de Trigonometria na perspectiva da Resolução de Problemas? O que o cotidiano escolar pode nos dizer a respeito do ensino-aprendizagem de Matemática?

Refletindo sobre a primeira pergunta, percebemos que elas apresentam o mesmo fio condutor – possibilitar/potencializar o processo ensino-aprendizagem. As duas primeiras estabelecem laços de biunivocidade. Percebemos, mesmo de forma prematura, que a Resolução de Problemas atua em vários momentos como catalisador das reflexões-explorações, tornando-se assim num ventre fecundo para a formação de conceitos científicos.

Ressaltamos o momento 1 da intervenção, onde ao propormos a atividade ambicionávamos a construção-formalização das razões trigonométricas, fazendo com que os alunos percebessem que tais razões dependiam do ângulo estudado, e não do tamanho do triângulo, como eles achavam.

Desta forma, o problema proposto nesta atividade e a forma que conduzimos as reflexões e percepções durante toda a proposta nos proporcionaram uma abertura e algumas aproximações de compreensões do processo ensino-aprendizagem.

Procuramos deixar a impressão que temos a respeito da Resolução de Problemas como uma forma de ensinar-aprender Matemática, pois a mesma possibilita: refletir por meio de discussões-resoluções-explorações o cotidiano da sala de aula; aponta para a necessidade do professor pesquisador; possibilitam características como mediação, interação, construção do conhecimento, diálogo; etc.

A segunda pergunta, norteadas pelas possibilidades (*Que possibilidades se têm para trabalhar o ensino-aprendizagem de Trigonometria na perspectiva da Resolução de Problemas?*), faze-nos refletir que possibilitar, segundo o Aurélio, é tornar-se possível. Sendo assim, explorar a Trigonometria através da Resolução de Problemas torna-se possível por

percebermos que este exercício acompanhou diversos matemáticos em suas buscas/construções-desconstruções. A Trigonometria apresentada nos livros, muitas vezes retratada de forma desconexa, ofusca a percepção de suas inter-relações com outros campos do saber.

Embora, tenhamos nos esforçado para que o conteúdo de Trigonometria fosse desenvolvido por meio da Resolução de Problemas, em alguns momentos nos permitimos distanciar de tal perspectiva. Em nossas reflexões, esses momentos ocorriam devido ao fato de recairmos a “modelos de ensino” que perpassaram a nossa formação, desde a escolar até a acadêmica. Modelos estes, no qual o processo ensino-aprendizagem centrava-se na figura do professor, fazendo com que as aulas planejadas não estivessem em função da aprendizagem dos alunos, mas, em função de si.

Mesmo assim, em meios a oscilações entre o “tradicional” e o “construtivo”, notamos ao final do processo era comum, independente da metodologia, o cuidado e a sensibilidade que tínhamos com a aprendizagem dos alunos. Isso proporcionou-nos sucessivas aproximações entre as realidades (familiar, amizade, namoro, perspectiva de vida, visão do estudo, emprego, financeira, entre outras) apresentadas a nós pelos alunos, sejam pelas interações em sala de aula, ou fora dela.

O cotidiano escolar, o qual se remete a terceira pergunta (*O que o cotidiano escolar pode nos dizer a respeito do ensino-aprendizagem de Matemática?*), possibilita-nos enxergar tal espaço-tempo como uma metodologia efêmera, como expõe Ferraço (2008, p.101). Metodologia esta que se transmuta o tempo todo. Pois, assim como Azevedo (2003, p.133), “no cotidiano, o tempo todo são realizadas traduções/traições, o que acaba por produzir resultados inesperados”. Se estivéssemos fundamentados numa perspectiva absolutista da Matemática, iríamos fatalmente dizer que estes resultados inesperados estariam errados. Contudo, assim como Ferraço (2008, p.101) apreendemos o que nele introduzimos.

Tornar o ensino-aprendizagem da Matemática de forma reflexiva, onde a mesma possa contribuir para o desenvolvimento sócio-político-econômico de um cidadão, na perspectiva da educação crítica, não é possibilitada se não adentrarmos com todos os sentidos no que desejamos estudar. Para isso, se torna necessário diariamente buscarmos entender/compreender o cotidiano escolar, vislumbrando sempre as possibilidades, procurando enxergar o que outros ainda não viram.

Buscar entender, de maneira diferente do aprendido, as atividades do cotidiano escolar ou do cotidiano comum, exige que estejamos dispostos a ver além daquilo que os outros já viram e muito mais; que sejamos capazes de mergulhar inteiramente em uma determinada realidade buscando



referências de sons, sendo capazes de engolir sentindo variedades de gostos, caminhar tocando coisas e pessoas e se deixando tocar por elas, cheirando os cheiros que a realidade vai colocando a cada ponto do caminho diário. (ALVES 1998 apud FERRAÇO, 2008, p. 104).

Desta forma, identificamos alguns elementos que observamos ao longo da execução da proposta os quais caracterizamos como resultados. Percebemos que a sala de aula tornou-se num ambiente mais vivo, onde se percebia com fluência o envolvimento dos alunos. Eles mediam, perguntavam quando apareciam às dúvidas, questionavam, interagiam uns com os outros, se aborreciam quando não encontrava de imediato as respostas, ajudavam o professor na hora de recolher o material e apagar o quadro.

Percebemos ainda, que a relação professor-aluno não era a mesma que perpetuou, com predominância, pelos séculos passados e, que ainda hoje é efetivada. Relação pautada pelo absolutismo burocrático, como dizia Skovesmove, onde o professor onipotente do saber passava todas as informações para os alunos como se eles não soubessem de nada, para mostrar ao aluno que o conteúdo é importante.

Notamos ainda, que através da intervenção da proposta, predominava uma relação professor-aluno mais dialógica, mesmo que algumas vezes fossem condicionadas. Desta forma, encontramos, neste processo dialógico, a formação de conceitos sendo construídos através da dinâmica estabelecida, ora mediada pelo professor, ora pela exploração das atividades desenvolvidas.

Outro fator que identificamos como contribuição de nossa pesquisa, está vinculada a metodologia de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, pois, ela nos possibilitou a mudança do cenário de um “ensino tradicional”, mesmo em algumas ocasiões, por “falta de elementos mediadores”, termos recaído na centralização do ensino na figura do professor. Mesmo assim, identificamos nessa centralização o cuidado com o diálogo, com a disponibilidade de ir até o aluno para identificar se o mesmo está compreendendo, elementos estes, que não são característicos do “ensino tradicional”.

Tendo uma visão de problema, como sendo “*tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que está interessado em fazer*” (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011), nossa função de professor-pesquisador mediador amplia-se para a necessidade de sermos motivadores. Pois, não adiantaria se tivéssemos diversos e bons “elementos mediadores” se estes não são propícios para convidar/acolher/motivar os alunos a participarem da exploração dos problemas.

Um dia li a seguinte frase: no dia que não tivermos utopias, perderemos a razão de viver. Encontramos algumas dificuldades: com espaço físico, com os imprevistos do cotidiano

(falta de água, divulgação de marcas e cursos na escola, falta de pó no tonner da impressora, impressados pós feriados, festividades locais), com os improvisos do planejamento escolar (festa junina, apresentação de grupos teatrais, reuniões para constituição de eventos relâmpagos) sobrecarregando a comunidade escolar, acarretando assim, na organização das aulas.

Entrelaçando os resultados observados com as dificuldades encontradas, com novas reflexões que tivemos, identificamos o que faltou em nossa proposta. Sendo assim, faltaram atividades que tivesse mais implicações com o cotidiano escolar, mesmo sabendo que o foco da pesquisa era o cotidiano da sala de aula. Como também, o planejamento da experiência poderia ter sido pensado em conjunto nos Planejamentos com professores de Matemática da Escola, para que além dos nossos olhares, tivéssemos os olhares de colegas que vivenciam a mesma realidade, porém a enxergam de forma diferenciada.

Desde o início, tínhamos a convicção de que a nossa proposta era uma possibilidade/alternativa didática e desta forma optamos olha-la em uma perspectiva, isso não quer dizer que esta é a mais ou menos correta.

Portanto, a partir do que identificamos no momento sobre o que faltou em nossa proposta, procuramos olhar o horizonte procurando enxergar perspectivas futuras. Notamos algumas, onde a primeira citada a seguir já foi realizada mesmo antes de terminarmos as considerações finais deste trabalho, que servirá para outras reflexões num futuro próximo.

Desta forma, realizamos uma Oficina Pedagógica interligando discussões entre professores de Matemática da Escola e professores em formação (alunos de graduação do curso de Matemática) procurando aproximar as realidades (Escola e Universidade) proporcionando discussões sólidas, pois, através de tais, colocamos em suspeição os conhecimentos científicos trabalhados na Universidade com os trabalhados na Escola Básica.

Esta Oficina Pedagógica, coordenada por mim e pelo professor Dr. Silvanio de Andrade, foi a quarta já realizada<sup>33</sup>, ocorreu em agosto de 2013 aos sábados, nos dias 10, 17, 24 e 31, das 08 às 17 horas. Teve como tema: ***ensino-aprendizagem de Trigonometria através da resolução e exploração de problemas: tecendo práticas de sala de aula e de pesquisa.***

O objetivo da IV Oficina Pedagógica *foi apresentar aos participantes atividades Matemáticas e experiências didáticas em formato de situações-problema, episódios de sala de*

---

<sup>33</sup> A Oficina Pedagógica é coordenada pelo professor Dr. Silvanio de Andrade, onde anualmente, desde 2010, vem desenvolvendo tal atividade, com o intuito de aproximar e divulgar as discussões realizadas na Universidade com professores que lecionam na Educação Básica.

*aula, narrativas, jogos e kits pedagógicos que possibilitarão um conjunto de discussões e vivências reflexivas sobre o tema Ensino-Aprendizagem de Trigonometria através da Resolução e Exploração de Problemas nas aulas de Matemáticas.*

Outra perspectiva futura que vislumbramos a partir das discussões/reflexões realizadas e obtidas durante o desenvolvimento da pesquisa, é *desenvolver uma pesquisa por meio de trabalho colaborativo com professores da mesma Unidade de Ensino que trabalho a partir da perspectiva da RP com o Cotidiano Escolar*, onde procuraremos tecer olhares sobre a importância da formação continuada do professor de Matemática e, o quanto isso é necessário para a não acomodação do exercício docente, como também, para a resignificação diária dos saberes docentes na direção da formação profissional.

Desta forma, encontramos nas últimas linhas deste trabalho a perspectiva do início de tantas outras. Pois, ao assumirmos a postura e o exercício do professor-pesquisador nunca existirão últimas linhas, últimas palavras, mas, novas contribuições, novas dificuldades, novas limitações e novas perspectivas futuras que impulsionaram para outras novas pesquisas.

## REFERÊNCIAS

ALVES, Nilda. Sobre movimentos das pesquisas nos/dos/ com os cotidianos. In: OLIVEIRA, I. B. de. **Pesquisa nos/dos/ com os cotidianos das escolas: sobre redes de fazeres**. Petrópolis: DP&A, 2008.p. 39 – 48.

\_\_\_\_\_. Decifrando o pergaminho – os cotidianos das escolas nas lógicas das redes cotidianas. In: OLIVEIRA, I. B. de. **Pesquisa nos/dos/ com os cotidianos das escolas: sobre redes de fazeres**. Petrópolis: DP&A, 2008. p. 15 – 38.

AMORIM, Jodette; et. al. **Trigonometria e números complexos**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

ANDRADE, Silvanio de. **Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. 1997. Dissertação (Mestrado) – UNESP/Rio Claro, Rio Claro: IGCE, UNESP, 1998.

ANDRÉ, M. E. D. A. de. Pesquisas sobre a escola e pesquisas no cotidiano da escola. **Eccos – Revista científica**, São Paulo, v. 10, p. 133 – 145, 2008. Número especial.

AZEVEDO, J. G. de. Itinerâncias da pesquisa. In: GARCIA, R. L.(org.). **Método: pesquisa com o cotidiano**. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.p. 119 – 140.

AZEVEDO, M. C. P. S. de. Ensino por investigação: problematizando as atividades em sala de aula. In: CARVALHO, A. M. P. de (Orgs). **Ensino de ciências: unindo a pesquisa e a prática**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004. P. 19 – 34.

BARBOSA, A. A. **Trajetórias hipotéticas de aprendizagem relacionadas às razões e às funções trigonométricas, visando uma pesquisa construtivista**.2009. 161f. Dissertação (Mestrado) – PUC-SP, São Paulo, 2009.

BARROSO, J. M. etall. **Conexões com a Matemática**.v. 1. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. São Paulo: Moderna, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2008.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio: Matemática**. Brasília: MEC/SEB, 2000.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio +: Matemática**. Brasília: MEC/SEB, 2002.

BORGES, C. F.**Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico: uma sequência para o ensino**.2009. 151f. Dissertação (Mestrado) – PUC-SP, São Paulo, 2009.

BRITO, Arlete de Jesus e MOREY, Bernadete Barbosa. Trigonometria: dificuldades dos professores de Matemática do ensino fundamental. **Horizontes**, Bragança Paulista. v. 22, n.1, p. 65-70, jan./jun. 2004.

CALIFORNIA. California Department of Education. **Mathematics framework for California public schools**. Sacramento: 1992.

CARNEIRO, M. A. **LDB fácil**: leitura crítico-compreensiva artigo a artigo. Petrópolis: Vozes, 1998.

CERTAU, Michel de. Tradução Ephraim Ferreira Alves. **A invenção do cotidiano**: 1. Artes de fazer. 18. ed. Petrópolis: Vozes, 2012.

DAMASCO, J. R. **Registros de representação semiótica e o geogebra: um ensaio para o ensino de funções trigonométricas**. 2010. 130f. Dissertação (Mestrado) – UFSC, Florianópolis, 2010.

D'AMBROSIO, B. S. Teaching mathematics through problem solving: a historical perspective. In: SCHOEN, H. L. (Ed.) **Teaching mathematics through problem solving**: grades 6-12. NCTM: Reston, VA: 2003. P. 39-52.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Por que se ensina Matemática?**. 2008. Acesso em: 26 nov. 2008. Disponível em: <<http://matcp2.blogspot.com/>>.

DANTE, L.R. **Matemática contextos e aplicações**. v. 2. São Paulo: Ática, 2010.

ESTEBAN, M. T. Dilemas para uma pesquisadora com o cotidiano. In: GARCIA, R. L.(org.) **Método**: pesquisa com o cotidiano. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.p. 199 – 212.

FERNANDES, R. U. **Estratégias pedagógicas com uso de tecnologias para o ensino de Trigonometria na circunferência**. 2010. 135f. Dissertação (Mestrado) – PUC-SP, São Paulo, 2010.

FERRAÇO, C. E. Ensaio de uma metodologia efêmera: ou sobre as várias maneiras de sentir e inventar o cotidiano escolar. In: OLIVEIRA, I. B. de. **Pesquisa nos/dos/ com os cotidianos das escolas**: sobre redes de fazeres. Petrópolis: DP&A, 2008.p. 101 – 117.

\_\_\_\_\_. Eu, caçador de mim. In: GARCIA, R. L.(org.) **Método**: pesquisa com o cotidiano. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.p. 157 – 175.

\_\_\_\_\_. Os sujeitos das escolas e a complexidade de seus fazeressaberes: fragmentos das redes tecidas em pesquisas com o cotidiano. In: GARCIA, R. L; ZACCUR, E (orgs.). **Cotidiano e diferentes saberes**. Rio de Janeiro: DP&A, 2006.p. 151 – 179.

\_\_\_\_\_. Pesquisa com o cotidiano. **Educ. Soc.**, Campinas, vol. 28, n. 98, p. 73 – 95, jan./abr. 2007.

FIorentini, D; Lorenzato, S. **Investigação em educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006. Coleção formação de professores.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

FREIRE, Paulo. **Educação como prática da liberdade.** 14. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2011.

GARCIA, R. L. Tentando compreender a complexidade do cotidiano. In: \_\_\_\_\_(org.). **Método:** pesquisa com o cotidiano. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.p. 9 – 16.

GERALDI, C. M. G. Desafios da pesquisa no cotidiano da/na escola. In: GARCIA, R. L.; ZACCUR, E (orgs.). **Cotidiano e diferentes saberes.** Rio de Janeiro: DP&A, 2006.p. 181 – 222.

GUSTINELI, Odesnei A. P. 1991: **Modelagem Matemática e Resolução de Problemas:** uma visão global em Educação Matemática. UNESP-RC.

HIEBERT, J.; WEARNE, D. Developing understanding through problem solving. In: SCHOEN, H. L. (Ed.) **Teaching mathematics through problem solving: grades 6-12.** NCTM: Reston, VA: 2003. P. 3-13. Brasília: Editora Plano, 2002.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Trigonometria. 8.ed. São Paulo: Atual, 2004.

ITACARAMBI, Ruth Ribas. Um breve histórico. In: \_\_\_\_\_. **A Resolução de Problemas de Geometria, na sala de aula, numa visão construtivista.** São Paulo: USP, 1993. p. 8-42.

KILPATRICK, J. Variables and methodologies in research on problem solving. In: Carpenter, T. P., Dossey, J. A., & Koehler, J. L. (Eds.). **Classics in Mathematics Education Research.** NCTM: Reston, VA, 2004.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa Pedagógica:** do projeto à implementação. Porto alegre: Artmed, 2008.

LARROSA, J. Três imagens do paraíso: ou um convite ao Wilhelm Meisterhabanero. In: \_\_\_\_\_, **J. Pedagogia profana.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 73 – 94.

LEDUR, Berenice Schwan; et. al. **A trigonometria por meio da construção de conceitos.** São Leopoldo: Editora Unisinos, 2001.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do ensino médio.**v.1. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LINDEGGER, L. R. DE. M. **Construindo os conceitos básicos da Trigonometria no triângulo retângulo:** uma proposta a partir da manipulação de modelos. 2000. Dissertação (Mestrado) – PUC-SP, São Paulo, 2000.

LOBO DA COSTA, N.M. **Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do ‘mundo experimental’ e do computador.** 1997. Dissertação (Mestrado) – PUC-SP, São Paulo, 1997.

\_\_\_\_\_. Reflexões sobre tecnologia e mediação pedagógica na formação do professor de Matemática. In: BELINE, W; LOBO DA COSTA, N.M. Campo Mourão: FECILCAM, 2010, p.85-116.

MCLAREN, Peter. Tradução Lucia PellandaZimmer. et al. **A vida nas escolas: uma introdução à pedagogia crítica nos fundamentos da educação.** 2. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1977.

MEDEIROS, K. M; DOS SANTOS, A. J. B. Uma experiência didática com a formulação de problemas matemáticos. **Zetetiké**, Cepem – FE – Unicamp – v. 15, n. 28, p. 87 – 118, jul./dez, 2007.

MEIRIEU, Philippe. Tradução Fátima Murad. **O cotidiano da escola e da sala de aula: o fazer e o compreender.** Porto Alegre: Artmed, 2005.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula.** São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MORAES, Maria Sueli Simão; et. al. **Educação Matemática e temas políticos sociais.** Campinas: Autores Associados, 2008

NASCIMENTO, Maurício Alves. **O ensino da Matemática através da Resolução de Problemas com aplicação em sala de aula: um exemplo com funções.** 2010. 38f. Monografia (TCC) – Departamento de Matemática, CCT, UEPB. Campina Grande, 2010.

OLIVEIRA, I. B. de. Certeau e as artes de fazer: as noções de uso, tática e trajetória na pesquisa em educação. In: OLIVEIRA, I. B. de. **Pesquisa nos/dos/ com os cotidianos das escolas: sobre redes de fazeres.** Petrópolis: DP&A, 2008.p. 49 – 64.

OLIVEIRA, I. B. de. Contar o passado, analisar o presente e sonhar o futuro. In:\_\_\_\_\_. **Pesquisa nos/dos/ com os cotidianos das escolas: sobre redes de fazeres.** Petrópolis: DP&A, 2008.p. 9 – 14.

OLIVEIRA, Inês Barbosa de. SGARBI, Paulo. **Estudos do cotidiano e educação.** Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

\_\_\_\_\_. A invenção cotidiana da pesquisa e de seus métodos. **Educ. Soc.**, Campinas, vol. 28, n. 98, p. 15 – 22, jan./abr. 2007.

OLIVEIRA, T. de. **Trigonometria: a mudança da prática docente mediante novos conhecimentos.**2010. 177f. Dissertação (Mestrado) – UFSCar,São Carlos, 2010.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação Matemática: concepções & perspectivas.** São Paulo: Editora da Unesp, 1999.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 25, n. 41, p. 73 – 98, dez, 2011.

PERKINS, D. O que é a compreensão. In: WISKE, M. S. et al. **Ensino para a compreensão: a prática na pesquisa**. Tradução: Luzia Araújo. Porto Alegre: Artmed, 2007, p. 37-49.

PERRONE, V. Por que precisamos de uma pedagogia da compreensão. In: WISKE, M. S. et al. **Ensino para a compreensão: a prática na pesquisa**. Tradução: Luzia Araújo. Porto Alegre: Artmed, 2007, p.19-36.

PONTE, J. P; BROCARD, J; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas em sala de aula**. 3ª ed. – Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 160p.

QUINTANEIRO, W. **Representações e definições formais em Trigonometria no ensino médio**.2010. 154f. Dissertação (Mestrado) – UFRJ,Rio de Janeiro, 2010.

RÊGO, Rômulo Marinho do; RÊGO, Rogéria Gaudêncio do. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de Matemática. In: LORENZATO, Sérgio (Org.). **O laboratório de ensino de Matemática na formação de professores**. 2.ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

ROSENBAUM, L. S. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista**.2010. 255f. Dissertação (Mestrado) – PUC-SP, São Paulo, 2010.

SAMPAIO, H. R. **Uma abordagem histórico-filosófica na educação Matemática: contribuições ao processo de aprendizagem de Trigonometria no ensino médio**. 2008. 190f. Dissertação (Mestrado) – UEL, Londrina, 2008.

SÁNCHEZ, Juan Carlos; BRAVO, José A. Fernández. Tradução Ernani Rosa. **O ensino da Matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SERPA, A. Pesquisa com o cotidiano: desafios e perspectivas. In: LINHARES, C.; GARCIA, R. L.; CORRÊA, C. H. A. (orgs.). **Cotidiano e formação de professores**. Brasília: Líberlivro, 2011. P. 39 – 40.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on Mathematics teaching and learning**.New York: Macmillan, 1992. P. 334-370.

SILVA, J. A. de M. **Educação Matemática e exclusão social: tratamento diferenciado para realidades desiguais**. Brasília: Editora Plano, 2002.

SILVA, R. A. **O uso de material didático de manipulação no cotidiano da sala de aula de Matemática**.2012.125f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2012.

SILVA, S. A.da. **Trigonometria no triângulo retângulo: construindo uma aprendizagem significativa**.2005. 198f. Dissertação (Mestrado) – PUC-SP, São Paulo, 2005.



SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática**. v.2. São Paulo: Saraiva, 2010.

SORMANI, C. **Um estudo exploratório sobre o uso da informática na Resolução de Problemas trigonométricos**.2006. 277f. Dissertação (Mestrado) – UNESP/Bauru,Bauru, 2006.

SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. Problem solving for the 21st century. In: \_\_\_\_\_, **Theories of Mathematics Education: seeking new frontiers**. Berlin/Heidelberg: Springer, 2010. p. 263-290.

STECANELA, N. O cotidiano como fonte de pesquisa nas ciências sociais. **Conjectura**. Caxias de Sul, vol. 14, n. 1, p. 63 – 75, jan./mai. 2009.

VICTORIO, A. Pesquisar o cotidiano é criar metodologias. **Educ. Soc.**, Campinas, vol. 28, n. 98, p. 97 – 110, jan./abr. 2007.

WEFFORT, F. C. Educação e política: reflexões sociológicas sobre uma pedagogia da liberdade. In: FREIRE, P. **Educação como prática da liberdade**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2011.

ZACCUR, E. Metodologias abertas a iterâncias, interações e errâncias cotidianas In: GARCIA, R. L.(org.) **Método: pesquisa com o cotidiano**. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.p.177 – 198.

**AXEXOS**

## ANEXO A: Problemas referentes a Trigonometria do triângulo retângulo

### **Problema1:** – Descobrimo algumas razões

**Objetivo:** *Perceber que fixando um ângulo num triângulo retângulo não importa o “tamanho” do triângulo e as razões entre os lados gerarão algumas constantes, denominando-as razões trigonométricas.*

Sabemos que o ângulo é formado por duas semirretas de mesma origem, que são os lados do ângulo e a origem é o vértice do ângulo. Vale salientar que, cada vez que as semirretas se “afastam”, temos um medida de ângulo diferente.

- Faça um triângulo retângulo na folha milimetrada, tendo um dos ângulos internos  $25^\circ$ .

- Indique os vértices do triângulo.

- Registre com a régua a medida dos lados.

- Encontre a razão do lado oposto pela hipotenusa (não falar de lado oposto e hipotenusa – falar nomeando os seguimentos). Conferir as respostas com os outros colegas. Após estas explanações falar que esta razão chama-se seno – a razão entre o lado oposto pela hipotenusa.

- Encontre a razão do lado adjacente pela hipotenusa. Conferir as respostas com os outros colegas. Após estas explanações, devemos falar que esta razão chama-se cosseno – a razão entre o lado oposto pela hipotenusa.

- Encontre a razão do lado oposto pelo lado adjacente. Conferir as respostas com os outros colegas. Após estas explanações falar que esta razão chama-se tangente – a razão entre o lado oposto pelo lado adjacente.

### <sup>34</sup>**Problema2:** Leitura Coletiva

**OBJETIVO:** *Identificar as razões trigonométricas como um processo inicial que se origina da semelhança de triângulos*

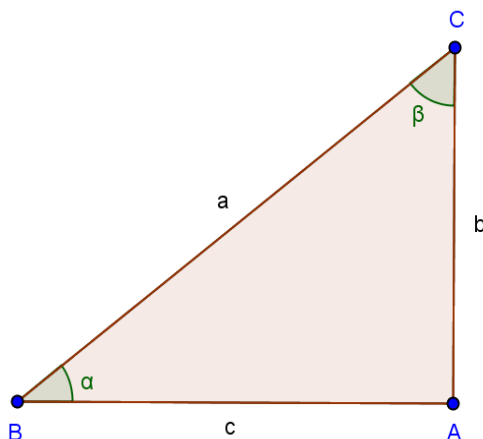
### **Problema3:** Aplicando as razões trigonométricas

**Objetivo:** *Aplicar as razões trigonométricas e investigar caracterizações e semelhanças que podemos extrair relações com os ângulos complementares de um triângulo retângulo.*

#### **Problema 3.1**

---

<sup>34</sup> Texto extraído do Capítulo 2 da dissertação de Oliveira, 2010, p. 37-41.



Dado o triângulo retângulo acima, determine:

- As medidas dos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ .
- As medidas dos ângulos internos.
- A soma dos ângulos  $\alpha + \beta$ .
- As razões trigonométricas referentes ao ângulo  $\alpha$ .
- As razões trigonométricas referentes ao ângulo  $\beta$ .
- Preencha a tabela abaixo com os valores obtidos nos itens acima.

ÂNGULOS RAZÕES	$\widehat{ABC} = \alpha =$	$\widehat{ACB} = \beta =$
<b>Seno</b>	$\frac{AC}{BC} =$	$\frac{AB}{BC} =$
<b>Cosseno</b>	$\frac{AB}{BC} =$	$\frac{AC}{BC} =$
<b>Tangente</b>	$\frac{AC}{AB} =$	$\frac{AB}{AC} =$

- O que podemos perceber em relação aos valores expostos na tabela? Existem semelhanças, em relação aos ângulos complementares? O que podemos concluir?
- Em relação à razão entre o seno e o cosseno do ângulo  $\alpha$ . O que podemos constatar?
- Em relação à razão entre o seno e o cosseno do ângulo  $\beta$ . O que podemos constatar?
- Em relação à soma do quadrado do seno e do quadrado do cosseno do ângulo  $\alpha$ . O que podemos constatar?
- Em relação à soma do quadrado do seno e do quadrado do cosseno do ângulo  $\beta$ . O que podemos constatar?

**EXISTEM AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS ÀS QUAIS CHAMAMOS: COSSECANTE (INVERSA DO SENO), SECANTE (INVERSA DO COSSENO) E COTANGENTE (INVERSA DA TANGENTE).**

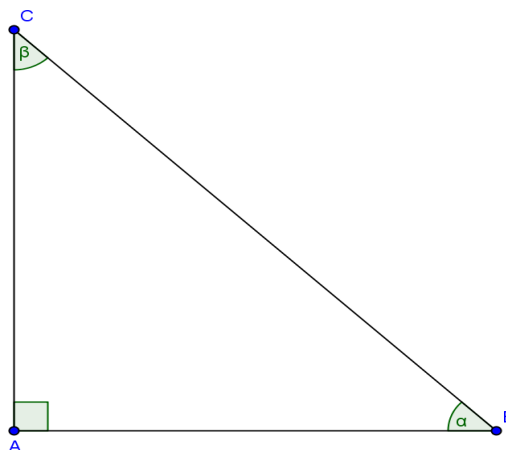
- l) As razões trigonométricas inversas referentes ao ângulo  $\alpha$ .  
 m) As razões trigonométricas inversas referentes ao ângulo  $\beta$ .  
 n) Preencha a tabela abaixo com os valores obtidos nos itens acima.

ÂNGULOS RAZÕES	$\widehat{ABC} = \alpha =$	$\widehat{ACB} = \beta =$
<b>Cossecante</b>	$\frac{BC}{AC} =$	$\frac{BC}{AB} =$
<b>Secante</b>	$\frac{BC}{AB} =$	$\frac{BC}{AC} =$
<b>Cotangente</b>	$\frac{AB}{AC} =$	$\frac{AC}{AB} =$

**<sup>35</sup>Problema 3.2: Percebendo regularidades**

Registre no próprio triângulo as medidas de seus três ângulos e de seus três lados. Em seguida, encontre o valor das razões: seno, cosseno e tangente dos ângulos complementares.

c)

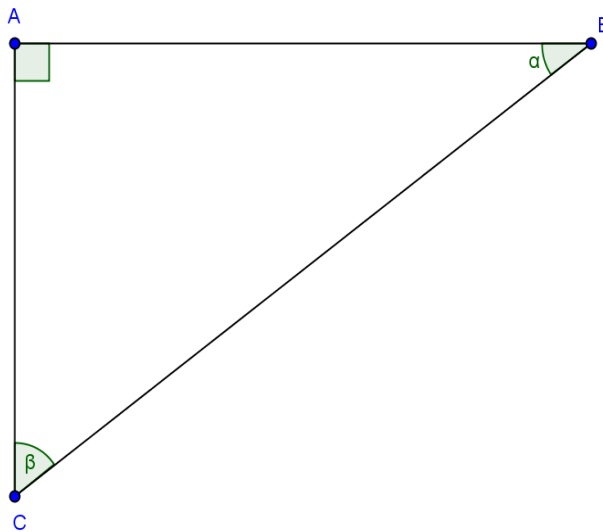


$\frac{AC}{BC} =$	$\frac{AB}{BC} =$
$\frac{AB}{BC} =$	$\frac{AC}{BC} =$
$\frac{AB}{AC} =$	$\frac{AC}{AB} =$

<sup>35</sup>Atividade adaptada, da dissertação de mestrado de Oliveira, 2010, p. 194.

ÂNGULOS RAZÕES	$\widehat{ABC} = \alpha =$	$\widehat{ACB} = \beta =$
<b>Seno</b>		
<b>Cosseno</b>		
<b>Tangente</b>		

d)



$\frac{AC}{BC} =$	$\frac{AB}{BC} =$
$\frac{AB}{BC} =$	$\frac{AC}{BC} =$
$\frac{AB}{AC} =$	$\frac{AC}{AB} =$

ÂNGULOS RAZÕES	$\widehat{ABC} = \alpha =$	$\widehat{ACB} = \beta =$
<b>Seno</b>		
<b>Cosseno</b>		
<b>Tangente</b>		

**Problema4:** explorando situações do cotidiano por meio das razões trigonométricas.

**Objetivo:** *modelar situações do cotidiano e explorar o pensamento matemático aí existente como ferramenta construtiva e desenvolvimentista.*

#### **Problema 4.1: Problema da Rampa**

Uma rampa de 3 m de altura forma com o solo um ângulo de  $35^\circ$ .

- c) Represente a situação acima por meio de um desenho.
- d) Encontre o valor do comprimento dessa rampa. ( $\text{sen } 35^\circ = 0,5736$ ;  $\text{cos } 35^\circ = 0,8192$  e  $\text{tg } 35^\circ = 0,7002$ ).

#### **Problema 4.2: Determinando a Altura de um Prédio**

A sombra de um prédio, num terreno plano, numa determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m. Determine a altura, em metros, do prédio.

#### **Problema 4.3: Determinando a Altura de uma Torre**

(UNESP- modificado) Uma pessoa, no nível do solo, observa o ponto mais alto de uma torre vertical, à sua frente, sob o ângulo de  $30^\circ$ . Aproximando-se 40 metros da torre, ela passa a ver esse ponto sob o ângulo de  $45^\circ$ .

- a) Represente a situação acima por meio de um desenho.
- b) Determine a altura aproximada da torre, em metros.

#### **Problema 4.4: Determinando os Ângulos Complementares**

Uma escada de 10 m de comprimento está encostada em uma parede. A distância entre o pé da escada e a parede é de 5 m.

- a) Represente a situação acima por meio de um desenho.
- b) Determine o ângulo formado entre a escada e a parede.
- c) Determine o ângulo formado entre a escada e o chão onde está apoiada.

#### **Problema 4.5: Um Banhista Curioso**

Um banhista pretendia ir de uma margem à outra de um açude. No entanto, quando ainda estava na margem, avistou uma bananeira e uma mangueira no outro lado do açude. A mangueira estava bem à sua frente e a bananeira estava um pouco afastada. Sendo assim, o banhista nadou em direção à bananeira.

Do local aonde chegou, avista-se o ponto de partida sob um ângulo de  $60^\circ$  com a

margem em que está e constatou que a distância da mangueira para a bananeira era de 24 m.

Observando que as margens do açude eram paralelas, fez-se algumas perguntas:

- a) Como poderia representar esta situação através de uma figura?
- b) Qual é a largura desse açude?
- c) Quantos metros nadei?

Ajude esse banhista a encontrar as respostas para suas perguntas.



## ANEXO B: Atividade conclusiva do Bloco 1

1) Diante do estudo de Trigonometria foram trabalhadas as razões e algumas relações trigonométricas. Com base neste estudo, relacione a 2ª coluna de acordo com a 1ª:

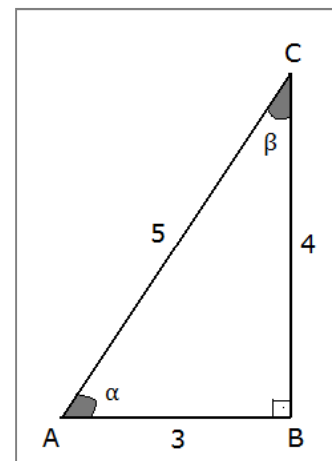
- |                         |  |
|-------------------------|--|
| ( 1 ) $tgx$             | ( ) $\frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa}$        |
| ( 2 ) $sec\ x$          | ( ) $\frac{Cateto\ Adjacente}{Cateto\ Oposto}$ |
| ( 3 ) $sexx$            | ( ) $\frac{Hipotenusa}{Cateto\ Oposto}$        |
| ( 4 ) $cotgx$           | ( ) $\frac{Hipotenusa}{Cateto\ Adjacente}$     |
| ( 5 ) $sen^2x + cos^2x$ | ( ) $\frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa}$     |
| ( 6 ) $cossecx$         | ( ) $\frac{senx}{cosx}$                        |
| ( 7 ) $cos\ x$          | ( ) 1  |

**O enunciado a seguir refere-se às questões 02 e 03.**

Observe o triângulo ABC ao lado.

2) Considere o triângulo retângulo representado, analise as afirmações abaixo e as julgue como verdadeira ou falsa:

- ( ) O vértice onde está o ângulo de  $90^\circ$  é o vértice B.
- ( ) O cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  é o segmento AB.
- ( ) O segmento AC é a hipotenusa do triângulo.
- ( ) Em relação ao ângulo  $\beta$  BC é o cateto adjacente.
- ( ) A soma dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , ou seja,  $\alpha + \beta$  pode ser maior que  $90^\circ$ .
- ( ) O seno do ângulo  $\alpha$  é igual ao cosseno do ângulo  $\beta$ .



3) Determine:

- |                  |                 |
|------------------|-----------------|
| a) $sen\ \alpha$ | d) $sen\ \beta$ |
| b) $cos\ \alpha$ | e) $cos\ \beta$ |
| c) $tg\ \alpha$  | f) $tg\ \beta$  |

- 4) <sup>36</sup>Sabendo que o seno e o cosseno de um ângulo  $\alpha$  de um triângulo retângulo são iguais, qual é o valor da tangente?
- 5) <sup>37</sup>Um triângulo retângulo tem um ângulo medindo  $30^\circ$ . Sabendo que a hipotenusa desse triângulo mede 8 cm, quanto medem seus catetos?
- 6) Um avião alça voo sob um ângulo de  $30^\circ$  e percorre 5000 m nessa mesma inclinação.
- a) Represente a situação acima por meio de um desenho indicando os dados mencionados.
- b) Qual a altura do avião em relação ao chão?

<sup>36</sup> Adaptada do livro de BARROSO, 2010.p.331.

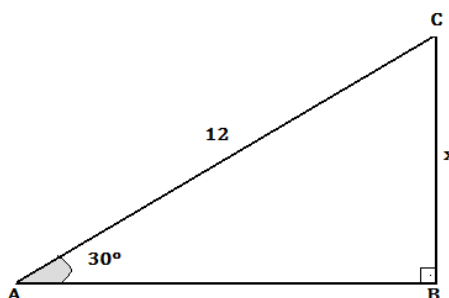
<sup>37</sup> Adaptada do livro de BARROSO, 2010.p.331.

- 7) <sup>38</sup>Observe os dados de 5 rampas diferentes construídas para facilitar o acesso a um desnível de 0,5 m.

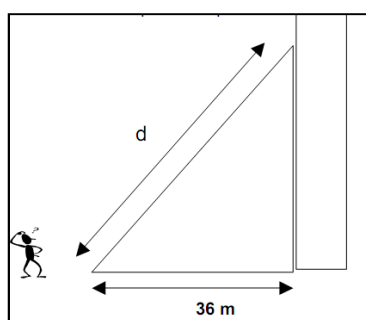
Rampa	Comprimento da rampa	Altura do desnível
A	5,0 m	0,5 m
B	4,0 m	0,5 m
C	3,0 m	0,5 m
D	2,0 m	0,5 m
E	1,0 m	0,5 m

Qual rampa tem a maior inclinação? Justifique.

- 8) Uma escada está apoiada no topo de uma parede de 4 m. Esta escada forma com a parede um ângulo de  $60^\circ$ .
- Esboce um desenho que represente a situação acima indicando os dados mencionados.
  - Determine o comprimento da escada.
  - Qual o ângulo formado pela escada e o chão?
- 9) Determine a altura de uma árvore que projeta uma sombra de 13 m quando os raios solares formam um ângulo de  $30^\circ$  com o solo.



- 10) Quando os raios solares formam um ângulo de  $60^\circ$  com o solo, um prédio projeta uma sombra de 36 m e um observador está localizado no extremo dessa sombra. Qual é a distância entre o ponto onde ele está e o topo desse prédio?

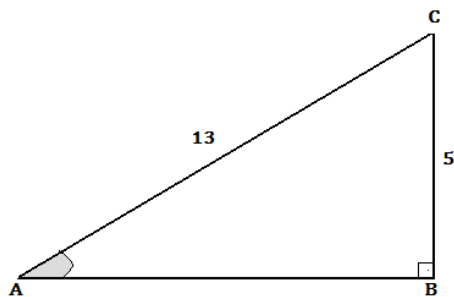


- 11) <sup>39</sup> Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em B.
- Determine o seno do ângulo  $\hat{A}$ .
  - Determine o ângulo  $\hat{A}$ .
  - Determine o ângulo  $\hat{C}$ .

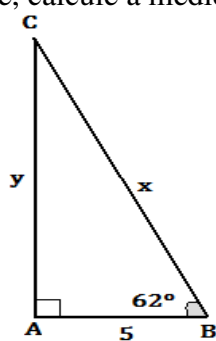
<sup>38</sup> BARROSO, 2010.p.328

<sup>39</sup>(UFC adaptado-CE)

- d) Determine o cosseno do ângulo  $\hat{A}$ . (utilizando o teorema de Pitágoras determine o segmento AB)



- 12) No triângulo retângulo seguinte, calcule a medida de  $x$  e  $y$  indicada:



## ANEXO C: Problemas referentes a Trigonometria no ciclo trigonométrico

### <sup>40</sup>Problema 01: A relação entre $\pi$ e o $\pi$ radianos

**Objetivo:** *Construir a relação  $\pi$  e estabelecer conexões entre esse número e a unidade de medida radiano*

Experimento: o Radiano e o  $\pi$  (pi)

- Desenhe na folha sulfite uma circunferência de raio 7 cm.
- Pegue um CD e, sobre uma folha sulfite, trace o contorno desse objeto.
- Pegue uma moeda de 1 real e, sobre uma folha sulfite, trace o contorno desse objeto.
- Evidencie o centro das circunferências correspondentes a cada situação acima.
- Sobreponha o barbante, em cima do raio evidenciado, e, com o lápis de tinta façam as marcações nas circunferências. Tome muito cuidado e faça com capricho as medições; procure ser fiel ao transportar o comprimento do barbante com o tamanho de cada raio, minimizando erros, e, logo em seguida, recorte os pedaços de barbante encontrados, cada um deles tendo o comprimento do raio.
- Passe cola por todo o comprimento de cada uma das circunferências e cole os raios recortados anteriormente acompanhando a curvatura da circunferência. Alterne as cores dos raios consecutivos em cada circunferência para destacar a quantidade de raios colados.

d) Preencha a tabela abaixo:

OBJETO	DESENHO DA CIRCUNFERÊNCIA	CD	MOEDA
MEDIDA DO RAIO			
MEDIDA DO DIÂMETRO			
COMPRIMENTO DAS CIRCUNFERÊNCIAS EM RAIOS			
COMPRIMENTO DAS CIRCUNFERÊNCIAS EM cm			
<u>COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA</u> <u>DIÂMETRO</u>			

<sup>40</sup>Atividade adaptada, da dissertação de mestrado de Oliveira, 2010, p. 166-167.

- e) Em uma circunferência, quantos de seus raios cabem no seu comprimento? O que podemos concluir?
- f) <sup>41</sup>A partir dessa atividade, podemos constatar que um *radiano é o ângulo central que corresponde a um arco de comprimento igual ao raio da circunferência a que pertence*. Sendo assim, 1 radiano equivale a quantos graus?

### **Problema 2: Medindo arcos e medindo ângulos**

**OBJETIVO:** *Favorecer conexões entre a medida de arcos e a medida de ângulos.*

#### **Problema 2.1**

Sabendo que um arco de 18 cm de comprimento contido numa circunferência de raio 6 cm.

- a) Qual a medida desse arco em radianos?
- b) Qual a medida desse arco em graus?

#### **<sup>42</sup>Problema 2.2: A Trigonometria do relógio**

Calcule a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos quando são:

- a) 4 horas.
- b) 6 horas e 20 minutos.

#### **<sup>43</sup>Problema 2.3:**

O ponteiro dos minutos de um relógio mede 10 cm. Qual é a distância que sua extremidade percorre em 30 minutos?

#### **<sup>44</sup>Problema 2.4: Uma aplicação na física**

Um pêndulo tem 15 cm de comprimento e, no seu movimento, suas posições extremas formam um ângulo de  $60^\circ$ . Qual é o comprimento do arco que a extremidade do pêndulo descreve?

### **Problema3: Convertendo unidades de medidas**

---

<sup>41</sup>Trecho retirado de Ledur, 2001, p.30.

<sup>42</sup>Atividade extraída de Smole e Diniz, 2010, p. 19.

<sup>43</sup>Atividade extraída de Dante, 2010, p. 33.

<sup>44</sup>Atividade extraída de Dante, 2010, p. 34.

**OBJETIVO:** *Favorecer através da conversão de unidades possibilidades de estabelecer um domínio mais amplo do conceito explorado.*

**Problema 3.1**

Usando a proporção destacada acima, preencha a seguinte tabela:

<b>Ângulo em Grau</b>	<b>30°</b>	<b>60°45'</b>			<b>80°</b>		<b>14°</b>	
<b>Ângulo em Radiano</b>			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$		<b>5,50</b>		$\frac{\pi}{12}$

<sup>45</sup>**Problema 3.2:** *A determinação principal*

Calcule a medida da determinação principal dos arcos de medida:

- a) 2380°
- b) - 790°
- c)  $\frac{20\pi}{3}$
- d)  $-\frac{29\pi}{5}$

**Problema4:** *Da razão entre segmentos para as coordenadas de um ponto*

**OBJETIVO:** *Fazer a transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico.*

<sup>46</sup>**Problema 4.1:** *Construindo as razões trigonométricas no ciclo*

- i. Trace no papel milimetrado os eixos x e y, demarcando o ponto de intersecção dos eixos o ponto O (0,0).
- ii. Em seguida, construa um círculo de raio 8 cm, com centro em O.
- iii. Reforce com o compasso, o arco AB, correspondente a um quarto da circunferência (90°).
- iv. Marque um ponto P qualquer entre o arco AOB.
- v. Marque com o transferidor o ângulo AOP.

**FICHA DE INVESTIGAÇÃO REFERENTE A ATIVIDADE 4.1**

Referente à construção, proposta pela Atividade 4.1, faça as seguintes investigações:

- a) A medida OP.

<sup>45</sup> Atividade extraída de Smole e Diniz, 2010, p. 24.

<sup>46</sup> Atividade adaptada de Amorim, 2006, p. 35.

- b) Comparando com o que estudamos nas explorações de situações com o triângulo retângulo, o que representa a medida  $OP'$ ? Lado oposto, lado adjacente ou hipotenusa?
- c) A medida  $OP'$ .
- d) O que representa a medida  $OP'$  em relação ao ângulo  $P'\hat{O}P''$ ? Lado oposto ou lado adjacente?
- e) A medida  $OP''$ .
- f) O que representa a medida  $OP''$  em relação ao ângulo  $P'\hat{O}P''$ ? Lado oposto ou lado adjacente?
- g) As razões seno, cosseno e tangente de  $\hat{O}$ .

ÂNGULO RAZÕES	$AOB = \hat{O} =$
<b>Seno</b>	
<b>Cosseno</b>	
<b>Tangente</b>	

**Problema 4.2: As razões não dependem do tamanho do raio**

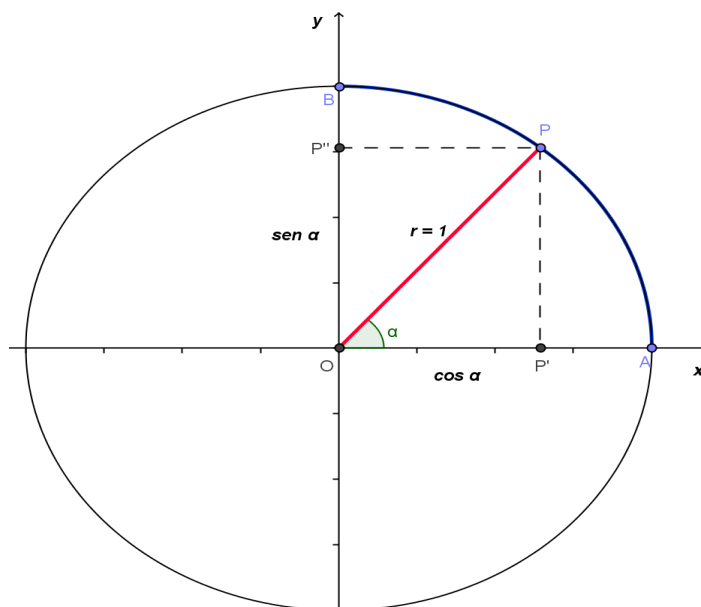
Faça a construção agora, utilizando o mesmo ângulo, só que com o raio diferente de 8 cm.

- a) Obtenha as medidas  $OP'$  e  $OP''$ .
- b) Encontre o valor das razões trigonométricas do ângulo estudado.
- c) Compare os seus resultados com os obtidos pelos outros grupos, e com os encontrados na atividade anterior.
- d) A medida do raio influencia no resultado obtido das razões trigonométricas que vocês encontraram? Justifique.

**Problema5: Conexões entre as relações e as razões trigonométricas**

**OBJETIVO:** *Verificar as conexões existentes entre as relações trigonométricas e as razões trigonométricas*

Observe a figura abaixo. Temos uma circunferência de raio unitário e um ponto  $P(P', P'')$ .  $OP'$  que representa o cosseno do ângulo  $\alpha$  e  $P'P'' = OP''$  que corresponde ao seno do ângulo  $\alpha$ .



- a) Considerando o triângulo retângulo POP', determine a relação que obtemos ao aplicarmos o teorema de Pitágoras.
- b) Considerando o estudo do ângulo  $\alpha$  e aplicando as razões trigonométricas nesta situação acima, preencha a tabela abaixo.

<b>RELAÇÕES</b>	
<b><math>Tg\alpha</math></b>	$= \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} =$
<b><math>Cotg\alpha</math></b>	$= \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Cateto Oposto}} =$
<b><math>Sec\alpha</math></b>	$= \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adjacente}} =$
<b><math>Cossec\alpha</math></b>	$= \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Oposto}} =$

- c) Dividindo a relação obtida no **item a** por  $\text{sen}\alpha^2$ , que outra relação obtemos?
- d) Dividindo a relação obtida no **item a** por  $\text{cos}\alpha^2$ , que outra relação obtemos?



## ANEXO D: Atividade conclusiva do Bloco 2

- 1) (BARROSO) Indique a medida do ângulo reto em radiano.
- 2) (BARROSO) Determine, em grau, a medida do ângulo de  $\frac{2\pi}{3}$  rad.
- 3) (BARROSO) Calcule o comprimento de uma circunferência de 15 cm de diâmetro.
- 4) (BARROSO) Um atleta corria em uma pista circular de 48 m de raio. Quando faltava a quarta parte para completar a primeira volta, ele teve de interromper a corrida. Quantos metros, aproximadamente, ele percorreu?
- 5) (DANTE) A extremidade de um arco de  $960^\circ$  está no:
  - a) 4º quadrante
  - b) 3º quadrante
  - c) 2º quadrante
  - d) 1º quadrante
  - e) nda.
- 6) (DANTE) Responda:
  - a) Convertendo  $\frac{7\pi}{4}$  rad em graus, quanto obtemos?
  - b) Qual é o comprimento de um arco correspondente a um ângulo central de  $60^\circ$  contido numa circunferência de raio  $r = 1,5$  cm?
  - c) Quanto mede o menor arco não negativo côngruo de  $2650^\circ$ ?
- 7) (BARROSO) Desenhe um ciclo trigonométrico e assinale os pontos que são extremidades dos arcos de:  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ$  e  $360^\circ$ .
- 8) (DANTE) A que quadrante pode pertencer  $\alpha$  se:
  - a)  $\text{Sen}\alpha = -\frac{1}{4}$
  - b)  $\text{Cos}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
  - c)  $\text{Cos}\alpha = \frac{2}{5}$
  - d)  $\text{Sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$
- 9) Calcule a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos quando são 7 horas.
- 10) (Unifor-CE) O arco  $\alpha$  mede  $7632^\circ$ . O arco  $\beta$ , tal que  $0 < \beta < 90^\circ$ , é côngruo a  $\alpha$ . A medida de  $\beta$ , em graus, é:
  - a)  $30^\circ$
  - b)  $36^\circ$
  - c)  $60^\circ$
  - d)  $72^\circ$
  - e)  $51^\circ$
- 11) (DANTE) Determine x tal que:
  - a)  $0^\circ < x < 360^\circ$  e  $\cos x = \frac{1}{2}$

- b)  $0^\circ < x < 360^\circ$  e  $\sin x = \frac{1}{2}$   
 c)  $0 < x < 2\pi$  e  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**12)** (DANTE) Calcule o valor das expressões:

- a)  $\sin 45^\circ + \cos 90^\circ =$   
 b)  $\sin (30^\circ + 60^\circ) =$   
 c)  $2 \cdot \sin 60^\circ =$   
 d)  $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} =$

**13)** (UFPB) No estudo de Trigonometria, Maria e João se depararam com as seguintes desigualdades:

- I.**  $\cos (-20^\circ) < \cos 35^\circ$   
**II.**  $\sin 20^\circ < \sin 35^\circ$   
**III.**  $\cos (-20^\circ) < \sin (-35^\circ)$

Está (ão) correta(s) apenas:

- a) I.  
 b) II.  
 c) III.  
 d) I e II.  
 e) I e III.

**14)** (DANTE) Determine os valores das demais “funções” trigonométricas de um arco  $x$  quando

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

## ANEXO E: Problemas referente as funções trigonométricas

### **Problema 1: O comportamento da maré**

**OBJETIVO:** *Relacionar funções trigonométricas com fenômenos periódicos*

Em certa cidade litorânea, a altura (h) da maré (em metro), em função do tempo t, é dada pela função  $h(t) = 2 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ , na qual o tempo é medido em horas, a partir da meia noite.

- Determine a altura da maré às 12 horas.
- Determine o horário em que a altura da maré atingirá 2 metros.
- Preencha a tabela abaixo:

Tempo (h)	Altura (m)

### <sup>47</sup>**Problema 2: As funções seno e cosseno num experimento com canudos**

**OBJETIVO:** *Construir o gráfico da função seno e cosseno e explorar suas principais características.*

#### **Procedimentos**

- Dobre a folha de papel quadriculado ao meio, de forma que o vinco formado seja paralelo ao maior lado da folha. Recorte no vinco, dividindo esta folha em dois pedaços. Vamos chamar um desses pedaços de folha de trabalho. Serão necessárias uma folha e meia de trabalho para cada grupo.
- Em uma metade de uma folha de trabalho, o grupo deve traçar: uma circunferência com raio unitário, tomando-se como unidade 10 lados de quadradinhos da própria

---

<sup>47</sup> OLIVEIRA (2010)

folha quadriculada; eixos de um sistema cartesiano, com a origem coincidindo com o centro da circunferência construída. Com um transferidor, o grupo deve graduar a circunferência de 15 em 15 graus. Trace os eixos coordenados sobre linhas do papel quadriculado, tomando o centro da circunferência mais ou menos ao centro da folha.

- iii.** No outro pedaço, uma folha de trabalho, o grupo deverá traçar eixos coordenados  $x$  e  $y$ , de um segundo sistema cartesiano, para a construção de um gráfico. Importante: trace o eixo  $y$  bem próximo à margem esquerda da folha, logo após duas colunas de quadradinhos da folha quadriculada. Trace o eixo  $x$ , perpendicularmente ao eixo  $y$ , mais ou menos ao meio da folha de trabalho.
- iv.** Agora, vamos colar um pedaço de barbante ao longo da extensão da circunferência. Essa etapa é para fazer a correspondência de pontos da circunferência com pontos do eixo  $x$  do gráfico. A cola bastão é mais adequada para este experimento, pois o barbante deverá ser deslocado do círculo após o próximo passo.
- v.** Com o barbante colado à circunferência, use a caneta de tinta permanente e marque todos os pontos correspondentes às graduações da circunferência (15 em 15 graus). Atenção: deixe bem evidenciado o início (marca de  $0^\circ$ ) em uma extremidade do barbante e o fim (marca de  $360^\circ$ ) na outra.
- vi.** Agora é preciso deslocar o barbante, esticá-lo ao longo do eixo  $x$ , fazendo coincidir a primeira marcação do barbante com a origem do plano cartesiano. Use fita adesiva para fixar apenas as extremidades do barbante no gráfico. Transporte cada uma das marcações do barbante para o eixo  $x$  e depois retire o barbante.
- vii.** Agora é a hora de construir o gráfico de uma função trigonométrica (função seno). Para isso, vamos usar sempre triângulos retângulos no plano do ciclo trigonométrico, cada um tendo como hipotenusa um raio da circunferência e como altura a projeção da hipotenusa sobre o eixo vertical, a partir de cada marca da circunferência.
- viii.** Para cada um dos pontos previamente marcados na circunferência, devemos marcar em cada canudo a medida da altura encontrada. Para facilitar use caneta de tinta permanente.

- ix.** Uma vez marcada essa medida, recorte o canudo no tamanho da altura do triângulo (seno do ângulo demarcado na circunferência) e cole-o no gráfico perpendicularmente ao eixo  $x$ , sobre o ponto de abscissa correspondente ao ângulo. Tome o cuidado de observar se o triângulo, no plano do ciclo trigonométrico, tem sua altura tomada acima ou abaixo das abscissas. Se a altura for tomada, no plano do ciclo trigonométrico, acima dos eixos das abscissas, o canudo recortado será colado, no sistema  $Oxy$ , acima do eixo  $x$ . Se a altura for tomada abaixo do eixo das abscissas, o canudo será colado abaixo do eixo  $x$ .

### ALGUNS QUESTIONAMENTOS APÓS A CONSTRUÇÃO DOS GRÁFICOS

- 1) Como poderia ser construído o seno e o cosseno para os ângulos de  $390^\circ$ ?
- 2) Qual é o período da função seno? Ou seja, a partir de quantos graus o gráfico começa a se repetir?
- 3) Calcule a razão entre a altura e a hipotenusa (raio da circunferência) de um triângulo, construído com ângulos de  $30^\circ$  (isto é, com altura a partir da marca de  $30^\circ$  no círculo). Este número é o seno de  $30^\circ$ ?
- 4) Calcule as razões entre a altura e a hipotenusa, dos triângulos construídos com os ângulos de  $150^\circ$ ,  $330^\circ$  e  $570^\circ$ .
- 5) Calcule as razões entre a altura e a hipotenusa, dos triângulos construídos com os ângulos de  $45^\circ$ ,  $135^\circ$  e  $225^\circ$ .
- 6) Escreva um parágrafo para explicar aos seus colegas de classe por que o seno de  $30^\circ$  equivale ao seno de  $150^\circ$ .
- 7) Classifique a função do gráfico obtido com relação à monotonicidade (crescente ou decrescente) em cada um dos quadrantes:

Quadrante	Função Seno
1º	
2º	
3º	
4º	

- 8) Qual o conjunto imagem da função?
- 9) Descreva os pontos de mínimos e máximos encontrados, e os valores máximos e mínimos correspondentes.

10) Para o intervalo estudado  $[0, 360^\circ]$ , resolva a equação trigonométrica  $\text{sen}x = \frac{1}{2}$ .

### **Problema 3: Explorando a Função Seno**

**OBJETIVO:** *Explorar a função seno percebendo e aplicando suas principais características*

1) Determine o sinal de:

a)  $\text{sen}\frac{16\pi}{3}$

b)  $\text{sen}\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$

c)  $\text{sen}\frac{25\pi}{24}$

d)  $\text{sen}\left(-\frac{25\pi}{24}\right)$

2) Calcule:

a)  $\text{sen} 3465^\circ$

b)  $\text{sen}\frac{13\pi}{4}$

c)  $\text{sen}(-4230^\circ)$

d)  $\text{sen}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

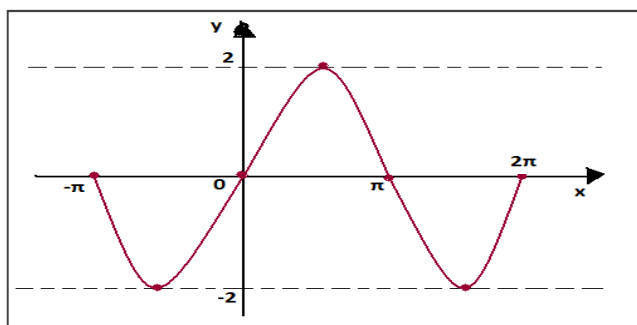
3) Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com o tempo. Considere que, em determinada região, onde leões são predadores e zebras são as presas, a população de presas tenha variado de acordo de acordo com a função dada por  $Z(t) = 850 + 400 \cdot \text{sen} \frac{\pi t}{4}$ , sendo o tempo  $t$  medido, em anos, a partir de janeiro de 2012 ( $t = 0$ ). Pergunta-se:

a) Qual era a população de zebras em janeiro de 2012?

b) De acordo com a função dada, qual foi a população máxima de zebras atingida nessa região?

c) Determine a primeira vez em que a população de zebras foi máxima.

4) Observe a figura abaixo:



Ela apresenta um trecho da função  $f(x) = 2 \text{ sen } x$ . Responda as seguintes perguntas:

- Qual é o período da função?
- Qual é a amplitude da função?
- Para quais valores de  $x$   $f(x)$  é positivo?
- Qual o domínio dessa função?
- Qual o conjunto imagem dessa função?

#### **Problema 4: Explorando a Função Cosseno**

**OBJETIVO:** *Explorar a função cosseno percebendo e aplicando suas principais características*

1) Anote o sinal de:

- $\cos \frac{12\pi}{5}$
- $\cos 560^\circ$
- $\cos \frac{32\pi}{15}$
- $\cos (-650^\circ)$

2) Calcule:

- $\cos 1485^\circ$
- $\cos (-6000^\circ)$
- $\cos \left(-\frac{19\pi}{4}\right)$

3) Calcule o valor da expressão  $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \dots + \cos 78x + \cos 80x$  para  $x = \frac{\pi}{4}$ .

4) (Vunesp) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que ele era periódico e podia ser aproximado pela expressão  $P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos (60^\circ t +$

$225^\circ$ ), em que  $t$  é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação ( $t = 0$ ) e  $P(t)$  é a profundidade da água (em metros) no instante  $t$ .

- a) Resolva a equação  $\cos(60^\circ t + 225^\circ) = 1$ , para  $t > 0$ .
- b) Determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta.



### ANEXO F: Atividade conclusiva do Bloco 3

- 1) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada três horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica  $f(x) = 900 - 800 \operatorname{sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right)$ , onde  $f(x)$  é o número de clientes e  $x$ , a hora da observação ( $x$  é um inteiro tal que  $0 \leq x \leq 24$ ).
- a) Determine o número de clientes às 12 horas.
- b) Determine o horário em que o número de clientes é de 1700.
- c) Preencha a tabela abaixo:

Tempo (h)	Altura (m)
0	
3	
6	
9	
12	
15	
18	
21	
24	

- d) A partir da tabela construa o gráfico.
- e) Qual o período dessa função?
- f) Qual a amplitude dessa função?
- g) Qual o valor máximo e o valor mínimo dessa função?

2) A que quadrante pode pertencer  $\alpha$  se:

- a)  $\operatorname{Sen}\alpha = -\frac{1}{4}$
- b)  $\operatorname{Cos}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- c)  $\operatorname{Cos}\alpha = \frac{2}{5}$
- d)  $\operatorname{Sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$

3) Calcule o valor das expressões:

a)  $\text{sen } 45^\circ + \text{cos } 90^\circ =$

b)  $\text{sen } (30^\circ + 60^\circ) =$

c)  $2 \cdot \text{cos } 60^\circ =$

d)  $\text{sen}^2 \frac{\pi}{6} + \text{cos}^2 \frac{\pi}{6} =$

4) No estudo de Trigonometria, Maria e João se depararam com as seguintes desigualdades:

I.  $\text{cos } (-20^\circ) < \text{cos } 35^\circ$

II.  $\text{sen } 20^\circ < \text{sen } 35^\circ$

III.  $\text{cos } (-20^\circ) < \text{sen } (-35^\circ)$

Está (ão) correta(s) apenas:

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e II.

e) I e III.

5) A procura por emprego em certa empresa obedece a função  $f(t) = 2500 + 1215 \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi \cdot t}{3} \right)$ , com t em meses contados a partir de janeiro de 2010 e f(t) o número de pessoas.

a) Determine o número máximo de pessoas que procuram emprego nessa empresa por mês.

b) Determine o número mínimo de pessoas que procuram emprego nessa empresa por mês.

6) Determine o sinal de:

a)  $\text{sen} \frac{3\pi}{4}$

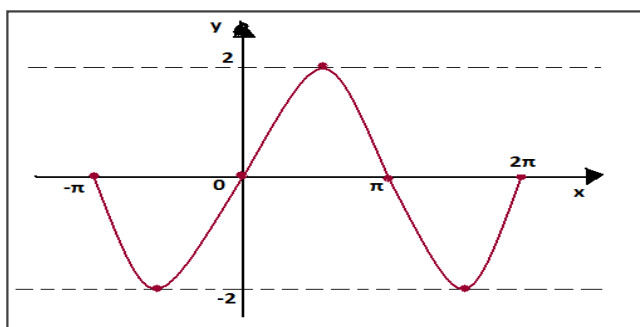
b)  $\text{cos} \frac{5\pi}{3}$

c)  $\text{sen} - \frac{3\pi}{4}$

d)  $\text{cos} - \frac{5\pi}{3}$

e)  $\text{tg} \frac{7\pi}{3}$

7) Observe a figura abaixo:



Ela apresenta um trecho da função  $f(x) = 2 \text{ sen } x$ . Responda as seguintes perguntas:

- Qual é o período da função?
- Qual é a amplitude da função?
- Para quais valores de  $x$   $f(x)$  é positivo?
- Qual o domínio dessa função?