UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

LEDEVANDE MARTINS DA SILVA

COMPREENSÃO DE IDEIAS ESSENCIAIS AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES VIA RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS

CAMPINA GRANDE – PB
2013

LEDEVANDE MARTINS DA SILVA

COMPREENSÃO DE IDEIAS ESSENCIAIS AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES VIA RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração em Educação Matemática, na linha de pesquisa em Metodologia e Didática, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE – PB
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

S586c Silva, Ledevande Martins da.

Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas. [manuscrito]. / Ledevande Martins da Silva. – 2013.

306 f. : il. color.

Digitado

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, 2013.

“Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática”.

1. Álgebra. 2. Função matemática. 3. Pesquisa pedagógica. I. Título.

21. ed. CDD 512

LEDEVANDE MARTINS DA SILVA

COMPREENSÃO DE IDEIAS ESSENCIAIS AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES VIA RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração Educação Matemática, na linha de pesquisa Metodologia e Didática, em cumprimento à exigência para obtenção do grau mestre em Ensino de Ciências e Matemática

Aprovado em 27/05/2013.

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade / UEPB

Orientador

Profª. Dra. Abigail Fregni Lins / UEPB

Lourdes de la Rosa Onuchic

Profª Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic / UNESP

Ledevande Martins da Silva

Assinatura do aluno

Dedico aos meus pais: Gerudite Martins da Silva e Juvenal Martins da Silva (in memorian).

À minha irmã: Luana Cristina Martins (in memorian)

Aos meus sobrinhos, estudantes de Engenharia: Marcus Henrique Martins Lopes, Matheus Martins Lopes e José Nilton da Silva Filho.

E a todos meus alunos do primeiro ano do Ensino Médio, turma de 2012, que me inspiraram na elaboração desta dissertação de mestrado.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter-me permitido chegar até aqui.

Aos meus pais pela educação recebida.

Aos meus irmãos pela torcida.

Aos amigos, Carlos Gomes de Lima Junior pelo incentivo, encorajamento, paciência, leituras e revisão de texto; Freddy de Paula Batista Cursino pelas aulas de Língua Inglesa e revisão de texto; Reginaldo Clécio Santos pela revisão geral do texto; Marinez Cavalcanti Brito e Marcos Cavalcanti Brito Junior pelo apoio recebido durante todo esse período.

À Diretora Maria Zélia Correia pela aceitação de realização desta pesquisa na sua escola.

Aos professores do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UEPB.

Aos colegas do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-modernidade (GEPEP) e demais colegas que tive o privilégio de conhecer no mestrado.

À professora Dra. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque pelas valiosas contribuições na disciplina Ensino-Aprendizagem de Funções na qual fui ouvinte.

Aos professores da banca: Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic e Dra. Abighail Fregni Lins pelas excelentes contribuições dadas que me ajudaram na tessitura deste trabalho.

Ao orientador Prof. Dr. Silvanio Andrade pelas orientações recebidas durante todo o processo de escrita com dicas e sugestões de um pesquisador em Educação Matemática com um olhar especial para a sala de aula, fazendo-me enxergar um pouco mais longe.

“A utopia está lá no horizonte. Me aproximo dois passos, ela se afasta dois passos. Caminho dez passos e o horizonte corre dez passos. Por mais que eu caminhe, jamais alcançarei. Para que serve a utopia? Serve para isso: para que eu não deixe de caminhar” *(Eduardo Galeano)*

R E S U M O

SILVA, L. M. Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas. 2013. 306 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.

Na presente pesquisa investigamos compreensões de ideias essenciais de funções por alunos e analisamos as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas. Nosso olhar se voltou para a literatura da Álgebra Escolar ao ensino-aprendizagem do conceito de função. Há muitas pesquisas sobre o ensino de funções que revelam a importância deste tema. Tomamos como referências teóricas, o ensino-aprendizagem de funções ao longo do currículo com as representações múltiplas de funções e o desenvolvimento de compreensão essencial de funções por Cooney, Beckmann e Lloyd. Para o trabalho em sala de aula optamos pela resolução, proposição e exploração de problemas, na qual interação e mediação foram elos para formação de conceitos, conforme Vygotsky. A pesquisa foi qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica, de acordo com Lankshear e Knobel, na qual o professor pesquisa sua própria prática em sala de aula. Para o levantamento dos dados usamos notas, descrições, análises de aulas e as produções de alunos. O trabalho de campo foi realizado com uma turma de 1º ano do Ensino Médio em uma escola Pública Estadual de Pernambuco na cidade de Recife. A ação/interação em sala de aula ocorreu com a formação de grupos, propiciando o trabalho de atuação na Zona de Desenvolvimento Proximal. As descrições e análises das aulas apontam, basicamente, dificuldades conceituais e de conversão entre representações diversas de funções. Os resultados evidenciaram que uma compreensão de ideias essenciais de funções se dá mediante transições entre essas ideias em múltiplas interpretações, características e conexões entre elas. A conclusão final deste trabalho evidenciou que resolução, proposição e exploração de problemas favorecem possibilidades de desenvolver compreensões essenciais de funções e extensões contextuais mais abrangentes na promoção da cidadania.

Palavras-chave: Funções. Representações. Resolução de problemas. Pesquisa pedagógica.

A B S T R A C T

SILVA, L. M. Understanding of essential ideas to the learning-teaching of functions via solving, posing and exploration of problems. 2013. 306 p. Dissertation (Master's degree) – State University of Paraíba - UEPB

In this present research we have investigated understandings of essential ideas of functions by students and we have analyzed the contributions of the methodology for learning-teaching Mathematics via solving, posing and exploration of problems. Our focus has turned to literature from Algebra School to the learning-teaching of the concept of function. There are many researches about teaching of functions that reveal the importance of this theme. We have taken as theoretical references the learning-teaching of functions along the curriculum with the multiple representations of functions and the development of essential understanding of functions by Cooney, Beckmann and Lloyd. To work in the classroom we have chosen solving, posing and exploration of problems using interaction and mediation as links to the formation of concepts accordingly to Vygotsky's ideas. The research was qualitative in pedagogical research way according to Lankshear and Knobel, in which the teacher research his own classroom practice. For the survey data we have used notes, descriptions and lessons analysis as well as students productions. Fieldwork was conducted with a group of student from first year High School in the Public School of State of Pernambuco in the Recife city, the action/interaction in the classroom has occurred with the formation of groups, providing work of performance in the Proximal Development Zone. The descriptions and lessons analysis pointed out basically conceptual and conversion difficulties among different representations of functions and the results have showed that an understanding of essential ideas about functions occurs by transitions among these ideas in multiple interpretations, characteristics and connections to one another. The final conclusion of this study has shown that solving, posing and exploration of problems have allowed possibilities of developing essential understanding of functions as well as broader contextual extensions in citizenship promoting.

Key words: Functions. Representations. Problem solving. Pedagogical research.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 11
2. UM OLHAR PARA A LITERATURA SOBRE O ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES E O PROBLEMA DA PESQUISA... 18
2.1. Da álgebra escolar ao ensino-aprendizagem do conceito de função 18
2.2. Um olhar para dissertações e teses produzidas no Brasil 32
2.3. Problema da pesquisa 39
3. ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES AO LONGO DO CURRÍCULO E A RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS 43
3.1. Representações múltiplas no ensino-aprendizagem de funções 43
3.2. Compreensão de ideias essenciais de funções para o Ensino Médio......................41
3.2.1. O conceito de função 51
3.2.2. Covariação e taxa de variação 68
3.2.3. Famílias de funções 72
3.2.4. Combinação e transformação de funções 79
3.2.5. Representações múltiplas de funções 83
3.3. A função ao longo do currículo 89
3.4. Resolução, proposição, exploração de problemas e formação de conceitos em Vygotsky.. 95
4. CAMINHAR METODOLÓGICO DA PESQUISA..113
4.1. Pesquisa qualitativa na modalidade pedagógica.. 113
4.2. Trabalho de campo da pesquisa.. 116
4.3. Turma de alunos 118
4.4. Levantamento dos dados 119
4.5. Ação/interação em sala de aula 119
5. DESCRIÇÕES E ANÁLISES DAS AULAS.. 123
5.1. Primeiros contatos...122
5.2. Unidade didática I : Conceito de função 125
5.2.1. Descrição e análise do encontro 01 125
5.2.2. Descrição e análise do encontro 02 131
5.2.3. Descrição e análise do encontro 03 136
5.2.4. Descrição e análise do encontro 04 143
5.2.5. Descrição e análise do encontro 05 148

5.2.6. Descrição e análise do encontro 06 154
5.3. Unidade didática II – Função Afim 159
5.3.1. Descrição e análise do encontro 07 159
5.3.2. Descrição e análise do encontro 08 164
5.3.3. Descrição e análise do encontro 09 169
5.3.4. Descrição e análise do encontro 10 175
5.3.5. Descrição e análise do encontro 11 182
5.3.6. Descrição e análise do encontro 12 188
5.3.7. Descrição e análise do encontro 13 194
5.3.8. Descrição e análise do encontro 14 199
5.3.9. Descrição e análise do encontro 15 204
5.4. Unidade didática III: Função Quadrática 210
5.4.1. Descrição e análise do encontro 16 210
5.4.2. Descrição e análise do encontro 17 214
5.4.3. Descrição e análise do encontro 18 220
5.4.4. Descrição e análise do encontro 19 224
5.4.5. Descrição e análise do encontro 20 230
5.4.6. Descrição e análise do encontro 21 237
5.4.7. Descrição e análise do encontro 22 244
5.4.8. Descrição e análise do encontro 23 251
5.5. Unidade didática IV: Função Exponencial 256
5.5.1. Descrição e análise do encontro 24 257
5.5.2. Descrição e análise do encontro 25 262
5.5.3. Descrição e análise do encontro 26 270
5.5.4. Descrição e análise do encontro 27 278
5.6. Fechamento: Síntese da experiência didática em sala de aula........276
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS 290
REFERÊNCIAS 301

1. INTRODUÇÃO

Ao longo da nossa experiência acadêmica/docente percebemos que o conteúdo de *função* e as questões metodológicas, que dizem respeito em como abordar este tema, vêm nos inquietando e nos preocupando. Como fazer com que os alunos possam desenvolver e compreender as ideias essenciais desse conceito? *Função* é um dos conteúdos principais da Matemática que está presente no dia a dia das pessoas sem que elas na maioria das vezes percebam a sua existência, desde a compra de pãezinhos em uma padaria, no estabelecimento de relações entre quantidade e preço a pagar, às tabelas e gráficos tão comuns nos jornais e revistas que representam mudanças e variações ocorridas dentro dos diversos fenômenos da natureza e sociais. *Que compreensões de ideias essenciais de funções apresentam os alunos?* Diante da importância desse tema, acreditamos que, se os alunos forem capazes de desenvolver essas ideias fundamentais de funções no Ensino Médio, eles serão capazes de usar esses conhecimentos para enfrentar desafios da vida real, bem como também servir de instrumento para fortalecer sua formação como cidadão. *Quais as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, aliadas ao uso de representações múltiplas, para o estudo de funções?*

O tema função aparece nas aulas de Álgebra Escolar na Educação Básica, no 9º ano do Ensino Fundamental e com mais intensidade no 1º ano do Ensino Médio. Também aparece em outras disciplinas da Matemática Superior, onde ela é um dos objetos de estudo na disciplina de Cálculo e Análise nos cursos de graduação. O conteúdo função é comumente introduzido no 9º do ensino fundamental onde os alunos analisam padrões e desenvolvem uma noção informal de variável. Depois, eles aprendem a representar padrões em tabelas e analisam como as grandezas variam juntas (covariação). No Ensino Médio, os alunos analisam estas relações e constroem famílias de funções, estudando as características de cada função em particular. Na Universidade, eles estendem essas aquisições com domínios de funções que incluem números complexos onde podem expandir suas noções sobre famílias de funções (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Percebemos também que, apesar de haver registros significativos com mudanças nos livros didáticos da Educação Básica, nos currículos, ou mesmo nos nossos discursos de professores de Matemática, contrariando nossas falas, nas nossas práticas docentes, há uma tendência muito forte ao formalismo, à apresentação da definição formal de função seguida de lista de exercícios. Frequentemente acabamos repetindo o modelo de ensino de Matemática no qual fomos formados, com seu caráter de rigor e precisão de acordo como eles nos foram apresentados durante a formação inicial, muito embora reconhecêssemos a importância de se trabalhar resolução de problemas nas aulas de Matemática. Contrariando as recomendações e orientações dessa metodologia para a sala de aula, observamos que alguns livros didáticos mostram uma situação-problema no início de cada capítulo do conteúdo *função*, mas não explora tal situação, servindo ela mais de pretexto para introduzir o assunto e justificar a contextualização no ensino de Matemática. Este direcionamento nos faz acreditar que tal visão, acaba por subestimar nossos alunos com o julgamento de que eles só seriam capazes de resolver e explorar problemas mediante o domínio de determinadas definições, regras e fórmulas matemáticas.

Aliado a toda essa problemática de natureza metodológica, tudo indica que os alunos chegam à escola querendo aprender e, com o passar dos dias escolares, vão se desmotivando pelos estudos. Por isso, torna-se árdua e ao mesmo tempo desafiante nossa tarefa de professor para ensinar funções em turmas de adolescentes do Ensino Médio, em um mundo cada vez mais complexo, com problemas que não mais são aqueles que nós adultos estávamos habituados a lidar no nosso cotidiano escolar. Daí, sentimos necessidade de enfrentar essa resistência, fazendo com que, em sala de aula, houvesse uma participação mais ativa dos alunos, cujo engajamento efetivo, por parte deles, é percebido nas tomadas de decisões e iniciativas mais espontâneas durante os processos de resolução, proposição e exploração de problemas realizados via aplicação de um conjunto de atividades propostas. Enfim, aceitamos a tarefa de estimular os alunos, possibilitando-lhes a descoberta e a exploração de ideias essenciais à compreensão do conceito de função.

Percebíamos inicialmente que os alunos chegavam ao Ensino Médio, acostumados apenas a lidar com incógnita em uma equação. Mas, agora precisavam pensar em como duas variáveis se relacionam e aí justamente identificamos, através da nossa experiência docente, que muitos alunos se sentiam desconfortáveis diante dessa novidade, e uns poucos percebiam que estavam vendo uma coisa completamente nova, a ideia de que uma coisa varia em função de outra. Observamos também, na nossa experiência de professor de Ensino Médio, que se os alunos não conseguissem realizar bem a transição das equações para as funções, deixariam de notar que as funções foram criadas para representar mudanças e transformações e que contém propriedades e características comuns para cada função em particular. Acreditamos que quando os alunos compreendem bem como ocorre essa variação, eles conseguem estudar o comportamento dessas variações e fazem as conexões necessárias ao aprender funções. Portanto, os alunos precisam compreender bem funções. Quando isso não acontece, eles frequentemente apresentam uma visão estreita e limitada de funções. Assim lidam com funções como se lidassem com equações, e não percebem que nas funções, as letras passam a descrever processos, representando fenômenos do mundo real.

Inicialmente, nossa dissertação busca situar nosso problema de pesquisa dentro da Álgebra Escolar no que se refere ao ensino-aprendizagem de função, delimitando nosso enfoque diante da literatura. Encontramos muitas pesquisas sobre o ensino de funções que revelam um grande interesse e importância de estudo para os pesquisadores da Educação Matemática. As pesquisas basicamente tratam dos aspectos conceituais e de representações diversas de funções, tanto do ponto de vista da concepção do aluno quanto do professor e outras tantas abordam o uso de novas tecnologias como ferramenta de auxílio para o ensino de funções.

Para fundamentarmos teoricamente nossa pesquisa, trazemos as representações múltiplas ao ensino-aprendizagem de funções: o papel das representações no ensino e aprendizagem de Matemática pelos autores Goldin e Shteingold (2001) e apresentamos as vantagens e desvantagens de cada representação de função pelos autores Friedlander e Tabach (2001). Para o desenvolvimento de uma compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções, destacamos Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), idealizadores das cinco grandes ideias de funções: conceito de função; covariação e taxa de variação; combinação e transformação de funções e representações múltiplas de funções. Dando continuidade, destacamos a presença do tópico função ao longo do currículo de Matemática no qual nos baseamos, principalmente, nos artigos de Kilpatrick e Izsák (2008) e nos documentos curriculares Nacionais e Estadual.

Sabemos que, nas séries iniciais, a função matemática mesmo de maneira intuitiva está presente na observação de regularidade de padrões. Nas séries finais do Ensino Fundamental, os alunos começam a generalizar padrões da Aritmética e, logo em seguida, tornam-se capazes de relacionar grandezas que variam. Já, no Ensino Médio a espinha dorsal dos conteúdos da Matemática é função que ganha uma roupagem mais formal. E, nesse momento, sempre nos inquietou o porquê das aulas de Matemática sobre funções, ao invés de resgatarmos essas primeiras ideias que foram mal compreendidas, ou não foram compreendidas de fato, despejarmos no estudo de funções, ideias recheadas de informações secundárias como os recursos aos diagramas de flechas, função injetora, sobrejetora, bijetora, inequações rebuscadas de funções diversas, das mais simples as mais complicadas, tais como as famigeradas logarítmicas e trigonométricas. E, no entanto, o que é essencial, o que é verdadeiramente importante, ainda continuar sendo pouco explorado.

Essencial não está posto no sentido do que é gerador, atrelado à gênese do objeto, mas no sentido do que é indispensável, necessário, fundamental, básico para a compreensão deste objeto matemático. Entendemos por isso os conteúdos matemáticos que tenham relevância social traduzidos em ideias - representações mentais de uma entidade matemática e compreensões essenciais por meio de um conjunto de características de um objeto matemático que se unificam em um conceito. O trabalho do professor de Matemática, neste sentido e direção consistirá, dentre outras coisas, em selecionar o essencial do secundário e, por meio da metodologia de ensino-aprendizagem via resolução, proposição e exploração de problemas fornecerá o desenvolvimento de uma compreensão das ideias essenciais relacionadas ao conceito matemático que nos propomos a estudar, o estudo das funções.

Para a temática explorando função, Van de Walle (2006) remete às grandes ideias de função e enfatiza as representações múltiplas de funções. No entanto, foi com a leitura de uma publicação do NCTM (National Council Teachers Mathematics – Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos) que encontramos explicitamente as ideias fundamentais e compreensões essenciais de funções para o Ensino Médio, pelos autores Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), os quais reuniram cinco grandes ideias de funções e incorporaram um conjunto de compreensões essenciais inerentes a essas ideias. Dentre elas, podemos destacar a primeira que trata do conceito de função e a quinta que trata das representações múltiplas de funções. Pois, assim como o número, a *função* é um conceito unificador de muitas ideias e linguagens matemáticas que precisa ser compreendido por alunos de Ensino Médio como um instrumento de grande valia para a aquisição da linguagem científica.

A primeira, já bastante investigada pelas pesquisas em Álgebra Funcional, o que não significa esgotamento, e a última nos chamou mais atenção porque na resolução de problemas, os alunos mobilizam representações externas, inicialmente são representações pessoais e, mais na frente, essas representações se tornam mais convencionais, são instrumentos visíveis e podem ser materialmente analisadas por meio das produções dos alunos. Muito embora esse produto de representações externas seja extraído de processos internos de representações com formas e ideias imbuídas de muita complexidade.

Em nossa pesquisa, no levantamento bibliográfico, evidenciamos que no cenário internacional, as representações múltiplas em *Álgebra e Funções* vêm sendo investigadas no campo da Educação Matemática, no final da década de 80 e início de 90. Sobretudo, a partir do uso de novas tecnologias, inicialmente com o advento de calculadoras gráficas e, mais recentemente, através de aplicativos computacionais, ou ainda na resolução de problemas. Porém, não encontramos pesquisas que tenham focado, especificamente, no desenvolvimento de uma compreensão de ideias essenciais de funções por alunos no cenário das pesquisas brasileiras, obviamente não estamos incluindo seus fragmentos e sim a coordenação entre essas ideias e compreensões essenciais de funções e a realização de conexões entre elas.

Finalmente, apresentamos a resolução, proposição e exploração de problemas com enfoques e contribuições diversas na perspectiva de uma construção de uma metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática, ressaltando o uso das representações múltiplas como elo mediador, elas auxiliam o processo de codificação e descodificação no trabalho com a exploração de problemas. Por isso, embasamos o trabalho dessa metodologia em uma visão interacionista de acordo com Vygotsky, tomando como referências os textos de Vygotsky (2007; 2008) e Van der Ver e Valsiner (2009), no qual o trabalho compartilhado, a interação, a mediação envolvidos no processo de ensino-aprendizagem de Matemática venham favorecer a criação de um ambiente de aprendizagem para formação de conceitos em que possamos desenvolver uma compreensão de ideias essenciais de funções.

Acreditamos que esse arsenal teórico pode nos ajudar a responder nosso problema de pesquisa: *Que compreensões de ideias essenciais de funções apresentam os alunos? Quais as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de*

Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, aliada ao uso de representações múltiplas, para o estudo de funções?

A pesquisa é qualitativa baseada nas caracterizações de Lüdke e André (1987) e Bogdan e Biklen (1994) como pesquisa que busca compreender e não simplesmente explicar fatos e eventos. Adotamos a pesquisa qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica por Lankshear e Knobel (2008) na qual o professor deve pesquisar sua própria prática visando ao melhoramento profissional e à qualidade no ensino de Matemática. Apresentamos o trabalho de campo da pesquisa, turma de alunos, levantamento/coleta de dados e como se deu a ação/interação da pesquisa em sala de aula.

Acreditamos que, por meio de aulas ministradas, notas de aulas, descrições e análises de aulas e produções dos alunos; possamos evidenciar compreensões de ideias essenciais de funções por alunos com a criação de um ambiente (sala de aula) de cooperação e interação de onde surgirão condições para o levantamento/coleta de dados. Não recorremos à gravação nem filmagem porque no universo de uma turma de 44 alunos as ações poderiam perder naturalidade e pelo fato de considerarmos ser possível realizar algumas anotações em sala de aula a partir de observações relevantes a nossa investigação e descrevermos as aulas sempre ao final de cada sessão.

Esta dissertação pretende apontar e evidenciar compreensão de ideias essenciais de funções por alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma Escola Pública Estadual da cidade de Recife por meio de uma aplicação de um conjunto de atividades em situações-problemas através da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, aliada às representações múltiplas que no trabalho de exploração de problemas passa a ser uma ferramenta de codificação e descodificação. Ressaltamos ainda que as atividades selecionadas foram trabalhadas na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) dos alunos do ponto de vista vygotskiano do termo. Em outras palavras: que não estejam além nem aquém das potencialidades a serem desenvolvidas pelos alunos; visando a uma melhoria da qualidade de ensino-aprendizagem de funções matemáticas.

Percebemos, também, que as possibilidades de investigação sobre as compreensões de ideias essenciais de funções por alunos são bastante amplas. Por isso, limitamos nossas descrições e análises de aulas ministradas, enfocando basicamente o raciocínio funcional nos seguintes aspectos: conceitual, linear, quadrático e exponencial. Por essa razão, dividimos as unidades didáticas em quatro partes: I – Conceito de Função; II – Função Afim; III – Função Quadrática e IV – Função Exponencial. Elementos estes constituintes de um recorte de um contínuo de uma sala de aula de Matemática no trabalho com a temática das funções.

Finalmente, temos as descrições e análises das aulas de cada encontro, nas quais surgiram os resultados e considerações finais desta dissertação em que apresentamos uma síntese do nosso estudo, enfatizando os principais resultados obtidos por meio da análise dos dados que foram levantados durante as ações e interações que ocorreram em sala de aula. Apontamos também a necessidade de futuras pesquisas que possam contemplar aspectos que por ventura não tenhamos abarcado dentro da discussão sobre o processo de ensino-aprendizagem voltado para uma compreensão de ideias essenciais de funções por alunos, tendo em vista a sua amplitude e abrangência ao longo do currículo escolar.

Em nossa experiência, como formador de professores de Matemática, sobretudo na participação em eventos científicos por meio de minicursos e oficinas que foram ministrados, pudemos observar que os próprios professores pareciam não evidenciar os conceitos científicos que estão embutidos no desenvolvimento de uma compreensão de ideias essenciais de funções, embora saibamos que as expectativas de compreensões por alunos, não são as mesmas para o professor. Desse modo, vislumbramos a possibilidade de outros estudos futuros serem realizados utilizando as ideias e compreensões essenciais de funções na concepção dos professores de Matemática da Educação Básica, mas isso seria uma outra pesquisa diferente da atual investigação.

Finalizamos este estudo, indicando que uma compreensão de ideias essenciais de funções por alunos pode ser modificada ao longo da Educação Escolar, em razão das diversas abordagens aplicadas. No entanto, é possível que esse fato não seja elucidado na sua completude em sala de aula porque isso se dará ao longo do currículo. Nesse caso, entendemos que essas considerações contribuem ao menos para abertura de diversas possibilidades para pesquisas no desenvolvimento de uma compreensão essencial de funções, ampliando o olhar para os currículos escolares, a formação de professores de Matemática e o pesquisador.

2. UM OLHAR PARA A LITERATURA SOBRE O ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES E O PROBLEMA DA PESQUISA

Nesse capítulo, delimitamos nossa pesquisa que está inserida no campo das investigações em Álgebra Escolar, apresentando concepção de Álgebra Escolar como atividade de engajamento coletivo para o desenvolvimento do raciocínio algébrico segundo Sessa (2009) e concepções de Álgebra em Usiskin (1988/1995), destacando a ideia de variável de maneira multifacetada que precisa ser muito bem construída pelos alunos nas aulas de Álgebra na Escola Média. Apontamos dificuldades de transições, sobretudo entre a Álgebra das equações para a Álgebra das funções. Nossa pesquisa se situa no interior do campo de investigações em Álgebra Escolar que envolve a compreensão e a aquisição do conceito de função – Funcionalidade ou Raciocínio Funcional. Revisamos a literatura que apontam dificuldades de compreensão do conceito de função pelos autores Markovits, Eylon e Buckheimer (1995) e Cooney et al (2002). Em seguida, nosso olhar se volta para as dissertações e teses produzidas no Brasil sobre o ensino de funções. Finalmente, refletimos acerca de questões, de motivações, de orientações metodológicas sobre o desenvolvimento com compreensão de conteúdos matemáticos que nos inspiraram a formular o problema da pesquisa na linha das investigações em resolução de problemas em sala de aula.

2.1. Da Álgebra Escolar ao ensino-aprendizagem do conceito de função

Ao longo da nossa experiência, como professor de Matemática, na Educação Básica percebemos que a Álgebra Escolar, apesar do seu caráter abstrato, está fortemente presente no dia a dia, o que nos deixa instigado a investigar mais sobre esta temática e sua aplicação no contexto de sala de aula:

> Quando pensamos em Álgebra, concebemos sua aprendizagem como um conjunto de práticas associado a um campo de problemas constituídos a partir de conceitos e de suas propriedades. Práticas que são inscritas – e escritas – em determinada linguagem simbólica, com leis específicas que regem a configuração de um conjunto de técnicas. Todos esses elementos complexos – problemas, objetos, propriedades, linguagem simbólica, leis de conversão das expressões, técnicas de resolução dentre outros entram na tessitura do trabalho algébrico (SESSA, p.7, 2009).

Para muitos pesquisadores da Educação Matemática, existe um razoável consenso de que o desenvolvimento do pensamento algébrico se dá, necessariamente, por meio de atividades inter-relacionadas nas quais os alunos se encontram engajados no seu grupo de estudo. As ideias da álgebra são importantes se elas forem úteis ao desenvolvimento de outras ideias, se articularem e conectarem umas às outras, e não como uma lista de regras, de fórmulas e de fatos isolados. Nesse sentido a Álgebra Escolar é concebida como uma atividade algébrica de engajamento coletivo que se constitui em uma poderosa ferramenta na resolução de problemas através da exploração de ideias matemáticas fundamentais (SESSA, 2009). Entretanto, a Álgebra "é uma fonte de confusão e atitudes negativas consideráveis entre os alunos". Esse comentário faz parte de um estudo de recordações de adultos sobre suas experiências ao aprender Matemática na escola, feito na Universidade de Bath do Reino Unido em 1982 (BOOTH, 1995). Passados 30 anos, esse é um sentimento que poderia povoar a mente de muitos dos nossos alunos nos dias atuais.

Mesmo no início da segunda década do século XXI, a Álgebra ainda não está democratizada e, sim, continua *assustando* a maioria dos nossos alunos. Existe uma forte tensão, para os professores a Álgebra representa a ferramenta matemática por excelência. Podemos dizer que eles se formam numa Matemática algebrizada. Enquanto, os alunos, por outro lado veem a Álgebra como fonte infinita de incompreensão e de dificuldades insuperáveis (SESSA, 2009).

Uma das razões para esse estado de coisas é que se dedica uma carga horária extensiva a Álgebra Escolar na maioria das escolas e currículos dada a sua grande importância em detrimento de outros temas igualmente relevantes. No entanto, o seu ensino continua sendo inadequado e os nossos alunos continuam apresentando muitas dificuldades ao lidar com a Álgebra. Apesar dos PCN (1997,1998) e demais publicações propor o ensino de Álgebra na escola mediante exploração de situações-problemas e problematização de contextos aritméticos e geométricos na construção de abstrações e generalizações, de grandezas incógnitas e variáveis, como alternativa de superar essas dificuldades com os alunos estabelecendo conexões entre os conhecimentos matemáticos.

Outro ponto, que parece crucial, é a confusão no uso das letras em Álgebra, ora representam incógnitas, variáveis, parâmetros, dentre outros. Ou ainda, quando os alunos interpretam as letras como representações de números, há uma forte tendência a considerar que as letras representam valores específicos únicos e não números genéricos ou variáveis. Podemos apontar, também, como elemento que traz bastante dificuldade e confusão no estudo da Álgebra, uma concepção da Álgebra simplesmente letrista e manipulativa.

Usiskin (1988/1995) tem sintetizado quatro concepções de Álgebra para o ensino de Matemática:

1) *Álgebra como Aritmética generalizada*: é o marco da passagem da Aritmética para a Álgebra, é a introdução das letras na Matemática. Neste caso, as letras podem ser usadas como números quaisquer, para ilustrar uma propriedade operatória da Aritmética e na observação de regularidades na generalização de ideias matemáticas. As variáveis são vistas como generalizadoras de modelos aritméticos.

2) *Álgebra como ferramenta de resolução de problemas*: o procedimento algébrico passa a ser considerado como uma ferramenta poderosa na resolução de problemas que não poderiam ser resolvidos pela Aritmética, ou quando a resolução aritmética for considerada longa e cansativa. Neste caso, a substituição do raciocínio aritmético para o algébrico, faz com que o indivíduo possa elaborar uma equação, manipular os membros dela, usar propriedades de equivalência em uma igualdade, até encontrar a sua resolução. As variáveis são vistas como incógnitas.

3) *Álgebra como estudo de relações entre grandezas*: Usiskin toma como exemplo a fórmula da área de um retângulo, $A = b \cdot h$, enfatizando que, nessa expressão, há relação entre três grandezas: A, b e h. Para descobrir o valor de uma dessas grandezas, isso dependerá do valor das outras duas. Neste caso, podemos considerar a relação de dependência entre grandezas, que é uma das concepções do conceito de *função* em Matemática. Considerando que a concepção de Álgebra como o estudo de relações entre grandezas pode começar com fórmulas, a distinção crucial entre esta concepção e a anterior é que, neste caso, *as variáveis variam*. As variáveis são consideradas parâmetros (um número do qual dependem outros números) ou argumentos (representa os valores do domínio de uma função). Somente, no contexto dessa concepção existem as noções de variável independente e variável dependente.

4) *Álgebra como estudo das estruturas*: relacionada à Matemática Superior. Usiskin aponta que o estudo de Álgebra nos cursos superiores envolvem estruturas

como grupos, anéis, domínio de integridade, corpos e espaços vetoriais. Na concepção da Álgebra como estudo das estruturas, a variável é pouco mais que um símbolo arbitrário. Na Matemática da Escola Média, isso pode ser identificado, quando realizamos operações e fatorações com polinômios sem significados, tornando-se objeto arbitrário de estrutura algébrica.

Ainda segundo Usiskin (1995), comumente o estudo da Álgebra Escolar está associado com o estudo das variáveis. Entretanto, nem sempre as representações feitas por letras estão associadas à ideia de variação.

Portanto, não é fácil definir a Álgebra. Sabemos que a Álgebra Escolar é muito diferente da Álgebra das Estruturas ensinada nos cursos superiores. E nesse contexto das concepções de Álgebra Escolar, Usiskin (1995) diz que o próprio conceito de variável é *multifacetado*, por isso não podemos reduzir a Álgebra ao estudo das variáveis. Em seu trabalho esse autor utiliza cinco igualdades, todas representando um produto de dois números que é igual a um terceiro:

1) $A = b.h$

2) $20 = 5x$

3) $senx = cosx \cdot tgx$

4) $1 = n \cdot (1/n)$ com $n \neq 0$.

5) $y = kx$

Cada uma delas tem um caráter diferente. A primeira (1), comumente, denominamos de fórmula; a segunda (2) de equação; a terceira (3) de identidade, a quarta (4) de propriedade e a quinta (5) de uma equação de uma função que traduz uma proporcionalidade direta. Esses nomes diversos refletem os diferentes usos dados à ideia de variável. Em (1), A, b e h representam a área, a base e a altura e têm caráter de coisa conhecida em uma fórmula matemática. Em (2) tendemos a pensar em x como incógnita. Em (3), x é o argumento de uma função, isto é, ele representa os valores do domínio de uma função. Em (4), a igualdade generaliza um modelo aritmético em n. Em (5), x é o argumento de uma função, y o valor e k uma constante ou parâmetro dependendo do contexto em que ela for usada. Portanto, somente em (5) há o caráter de *variabilidade*, do qual resulta o termo variável.

Diante do exposto para o aluno a ideia de variável acaba ficando pouco clara, e mesmo quando o aluno interpreta a letra como a representação de um número, as pesquisas em Álgebra Escolar apontam que os alunos acabam associando, sempre a ideia de equação no sentido de buscar um valor fixo para a letra.

Caraça (1951/1984) nos esclarece que a variável por consequência, não pode ser número. Porém, ela consiste no poder de criação convencional de um símbolo representativo de qualquer dos números de um conjunto numérico disposto convenientemente:

> Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionaremos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: x. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos de variável (CARAÇA, 1951/1984, p.127).

Os PCN de Matemática para o Ensino Fundamental II (Terceiro e quarto ciclos) apontam a mesma dificuldade de construção do conhecimento matemático sobre variável na Educação Fundamental que vai se estender até ao final do Ensino Médio, quiçá até o ensino superior, devido à falta de exploração adequada deste conceito:

> A noção de variável, de modo geral, não tem sido explorada no ensino fundamental, e por isso, muitos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, ou seja, para eles a letra sempre significa uma incógnita (BRASIL, 1998, p.118).

Portanto, a única coisa que fica para o aluno é a *noção* de equação. Provavelmente, o ensino de Álgebra tenha enfatizado tão somente a manipulação de expressões e equações algébricas por meio de exercícios repetitivos, e, o conceito de variável acabou não sendo construído ao longo do Ensino Fundamental e Médio.

Por outro lado, “A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja uma outra função para as letras ao identificá-las como número de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações” (BRASIL, 1998, p.118). Ainda segundo este mesmo documento curricular nacional, além de abstrações e generalizações às situações sobre variações de grandezas fornecem um excelente contexto para desenvolver a *noção* de função.

Pesquisas em Educação Matemática, tais como o projeto de pesquisa SESM – *Strategies and Errors in Secondary Mathematics* (Estratégias e Erros na Matemática Secundária), realizada no Reino Unido de 1980 a 1983; Booth (1988/1995) e outros estudos mais recentes apontam que os alunos têm fortes dificuldades com Álgebra devido a sua linguagem e suas representações, que vem a se constituir em grande complexidade para a sua compreensão, conforme especificamente temos percebido no conteúdo de função em Álgebra que envolve o denominado raciocínio algébrico, ou melhor, o raciocínio funcional.

O projeto de pesquisa SESM da década de 80 envolveu alunos da oitava à décima série (idade entre 13 e 16 anos) que vinham estudando Álgebra no contexto de um programa integrado desde a sétima série em que se adotou a abordagem de identificar os tipos de erros que os alunos comumente cometiam nessa matéria e investigar as razões desses erros. A pesquisa concluiu que independentemente da idade e experiência em Álgebra, verificaram-se erros semelhantes em todas as idades (BOOTH, 1995).

Pesquisadores, como a australiana Lesley Booth (1984/1995) e outros, apontam que na Aritmética os símbolos indicam ideias de ação a ser efetuadas, o sinal de $(+)$ representa a operação e o $(=)$ a resposta esperada. Nas equações algébricas resolvemos problemas colocando x na incógnita e o sinal de igualdade é visto como indicador de uma relação de equivalência em vez de um símbolo para uma resposta a uma operação. Porém, quando o x é uma variável relacionada ao valor y, representando uma função, a linha do raciocínio algébrico muda para o raciocínio funcional, onde as letras apresentam relação de dependência entre variáveis.

Essas transições da Aritmética para Álgebra e da Álgebra das equações para a Álgebra das funções confundem os nossos alunos, de tal maneira que na nossa experiência docente no Ensino Médio podemos encontrar a mesma dificuldade de compreensão em relação à função, pois o sinal de $(=)$ passa a adquirir um sentido ligeiramente diferente, não mais uma equivalência de expressão algébrica como na equação e sim como uma relação entre grandezas variáveis, ou seja, o $(=)$ passa a significar *definido por*. Além dos símbolos de igualdade e de operações vemos que no início da transição da Aritmética para a Álgebra a letra x representa um termo desconhecido que se quer achar, aos poucos ela vai adquirindo um novo *status*, como por exemplo, o de variável no estudo das funções.

Do ponto de vista didático-pedagógico segundo Sessa (2009) existem duas vias de acesso à Álgebra: 1) Explorar as ideias de abstração e de generalização. Na sala de aula de Matemática é um projeto sempre presente para o professor, lançarmos um problema para trabalhar, a partir ou por meio dele, aspectos gerais, em contextos matemáticos ou extra-matemáticos. Generalizar é achar características que unificam; é reconhecer tipos de objetos e de problemas. 2) Um outro caminho relacionado ao anterior, prende-se à ideia de dependência entre duas grandezas ou quantidades e ao uso das letras para expressar essas quantidades variáveis. Tanto as atividades ligadas à generalização como a entrada funcional fornecem oportunidades para chegar ao conceito de função, compreendido aqui no sentido de uma relação que apresenta restrição imposta em um dado domínio.

Explorar didaticamente esse caminho implica considerar a compreensão e aquisição do poderoso conceito de função, analisar do ponto de vista do ensino, toda a complexidade inerente à tarefa de modelização dos fenômenos da realidade, explorar ainda as representações múltiplas que tal noção envolve e refletir sobre o papel dos processos de conversão entre representações na compreensão e aquisição de sentido do conceito de função, particularmente, analisar o complexo sistema representacional que constituem, por exemplo, os gráficos de funções.

A existência de um grande número de pesquisas na área da educação algébrica voltada para a sua linguagem e o seu simbolismo, típico do pensamento algébrico, permitem-nos evidenciar que a temática da função é subconjunto do campo maior, a Álgebra Escolar. Porém, por si só, o tópico função já se constitui em um grande campo de inquérito na educação algébrica que já ganhou espaço próprio, fazendo-se presente nos grandes eventos internacionais da área dedicados às pesquisas mais específicas da educação algébrica.

Dos tópicos de Álgebra, trabalhados no Ensino Fundamental e Médio, pesquisas indicam que o conteúdo função tem trazido inúmeras dificuldades no aprendizado por parte dos alunos. Há falta de uma integração entre Aritmética e Álgebra, ou mesmo a falta de elementos basilares que possam ajudar os alunos no

Ensino Médio a poder formalizar, sistematizar e aplicar conteúdos que deveriam ter sido construídos na Educação Fundamental.

Provavelmente, o estudo da Álgebra tenha ocorrido de maneira inadequada, não se fez presente ao longo da escolaridade de nossos alunos e foi apresentado em momentos estanques, totalmente desarticulado das suas representações e conexões necessárias à sua compreensão e aquisição de tais ideias, ou não chegou mesmo a ser visto em sua plenitude e vigor, ou mesmo pode não ter marcado significativamente para os alunos. Eles possivelmente não conseguiram enxergar a importância científica e social, como para vida deles de tais conteúdos.

A função matemática deve servir de instrumento de relevância social na formação intelectual das crianças, jovens e adultos, sobretudo no Ensino Médio para o estudo de fenômenos e situações das ciências da natureza e social: tal como no estudo de movimento uniforme, uniformemente variado e circular na Física que podem ser conectados ao estudo da função afim, quadrática e trigonométrica, na Química, estudando o comportamento dos gases, articulando esse conteúdo com a função recíproca que modela a proporcionalidade inversa, em Biologia, estudando o crescimento exponencial de vírus e bactérias, em Economia e Matemática Financeira, observando o fenômeno da inflação de um país ou o montante de uma aplicação em caderneta de poupança.

Na própria Matemática oportunizando a articulação da função com outros tópicos da Matemática, como exemplo as progressões aritméticas e geométricas que podem ser pensadas como funções afins e exponenciais respectivamente de domínios discretos. Finalmente, na formação para a cidadania por meio da análise e interpretação crítica de tabelas e gráficos em jornais, revistas e outros meios de comunicação, pois, um cidadão bem alfabetizado matematicamente não vai se deixar enganar por propagandas e divulgações de informações falsas e também saberá realizar leitura de tabelas e gráficos apresentados em noticiários de TV, revistas e jornais.

Portanto, alguma compreensão de função matemática, e principalmente certa familiaridade com a representação de função faz parte da alfabetização matemática, sendo um Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional (INAF) de nível 3, no qual os sujeitos apresentam capacidade de desenvolver estratégias de resolução de problemas que demandam uma série de operações, realizam cálculos proporcionais e também devem demonstrar certa familiaridade com algumas representações gráficas como mapas, tabelas e gráficos (FONSECA, 2004).

Vemos a grande importância dada a essas representações de função na inclusão social do cidadão, a ponto dele não ser considerado plenamente alfabetizado matematicamente se não apresentar algum domínio de leitura e interpretação delas. Acreditamos que o avanço dessa compreensão na identificação e no estabelecimento de relações entre grandezas, que variam no contexto de situações do dia a dia, são ferramentas úteis ao exercício pleno da cidadania. Entretanto, de acordo com o INAF (2002), nesse nível encontram-se apenas 21% da população brasileira entre 15 a 64 anos (FONSECA, 2004).

Atualmente, a maioria dos alunos tem os primeiros contatos com o conceito de função no 9º do Ensino Fundamental e, mais formalmente, no 1º ano do Ensino Médio na Matemática Escolar, embora os currículos mais recentes recomendem o trabalho, com as ideias da álgebra e do raciocínio funcional de modo intuitivo desde as primeiras séries iniciais, devendo-se prosseguir o seu desenvolvimento ao longo dos três anos do Ensino Médio.

Retomando as dificuldades de aprendizagem no ensino de Álgebra, vamos agora tratar de dificuldades, mais específica, do ensino de função. Conforme Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) apontam em seus estudos, o conceito de função é de uma grande complexidade que se torna parcialmente responsável pelas dificuldades dos alunos do nono e décimo ano, pois a definição de função, da forma como é ensinada atualmente, envolve muitos conceitos – domínio, contradomínio, conjunto imagem, regra de correspondência e, também, as pesquisas realizadas atestam grandes dificuldades na sua aprendizagem devido às diferentes formas representacionais.

De acordo com os autores acima, devemos ter certeza de que esses conceitos sejam bem compreendidos em todas as suas representações, antes de continuarmos a ensinar mais coisas sobre funções, ou teremos de optar por deixar de lado alguns de seus aspectos. Acreditamos, na possibilidade de podermos selecionar os conteúdos de funções que tenham relevância social e desenvolver ideias essenciais à compreensão de funções para os alunos do Ensino Médio, deixando de lado aspectos secundários que poderão ser vistos e aprofundados em níveis mais elevados de ensino, tais como o tratamento rigoroso e formal na apresentação e desenvolvimento dos conteúdos de funções.

As pesquisas têm evidenciado que é mais fácil para os alunos lidarem com a representação gráfica de função do que com a forma algébrica. A razão disso é, provavelmente porque a representação gráfica é mais visual, favorecendo assim uma leitura e análise mais rápida de suas informações. Diante dessas constatações, devemos nos passos iniciais do desenvolvimento do conceito de função, trabalhar muito mais a forma gráfica (MARKOVITS, EYLON, BRUCKHEIMER, 1995), muito embora nossa experiência docente tenha revelado que a compreensão da representação gráfica de função em sala de aula não é assim tão fácil.

No que diz respeito às dificuldades dos alunos, para localizar pré-imagens[1] e imagens nos eixos em representação gráfica, Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) declaram que os alunos não percebem que na representação gráfica o eixo x representa o domínio e o eixo y o contradomínio, ao passo que os pontos do gráfico representam os pares (pré-imagem, imagem).

Efetivamente, existem alunos que sentem dificuldade de localizar pontos de coordenadas no gráfico, principalmente os pontos de coordenadas que passam pelos eixos das abscissas $(0, x)$ e eixos das ordenadas $(0, y)$ e muitos não identificam os conjuntos domínio e contradomínio por meio dos eixos dos x e dos y, respectivamente. Diante do exposto, há fortes indícios da existência de dificuldade atribuída ao conceito de função para muitos alunos em fazer conexão entre os componentes da definição

---

[1] No artigo sobre *Dificuldades dos alunos com o conceito de função* dos autores Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) e em textos de livros de Pré-Cálculo, compreende-se que *pré-imagem* ou *imagem inversa* é o conjunto de elementos do domínio da função, associados aos elementos do contradomínio que queremos. Basicamente, a pré-imagem é o caminho inverso que responde a questão recíproca: Para um elemento de B quais os valores de x que possuem esse elemento de B como imagem? $f^{-1}(y) = \{x \in A / f(x) \in y\}$. Já pares (pré-imagem, imagem) são pontos de coordenadas que pertencem à curva representada graficamente na função e não pares (pré-imagem, imagem) são pontos de coordenadas que estão fora da curva da função. Segundo Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995), de modo geral, os alunos identificam com acertos as pré-imagens, simplesmente verificando se os números pertencem ao domínio. Para determinar se um dado número é imagem pela função f, são necessárias três operações: 1) verificar se o número pertence ao contradomínio; 2) calcular a pré-imagem e 3) testar se essa pré-imagem pertence ao domínio. Já para identificar pares (pré-imagem, imagem) também são necessárias três operações semelhantes: 1) verificar se o primeiro número pertence ao domínio; 2) se o segundo pertence ao contradomínio e 3) se o segundo número é imagem do primeiro pela função dada.

verbal (domínio, contradomínio) de função e os componentes da representação gráfica (pré-imagem, imagem)

Os pesquisadores israelitas Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) ainda evidenciam uma dificuldade subsidiária à representação gráfica, envolvendo o papel duplo dos pontos situados nos eixos: são pontos do plano, com coordenadas $(x, 0)$ ou $(0, y)$, e como tais podem representar pares (pré-imagem, imagem) correspondentes a intersecções do gráfico com um dos eixos; mas são também pontos dos eixos, e como tais podem representar pré-imagens ou imagens. Esta é uma dificuldade intrínseca da representação gráfica e em nenhuma das outras representações (algébrica, tabular, dentre outras) temos esse problema.

Percebemos essa dificuldade na nossa experiência docente em sala de aula, pois foi necessário chamar a *atenção* dos alunos para compreenderem, por exemplo, que o coeficiente linear b da função afim $f(x) = ax + b$ é a ordenada do ponto de intercepto do eixo y, e a raiz ou zero da função é a abscissa do ponto onde a reta intercepta o eixo x. Tais dificuldades são de natureza mais analítica do que do ponto de vista funcional.

Outro elemento que podemos citar, baseado na nossa experiência profissional docente, diz respeito à concepção de ensino da Matemática, conforme a qual a aula se desenvolve, por exemplo, da seguinte forma: na introdução da função afim, define-se a função como todo $f(x) = ax + b$ onde a, b pertencem a R com $a \neq 0$. Em seguida, o professor dá exemplos, resolve questões propostas e, posteriormente, o aluno responde a uma lista de exercícios, na maioria das vezes sem compreensão e de maneira mecânica. Isso porque, além das dificuldades intrínsecas à complexidade conceitual, ainda temos o problema de concepção de ensino que dificulta bastante uma compreensão efetiva e significativa de função matemática em sala de aula.

Outro exemplo ainda de dificuldade elencada por Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) ocorre na passagem de uma forma de representação de uma função para outra. Os pesquisadores verificaram que a passagem da representação algébrica para a gráfica foi mais fácil que no sentido contrário. Eles apontam que isso acontece porque, na passagem da representação gráfica para a algébrica, as manipulações algébricas envolvidas são mais complicadas. Podemos concluir a partir desses resultados de pesquisa que a conversão gráfica para algébrica também vai exigir uma análise e interpretação do gráfico minuciosa para se chegar à forma algébrica.

Observamos ao longo da nossa prática docente que, no ensino de função, há uma compartimentação das famílias de função. No seu ensino, cada família é explorada num capítulo separado e, dessa forma, o aluno reconhece a família que deve usar pelo capítulo que está estudando. Expandindo essa explicação, temos o seguinte: no capítulo de função afim só aparece função afim, no de função quadrática, todos os exercícios referem-se à função quadrática, na de função exponencial, o aluno resolve somente exercícios sobre função exponencial, e assim por diante. Desse modo, os alunos acabam não compreendendo, essencialmente, como distinguir uma família de função de outras por suas características, propriedades e relações entre elas.

O estudo das funções lineares é construído sobre o trabalho com proporções e, desde o Ensino Fundamental, os alunos são familiarizados com muitas situações do mundo real em que duas quantidades são diretamente proporcionais, levando, possivelmente, a um reducionismo por parte dos alunos ao considerar dois pontos definindo sempre uma reta e não outra curva como, por exemplo, a hipérbole na função recíproca, a parábola na quadrática, a curva exponencial dentre outras possibilidades (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010). Aí, provavelmente, reside o problema dos alunos terem dificuldades em distinguir funções lineares de não lineares.

De modo que, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, agora, de modo mais aprofundado, exploramos ideias e compreensões que emergem de situações-problema como, por exemplo, problemas de característica linear, quadrática, exponencial, dentre outros. E essas experiências com função linear e não linear em diferentes representações levam-nos à análise e classificação de muitas famílias de funções no Ensino Médio. A partir de tais experiências, os alunos se preparariam para o uso de função como ferramenta para compreender e descrever variações em diversos contextos sociais e, especialmente, na própria Matemática (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Um aspecto importante: é que os nomes dados às diferentes funções associadas à sua expressão simbólica e que, nem sempre, os professores levam os alunos a pensar: o nome é dado segundo o lugar onde a variável se encontra. Exemplos:

$f(x) = ax + b$, a variável no polinômio é função polinomial do 1º grau (função afim);

$f(x) = ax^2 + bx + c$, a variável no polinômio é função polinomial do 2º grau (função quadrática);

$y = |x + 3|$, a variável no módulo é função modular;

$y = 3^x$, a variável no expoente é função exponencial;

$y = \log(5 - x)$, a variável no logaritmo é função logarítmica;

$y' = \frac{dy}{dx}$, a variável na derivada é uma função diferencial.

Eis uma boa explicação para o aluno compreender a linguagem e o significado da classificação das funções em famílias de funções, a partir da localização da sua variável em uma dada função.

Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) apontam para a dificuldade que os alunos têm em lidar com representações gráficas e para sua falta de atenção para o domínio e a imagem de uma função. Por exemplo, os alunos raramente distinguem as representações gráficas de uma função da forma $f(x) = ax + b$, quando o domínio e a imagem são o conjunto de números reais, de outro caso em que o domínio e a imagem são o conjunto dos números inteiros ou números naturais. Este caso ilustra a confusão que os alunos fazem de apresentar uma variação num conjunto contínuo quando a variação é num conjunto discreto.

Cooney et al (2002 apud Cooney; Beckmann; Lloyd, 2010) enfatizam os vários modos em que a função pode ser representada e destacam as dificuldades de alunos em desenvolver flexibilidade na mobilização entre representações algébricas e outros tipos de representações. No entanto, de acordo com esses autores, os alunos, especialmente quando usam tecnologias apropriadas, geralmente se tornam mais habilidosos na visualização de gráficos de função em detrimento de suas formas algébricas. Portanto, o aluno continuaria a trabalhar com representações restritas de funções.

Diante destas dificuldades que os alunos encontram na aprendizagem de função, podemos refletir sobre quais as implicações que estas dificuldades de aprendizagem apresentam para o seu ensino. Acima foram feitas algumas considerações de dificuldades que os alunos enfrentam quando aprendem, por exemplo, sobre o conceito de função, sobre a importância de função na compreensão de fenômenos do mundo real e a interação entre funções e suas representações diversas.

Foi refletindo sobre as dificuldades ao estudar função, tais como as que discutimos, que optamos por fazer um estudo centrado na compreensão de ideias essenciais de funções e, dentre elas, destacam-se o conceito de função e suas representações. Vale salientar que, nessa investigação, consideramos relevante levar os alunos a compreender a ideia de função num sentido mais amplo e dinâmico como uma relação de dependência entre duas grandezas, uma variando em função da outra (covariação), e também perceber a presença de tal conceito em contextos reais e representá-los em suas diversas representações (algébrica, tabular e gráfica, por exemplo), além das conexões com os temas extra-matemáticos nos diálogos e discussões travados na ação e interação em sala de aula.

Ainda que o tópico de *função* seja de grande importância não só na Matemática, dentro dos conteúdos da Álgebra, mas também nas outras Ciências Naturais e Sociais do Ensino Fundamental à Universidade, observamos pouca compreensão por parte dos alunos referente a essa temática. Por outro lado, “as funções compõem uma área principal da Matemática que é crucial para os alunos aprenderem e desafiante para nós, professores, ensinarmos” (COONEY; BECKMANN E LLOYD, 2010, p.1). Por isso, torna-se imprescindível tentarmos perscrutar uma possível compreensão dessa temática no processo de ensino-aprendizagem.

Na literatura acadêmica mais recente, têm sido também apontadas cinco grandes ideias, ou ideias fundamentais a serem exploradas nesse tópico de conteúdo no Ensino Médio, de acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), que são: 1) O conceito de função; 2) Covariação e taxa de variação; 3) Famílias de funções; 4) Combinação e transformação de funções; e 5) Representações múltiplas de funções que fornecem as compreensões essenciais para o desenvolvimento desse tópico da Matemática.

Segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), devido a sua importância no estudo de muitos temas da Matemática, desde as séries iniciais até o nível universitário, *função* constitui um dos tópicos mais importantes da Matemática Escolar. Ela promove um meio para pensar quantitativamente sobre os fenômenos do mundo real e o contexto para estudar relações e variações. As cinco grandes ideias favorecem o ensino e aprendizagem de função, por isso sua importância na compreensão delas por parte dos alunos e o desafio de seu ensino por parte do professor.

Um desafio que se faz necessário enfrentar é o de colocar a temática da função e suas representações no contexto de estudo da Álgebra Escolar, desenvolvendo, assim, o raciocínio algébrico e, particularmente, o que se convencionou chamar de raciocínio funcional pelo seu caráter dinâmico, integrador e representacional que venham a favorecer e realizar as devidas conexões por meio desses conhecimentos.

As dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo de função devem-se à grande complexidade de seus conceitos e suas representações. Nesse sentido, levando-se em consideração tais dificuldades e por necessidade de delimitação de estudo, optamos, nesta investigação, por trabalhar e defender a concepção de função no Ensino Médio atrelada às cinco grandes ideias e suas compreensões essenciais de *função*, enfatizando tanto os aspectos conceituais quanto o contexto das representações múltiplas de funções.

2.2. Um olhar para dissertações e teses produzidas no Brasil

Há, no Brasil, uma grande quantidade de pesquisas (dissertações e teses) em Educação Matemática sobre a temática *função*. Muitas dessas pesquisas envolvem a construção e as dificuldades na compreensão de *função* por alunos, bem como a concepção de professores em relação a este conceito matemático. Além disso, há outras voltadas para a perspectiva histórica. Ainda podemos observar, dada a grande importância do tema e as dificuldades que são geradas pela própria complexidade do conceito, que todas essas pesquisas levaram a uma produção de softwares educacionais que são utilizados como ferramenta para o ensino de funções. Além disso, esse fenômeno culminou na utilização de softwares, Internet e outros recursos tecnológicos nas pesquisas produzidas na área de Educação Matemática.

Destacamos, entre essas, seis pesquisas não só a título de ilustração, mas por sua pertinência para a área de inquérito relacionada à construção e compreensão do conceito de *função* e de suas representações na Educação Básica, sobretudo no Ensino Médio.

1. A dissertação de Edelweiss Benes Brandão Pelho (2003) introduz o conceito de função por meio da compreensão das variáveis dependentes e independentes e do relacionamento entre elas. Fundamenta seu trabalho na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e, do ponto de vista metodológico, utiliza a Engenharia Didática na elaboração, aplicação e análise de sequência didática de ensino bem como o software Cabri-Geomètre II. A sequência foi aplicada para 30 alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola particular do interior do estado de São Paulo. O autor conclui seu trabalho mostrando que os resultados obtidos apresentam uma evolução por parte dos alunos na apreensão do conceito de *função*, favorecido pela compreensão e relacionamento entre as variáveis e por conta das articulações entre os diferentes registros de representação da função.

Nesse trabalho, está explícito o desenvolvimento do conceito de *função* como relação entre grandezas (fórmula) e implicitamente o uso das representações múltiplas, embora não tenha se referido a essa forma, pois, o trabalho de Pelho (2003) se baseou na Teoria das Representações de Registros Semióticos de Duval que, de forma resumida, afirma que um conceito matemático para ser adquirido, no mínimo, precisa passar por dois tipos diferentes de registros de representações. Duval afirma que para a aquisição de um conceito matemático é necessário trabalhar tratamento, conversão e coordenação entre os diferentes registros.

2. A dissertação de Nilcéia Regina Ferreira Dominoni (2005) propõe a utilização de uma sequência didática que considera o tratamento, a conversão e a coordenação dos diferentes registros de representação da função exponencial. O estudo foi fundamentado na Teoria dos Registros de Representação Semióticos de Raymond Duval que afirma que a coordenação dos diferentes registros de representação pode propiciar a apreensão do conceito matemático. Na dissertação, a autora utilizou a metodologia Engenharia Didática na aplicação de uma sequência didática para alunos da primeira série do ensino médio de uma escola particular no interior do Paraná. A autora dessa pesquisa, por meio da análise das produções dos alunos, acrescentou a seguinte conclusão: as atividades envolvendo o tratamento, a conversão e a coordenação dos diferentes registros de representação contribuem para a apreensão do conceito de função exponencial.

Nesse trabalho, a autora focaliza essencialmente a função exponencial e sinuosamente a exploração das representações múltiplas. Ela aponta, nas considerações finais, que poderia também ter incluído atividades que possibilitassem a conversão do registro gráfico para o algébrico, pois esse tipo de conversão não foi muito enfatizado na sequência didática por ela elaborada. Esse trabalho nos levou a refletir como é possível explorar, na sua totalidade, o que compreendemos por *ideia* e *compreensões* de representações múltiplas de funções. Quando nos questionamos qual seria a essência das ideias e compreensões múltiplas para o desenvolvimento de um ensino que explore o raciocínio exponencial de maneira mais adequada para o trabalho em sala de aula no Ensino Médio.

3. A tese de Renata Rossini (2006) abordou os saberes docentes sobre o tema *função*: uma investigação das praxeologias. Teve como objetivo investigar a re(construção) do conceito de *função* por um grupo de professores de Matemática da Rede Pública Estadual de Ensino do Estado de São Paulo, ao desenvolverem coletivamente e aplicarem uma sequência didática para o ensino e aprendizagem do tema em uma sala de aula de oitava série dessa rede. Outro objetivo dessa pesquisa foi contribuir para a formulação de diretrizes destinadas à formação continuada de professores de Matemática e seu desenvolvimento profissional. Fundamentou o seu trabalho com a Teoria Antropológica do Didático (TAD) do autor Yves Chevallard da didática francesa, considerando que em um dado estudo, deve-se levar em conta a praxeologia ou organização matemática (realidade a ser construída) e a praxelogia ou organização didática (como essa realidade pode ser estudada). Além de outros referenciais, tais como a concepção de saberes curriculares defendidos por Tardif e Shulman; o conceito de saberes docentes segundo Tardif; a noção de concepção apresentada por Ponte e de concepções de Matemática defendida por Fiorentini. O método da pesquisa utilizado foi uma pesquisa-ação que postula a explícita interação entre pesquisadores e os participantes da pesquisa. Procedimentos metodológicos utilizados: questionários, mapas conceituais, caracterização dos sujeitos, descrição e análise do experimento e discussões sobre o experimento-piloto. Os resultados obtidos comprovaram a hipótese inicial deste trabalho de que a elaboração coletiva e as análises de uma sequência didática sobre funções e sua posterior aplicação em sala de aula puderam deflagrar um processo de construção de um conjunto de saberes docentes.

Destacamos também, como resultado relevante dessa pesquisa, que o acompanhamento da produção dos professores por parte da pesquisadora, revelou que, à medida que eles investiam suas energias na ação de redigir uma tarefa, retomavam as noções matemáticas e ampliavam seu discurso tecnológico. Assim, o professor se tornou produtor de conhecimentos e não só um técnico que aplicou uma tarefa proposta por um livro didático. Todos os professores são apresentados à concepção de *função* como correspondência entre dois conjuntos na sua formação inicial, mas foram as discussões sobre a organização didática em torno da concepção de *função* como máquina que levaram à re(significação) desse conceito ao final de todo um processo de formação.

Nesse trabalho, a autora indicou a necessidade de novas investigações sobre a formação de professores tendo como pano de fundo o conceito de *função* e levantou alguns questionamentos, dos quais destacaremos dois. Em primeiro lugar, caso a concepção de *função* como máquina não tivesse sido mobilizada, os professores teriam conseguido fazer a articulação das organizações que foram feitas durante o desenvolvimento da sua pesquisa? Em segundo lugar, de quais seriam as organizações mobilizadas se a sequência fosse destinada a alunos do Ensino Médio?

4. A tese de Giácomo Augusto Bonetto (2008) teve como propósito realizar uma constituição histórica de algumas práticas escolares mobilizadoras do objeto cultural *função*, na cidade de Campinas (SP), a partir de meados da década de 60 até meados da década de 90, período em que a Matemática Escolar brasileira esteve fortemente influenciada pelo Movimento da Matemática Moderna. Por isso, o autor constituiu uma base documental composta por entrevistas com professores, livros didáticos de Matemática, guias e subsídios curriculares produzidos pela CENP (Coordenadoria de Ensino e Normas Pedagógicas) do Estado de São Paulo. Com base no diálogo que o autor estabeleceu com esta base documental, procurou enfatizar, nessa história, as características idiossincráticas dessas práticas escolares de mobilização cultural.

Após o diálogo com a base documental, o autor pôde perceber que a primeira prática, *a de mobilizar funções em jogos de linguagem associadas a práticas cotidianas*, valendo-se de exemplos práticos ou próximos ao cotidiano dos alunos é muito comum nos relatos de vários professores na sua prática e de muitos livros didáticos, guias e subsídios de documentos oficiais. E a segunda, *a prática de apresentar aos alunos as funções em jogos de linguagem estruturadas*, segundo o estilo bourbakista[2], seguindo a sequência de objetos (conjuntos, produto cartesiano, relação, função como um tipo especial de relação) é o movimento observado até a década de 80. Enquanto que outros movimentos de restruturação/reorganização do ensino também condicionam essas mobilizações, bem como os valores que elas transmitem, os condicionantes institucionais que as formataram e as relações de poder moldadas no diálogo entre as diferentes práticas e comunidades de práticas.

O autor concebeu *função matemática* como objeto cultural, aproximando-a de uma concepção semiótico-estrutural de cultura, de tal modo que na análise do objeto fosse privilegiado seu caráter simbólico com diferentes significados em sua produção, reprodução e ressignificação por diferentes comunidades de prática, em diferentes práticas sociais associadas a diferentes atividades humanas.

5. A dissertação de Eliane Saliba Botta (2010) se referiu ao ensino-aprendizagem do conceito de função no Ensino Fundamental e no Médio, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A metodologia da pesquisa usada foi a de Thomas A. Romberg. A autora analisou as produções de seus alunos das diferentes séries dos ensinos Fundamental e Médio, realizadas em sala de aula como professora-pesquisadora, mostrando que é possível trabalhar o conceito de *função*, ainda que de maneira intuitiva, desde a 5ª série/6º ano do Ensino Fundamental e não somente a partir do 1º ano do Ensino Médio de maneira formalizada.

A autora passeia por diversos enfoques do tópico da *função* matemática, mostrando uma grande complexidade que vai do seu ensino, currículo, história do ensino de álgebra e função, aspectos históricos da álgebra e função, realiza um resgate

[2] Nicolas Bourbaki é o pseudônimo de um grupo de jovens matemáticos, majoritariamente franceses, formado em 1935, que tinha como objetivo fundamentar toda a Matemática na Teoria dos Conjuntos. O projeto ganhou bastante evidência por apresentar uma Matemática rigorosa e formal. O grupo se tornou muito respeitado pela comunidade matemática, embora, na época em que surgiu, tenha sido considerado muito polêmico (BOYER, 1998; BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010). O estilo bourbakista define função como uma relação entre dois conjuntos representados por pares ordenados.

do contexto da resolução de problemas como metodologia de ensino, trata da análise de erros e concepções errôneas, analisa e ilustra o trabalho com atividades e projetos por ela realizados com os seus alunos e sua reflexão como professora-pesquisadora sobre função matemática, aplicando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

6. Dissertação de Vilmar Gomes da Fonseca (2011) discute e avalia a utilização integrada do Mathlet como ferramenta nas aulas de Matemática no estudo da função afim e em turmas do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual. A metodologia empregada consiste na aplicação de uma sequência de atividades com o auxílio dos Mathlets e dois testes. Esse estudo está fundamentado na noção cognitiva do Conceito Imagem e Conceito Definição de David Tall e ShlomoVinner, na noção de Representações Semióticas de Raymond Duval e na noção de Obstáculo Epistemológico baseado nos trabalhos de Anna Sierpinska. Ele concluiu que o uso de alguns recursos tecnológicos tais como computadores e Internet podem contribuir significativamente para a abordagem de conteúdos matemáticos e auxiliar no processo de ensino-aprendizagem.

Percebemos que esse autor nos leva a refletir sobre os conceitos imagens que ficam nos nossos alunos ao final de um trabalho de construção de significados e sentidos para os conceitos definições trabalhados em sala de aula, pois, assim como precisamos chegar ao Ensino Médio com o conceito definição de *função*, nas mentes dos nossos alunos parece ficar o conceito imagem, algo como a relação entre grandezas, relação entre x e y em que y depende de x, dentre outras imagens de conceitos.

No trabalho desse autor, o referencial teórico de conceito imagem e de conceito definição, segundo os autores Tall e Vinner, diz que o aluno deve se apropriar de vários conceitos imagens, e, a partir daí, criar o seu próprio conceito definição, portanto as imagens são as representações mentais que o aluno cria na sua mente quando começa a pensar sobre um determinado objeto, enquanto a definição de conceito refere-se a toda forma de representar por meio de palavras o conceito imagem. Os autores dessa teoria ainda afirmam que a definição de conceito pode ser simplesmente memorizada pelo aluno ou pode ser aprendida de maneira significativa e relatada por ele.

O autor escolheu atividades que levassem os alunos a refletir sobre o conceito de função afim, mostrando sua utilidade na resolução de problemas do nosso cotidiano, de modo a superar os obstáculos relacionados às suas múltiplas representações e contribuindo para o enriquecimento da imagem desse conceito. O estudo dos obstáculos epistemológicos, de acordo com Sierpinska, trata da evolução histórica do conceito de *função* e discute a compreensão do conceito de *função* dos alunos e as suas dificuldades.

Tudo isso nos mostra as potencialidades e também as limitações de um dispositivo computacional como o software Mathlet, ou outro recurso como o material didático manipulativo, a resolução de problemas na formação de conceitos imagem e definição. Certamente, na dissertação de Fonseca (2011), os recursos tecnológicos contribuíram bastante na abordagem do conteúdo e no processo de ensino-aprendizagem de função afim comprovadamente através dos dois testes e de uma sequência didática durante a realização desta pesquisa que utilizou a teoria da Engenharia Didática, favorecida pela análise a priori e outra análise a posteriori.

A partir das pesquisas acima referidas, podemos perceber diversos enfoques teórico-metodológicos na tentativa de apreender significados para o mesmo objeto matemático *função*: Pelho (2003) enfatiza a compreensão do conceito de função a partir da ideia de variável e da relação de dependência entre elas; Dominoni (2005) enfatiza o trabalho envolvendo o tratamento, a conversão e a coordenação dos diferentes registros de representação para apreender o conceito de função exponencial; Rossini (2006) aponta uma deflagração de um processo de (re)construção de um conjunto de saberes docentes sobre a concepção de função a partir da mobilização da ideia de função como máquina de entrada e saída na elaboração coletiva e aplicação de uma sequência didática; Bonetto (2008) mostra função matemática como objeto cultural de diferentes comunidades de práticas, associado a diferentes práticas sociais, a diferentes atividades humanas que mobilizam funções em sua práticas escolares. Esses movimentos de restruturação/reorganização de ensino apresentam valores, institucionalizações e relações de poder; Botta (2010) mostra que é possível trabalhar o conceito de *função* de maneira intuitiva desde as séries iniciais do Ensino Fundamental II e não somente a partir do Ensino Médio; Fonseca (2011) apontou o uso de recursos computacionais como uma contribuição significativa para a abordagem do conteúdo e no processo de ensino-aprendizagem de função afim.

Em síntese, nesses trabalhos de pesquisa, o conceito de função perpassa inicialmente pela ideia de variável, enfatizando a relação de dependência entre elas; a mobilização da concepção de função como máquina de entrada e saída mobilizando saberes sobre função; a concepção Bourbakista de função como relação entre conjuntos de uma maneira mais estruturada e a ideia bastante original de função como objeto cultural de comunidades de práticas moldadas nas relações de poder em que elas são mobilizadas. Por outro lado, há uma tendência das pesquisas que trabalham com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica em apontar as representações múltiplas como ferramenta de apreensão do conceito de *função*, sugerindo o tratamento, a conversão e a coordenação das diferentes representações de funções como uma forma de superar a grande complexidade que as envolvem.

Essas dissertações e teses tomam como objeto de estudo a investigação em ensino de um conteúdo específico da Matemática, o objeto matemático *função*. O conceito de função é unificador para a compreensão do conhecimento matemático. É um conceito estudado em todos os níveis de ensino ao longo do currículo de toda a Matemática. De modo que o ensino-aprendizagem de funções tem se revelado um tema de grande interesse para as pesquisas em Educação Matemática e indicam novas direções para pesquisas futuras.

A nossa pesquisa, em particular, aborda cinco ideias fundamentais de funções matemáticas e, portanto, está inserida no campo das pesquisas sobre ensino de funções que não só abarca os aspectos conceituais do tema, mas também pretende contribuir para as reflexões sobre as dificuldades em transitar entre essas ideias e, do ponto de vista metodológico, trazer possibilidades para o trabalho em sala de aula na perspectiva da resolução, proposição e exploração de problemas. A nossa pesquisa vem contribuir para a expansão do conceito de *função* dentro do processo de ensino-aprendizagem deste tema. Isto não significa dizer que outras pesquisas não tratam dessas mesmas ideias, apenas os trabalhos analisados revelam que elas ainda não foram exploradas de forma integrada e relacional.

2.3. Problema da pesquisa

Neste trabalho, temos como propósito refletir sobre nossa própria prática em sala de aula, trazendo para a cena as recomendações da literatura acadêmica acerca de novas formas de abordagem do conceito de *função*, recomendações estas que objetivam desenvolver habilidades do pensar, de questionar e de dar sentido às ideias matemáticas na criação de um ambiente onde os alunos possam elaborar estratégias e resoluções e, assim, construir ativamente novas ideias e novos conceitos por meio de suas experiências e vivências matemáticas.

Isto não significa ensinar o aluno a repetir procedimentos mecânicos por meio de regras e fórmulas, mas o de levar a interpretar tais regras dentro de contextos matemáticos, e também fora deles. Os alunos compreenderão Matemática, quando forem capazes de avaliar suas próprias ideias e as de seus colegas. E ao professor cabe encorajá-los a levantar hipóteses, testá-las e desenvolver neles habilidades de pensar matematicamente, pois quem compreende melhor será capaz de explicar, usando uma variedade de representações matemáticas para o conceito de *função* e realizar transições e conexões com essas ideias e suas compreensões fundamentais.

Os contextos, as tabelas, os gráficos e as equações, por exemplo, são métodos poderosos de explorar as ideias de função e suas transformações. As diversas representações de funções podem ser compreendidas como modos de comunicar ideias matemáticas a outras pessoas, elas também são ferramentas poderosas de aprendizagem. Portanto, no nosso trabalho pretendemos contemplar o desenvolvimento de habilidades dos alunos em mudar de uma representação para outra como uma forma de ampliar a sua compreensão do conceito de *função*.

Construir e compreender algo no mundo real requer instrumentos, materiais e esforço humano. Os instrumentos que usamos para construir a compreensão são as nossas ideias prévias, ou seja, o conhecimento que possuímos e que foram construídos nas nossas relações sociais e culturais. Além dos recursos materiais, tais como, material impresso, calculadoras, dentre outros - para construirmos compreensão precisamos ver, ouvir ou até mesmo tocar os elementos fisicamente. Por outro lado, eles podem ser os nossos pensamentos e ideias por meio de ações refletidas. Por isso, para que os nossos alunos aprendam com compreensão, eles precisam pensar ativamente (VAN DE WALLE, 2009).

Construir e compreender uma nova ideia requer pensar ativamente sobre ela. As ideias matemáticas não podem ser despejadas dentro das cabeças de nossos alunos de forma passiva. Nas salas de aula, os nossos alunos precisam ser encorajados a refletir sobre as novas ideias, a trabalhar no estabelecimento e nos ajustes às redes conceituais já existentes e a desafiar suas próprias ideias ou as ideias de outros (VAN DE WALLE, 2009). Por isso, acreditamos que a criação de um ambiente favorável à resolução, proposição e exploração de problemas possa viabilizar esses processos, possibilitando, assim, o desenvolvimento de construção e compreensão de ideias matemáticas sobre funções. Desse modo, podemos também considerar essas metodologias de ensino-aprendizagem alternativas como uma ferramenta poderosa pelas quais os alunos desenvolvem suas ideias matemáticas. Aprender e fazer matemática perpassa por todos esses caminhos, enquanto os alunos resolvem, elaboram e exploram problemas indicando o modo como eles estão vivenciando a Matemática.

Compreendemos por *ideia* no sentido do dicionário como uma representação mental de uma entidade concreta ou abstrata de acordo com Ferreira (2001). Na Matemática, as ideias são representações mentais de uma entidade sempre abstrata. Como por exemplo, o conceito de *função*, formado por um conjunto de características, compreensões essenciais que se unificam em um conceito ou significação. "A compreensão pode ser definida como uma medida da qualidade e da quantidade de conexões que uma ideia tem com as já existentes" (VAN DE WALLE, 2009, p. 45).

Os educadores que trabalham na perspectiva da construção do conhecimento falam em ensinar grandes ideias, ao invés de fragmentar a Matemática em listas aparentemente infinitas de habilidades, regras, símbolos e fórmulas isoladas. As grandes ideias ou ideias fundamentais são apenas grandes redes de conceitos relacionados. A rede frequentemente é tão bem construída, que grandes quantidades de informação, podem ser armazenadas e recobradas como entidades únicas em vez de pedaços isolados. Assim, todos os procedimentos em Matemática podem estar conectados às ideias conceituais que expliquem por que eles funcionam. É essa completa conexão e integração de conceitos e procedimentos que deve ser a primeira meta do ensino de Matemática (VAN DE WALLE, 2009).

Uma das motivações que nos leva a ter interesse por esse tema diz respeito também a investigar as dificuldades dos alunos sobre concepção e representação de *função*, tentando determinar as causas possíveis desses problemas e apresentar possíveis estratégias e procedimentos de ensino que possam ajudá-los a superá-las. Descrever as dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de *função* e representação encontradas numa turma de primeiro ano do Ensino Médio, a fim de sugerir algumas modificações de procedimentos metodológicos que venham a dar um salto qualitativo no ensino e aprendizagem de função matemática. Entretanto, ficaremos com essa última sugestão: propor uma estratégia de ensino de função matemática no desenvolvimento de ideias e compreensões essenciais aplicando a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas aliada ao uso de representações múltiplas.

Em resumo, a pergunta norteadora deste trabalho é a seguinte: *Que compreensões de ideias essenciais de funções apresentam os alunos? Quais as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, aliadas ao uso de representações múltiplas, para o estudo de funções?*

Entretanto, mais importante do que dar apenas respostas a essas perguntas e considerações preliminares, faz-se necessário, através deste trabalho de investigação, trazer uma reflexão de uma prática docente que venha a contribuir para uma melhor compreensão dos fenômenos de ensino e aprendizagem que se constituem tão complexos como os acontecimentos de uma sala de aula onde o elemento surpresa estará sempre presente e guiará nossas reflexões a partir das vivências e práticas diárias como professor de Matemática.

Para que possamos apresentar ao menos um indício de respostas a essas questões apresentadas, devemos considerar alguns temas que dela surgem naturalmente: Representações Múltiplas no Ensino-Aprendizagem de Funções; Compreensão de Ideias Essenciais de Funções para o Ensino Médio; A função ao longo do Currículo Escolar; e, finalmente, a Resolução, Proposição, Exploração de Problemas e Formação de Conceitos em Vygotsky.

3. ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES AO LONGO DO CURRÍCULO E A RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS

Nesse capítulo, fundamentamos teoricamente nossa pesquisa, apresentando o papel das representações pelos autores Goldin e Shteingold (2001), as vantagens e desvantagens de cada uma das representações de funções pelos autores Friedlander e Tabach (2001), sugerindo o uso combinado das representações múltiplas de funções, e, depois, a compreensão de ideias essenciais de funções para o Ensino Médio, segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), explicitando-nos detalhadamente as cinco grandes ideias de funções, acompanhadas das suas respectivas compreensões essenciais que deverão ser desenvolvidas ao longo do currículo. Para nos situarmos historicamente no contexto curricular da função matemática, percorremos o caminho da abordagem do ensino de função como tema central presente nas diversas propostas de mudanças curriculares no Ensino de Matemática. Finalmente, apresentamos nossa proposta de trabalho metodológico para a sala de aula via resolução, proposição e exploração de problemas com contribuições de diversos pesquisadores da linha de pesquisa em Resolução de Problemas. Para fundamentarmos de maneira mais adequada, pedagogicamente, nos apoiamos nos processos de formação de conceitos em Vygotsky.

3.1. Representações múltiplas no ensino-aprendizagem de funções

Existe uma grande variedade de enfoques e concepções a respeito da teoria da representação que pode ser explicada pelo grande número de áreas do conhecimento humano interessadas nesse tema e pesquisas em Educação Matemática que utilizam essa teoria para se fundamentar. Em anos recentes, as pesquisas que envolvem as ideias sobre representação no ensino e na aprendizagem da Matemática assumem um papel considerável. Elas pertencem amplamente à Matemática, à Psicologia Cognitiva, à Resolução de Problemas, ao ensino da Matemática na sala de aula e ao uso de novas tecnologias nas quais a Matemática educacional é realizada (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001).

Mas o que significa, precisamente, a *representação* à luz do didático-pedagógico e o que fazemos para dar significado à representação de alguma coisa? Esse retorno deve estar nas questões filosóficas que carregam muito da natureza da Matemática.

> O termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado – em outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação Matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma (...) Além do mais, o termo é aplicável tanto aos processos e resultados observáveis externamente, como aos que ocorrem *internamente*, nas mentes dos indivíduos quando fazem Matemática (NCTM, 2000; tradução APM, 2008, p.75).

Dentre tantos outros que tratam das representações no ensino e na aprendizagem da Matemática, adotaremos Goldin e Shteingold (2001) para fundamentar este tema. Diante da grande complexidade envolvida na teoria das representações, esses autores trazem as principais ideias que nos ajudarão na tentativa de fazer uma síntese dessa discussão, a fim de mostrar a importância da *representação* no processo de ensino-aprendizagem da Matemática Escolar.

De um modo geral, as representações são divididas em internas e externas. Grosso modo, podemos defini-las assim: as representações externas são representações que podemos facilmente comunicar às outras pessoas; elas são as marcas sobre o papel, os desenhos, os esboços geométricos e as equações. Enquanto, as representações internas são as imagens que criamos em nossa mente para objetos e processos matemáticos. Essas apresentam muita dificuldade para serem descritas por sua natureza e capacidade de revelar a cognição dos indivíduos, por isso podem ser denominadas de representações mentais (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001).

> A representação matemática não pode ser compreendida de forma isolada. Uma fórmula específica ou equação ou um gráfico em coordenadas cartesianas só fazem sentido como parte de um sistema mais amplo dentro dos quais significados e convenções tenham sido estabelecidos. Os importantes sistemas representacionais para a Matemática e sua aprendizagem têm estrutura, de modo que diferentes representações dentro de um sistema estejam ricamente relacionados um a outro (...) A interação entre representação interna e externa é fundamental para efeito de ensino e aprendizagem. Quaisquer que sejam os significados e as interpretações do professor devem trazer uma representação externa, isto é, a natureza da representação do desenvolvimento interno dos alunos que devem permanecer de interesse principal (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001, p.1-2).

Muitas pesquisas em Educação Matemática evidenciam o fato de que muito da história da Matemática fala sobre a criação e o refinamento de sistemas representacionais, e muito do ensino da Matemática se refere à aprendizagem de alunos para trabalhar também com sistemas representacionais e resolver os problemas com eles. Atualmente, também se comenta bastante sobre as representações sociais de professores de Matemática do ponto de vista psicossocial, mas é algo que foge ao nosso enfoque sobre representações.

Não podemos, naturalmente, observar nenhuma representação interna diretamente. Antes, faremos inferências sobre representações internas de alunos sobre as bases de suas interações com as representações externas, do seu discurso sobre elas e a produção delas. Diante das considerações citadas, podemos inferir que a compreensão das relações existentes entre as várias representações de um mesmo conceito e a identificação das semelhanças e diferenças contribuem para um melhor desenvolvimento e compreensão conceitual por parte dos alunos, embora o professor só possa analisar diretamente as representações externas por meio das falas e das produções realizadas durante e após as tarefas por parte de seus alunos.

Para a nossa pesquisa, as representações ganham um papel importante na formação de conceitos a partir do momento em que entendemos o conceito como um conjunto de ideias e compreensões essenciais que estão inter-relacionados e, entre elas, estão as suas representações e seus sistemas de representações:

> Um conceito matemático é aprendido e pode ser aplicado pela extensão de uma variedade de representações internas apropriadas que tenham sido desenvolvidas, junto com o funcionamento de relações entre elas. Inferimos sobre a natureza das representações desenvolvidas, e sua adequação, em parte das interações individuais com a externa, convencionalmente desenvolveram sistemas de representações matemáticas e em parte de suas interações com situações não matemáticas (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001, p.6).

Diferentes pesquisas têm se focado em diferentes aspectos da importância da representação no ensino e na aprendizagem em Matemática. Algumas têm enfatizado representação em domínio específico da Matemática, tal como *funções*. Outras têm estudado muito bem, no espírito das ideias de George Polya, sobre resolução de problemas. Ainda outras têm feito trabalho sobre a incorporação de ideias por meio de dinâmicas conectadas às representações computacionais. Temos, assim, já apresentado alguns direcionamentos que as pesquisas nessa área vêm assumindo (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001). Atualmente, a inclusão do procedimento da representação no ensino da Matemática exerce um papel muito importante que vai além da pesquisa no tocante aos processos de ensino-aprendizagem, metodologia e didática e alcança a preocupação com a elaboração de currículos e também a formação de professores.

Dessa preocupação dos educadores matemáticos, resultou a publicação dos Standards 2000, oficialmente chamados *Principles and Standards for the School Mathematics* – Princípios e Padrões para a Matemática Escolar (NCTM, 2000) –, no quesito padrão de procedimento. O NCTM (2000) recomenda que os programas de Matemática do ensino pré-escolar ao 12º ano deverão habilitar todos os alunos para:

> Criar e usar representações para organizar, registrar e comunicar ideias matemáticas;
> Selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
> Usar as representações para modelar e interpretar fenômenos, sociais e matemáticos (NCTM, 2000; tradução APM, 2008, p.75).

Corroborando as ideias para o padrão de conteúdo *álgebra*, os Standards 2000 (NCTM, 2000) e as pesquisas em educação matemática recomendam que os alunos usem várias representações desde o início da aprendizagem em Álgebra. De acordo com os Standards (NCTM, 2000), é necessário estimular os alunos à representação de suas ideias, ainda que, inicialmente, eles recorram a formas de representações pessoais não convencionais, mas que façam sentido para eles. Entretanto, é importante que os alunos aprendam formas de representações convencionais, para facilitar tanto a sua aprendizagem em Matemática como também a comunicação de suas ideias matemáticas.

Destacamos dois autores, Friedlander e Tabach (2001), que apresentam quatro modos de representação essenciais à compreensão do ensino e aprendizagem da Álgebra Escolar.

O uso de representações verbais, numéricas, gráficas e algébricas tem o potencial de fazer com que o processo de aprendizagem da Álgebra, no caso particular das *funções*, seja significativo e eficaz. A fim de que este potencial seja utilizado na prática, devemos estar cientes das vantagens e desvantagens de cada representação. Esses autores apresentam-nas associadas a cada uma das formas de representação que identificam:

1) A representação verbal é geralmente usada apresentando um problema e é necessária na interpretação final dos resultados obtidos no processo de resolução de um problema. Um problema apresentado verbalmente cria um ambiente natural para a sua compreensão no contexto no qual está inserido e para a comunicação de sua solução. A representação verbal pode também ser um instrumento de resolução de problemas e pode facilitar a apresentação e aplicação de padrões gerais. Ela favorece a conexão entre a Matemática e outros domínios da academia e da vida cotidiana. Mas o uso da linguagem verbal, devido às próprias dificuldades de ordem linguística inerentes à língua materna, pode causar ambiguidade e conduzir a associações irrelevantes ou incorretas; ela é menos universal e a dependência dela incide sobre o estilo pessoal que pode ser apresentado como um obstáculo para a aprendizagem matemática.

2) A representação numérica é comum para os alunos no estágio inicial de estudo de Álgebra. Abordagens numéricas oferecem uma ponte conveniente e eficaz para a aquisição da Álgebra e frequentemente precede qualquer outra representação. O uso dos números é importante para uma primeira compreensão de um problema e na investigação de casos particulares. Entretanto, sua falta de generalidade pode ser uma desvantagem. Uma abordagem numérica não pode ser muito eficaz na prova de um quadro geral, como um resultado, porque alguns aspectos importantes nas resoluções de um problema podem ser perdidos. Assim, seu potencial, como uma ferramenta na resolução de problemas, pode, algumas vezes, ser bastante limitado. Entretanto, no estudo de funções esta representação aparece mais comumente como valores numéricos numa tabela – representação tabular – que deve ser explorada na tentativa de fazer investigações dos padrões numéricos dispostos na tabela de modo que o aluno possa aferir conclusões importantes na caracterização da função matemática que está sendo analisada.

3) A representação gráfica é eficaz em proporcionar uma imagem clara de uma função de variáveis reais. Gráficos são intuitivos e particularmente apelativos para os alunos que gostam de uma abordagem visual. Mas as representações gráficas podem não ter a precisão necessária, pois são influenciadas pelos fatores externos (tais como as escalas) e, frequentemente, apresentam uma só parte de um domínio ou alcance de um problema. A sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em questão.

4) A representação algébrica é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos. A manipulação de objetos algébricos é, por vezes, o único método de justificar ou provar declarações gerais. Contudo, um uso exclusivo de símbolos algébricos (em qualquer fase da aprendizagem) pode bloquear ou obstruir o significado matemático ou da natureza dos objetos representados e causam dificuldades em algumas interpretações de seus resultados para os alunos.

A importância de trabalhar com várias representações é um resultado dessas e de outras vantagens e desvantagens de cada representação e da necessidade de atender aos estilos individuais de pensamento de alunos. Assim, os responsáveis pela elaboração de currículos e os professores de Matemática deverão estar cientes da necessidade de se trabalhar em um ambiente de representações múltiplas – que é um ambiente que permite a representação de um problema e sua resolução em vários modos (geralmente algumas ou todas as quatro representações mencionadas acima). Embora cada representação tenha suas desvantagens, o uso da combinação delas pode cancelar as desvantagens e revelar uma ferramenta efetiva para o ensino e aprendizagem da Matemática (KAPUT, 1992 apud FRIEDLANDER; TABACH, 2001).

3.2. Compreensão de ideias essenciais de funções para o Ensino Médio

Inicialmente, estávamos interessados em desenvolver um estudo de uma compreensão do conceito de função por julgarmos essencial para os alunos o seu aprendizado. Caraça (1951/1984) mostra que, quando o homem percebeu que o movimento existia no mundo independente dele, buscou explicá-lo. Assim, na tentativa de explicar os fenômenos da Ciência, uma noção matemática importante precisou ser criada para entender movimento: função. Daí a origem do conceito de *função* estar intrinsecamente relacionada à necessidade do homem de observar regularidades em fenômenos do mundo real e de generalizar leis ou padrões. A essência desse novo instrumento matemático criado pelo homem está na correspondência de dois conjuntos, está presente desde o conceito de *número natural* e nos acompanha ao longo dos anos na Matemática Escolar e Superior.

Por outro lado, já tínhamos lido alguns textos sobre representações múltiplas de funções na disciplina *Ensino-Aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental e Médio* cursada no mestrado. Concomitantemente, líamos a publicação *Developing Essential Understanding of Functions Grades 9-12* dos autores Cooney, Beckmann e Lloyd (NCTM, 2010) apresentada em reuniões de orientação individual para a escrita da dissertação de mestrado. Essas atividades resultaram numa reflexão sobre as cinco grandes ideias de funções expressadas, assim como desenvolveram uma compreensão essencial de funções para o Ensino Médio.

As funções compõem uma área principal da Matemática, crucial para os alunos aprenderem, mas desafiante para os professores ensinarem. Os alunos do Ensino Médio precisam compreender funções e eles conseguem quando constroem pensamento quantitativo e relacional. Entretanto, às vezes, as aprendizagens realizadas apresentam uma visão estreita sobre o tema *função*. Nesse caso, muitas vezes os alunos tendem a limitar o conceito de *função* à equação ou regra e não o percebem na descrição ou na representação de fenômenos do mundo real (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Mas, afinal, o que são funções? Para Van de Walle (2006), as funções são relações ou regras que associam unicamente elementos de um conjunto a elementos de outro conjunto e que, numa relação funcional, uma variável (dependente) é definida em termos da outra variável (independente). Mas isto é um pouco formal para alunos que estão iniciando seu estudo de funções. Para esse autor, as funções são mais bem compreendidas em contextos de fenômenos reais que passam a fazer sentido para os alunos da educação básica.

Ainda conforme Van de Walle (2006), o raciocínio algébrico envolve uma busca por regularidade em tudo na Matemática e as funções são uma das mais poderosas ferramentas neste empenho. Elas são usadas para modelar todos os tipos de mudança no mundo real. Isto faz com que o conceito de *função* seja uma das grandes ideias da Matemática.

> Um estudo de funções é um estudo do modo de mudança em uma variável que afeta mudança em outra; é um estudo de variação conjunta de variáveis. Uma função é uma regra que define unicamente como a primeira ou variável independente afeta a segunda ou variável dependente. (VAN DE WALLE, 2006, p.284).

Já Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) vêm nos apresentar o processo de ensino-aprendizagem de funções focado nas cinco grandes ideias incorporadas às compreensões essenciais a cada uma delas, quais sejam:

1) Como as funções se distinguem de outras entidades matemáticas?

2) Como as taxas de variação caracterizam vários tipos de funções?

3) Como as funções podem ser classificadas dentro de famílias com características compartilhadas que são úteis à modelagem de fenômenos do mundo real?

4) Como as funções podem ser combinadas ou transformadas para criar novas funções?

5) Como as funções podem ser representadas em uma variedade de modos em que as relações e variações podem ser analisadas?

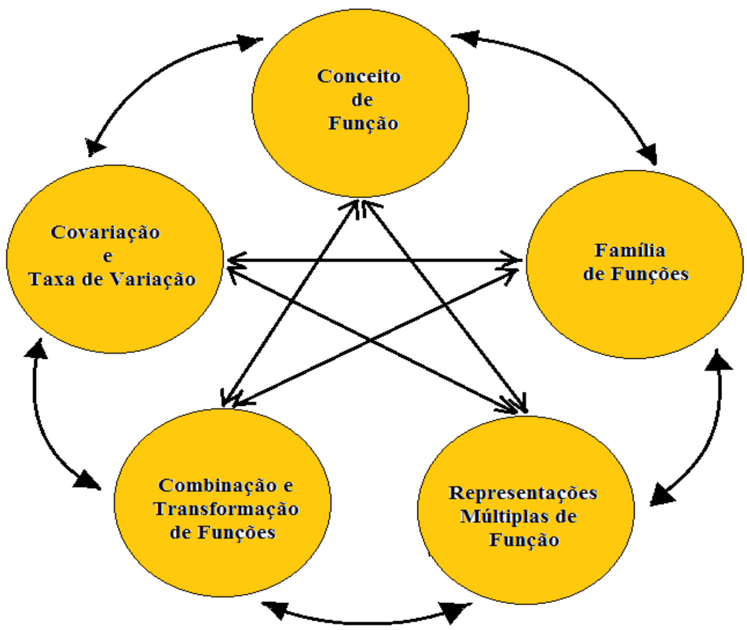


Figura 01: Modelo das cinco grandes ideias de função que foram idealizadas pelos autores Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), criado pelo autor desta pesquisa, inspirado nos modelos das cinco representações de funções de Van de Walle (2006).

Transitar em meio a cada uma delas pode ajudar a desenvolver novos conceitos e compreensões essenciais de funções. Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) salientam a importância de que os alunos sejam capazes de completar tarefas rotineiras tais como realizar conexões entre diversas representações de funções com sucesso. No entanto, é fundamental que eles desenvolvam uma habilidade para se mover entre as cinco ideias com fluência de modo que elas possam ir mais além dessas tarefas de rotina. Os alunos precisam desenvolver a habilidade de se mover facilmente entre as muitas interpretações de funções, suas características e os modos em que elas podem ser usadas para representar fenômenos do mundo real.

3.2.1. O conceito de função

Sabemos, a partir da literatura no campo da Álgebra Escolar, que o conceito de função está presente desde cedo na Matemática Escolar desde a simples contagem à observação de padrões em busca de regularidades e generalizações por meio das investigações e experiências significativas vivenciadas pelos alunos na sala de aula de Matemática. De modo que a publicação *Princípios e Padrões para a Matemática Escolar*, os Standards (NCTM, 2000), e Van de Walle (2006) recomendam um trabalho no tópico *função* para os alunos nas séries iniciais e finais do Ensino Fundamental a partir de situações contextualizadas em que eles possam evoluir mais no desenvolvimento e compreensão do conceito de *função*.

Vemos a mesma necessidade no Ensino Médio, porque, na nossa prática docente de professor nesse nível da escolaridade, a impressão que nos fica é a de que tais experiências não foram muito significativas e nos parece que a compreensão do conceito de *função* não foi alcançada de modo amplo. Portanto, torna-se salutar e essencial o trabalho com exemplos variados de relações funcionais em problemas nos quais o contexto de uma mudança numa variável independente cause uma mudança correspondente em outra variável dependente (NCTM, 2000; VAN DE WALLE, 2006)

Muitos pesquisadores da Educação Matemática pontuam que, originalmente, a noção de *função* surge para permitir o estudo de relações entre quantidades, variando no mundo físico. As funções modelam os fenômenos que ocorrem na natureza e no cotidiano. Em outras palavras, as funções fornecem um quadro conceitual para responder às questões de ordem científica e do dia a dia. Esse conceito de *função* se refere a uma quantidade variável que depende de outra variável, ou seja, como uma relação de dependência entre grandezas (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Assim, podemos exemplificar, extraindo do nosso cotidiano, diversos exemplos de relações funcionais. Por exemplo: a altura de uma planta depende do número de dias decorridos desde que foi plantada; o valor do pagamento de serviços prestados de um trabalhador depende do número de horas trabalhadas; o nível de gasolina de um automóvel depende dos quilômetros rodados a partir do momento em que o tanque estava cheio; o lucro da venda de saquinhos de pipoca depende do número de saquinhos de pipocas vendidas pelo pipoqueiro; o preço atual de um carro depende de quanto tempo de uso o carro possui e assim por diante (VAN DE WALLE, 2006; COONEY, BECKMANN; LLOYD, 2010).

No entanto, nem toda função possui um contexto no mundo real. Sabemos pela literatura que, no estudo da Matemática, temos também a necessidade de estudar os conceitos de forma descontextualizada. Entretanto, é útil apresentar funções em contextos que façam sentido para os alunos que estão iniciando seu estudo e, somente mais adiante, trabalhar a Matemática dentro do próprio campo do saber matemático.

O conceito de *função* é, intencionalmente, amplo e flexível, permitindo-se aplicá-lo a uma vasta gama de situações. A noção de *função* engloba muitos tipos de entidades matemáticas além das *funções de variáveis reais* que descrevem quantidades que variam continuamente. Por exemplo, matrizes, progressões aritméticas e geométricas. Além disso, as transformações de figuras geométricas podem ser vistas como funções (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010). Como o conceito de função é amplamente suficiente deve abranger todos os exemplos de funções. O conceito de função é único e consistente, podendo ser aplicado a diversas situações e contextos matemáticos. A grande ideia 1 é, subdividida em 3 compreensões essenciais: 1a, 1b e 1c:

> *Compreensão Essencial 1a*. As funções são associações de valor único de um conjunto – do domínio da função – para outra – sua imagem.
>
> *Compreensão Essencial 1b*. As funções são aplicadas para uma vasta gama de situações. Elas não precisam ser descritas por algumas expressões específicas ou seguir um padrão de regularidade. Elas são aplicadas para outros casos que não são àqueles da *variação contínua*. Por exemplo: sequências são funções.

> *Compreensão Essencial 1c*. O domínio e a imagem de funções não precisam ser números. Por exemplo: matrizes dois por dois podem ser vistas como uma representação de funções onde o domínio e a imagem são duas dimensões do espaço vetorial; uma função também pode ser uma transformação (translação, rotação, homotetia e reflexão) de uma figura geométrica T em outra $f(T)$, tal que para cada ponto de T corresponde um único ponto em $f(T)$, cuja função está definida sobre o plano no plano (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010, p.8).

A fim de investigar a definição de *função* no Ensino Médio, no interior da educação algébrica, faz-se necessário explorar diferentes visões sobre o conceito de *função* em termos de concepções. Sabemos que a função pode ser concebida de muitos modos e, antes de apresentá-los, faremos brevemente algumas considerações epistemológicas e históricas que venham a justificar a adoção de uma ou outra concepção, levando-nos a refletir sobre a melhor adequação de tais concepções em âmbito escolar. Embora, não tratemos aqui de história da ciência, deixamos claro que nos interessam os aspectos que possam influenciar o processo de ensino-aprendizagem de função e que trazem implicações na apresentação de concepções que são exploradas e usadas tanto nos livros didáticos quanto por nós professores de Matemática que as veiculamos nas salas de aula.

A ideia de função que temos hoje em dia foi sendo construída ao longo dos anos, mas ela apresenta uma grande dificuldade em precisar um exato momento da origem de sua concepção na história da Álgebra. Ela é resultado da necessidade do homem de solucionar problemas. Podemos encontrar alguns traços desta noção nas tabelas antigas dos povos babilônicos, de Astronomia e de números recíprocos. Os povos indianos e os árabes também usaram tabelas trigonométricas e astronômicas. Entretanto, é importante assinalar que estas tabelas enfatizavam relações entre números e não a relação entre quantidades que variam (KLINE, 1908/1985).

A construção do conceito de *função* percorreu um longo caminho, ela ainda não estava definida quando uma de suas mais importantes representações encontrava-se em fase de elaboração, a representação gráfica. Nicole Oresme (1323-1382) foi a primeira pessoa que utilizou as coordenadas, denominadas de latitude e longitude de maneira mais bem sucedida, para representar a velocidade em função do tempo, o que era novidade para a época e que, por isso, pode ser considerada como precursora da representação de função (EVES, 1997; BOYER, 1998). Nesse contexto, a noção de *função* prototípica está conectada a quantidades contínuas se desvencilhando um pouco do mundo da contagem e da relação entre números (quantidades discretas).

Sabemos que a maioria das *funções* introduzidas durante o século XVII pelos cientistas e matemáticos da época eram vistas como curvas e devemos ressaltar que elas eram definidas em termos de movimento, ou seja, como trajetória descrita de um ponto móvel (KLINE, 1908/1985). Podemos atribuir o termo *fluente* de Isaac Newton, indicando alguma relação entre variáveis. Sabe-se que, na mais popular apresentação feita por ele, considerou x e y como quantidades que fluem ou fluentes por volta de 1671 na sua obra método dos *fluxões*. Já a palavra *função* foi introduzida pelo matemático alemão G. W. Leibniz em 1673, ganhando certo sentido matemático para o termo. Ela foi derivada da palavra latina *fungor* cujo significado quer dizer *realizo tarefa*. Inicialmente, Leibniz usou a palavra *função* para descrever uma quantidade relacionada a uma curva, inclinação ou um ponto qualquer situado sobre ela. Também, costuma-se atribuir a Leibniz as seguintes terminologias: *constante, parâmetro* e *variável* na linguagem matemática (EVES, 1997). Tanto fluxões de Newton quanto as descrições de variações sobre curvas de Leibniz têm a ver com taxa de variação na linguagem incorporada às ideias e compreensões essenciais de função. Assim, tanto Newton quanto Leibniz são considerados criadores do Cálculo, porque introduziram o conceito de derivada a partir da ideia de variabilidade. Naturalmente, aqui estamos desprezando as controvérsias em relação à sua primazia. Portanto, eles foram também precursores de ideias fundamentais do *Pré-Cálculo* ou estudo das *funções*.

Mais tarde, em 1718, Bernoulli definiu uma função como *uma quantidade composta de variáveis e constantes*. Ele adotou a frase de Leibniz *função de* para indicar a quantidade e então usou a notação $\text{Ƒ}x$. Em 1750, Euler enfatizou a ideia de *função* como *uma expressão analítica* e como uma quantidade sendo uma função de outra quantidade se o valor do primeiro é determinado pelo valor do outro. Quanto à notação de função, atribui-se também a Euler o símbolo $f(x)$ para uma função em x e também muitas outras convenções e notações que ainda usamos até hoje (EVES, 1997; BOYER, 1998; BERLINGHOFF E GOUVÊA, 2010). Assim, o conceito de *função* foi, aos poucos, tornando-se independente de curvas particulares e passando a significar a dependência de uma variável em termos de outras.

Nos dias atuais, a definição de *função*, baseada na teoria de conjuntos, foi atribuída ao matemático alemão Dirichlet (1805-1859) e ao grupo de jovens matemáticos franceses Bourbaki do início do século XX que se ocuparam em estudar e desenvolver teorias matemáticas. De acordo com Eves (1997), a definição Dirichlet-

Bourbaki formulada em 1934 apresenta *função* como uma associação de um conjunto a outro, e é visto como um conjunto de pares ordenados, explicitamente: f é uma função de um conjunto a outro, digo de A para B, se f é um subconjunto do produto cartesiano de A (o domínio) e B (contradomínio), tal que para cada $a \in A$ há exatamente um $b \in B$ com $(a, b) \in f$. Entendemos por isto, que o conceito de *função* foi se tornando cada vez mais formal, passando a ser definido como uma relação entre conjuntos ou subconjunto de uma relação e não mais como uma relação de dependência entre grandezas. No entanto, tais definições trouxeram mudanças importantes para o campo de estudo da Ciência Matemática. Literalmente, a compreensão essencial 1a trata função como uma associação única de um conjunto domínio a outro: sua imagem.

Apesar de a descrição Dirichlet-Bourbaki ser a definição matemática correntemente usada, pode-se perguntar se ela é realmente adequada para fins pedagógicos em nível da educação escolar. Pode haver uma lacuna entre as definições formais de concepções matemáticas e as imagens que os alunos têm. Sendo assim, podemos deduzir de acordo com Doorman e Drijvers (2011) citando Tall e Vinner (1981) que, na maioria das vezes, a definição formal pode ser simplesmente memorizada, tornando-se desejável que seja trabalhado o conceito imagem primeiro e, a partir desse, ser possível compreender e construir o então chamado conceito definição. Os conceitos matemáticos devem ser adquiridos de modo que a formação dos conceitos deva começar com vários exemplos e contra exemplos por meio dos quais o conceito imagem poderá ser formado. No entanto, no caso dos alunos de Ensino Médio, que têm a necessidade de entrar no estudo de conceitos mais avançados (pensamento avançado), o conceito definição deve ser introduzido como último recurso após a exploração de várias tarefas matemáticas.

No Ensino Médio, é comum a definição clássica que utilizamos largamente durante muitos anos da nossa prática docente de professor de Matemática e que aparece comumente nos livros didáticos de Matemática, geralmente de modo precoce para mentes de alunos que ainda não se apropriaram da compreensão necessária para entender tal definição.

Assim, de imediato, sem que isso possa fazer sentido para os nossos alunos, como é de costume, iniciamos a aula definindo função da seguinte forma: Uma função é uma lei ou regra tal que, para cada elemento x em um conjunto A, faz corresponder um único elemento $y = f(x)$ em um conjunto B, onde A é o campo de definição da função (domínio) e onde B é o campo de variação da função (contradomínio). Daí seguimos definindo a variável independente que representa um número arbitrário no campo da definição da função f, isto é, no domínio da função. E a variável dependente representa um número qualquer no campo de variação da função f, que é a imagem de x pela função f.

Não que o aluno não deva chegar a esse nível de compreensão, ou seja, à formalização do conceito matemático de função, porém, para isso acontecer, faz-se necessário partirmos da ideia intuitiva através de situações de contexto real ou mesmo o padrão concreto que possa favorecer o interesse pela busca de regularidades e leis através do desenvolvimento do raciocínio matemático e, somente no final do processo, poder sistematizar esse conhecimento.

A definição de Dirichlet-Bourbaki, embora tenha sido explorada exaustivamente no MMM (Movimento da Matemática Moderna), durante os anos 60, enfatizava conjuntos e distinção entre funções e relações binárias e incluía o tema *função* como fio condutor de programas de Matemática Escolar Secundária de uma maneira que foi considerada muito formal (KIERAN, 2007).

Entretanto, de acordo com Freudenthal (1983)[3], a definição formal não é considerada muito apropriada para o ensino na Matemática Escolar. A concepção de função apresentada por Freudenthal (1983) enfatizou o caráter de dependência causal de uma função de modo que: “Na verdade a própria origem da função está declarando, postulando, produzindo, reproduzindo a dependência (ou ligação) entre as variáveis que ocorrem no mundo físico, social, mental, isto é, dentro e entre esses mundos” (FREUDENTAL, 1983, p.494). Assim, as funções podem ser definidas em termos de

[3] Hans Freudenthal (1905–1990) era alemão de nascimento e filho de judeus, foi um matemático e educador matemático que produziu uma vasta obra que abrange matemática, história e filosofia da matemática e educação matemática. Ele foi Professor da Universidade de Utrechet em Amsterdam (1945 a 1971) e Diretor do Instituto para o desenvolvimento da Educação Matemática em Utrechet até sua morte que a partir de 1991 passou a se chamar Freudenthal Institute. Freudenthal foi um visionário que defendeu a Matemática como uma *atividade humana* e *para todos* e influenciou e orientou muitas pesquisas em educação matemática na Europa (sobretudo Alemanha e Holanda, depois França) e nos EUA. Para as discussões levantadas no nosso trabalho ver com maior profundida FREUDENTHAL, Hans. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. D. Reidel: Dordrecht, The Netherlands, 1983.

uma relação causal entre variáveis, sendo usualmente a variável x independente e a variável $f(x)$ ou y dependente. Portanto, as funções apresentam propriedades dinâmicas equivalendo à dependência entre variáveis, no sentido de que as transformações ocorridas na variável independente fornecem mudanças na variável dependente.

A história nos ensina como surgiram e se desenvolveram as grandes ideias matemáticas de *função* para poder dar continuidade ao avanço tecnológico e científico atual. Por outro lado, devemos pensar nos usuários e produtores de Matemática, que ocupam as salas de aula da Educação Básica, e em nós professores, que lidamos com esse desafio de desenvolver e pôr em prática tais ideias.

Na contagem estão implícitas as ideias um-para-um e vários-para-um que o homem no passado explorou e as crianças realizam, quando estão aprendendo a contar e a operar, que podem ser associadas às ideias mais intuitivas de *função*. A elaboração de tabelas que remetem às civilizações babilônicas, indianas e árabes e que representam os primeiros registros das crianças e jovens na escola no estabelecimento de relação entre números e organização de informações, ainda não representa uma ideia de função tal qual a concebemos atualmente, mas é uma das maneiras de se representar uma função. No entanto, os registros gráficos são fundamentalmente representações convencionais de funções que costumamos atribuir ao matemático Oresme e que se tornaram familiares nos meios de comunicação, por isso se faz urgente o cidadão de hoje ter domínio de leitura e interpretação dessa ferramenta representacional de função.

O raciocínio sobre a ideia de covariação e taxa de variação podem ser atribuídos às primeiras ideias de função, cuja construção recebeu o contributo de matemáticos ilustres como Newton e Leibniz de maneira mais sistematizada. Tais raciocínios devem ser enfatizados no desenvolvimento da compreensão de função pelo fato de representarem uma das grandes ideias fundamentais de função que é a relação entre grandezas. Na escola, podemos realizar investigações matemáticas e explorações de padrões, tabelas e gráficos que descrevem a medida dessa variação.

As *expressões analíticas* de Euler, que são uma dentre as várias maneiras de representar uma função, denominada de representações algébricas da função, representam uma linguagem muito específica da Álgebra que pode causar dificuldades e obstáculos em sua compreensão, portanto, elas devem ser muito bem explicadas e exploradas pelo professor em sala de aula. No entanto, a compreensão de função só se dá efetivamente na coordenação de tais ideias, representações e compreensões essenciais de funções.

De qualquer forma, passamos a compreender um pouco mais como um conceito tão complexo, que levou milhares de anos para ser criado, ganha esse *status*, assumido por sua definição mais corrente de *função* e leva-nos, por conseguinte, a questionar como se deve realizar o trabalho de fazer com que os nossos alunos compreendam tal ideia, já que a apresentação de uma simples definição verbal e alguns exemplos e contraexemplos realizados em sala de aula não dão conta dessa tarefa.

Assim, no curto período do Ensino Médio, não podemos ter a pretensão de alcançar a amplitude e a flexibilidade que o conceito de função carrega dentro dele na sua completude, porque sabemos do alto grau de dificuldade que isso representa para os alunos nesse nível de ensino. Essa afirmação pode ser provada do ponto de vista histórico, visto que a humanidade levou milhares de anos para construir o conceito de *função*. No entanto, temos que garantir, ao menos, que as ideias e compreensões essenciais de funções sejam desenvolvidas por nossos alunos, transformando suas experiências e vivências em algo mais prático e significativo sobre o conteúdo estudado, aproveitando os conhecimentos prévios que os alunos trazem para a escola e a partir deles construir os conceitos matemáticos. Desse modo, estaríamos repetindo um pouco a trajetória que a humanidade percorreu para chegar à sistematização do conhecimento, nesse caso específico, sobre função.

Aproximamo-nos das ideias referendadas por Freudenthal (1983) no tocante ao ensino de função na Matemática Escolar, porque, ao longo da nossa experiência docente, é mais rico e produtivo estudar a função explorando a ideia de variação de uma grandeza em função da variação de outra. Além disso, em diferentes aspectos do conhecimento humano, quer seja social ou da natureza, percebemos a incansável busca de novas covariações no estabelecimento de relação de dependência entre as mais variadas grandezas (senso de covariação).

Para uma melhor compreensão de como a definição de *função* está sendo apresentada nos livros didáticos do Ensino Médio no Brasil, por meio de alguns de seus exemplares aprovados pelo PNLD (Plano Nacional do Livro Didático) 2012, selecionamos definições informais e definições formais de *função*, conforme Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) na análise feita em obras didáticas americanas.

Foram analisadas brevemente as definições de *função* em cinco livros didáticos brasileiros, para identificarmos a forma como essas obras abordam o conceito de *função*, ora através de definições informais, usando ideias intuitivas presentes nos D_1, D_3 na primeira afirmação feita pelos autores e D_8, ora utilizando definições menos informais nos D_4 e D_6; bem como as definições matemáticas formais via linguagem de conjuntos nos D_2, D_3 na segunda afirmação feita pelos autores, D_5, D_7 e D_9.

Tabela 1: Definições de função em livros didáticos brasileiros

D_1	A ideia de função está presente quando relacionamos duas grandezas variáveis.	DANTE (2010, p.68).
D_2	Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que diz como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.	DANTE (2010, p.72).
D_3	A função é um modo especial de relacionar grandezas. Nesse tipo de relação, duas grandezas, x e y, se relacionam de tal forma que: x pode assumir qualquer valor em um conjunto A dado; a cada valor de x corresponde um único valor de y em um dado conjunto B; os valores que y assume dependem dos valores assumidos por x.	SMOLE; DINIZ (2010, p.71).
D_4	Dizemos que uma variável y é dada em função de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y.	PAIVA (2009, Impresso em 2010, p.84).
D_5	Sendo A e B conjuntos não vazios, chama-se função de A em B toda correspondência f que associa cada elemento de A a um único elemento de B. Os conjuntos A e B são o domínio e o contradomínio da função f, respectivamente.	PAIVA (2009, Impresso em 2010, p.87).
D_6	Dadas as variáveis x e y, se a cada valor atribuído a x se associa um único y, dizemos que y é função de x.	BARROSO (2010, p.69).
D_7	Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma função de A em B (ou que y é uma função de x) se, e somente se, para cada elemento x de A existe em correspondência um único elemento y de B.	BARROSO (2010, p.70).
D_8	No estudo científico de qualquer fenômeno, sempre procuramos	IEZZI et al

	identificar grandezas mensuráveis ligadas a ele e, em seguida, estabelecer as relações existentes entre essas grandezas.	(2010, p. 46).
D_9	Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento x ϵ A um único elemento $y \in B$ recebe o nome de função de A em B.	IEZZI et al (2010, p. 47).

Dante (2010) e Iezzi et al (2010) partem da ideia intuitiva de função como relação entre grandezas, exploram esta ideia através de situações de contexto real para mais adiante apresentar a definição formal de função recorrendo à linguagem de conjuntos.

Entre os livros didáticos de Matemática para o ensino médio, observamos que apenas as autoras Smole e Diniz (2010) trabalham na perspectiva de função como relação entre grandezas e associam a essa concepção a relação de valor único entre conjuntos, numa tentativa de apresentar as duas ideias juntas.

Paiva (2009) trabalha a noção de função através de situações de contexto real. Em seguida, há uma sistematização de uma definição menos formal como uma relação de dependência entre variáveis, para, somente mais adiante, apresentar propriamente o conceito de função formal.

Barroso (2010) traz as ideias de função por meio de exemplos de situações de contexto cotidiano e geométrico como pretexto para a apresentação do conteúdo função. Em seguida, apresenta uma definição menos formal denominando x e y de variáveis e a ideia de associação única entre elas para, logo em seguida, apresentar a definição formal do conceito de função via conjuntos.

Embora a maioria dos autores de livros didáticos tenha recorrido à ideia de relação entre grandezas para formar intuitivamente o conceito de função, todos os cinco livros didáticos analisados acabaram formalizando o conceito de função via relação entre conjuntos de forma apropriada, levando à compreensão essencial (1a) que ilustra o conceito de função como uma associação de *valor único*, e parece estar exatamente aí a ideia essencial do conceito de função.

Diante das análises realizadas nos cinco livros, fica claro que o estudo de relação binária como subconjunto de produto cartesiano e a definição de função como relação binária entre dois conjuntos foram evitadas pelos autores. Provavelmente, eles julgaram inconveniente, formal e estática uma apresentação dessa natureza. Os autores se concentraram em transmitir a ideia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência, variação entre grandezas ou resultado de um movimento.

Vemos também que, ao longo do desenvolvimento do conteúdo de *função*, a ideia de relação binária passa a não fazer sentido, para funções mais específicas como a trigonométrica, caracterizada pelo estudo dos padrões de fenômenos que se repetem periodicamente, ou a exponencial, que expressa um movimento que apresenta um crescimento geométrico, por exemplo, a ideia de movimento está mais fortemente relacionada a estes exemplos de funcionalidade.

As funções foram definidas como *valor único* que se refere à compreensão essencial 1a do conceito de função. Em outras palavras, para cada elemento do domínio, há exatamente um único elemento da imagem da função. *Valor único* é um componente de tratamento de função em muitos livros didáticos de Ensino Médio. Via de regra, os livros didáticos introduzem a definição de função como uma relação especial que apresenta a característica fundamental, *valor único*. Por exemplo, as definições D_2, D_3, D_5, D_6, D_7 e D_9 da tabela 1 descrevem uma função como um tipo especial de relação denominada relação que tem *valor único* para a imagem da função. Frequentemente, nesses livros didáticos, a definição de *função* é seguida de uma série de exercícios em que os alunos devem responder se determinadas relações são ou não são funções.

Outro inconveniente que pudemos perceber é que essa definição formal acaba impondo a esse estudo uma abordagem sequenciada, linear e destituída da noção intuitiva – de dependência e variação entre grandezas – que é bem mais simples e bastante compreensível pelos alunos, uma vez que, no nosso cotidiano, tudo pode ser contado ou medido, e podemos estabelecer perfeitamente uma relação entre essas grandezas.

Diante disso, parece-nos desaconselhável esse tipo de abordagem para o ensino de funções no Ensino Médio. Isso não quer dizer que a compreensão essencial 1a (as funções como associações de valor único de um conjunto – o domínio de função – para outro – sua imagem) – não seja importante, apenas queremos dizer que para ter esse nível de compreensão não é necessário depositar uma gama de teoria de conjuntos e relação binária para se chegar ao conceito de função *valor único*.

A definição mais usual nos livros didáticos apresenta função como correspondência e definições de par ordenado, concepção bourbakista de função, tendendo a focar a atenção dos alunos nas representações gráficas de funções em detrimento de outras representações de funções igualmente importantes. Outras definições retratam função como fórmulas, outras usam a ideia de máquina de entrada-saída, em que fecham as conexões para uma representação de fórmula matemática da função.

A ideia de entrada-saída, algumas vezes, é retratada na forma de uma espécie de máquina na qual colocamos um certo dado, o elemento de entrada, e ela atuando sobre esse dado nos dá uma resposta que depende do elemento de entrada (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010). Portanto, a entrada afeta a saída, ela é independente. Podemos escolher qualquer ponto do domínio, do campo de definição, que a máquina executa sua função. O resultado é o valor obtido que depende do valor da entrada.

Dante (2010) apresenta uma analogia referindo-se a uma máquina de fazer dobrar um número, mostrando que os números que saem são dados em função dos números que entram na máquina, ou seja, os números que saem dependem dos números que entram. Definindo, assim, a variável dependente N como número de saída e a variável independente x como número de entrada. Nesse caso, temos: número de saída N igual a duas vezes o número de entrada x, na linguagem algébrica $N(x) = 2x$ que ele chamou de regra da função, lei da função ou ainda fórmula matemática da função.

Barroso (2010) também apresenta a metáfora de máquina de entrada-transformação-saída para a função quando vai definir os elementos de domínio, imagem e contradomínio de uma função.

Desse modo, acreditamos que essa definição informal tão comum nos livros didáticos tenha a ver com o sentido etimológico da palavra *função*, sob o ponto de vista de que a máquina funciona, realiza coisas, faz cumprir tarefas. Em outras palavras, sugere que a entrada afeta de alguma forma a função para produzir a saída. Essas definições de entrada-saída aparecem para máquinas de funções, tabelas, gráficos e regras. Levando, mais tarde, os alunos a generalizar funções como regras de correspondência e gráficos (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010):

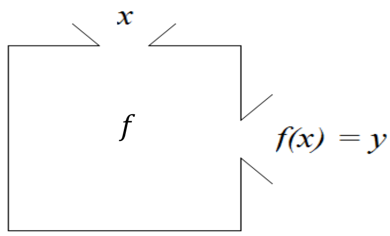


Figura 02: A ideia de função como máquina de entrada-saída desenho do autor desta pesquisa inspirado nos livros de Cálculos.

Outro ponto crítico de discussão trata do teste da reta vertical para gráficos que é comumente usado para determinar se y é ou não é função de x. Ele é frequentemente usado para focar a atenção de alunos na representação gráfica de valor único. Os alunos podem usar esse teste para determinar se y é uma função de x, dado um gráfico de uma relação, como o seguinte: um gráfico define y como uma função de x se, e somente se, nenhuma reta vertical (nem que seja imaginária) cruza o gráfico em mais de um ponto. Alguns professores e pesquisadores têm sugerido que um foco sobre o teste da reta vertical pode contribuir para uma tendência entre alunos de aplicar regras mecanicamente mais do que o raciocínio sobre a concepção de função, particularmente, através de representações diferentes (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010). Embora, saibamos que o teste da reta vertical seja, de fato, mais prático.

Dante (2010), Smole e Diniz (2010) e Barroso (2010) foram autores de livros didáticos analisados que recorreram ao teste da reta vertical para determinar se um conjunto de pontos é o gráfico de uma função. Do ponto de vista geométrico, isso significa que qualquer reta perpendicular ao eixo x que intersecta o gráfico deve fazê-lo num único ponto. Portanto, se essa reta intersectar o gráfico em mais de um ponto, esse gráfico não é de uma função.

Nesse sentido, parece-nos que melhor seria abandonar o teste da reta vertical para verificar se um gráfico representa ou não uma função. Podemos considerar a verificação para saber se determinado gráfico representa ou não uma função como um exercício mecânico e sem significado para o aluno, já que não é o conceito que é levado em consideração, mas sim uma regra decorrente e, ainda, pelo fato do teste da reta vertical não servir como critério de identificação para todas as funções.

A compreensão do conceito de função, independentemente do teste da reta vertical, poderia ajudar os alunos a identificar que as relações de *valor único* são funções. Nesta perspectiva sim, seria adequado apresentar o critério para o teste desde que fosse a definição de função muito bem compreendida. Desse modo, a regra poderia surgir naturalmente depois da compreensão e aquisição do conceito de função.

No Ensino Médio, podemos fornecer apenas alguns exemplos dos muitos tipos diferentes de funções, que surgem em toda a Matemática, que não sejam funções que associam números reais a números reais. O conceito de função é muito abrangente e flexível. Ele é aplicado a toda vertente dentro do currículo do Ensino Médio, de Álgebra à Geometria, de Medida à Probabilidade e Análises de dados. Sendo assim, o estudo de funções pode fornecer uma estrutura organizacional para o currículo do ensino médio. No entanto, por si só as funções já formam um grande e importante tópico (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

No Ensino Médio, o estudo de função é centrado sobre as funções de variáveis reais, cujo domínio e imagem consistem de intervalos com números reais em que são dados pelas bem conhecidas fórmulas. As funções desse tipo são contínuas, isto é elas existem continuamente, e não apenas em intervalos ou locais diferentes. No coração do estudo das funções no Ensino Médio sentam-se as funções afins, funções quadráticas, funções exponenciais e suas inversas e funções trigonométricas. Entretanto, outras funções surgem na Matemática do Ensino Médio como as funções definidas por partes que são definidas por intervalos. Logo, terá diferentes fórmulas ampliadas a diferentes partes do domínio. A função valor absoluto (modular), embora seja dada por uma única fórmula, também pode ser vista como função definida por parte.

Algumas funções, tais como as sequências, são diferentes das funções de variáveis reais porque elas são definidas sobre conjuntos discretos (inteiros) e assim não fazem o tipo de *variação contínua* que as funções de variáveis reais fazem. Portanto, o conceito de função é bastante amplo para incorporar estes e muitos outros exemplos de funções de *variação não contínua* – compreensão essencial 1b (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Outra confusão, feita por muitos alunos, ocorre nas assim denominadas *funções constantes*. É a de não aceitá-las como função. Estas relações para os alunos não parecem indicar valor único, nem a saída parece depender da entrada. Eles não percebem que o critério de unicidade continua valendo para este tipo de função, pois para cada elemento de x existe uma única imagem y (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010). Por isso, devemos dar uma atenção especial às funções constantes, pois a sua representação é uma reta horizontal. Embora, a função constante seja uma função representada por uma reta, ela não é uma função polinomial do primeiro grau, tornando-se um caso particular de função que possui características próprias.

A origem do conceito de função está relacionada ao registro de regularidades observadas em fenômenos da vida cotidiana, generalizar leis ou padrões. Entretanto, não nos habituamos frequentemente a pensar nelas desse modo. Sequências são verdadeiramente funções (compreensão essencial 1b) – denominadas de funções cujos domínios são números inteiros ou algumas vezes inteiros não negativos, se desejarmos ter um zero de entrada (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Podemos sempre restringir uma função que é definida sobre todos os números reais para somente números inteiros e assim obter uma sequência, analisar uma sequência pode ser um primeiro passo para estudar uma função cujo domínio são todos os números reais. Assim, as progressões aritméticas são restrições de funções afins para números inteiros positivos e as progressões geométricas são restrições para funções exponenciais para números inteiros positivos.

Porém, o mais importante, é o raciocínio que empreendemos em analisar sequências e que é frequentemente uma versão simplificada que usamos para analisar a correspondência de funções que estão definidas sobre o conjunto completo de números reais. Assim, analisar sequências pode ser um bom começo para pontuar a análise de certas funções. Algumas funções, como as sequências, são diferentes das funções de variáveis reais porque são definidas sobre conjuntos discretos (números inteiros) e assim não realizam o tipo de *variação contínua* que as funções de variáveis reais fazem. Seu domínio pode ser números inteiros não negativos ou ainda inteiros positivos quando não admitir o zero como elemento de entrada (compreensão essencial de função 1b).

Outras funções têm domínios e imagens que fazem restrições ao conjunto dos números reais, como por exemplo: a função área para retângulos depende de duas variáveis, o comprimento e a largura do retângulo que só estão definidos para o campo numérico do conjunto dos números racionais absolutos (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

De antemão, podemos perceber que o conceito de função vai sendo construído ao longo da escolaridade desde a educação infantil até o nível superior, o conceito gradativamente vai sendo ampliado. Em outras palavras, é algo bastante necessário e complexo. Por isso, vamos nos concentrar, agora, nas definições de funções disseminadas na Matemática Escolar, sobretudo no Ensino Médio.

Retomando e explorando as ideias de Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) para o contexto da análise de livros didáticos brasileiros vemos que eles trazem dentro da grande ideia 1, que trata do conceito de função e suas compreensões essenciais: a função como uma associação de valor único do domínio da função para sua imagem; a função é aplicada a uma vasta gama de situações; e que o domínio e a imagem não precisam ser números. Esta última compreensão essencial 1c, não está presente em nenhum dos livros didáticos do Ensino Médio que aqui foram analisados. Isto pode ser justificado pelo fato de que no Ensino Médio brasileiro a ênfase maior é dada ao estudo das funções de variável real, onde não se contempla, por exemplo, o domínio e a imagem representados por duas dimensões do espaço vetorial. A geometria das transformações não se faz presente nesses livros didáticos de Ensino Médio de modo a tornar o conceito de função amplo e dinâmico como ele é na Matemática e poderia ser perfeitamente explorado no seu ensino para formar conceitos mais adequados e de visão menos estreita, o ideal é que essa compreensão fosse atingida ao longo do Ensino Médio e nas conexões que possam ser realizadas entre os blocos de conteúdos, como por exemplo, com a Geometria (NCTM, 2000).

Sabemos que uma das primeiras ideias intuitivas de função é apresentada como relações entre variação de quantidades. Sabemos que função é definida de muitos modos, levando-se em consideração as definições informais e formais de funções no Ensino Fundamental, Médio e Superior. De maneira que a compreensão e a aquisição do conceito de função ocorrerão ao longo da escolaridade em um processo de ampliação e flexibilidade conceitual que poderá ser aplicado a uma vasta gama de situações do cotidiano, científica e profissional.

Finalmente, em relação à compreensão essencial de função 1c, muitas pesquisas em Educação Matemática também apontam para o fato de que os alunos não somente da Educação Básica, mas também da Educação Superior, veem função como correspondência, associação, relação, mas dificilmente como transformação. Por isso, nas aulas de Geometria é importante que se trabalhem as transformações geométricas atreladas à ideia de função.

Esta compreensão essencial 1c, na sua plenitude, não é trabalhada na nossa realidade do Ensino Médio brasileiro. Acreditamos que esta compreensão possa ser explorada melhor no Ensino Superior no quesito domínio e imagem que não são números. Por exemplo, na matriz quadrada o seu domínio e imagem é plano no plano, ou melhor, f: $\mathrm{R}^2 \rightarrow R^2$. As matrizes representam uma importante família de funções que não estão definidas para números reais da compreensão essencial 1c. O principal propósito da teoria das matrizes e dos determinantes é resolver sistemas de equações lineares. Para compreender a resolução de sistemas de equações lineares, vendo as matrizes como representação de funções é bastante útil.

Para o tópico de geometria essa compreensão essencial 1c, no estudo de isometrias do plano – denominadas: translações, rotações, reflexões e reflexões de giro – são funções que associam o plano ao plano. Tais transformações trazem mudanças de posição e tamanho, por exemplo. Porém mantêm as distâncias dos objetos ou elementos deslocados, não alterando as formas das figuras. Essas funções são importantes na geometria, mas elas não estão definidas para números reais. Em outras palavras, transformação no plano é uma função que leva pontos do plano em pontos do plano, sob certas condições.

O NCTM (2000 tradução; APM, 2008) sugere para o bloco de conteúdos Geometria que os alunos da High School, equivalente ao nosso Ensino Médio, deverão aprender a representar essas transformações – translações, reflexões, rotações, ampliação e redução – por meio de matrizes. Desde que os alunos estejam familiarizados com a multiplicação de matrizes, poderão compreender que a multiplicação de matrizes de transformações corresponde à composição das transformações envolvidas.

Assim, podemos dizer que transformação no plano é uma função f: $\mathrm{R}^2 \rightarrow R^2$ que transforma pontos do plano em pontos no plano. Na verdade, de uma perspectiva da matemática avançada, a *distância preservada das funções* sobre o espaço são que definem a Geometria do espaço. Mais geralmente, os matemáticos na maioria das vezes estudam as funções sobre o espaço com um significado do estudo do próprio espaço (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

No entanto, por uma questão de delimitação do campo de pesquisa e atuação, não teremos oportunidade de abarcar todas as compreensões essenciais que estão embutidas na *grande ideia 1* que diz respeito às mobilizações e explorações na compreensão do conceito de função. O conceito de função ultrapassa o terreno estritamente algébrico, entretanto a nossa pesquisa está direcionada ao campo da Álgebra Escolar.

Assim, fazendo uma breve análise podemos perceber que há uma forte tendência dos autores de livros didáticos de Ensino Médio, aqui no Brasil, em enfatizar a definição de função como relação entre conjuntos, muito embora a tendência atual dos livros aprovados pelo PNLD não mais se refere à função como subconjunto de uma relação. Há um esforço dos autores de livros didáticos em conciliar diversos interesses. Por essa razão precisam entrar em consonância com as pesquisas mais recentes em educação matemática nacional e internacional que privilegiam o conceito de função como relação e dependência entre grandezas variáveis ou como sequências de padrões. Por outro lado, sabemos que o conceito de função é bastante amplo e flexível, ao ponto de, mesmo no Ensino Médio, não ser atingida a plena compreensão do conceito matemático de função, principalmente quando o domínio e a imagem não são números e pelo fato da ênfase maior nesse nível de ensino recair sobre as funções de variáveis reais.

No entanto como professor de Matemática e educador, é bom estarmos conscientes dessas concepções para a realização de uma educação matemática de modo que os alunos adquiram um pensamento matemático repleto de conceitos e habilidades em fazer escolhas apropriadas no estudo de função. Uma apresentação formal de função somente deve ser dada depois de uma boa preparação por parte dos alunos de modo que o conceito de função seja bem compreendido e na perspectiva das diferentes representações. Portanto, as compreensões essenciais envolvidas no conceito de função devem ser trabalhadas ao mesmo tempo em que as diversas formas de representar funções.

3.2.2. Covariação e taxa de variação

As funções fornecem um meio para descrever como se relacionam as quantidades que variam juntas. Podemos classificar, prever e caracterizar vários tipos de relações pela compreensão da taxa em que uma quantidade varia em relação à outra (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010). À grande ideia 2, são incorporadas três compreensões essenciais de funções (2a, 2b e 2c), a saber:

> *Compreensão Essencial 2a*. Para funções que associam números reais a números reais, certos padrões de covariação ou padrões em como duas variações mudam juntas indicam intervalo de um membro numa família particular de funções e determina o tipo de fórmula que a função tem.
> *Compreensão Essencial 2b*. Uma taxa de variação descreve como uma quantidade variável muda em relação à outra – em outras palavras, uma taxa de variação descreve a covariação entre duas variáveis.
> *Compreensão Essencial 2c*. A taxa de variação de uma função é uma das principais características que determina que tipo de fenômeno do mundo real a função pode modelar (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010, p.8).

Um dos principais usos de funções que associam números reais a números reais é para modelar situações do mundo real em que uma quantidade muda em relação a outra quantidade. Por exemplo, a distância de um objeto que cai depende do tempo decorrido desde que o objeto foi largado. Descrever funções é frequentemente útil para reconhecê-las como membros de famílias particulares de funções.

Além disso, para reconhecer uma função como membro de uma família associamos, frequentemente, à maneira pela qual a saída de uma função muda quando a entrada muda. Quando tratamos de como muda uma entrada ao produzir mudança na saída, estamos tratando de covariação. A taxa de variação de uma função é a taxa em que a saída da função muda em relação a uma mudança na entrada – esse é um modo de quantificar a ideia de covariação.

A característica mais facilmente observável em uma tabela para uma função é, muitas vezes, o modo pela qual a mudança das duas grandezas ocorre. Quando nos concentramos na maneira pela qual duas quantidades diferentes mudam em conjunto, estamos tomando função numa perspectiva de covariação. De uma perspectiva de covariação, uma função é compreendida como justaposição de duas sequências, cada uma das quais geradas de forma independente através de um padrão de valores de dados, permitindo-nos fazer inferências a partir das variações de entrada e saída nas tabelas de funções (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Em anos recentes, as pesquisas em Educação Matemática e os educadores matemáticos têm apresentado um consenso crescente para a visão de que uma abordagem de covariação fornece um passo inicial importante na direção de uma maior compreensão do conceito de função. Os Standards do NCTM (2000) enfatizam funções como covariação ou relações de dependência entre duas grandezas.

A noção de função enfatizada como covariação é consistente e está em consonância com as pesquisas na área. Essas afirmam que, quando os alunos examinam problemas envolvendo situações funcionais, eles tipicamente usam uma perspectiva de covariação antes da tentativa de generalizar as relações. Começar com uma abordagem da covariação pode fornecer as bases de desenvolvimento de uma relação de correspondência que pode, então, ser expressa algebricamente. Isso pode ser exemplificado pela coordenação dos valores nas duas colunas de dados em uma tabela e, olhando para os padrões nas colunas ao mesmo tempo, os alunos podem usar uma abordagem de covariação para descrever a taxa de variação nessa função.

Uma visão de covariação de função pode apoiar, mais tarde, uma compreensão mais efetiva em Matemática. Essa visão de função é essencial para a compreensão das ideias-chave para o Cálculo e para a interpretação e o raciocínio sobre taxas de variação média e instantânea nas situações do mundo real.

Sabemos que as funções descrevem como as quantidades variam juntas (covariação). A noção de taxa de variação de uma função provém de um mecanismo para descrever e quantificar a covariação entre duas variáveis. Desse modo, Cooney, Beckmann e Lloyd definem taxa de variação da forma que comumente podemos encontrar nos livros-texto de Pré-Cálculo assim:

> Do mesmo modo, para toda função de valor real f definida sobre um intervalo $[a, b]$, dizemos que a taxa de variação desta função acima no intervalo é a mudança no valor da função de a para b dividido pelo comprimento no intervalo de a para b. Porque a mudança no valor da função entre a e b é $f(b) - f(a)$, e o comprimento do intervalo de a para b é $b - a$, a taxa de variação média de f no intervalo $[a, b]$ é: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010, p.26).

Ainda, Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) enfatizam outro modo mais intuitivo e menos formal de descrever a taxa de variação da função como uma taxa de saída dividida pela taxa de entrada. Graficamente falando, frequentemente descrevemos esta variação na saída dividida pela variação na entrada como *elevação sobre percurso*, que é a inclinação da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Por exemplo, se tivermos uma inclinação igual a 3, então, é a mesma coisa que 3 sobre 1 ou *elevação 3 sobre o percurso 1*. Em outras palavras, a reta sobe 3 unidades para cada passo horizontal de 1 unidade. Portanto, a parte que dá informação sobre a inclinação de uma reta é o número que multiplica a variável independente. Ele diz o quanto a reta sobe para cada passo horizontal. Essa *inclinação* de uma reta é um atributo que pode ser medido como outros atributos mensuráveis. Para atribuir um número a uma inclinação requer-se uma reta de referência. O conjunto de coordenadas fornece uma referência (o eixo das abscissas) e os números para mensuração. A convenção para medir a inclinação de uma reta está baseada nas ideias de elevação e percurso entre quaisquer dois pontos de uma reta.

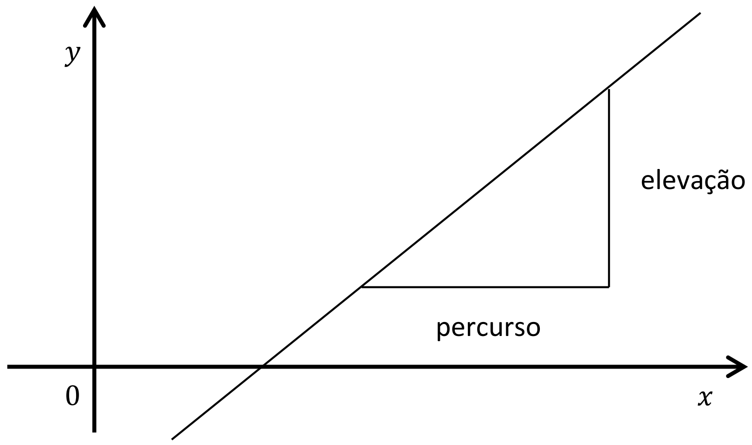


Figura 03: Definição de taxa de variação média de uma função como *elevação* sobre *percurso*.

$$Taxa\ de\ variação\ média = \frac{variação\ da\ saída}{variação\ da\ entrada} = \frac{elevação}{percurso}$$

O fato de enfatizar a distinção entre variações, nos valores de saída de funções e a taxa de variação, permitirá aos professores poder criar situações em que a atenção dos alunos para variação entre grandezas e taxa de variação têm implicações para sua interpretação nas situações que apresentam fenômenos do mundo real. Uma taxa de variação é uma das principais características que determina que tipo de situação do mundo real a função pode modelar – compreensão essencial 2c (COONEY, BECKMANN; LLOYD, 2010).

3.2.3. Famílias de funções

As funções podem ser classificadas dentro de diferentes famílias de funções, cada uma com sua única característica própria. Famílias diferentes podem ser usadas para modelar diferentes fenômenos do mundo real. Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) incorporaram a essa grande ideia 3 mais 7 compreensões essenciais de função designadas a seguir:

> *Compreensão Essencial 3a*. Membros de uma família de funções compartilham o mesmo tipo de taxa de variação. Essa característica de taxa de variação determina os tipos de fenômenos do mundo real que a função na família pode modelar. Por exemplo: a função afim linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.
>
> *Compreensão Essencial 3b*. Função Afim é caracterizada por uma constante de taxa de variação. Raciocínio sobre a semelhança de *triângulos retângulos* permite deduzir que a função afim tem uma taxa de variação constante e a fórmula do tipo $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ para a e b constantes.
>
> *Compreensão Essencial 3c*. A função quadrática é caracterizada por uma taxa de variação linear. Assim a taxa de variação da taxa de variação (a segunda diferença ou derivada) de uma função quadrática é constante. Raciocínio sobre a forma do vértice de uma quadrática permite deduzir que a função quadrática tem um valor máximo ou mínimo e que se os zeros da função quadrática são números reais, eles são simétricos sobre a abscissa x do ponto máximo ou mínimo.
>
> *Compreensão Essencial 3d.* A função exponencial é caracterizada por uma taxa de variação que é proporcional ao valor da função. Essa é uma propriedade da função exponencial em que sempre a entrada está crescendo de 1 unidade e a saída é multiplicada por um fator constante. A função exponencial transforma multiplicação em adição através da identidade $a^{b+c} = (a^b).(a^c)$.
>
> *Compreensão Essencial 3e.* As funções trigonométricas são exemplos naturais e fundamentais de funções periódicas. Para ângulos entre 0 e 90 graus, as funções trigonométricas podem ser definidas como as razões entre os lados de um triângulo retângulo. Essas funções estão bem definidas por causa dessas razões serem equivalentes para triângulos semelhantes. Para ângulos gerais, as funções seno e cosseno podem ser vistas como coordenadas y e x dos pontos sobre o ciclo (círculo) trigonométrico ou como a projeção do movimento circular para o eixo y (eixo das ordenadas) e o eixo x (eixo das abscissas).
>
> *Compreensão Essencial 3f.* A progressão aritmética pode ser pensada como função afim cujo domínio são números inteiros positivos. A função afim transforma progressão aritmética em progressão aritmética. Ex: A sequência 1, 4, 7, 10, 13, ..., em que cada termo é 4 mais que o termo anterior, é uma progressão aritmética; assim a sequência 1,6; 1,1; 0,6; 0,1; -0,4; -0,9; -1,4; ..., em que cada termo é 0,5 menos que o termo anterior também é uma progressão aritmética.
>
> *Compreensão Essencial 3g.* A progressão geométrica pode ser pensada como função exponencial, cujo domínio são números inteiros positivos. A função

> exponencial transforma progressão aritmética em progressão geométrica Ex: A sequência $2, 6, 18, 54$,..., onde cada entrada é 3 vezes o termo anterior é uma progressão geométrica; e, assim, a sequência $5, 5/2, 5/4, 5/8$,..., onde cada entrada é ½ vez o termo anterior também é uma progressão geométrica (COONEY, BECKMANN; LLOYD, 2010, p. 9).

A pedra angular do Ensino Médio em Matemática é o estudo de várias famílias de funções, incluindo as funções polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Dentro dessas famílias estão embutidas as subfamílias, e mesmo famílias dentro das subfamílias. Por exemplo, dentro das funções polinomiais, as funções afim e quadrática são especialmente muito importantes. Dentro da função afim, a função linear forma uma subfamília. A maneira mais evidente que mostra a vantagem dessa classificação é que, dentro da família, as suas fórmulas são semelhantes. Entretanto, a função dentro da família está geralmente relacionada de maneira mais importante, tal como o raciocínio por meio das propriedades específicas que elas formam e, portanto, também através do tipo de situação que elas modelam. Frequentemente, essas propriedades, bem como o tipo de situação do mundo real em que as funções modelam estão relacionadas de forma que as saídas da função mudam com as variações de entradas – ideia fundamental 2 que trata da covariação e taxa de variação – assim ilustramos as compreensões essenciais 2c e 3a (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

As quatro famílias mais comuns que são estudadas no currículo do Ensino Médio são: função afim, função quadrática, função exponencial e função trigonométrica. Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) incluem mais duas famílias: a progressão aritmética e a progressão geométrica, que poderíamos considerar como uma subfamília da função afim e exponencial respectivamente e que têm domínio dentro dos números inteiros positivos. Assim como a função logarítmica que é a inversa da função exponencial e, portanto, situa-se no mesmo grupo familiar de função exponencial.

A classificação dentro dessas famílias de função tem como principal propósito esboçar uma atenção para a natureza de mudança nas diferentes situações – particularmente aquelas que ocorrem no contexto do mundo real. A familiaridade com padrões de protótipos de mudança de famílias de função pode ajudar na construção e na interpretação da função em vários problemas de contexto. Por exemplo, o conhecimento de uma variedade de tipos diferentes de regras de função e gráficos pode ajudar muito a encontrar modelos para padrões em dados e compreensão do comportamento para aqueles padrões. Talvez mais importante ainda sejam os padrões de famílias diferentes de função oferecerem ferramentas organizacionais para descrever a variação matemática (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010).

A primeira família de função à qual os alunos são apresentados desde o ensino fundamental é a família da função afim que comumente modela a proporcionalidade. Por definição, uma função do ponto de vista geométrico é chamada de função afim quando seu gráfico é uma reta, em termos do tipo de gráfico que ela tem. É uma das imagens da definição de função afim de que possam surgir na nossa mente, mas existem outras caracterizações que devem estar dentro do conceito dela. Por exemplo, a função afim pode ser caracterizada pelo fato de ter uma taxa de variação constante.

A função afim tem taxa de variação constante e descreve muitas situações do mundo real. De modo que, se uma situação é modelada por uma função afim, então, a mudança na saída dividida pela mudança na entrada – a taxa de variação de uma função – é constante. Daí, se uma situação envolve uma taxa de variação constante, então, ela está modelando uma função afim. Assim, a função afim fornece um exemplo de uma família de função que é caracterizada por um padrão distinto de covariação em que está relacionando um tipo distinto de fórmula – compreensão essencial 2a. O raciocínio que usamos conecta essas características equivalentes de função afim como uma parte chave da compreensão essencial 3b e mostra que as representações algébricas e gráficas de função afim estão profundamente conectadas – compreensão essencial 5d, como veremos mais adiante.

É importante também conectarmos a função afim às progressões aritméticas e mostrar que a forma da equação da função afim $f(x) = ax + b$ tem a ver com a fórmula do tipo $f(n) = rn + b$. Podemos descrever a progressão aritmética como obtida pela regra recursiva $PRÓXIMO = ANTERIOR + b$. Essa regra recursiva nos diz como as entradas na sequência variam quando partimos de uma entrada (*ANTERIOR*) para uma próxima. Descrito diferentemente, se o termo n de entrada da progressão aritmética for chamado de $f(n)$, então, $f(n + 1) = f(n) + b$. Visto por uma perspectiva de função, a regra recursiva nos diz como as saídas variam quando as entradas crescem de 1 unidade (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Em geral, o raciocínio mostra que se uma progressão aritmética muda de acordo com a regra recursiva $PRÓXIMO = ANTERIOR + b$, e se a entrada é zero, o próximo termo é b (onde se obtém a primeira entrada pela supressão de r), então, o termo n de entrada da sequência é dado pela fórmula $rn + b$.

Resumindo, podemos dizer que uma progressão aritmética forma uma família de funções, cujo domínio pertence ao conjunto dos números inteiros positivos. A progressão aritmética de um termo de entrada para um próximo termo tem um papel maior na fórmula $rn + b$, que descreve como uma grandeza varia dependendo de uma outra, ilustrando a compreensão essencial 2a. Note que, se substituirmos x por n na fórmula $rn + b,$ e se adotarmos x sobre todos os números reais como valores (mais que os números discretos), conseguiremos a fórmula familiar $ax + b$ para a função afim – compreensão essencial 3f.

As primeiras experiências dos alunos com taxas de variação não constantes frequentemente ocorrem quando eles estudam situações modeladas pela função quadrática. Para as funções quadráticas, a taxa de variação não é constante, mas a sua taxa é variação própria de uma taxa constante. A segunda *diferença – variação da variação* é constante. Em outras palavras, a taxa de variação da taxa de variação da função quadrática é constante. Exemplo: A sequência $1, 5, 11, 19, 29$, ..., não apresenta uma taxa de variação constante, pois a primeira diferença gera a sequência $4, 6, 8, 10$, ... que é linear de constante 2. De fato, uma segunda diferença constante diferente de zero é característica da função quadrática e poderíamos deduzir que a lei de formação dessa função quadrática é $f(x) = x^2 + x - 1$ por meio de uma de suas características que compõe a compreensão essencial 3c. (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Por definição, a função quadrática pode ser escrita na forma padrão $f(x) = a\,x^2 + bx + c$ para as constantes reais a, b e c, onde a é diferente de zero. A função quadrática dá oportunidade aos alunos raciocinarem matematicamente e é importante, principalmente, no estudo de Física no Ensino Médio e em suas aplicações como a descrição do movimento de uma bola no ar e as antenas e espelhos parabólicos. O gráfico de cada função quadrática é uma transformação do gráfico de $y = x^2$. Mas, frequentemente, colocamos a função quadrática na forma vértice – que é a forma $y = a(x - h)^2 + k$, onde a, h e k são constantes. Quando a função é escrita na forma vértice, nós temos uma boa ideia do que seu gráfico se parece. A forma vértice nos permite deduzir que as funções quadráticas e seus gráficos têm certas características:

> h deslocará o gráfico horizontalmente, e k o deslocará verticalmente. O ponto (0,0) em que $y = x^2$ for deslocado para (h, k). O ponto é o vértice. Em uma parábola com a concavidade para cima ($a > 0$), o vértice é o ponto mínimo. O vértice é o ponto máximo em uma parábola com a concavidade para baixo (quando $a < 0$). Os zeros ou raízes da função quadrática denominados – os interceptos do eixo dos x - são os valores de x para a função nula. Assim, os zeros de uma função quadrática ocorrem simetricamente sobre o vértice. Uma vez que temos o vértice, encontraremos dois pontos à sua esquerda e dois pontos à sua direita. Devemos encontrar pontos que mostrem a curvatura ao redor do vértice e quão rápido as extremidades estão indo para cima ou para baixo (HUETENMUELLER, 2011, p. 104).

Esses resultados mostram a compreensão essencial 3c (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010), enfatizando o raciocínio sobre a forma-vértice de uma função quadrática permitindo deduzir que a função quadrática tem valor máximo ou valor mínimo e, quando os zeros da função quadrática forem números reais, eles serão simétricos sobre o eixo dos x do ponto máximo ou mínimo (coordenadas do vértice da parábola).

A função exponencial é uma ferramenta matemática que descreve muitas situações do mundo real e que envolve o crescimento ou decaimento por um fator constante, tais como a acumulação de capital a juros compostos em função do tempo; o crescimento ou decrescimento de uma população em função do tempo; a datação de fósseis por meio de técnicas que utilizam a radioatividade, depreciação no valor de um objeto no decorrer do tempo e entre outros.

Como na função quadrática, na função exponencial a taxa de variação não é constante. As funções exponenciais são caracterizadas pela taxa de variação que é proporcional ao valor da função, isto é, uma propriedade da função exponencial onde sempre a entrada é aumentada de 1 unidade e a saída é multiplicada pelo fator constante – compreensão essencial 3d. Esse é o aspecto da taxa de variação da função exponencial que tem um papel importante na determinação do tipo de fenômeno do mundo real que a função exponencial modela, ilustrando, assim, a compreensão essencial 3a. Outra propriedade que caracteriza a função exponencial é que ela transforma adição em multiplicação – compreensão essencial 3d (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010)

Devemos conectar também a função exponencial às progressões geométricas. As progressões geométricas são equivalentes multiplicativos das progressões aritméticas. Podemos descrever a progressão geométrica como obtida pela regra recursiva PRÓXIMO = ANTERIOR · b, em que nos diz como a função varia quando vamos de um termo para o próximo termo. Do ponto de vista de uma perspectiva de função, a regra recursiva nos diz como as saídas variam quando as entradas crescem a partir de uma unidade (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Em síntese, podemos dizer que as progressões geométricas formam uma família de funções, cujo domínio são números de contagem. As progressões geométricas são caracterizadas pela multiplicação (ou divisão) por um valor fixo como um termo que vai de um termo ao próximo. Em outras palavras, sequências geométricas são caracterizadas pela regra recursiva da forma PRÓXIMO = ANTERIOR · b para alguma constante positiva (que pode ser menor que 1). A constante b na regra recursiva é o componente-chave da fórmula $a\,.\,b^n$ para termos n de uma progressão geométrica. Em particular, o modo pelo qual a sequência muda tem uma importância principal na fórmula que descreve como o termo $f(n)$ depende de n, ilustrando, assim, a compreensão essencial 2a. Notar que se substituirmos $f(n)$ por x na fórmula $a\,.\,b^n$, e se considerarmos x tomados todos como valores de números reais (mais do que somente números discretos), conseguiremos chegar, pela definição, a função exponencial em que a e b são constantes com a diferente de zero e b positivo – compreensão essencial 3g (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Consideraremos, por exemplo, a progressão geométrica 7, $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{8}$,...Cada termo, a partir do primeiro, é ½ vez o termo anterior. Se a sequência tem uma entrada zero, ela poderia ser 14, pois ½ de 14 será o primeiro termo, 7. Pensaremos sobre como poderíamos conseguir cada termo começando pela entrada zero, 14. Observemos o padrão, para conseguir o primeiro termo, multiplicamos a entrada zero ½ vez, obteremos $14.\left(\frac{1}{2}\right)$. Para conseguirmos o segundo termo, multiplicaremos a entrada inicial por ½ elevado ao quadrado, obteremos $14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Para conseguirmos o terceiro termo, multiplicaremos a entrada inicial vezes ½ elevado ao cubo, obteremos $14.\left(\frac{1}{2}\right)^3$. Em geral, conseguiremos o n (enésimo) termo, multiplicando a entrada inicial vezes ½ elevado a n (enésima) potência, obteremos $14.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Uma nota técnica: no caso das progressões aritméticas, o número b na regra recursiva $PRÓXIMO = ANTERIOR + b$ é a taxa de variação na sequência. No caso das progressões geométricas, entretanto, o número b na regra recursiva $PRÓXIMO = ANTERIOR \cdot b$ não é a taxa de variação atual da sequência. O mesmo pensamento nos diz como a sequência muda da perspectiva de covariação. No caso da progressão geométrica, a atual taxa de variação não é constante. Se há constantes a e b tais que o n (enésimo) termo entra numa sequência dada pela fórmula $a \cdot b^n$, então a sequência é $a \cdot b,\ a \cdot b^2, a \cdot b^3, \ldots$, em que cada entrada é b vezes o termo anterior, e a sequência será, portanto, uma progressão geométrica (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

As funções trigonométricas são importantes por duas razões. Primeiro, elas fornecem um modo de encontrar lados desconhecidos em termos de lados e ângulos conhecidos e, assim, são úteis numa variedade de aplicações (compreensão essencial 3e). Ex: cálculo de distâncias inacessíveis como a altura de um prédio; a largura de um rio, mesmo estando do outro lado de sua margem; distância entre satélites em astronomia etc. Segundo, elas são funções periódicas mais ligadas aos fenômenos naturais e podem ser usadas para aproximar qualquer função trigonométrica. Ex: fenômenos cíclicos como o movimento das marés, o amanhecer e o entardecer, o ciclo menstrual feminino, os batimentos cardíacos, dentre outros. No entanto, também podemos dar exemplos de situações do cotidiano envolvendo padrões de regularidades periódicas, tais como o movimento de um pêndulo num relógio de parede, uma roda gigante em movimento num parque de diversão, entre outros.

Em suas formas mais básicas, o âmago das funções trigonométricas são seno e cosseno e a função tangente que relaciona o seno e o cosseno (bem como as funções inversas), todas definidas em termos de triângulos retângulos. Se nós usássemos somente as definições de razões trigonométricas de um ângulo agudo no triângulo retângulo, limitaríamos o domínio de cada função trigonométrica a intervalos abertos (0, 90), assumindo que estávamos medindo ângulos em graus. O caminho familiar para estender o domínio das funções trigonométricas é definir essas funções em termos das coordenadas x e y do ponto de vista do círculo trigonométrico de raio unitário com centro na origem. Visto dessa maneira, o cosseno e seno são essencialmente projeções dentro dos pontos de coordenadas x e y sobre um círculo de raio centrado na origem do sistema – compreensão essencial 3e (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Enfim, apresentamos as compreensões essenciais referentes às principais famílias de funções que devem ser trabalhadas ao longo do Ensino Médio. Entretanto, no nosso trabalho de campo, enfatizaremos mais as famílias das funções afins, quadráticas e exponenciais que corresponderam ao nosso tempo de exploração em sala de aula durante a realização desta pesquisa.

3.2.4. Combinação e transformação de funções

Uma importante técnica que é usada em toda a Matemática é a de analisar um objeto matemático ou situações de decomposição, analisando as partes e colocando-as de volta, juntas para esboçar uma conclusão. A composição e decomposição ou combinação e transformação de números, termos, equações, funções e figuras são processos bastante utilizados na compreensão de um conceito matemático.

A maioria das funções matemáticas estudadas é uma combinação aritmética. Elas podem ser combinadas pela adição, subtração, multiplicação, divisão e composição delas. As funções, às vezes, têm inversas. As funções podem ser analisadas corriqueiramente do ponto de vista de como elas são feitas por outras funções. Portanto, as funções podem ser combinadas, decompostas em partes e transformadas de muitas diferentes maneiras, permitindo-nos analisar funções para ver relações entre gráficos de funções. Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) denominaram essa grande ideia 4 de combinação e transformações de funções e incorporaram à ideia fundamental 4 mais 4 compreensões essenciais de funções a serem desenvolvidas no Ensino Médio:

> *Compreensão Essencial 4a.* As funções que têm o mesmo domínio e que estão associadas aos números reais podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas ou divididas (onde pode mudar o domínio).
>
> *Compreensão Essencial 4b*. Sob condições apropriadas as funções podem ser compostas.
>
> *Compreensão Essencial 4c*. Para as funções que associam números reais a números reais, compondo uma função com *variação* ou *escalas* na forma de mudanças de funções, a fórmula e o gráfico da função são facilmente previsíveis.
>
> *Compreensão Essencial 4d.* Sob condições apropriadas, as funções têm inversas. A função logarítmica é a inversa da função exponencial. A função raiz quadrada é o inverso da função quadrática (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010, p.10).

Conforme foi expresso na compreensão essencial 4a, dadas duas funções f e g que associam números reais a números reais e têm o mesmo domínio, podemos formar novas funções, f + g, f – g, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$, definidas pelas regras seguintes:

1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3) $(f \ .\ g)(x) = f(x).g(x)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

O seu domínio é onde o domínio de $f(x)$ se sobrepõe ao domínio de g(x). Em outras palavras, todas essas funções têm o mesmo domínio, exceto quando precisamos remover qualquer x em que $g(x) = 0$ para o domínio de $\frac{f}{g}$. Adicionar e multiplicar uma função por uma função constante é de especial interesse, porque seus efeitos de transformação sobre o gráfico de uma função é fácil de descrever – compreensão essencial 4a. Portanto, são facilmente previsíveis os seus respectivos gráficos mediante as combinações e/ou transformações de funções ocorridas.

Uma importante combinação de duas funções é a composição de funções. Isso significa avaliar uma função em outra. Para duas funções f e g, a composição de f e g, denotada por fog, é a função que toma uma entrada a para uma saída $f\big(g(a)\big)$. Podemos pensar na composição fog de duas funções f e g como primeiro tomando $g(a)$ para $f(g(a))$. Isso significa que podemos substituir $g(a)$ por a em $f(a)$. Simbolicamente, podemos indicar a rede de efeito de fog do seguinte modo:

$$a \mapsto g(a) \mapsto f(g(a)).$$

Para fog fazer sentido, $g(a)$ deve ter o domínio de f para cada elemento a no domínio de g. De modo geral, a imagem de g, que é o conjunto de todos os $g(a)$ tais que a está no domínio de g, deve estar situado dentro do domínio de f para sermos capazes de formar a composição fog. Em outras palavras, para fog ser definida, exigimos: Imagem de $g \subseteq$ domínio de f (Imagem de g está contida ou é igual ao domínio de f) – compreensão essencial 4b.

Se uma função for dada por uma expressão rebuscada, podemos tentar expressá-la como composição de funções mais simples para esmiuçá-la e compreendê-la melhor. Procurando formas de expressar funções mais simples, podemos descobrir muitas características e propriedades relevantes dessas funções. É importante desenvolvermos a capacidade de acrescentar componentes a uma função. Quando usamos funções para modelar situações reais, muitas vezes precisamos ajustar uma expressão de função que descreve uma situação para descrever uma situação diferente, porém relacionada. De modo geral, há muitas formas distintas de expressar uma função como uma composição. Escolher a forma mais adequada para uma dada situação real pode revelar uma informação nova sobre a situação para aquele contexto (HUETTENMULLER, 2011; MCCALUM et al, 2011).

Podemos também analisar como essas funções são afetadas por algumas simples mudanças. Sabendo os efeitos que certas modificações têm em uma função, isso tornará o esboço desse gráfico muito mais fácil. Temos visto que, quando adicionamos uma constante a uma função, mudamos para outra posição o gráfico da função verticalmente, ou seja, o efeito de somar uma constante à saída corresponde a deslocar verticalmente o gráfico da função, subindo o gráfico e, também afetando a imagem da função. E quando multiplicamos uma função por uma constante, escalamos o gráfico da função verticalmente e refletimos o gráfico acima do eixo dos x se a constante for negativa. Em outras palavras, o efeito de compor uma função com multiplicação por uma constante também é chamada de mudança de escala, quando multiplicamos a função (a parte de fora) por uma constante, modificamos o valor da saída para cada entrada. Por outro lado, se multiplicamos a variável (a parte de dentro) por uma constante, é a entrada que é modificada. Podemos também ver a adição de uma constante a uma função e a multiplicação de uma função por uma constante como uma composição de funções (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010; MACCALUM et al, 2011).

Assim, se aplicamos uma translação ou escala de função depois de uma função, deslocamos ou mudamos a escala do gráfico verticalmente, mas se aplicamos um deslocamento ou mudança de escala antes, deslocamos ou mudamos a escala do gráfico horizontalmente. A ideia da composição de uma função com *deslocamento* e *escala* de função muda a fórmula e o gráfico da função de maneira previsível; que constitui a compreensão essencial 4c. Podemos utilizar a notação de função para resumir estas transformações: $y = af(x + h) + k$:

> Se h é positivo, o gráfico é deslocado para a esquerda em h unidades;
> Se h é negativo, o gráfico é deslocado para a direita em h unidades;
> Se k é positivo, o gráfico é deslocado para cima em k unidades;
> Se k é negativo, o gráfico é deslocado para baixo em k unidades;
> Se $a > 1$, o gráfico está verticalmente alongado. Quanto maior o valor de a maior o alongamento;
> Se $0 < a < 1$, o gráfico está verticalmente comprimido. Quanto menor o valor de a, maior a compressão;
> O gráfico de – f(x) está refletido sobre o eixo x;
> O gráfico de f(-x) está refletido sobre o eixo y (HUETTENMULLER, 2011).

Essas propriedades de transformação de função são válidas para todas as famílias de funções, desde as mais simples até as funções trigonométricas mais sofisticadas do tipo $y = a \cdot sen\ (bx + c) + d$. Por exemplo, em que cada um desses parâmetros sofrendo mudança afeta a função padrão por meio de alterações no seu gráfico como as denominadas translações, reflexões, alongamentos e compressões para produzir o gráfico dado a partir da função básica. Aprendendo quais são essas transformações e como elas alteram o gráfico de uma função qualquer é possível esboçar o seu gráfico sem que para isso seja necessário aquele processo tedioso de traçar gráfico de função calculando valores e locando ponto a ponto.

No tocante ao processo de inversão de função para uma função f, a inversa de f, denotada por f^{-1} não pode ser confundida com $\frac{1}{f}$ que é o inverso multiplicativo de f ou função recíproca de f. Então, a função inversa é válida para todo a no domínio de f tal que $(f^{-1}.f)(a) = (a)$. Note que f^{-1} desfaz f porque se f leva o elemento a para $f(a)$, então, f^{-1} troca $f(a)$ por a. Há, entretanto, uma exigência da função f para a definição de f^{-1} fazer sentido. Se há valores distintos de a e b tais que $f(a) = f(b)$, então, $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(b))$ precisaria ser igual aos dois a e b respectivamente, onde não é possível se f^{-1} for uma função. Assim, para uma função f ter uma inversa, não deveria haver nenhum dos dois valores distintos de a e b, tal que $f(a) = f(b)$. Em outras palavras, f deve ter uma correspondência um-para-um para ter uma inversa, pois nem toda operação tem uma operação inversa (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Se uma função tem um domínio e imagem de $R \rightarrow R$ e se a função tem uma inversa, então, os gráficos da função e de sua inversa são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Porque, se pensarmos na função original levando x para y, então, a inversa troca x por y. Assim, para encontrar a função inversa, resolveríamos colocando x em termos de y. O processo *de trocar x por y* e *y por x* é, realmente, apenas a associação $(x, y) \mapsto (y, x)$ do plano no plano que é a simetria em relação à reta $y = x$. Em outras palavras, se $f(x)$ é uma função que tem um inverso, então, o gráfico de $f^{-1}(x)$ é um reflexo do gráfico de $f(x)$ acima da reta $y = x$. Resumindo:

> Qualquer que seja a função f, para resolver a equação $f(x) = k$, precisamos ser capazes de *desfazer* f, ou seja, de encontrarmos uma função g tal que, ao compô-la com f, chegamos onde começamos. Isto nos leva à seguinte definição: Dada uma função $f(x)$, dizemos que $g(x)$ é a função inversa de $f(x)$ se $g(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f e $f(g(x)) = x$ para todo x no domínio de g (MCCALUM et al, 2011, p.207).

Uma família especialmente importante de funções inversas são os logaritmos, que são as inversas das funções exponenciais. Os logaritmos têm duas propriedades-chave: transformar produto em soma e potência em produto. Essas propriedades são consequência da relação das propriedades de funções exponenciais. Atualmente, com o advento das calculadoras e computadores não vemos mais a necessidade de se trabalhar os logaritmos como o foi tratado no passado e as famigeradas operações e interpolações de logaritmos decimais consultando tabelas de logaritmos. Os logaritmos são funções inversas das funções exponenciais e todas as propriedades que são válidas para as exponenciais o serão para os logaritmos (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

3.2.5. Representações múltiplas de funções

Além do conceito de função poder ser aplicado em diferentes contextos e campos de estudos, embora ele seja único e consistente pelo seu caráter de unicidade, as funções têm diferentes representações. Por isso, os estudos em Educação Matemática constatam em muitas pesquisas a dificuldade que o aluno encontra na multiplicidade de representações de funções. Há limitações quando se privilegia um tipo de representação em detrimento de outros, tais como acontece no ensino de funções com ênfase nas expressões algébricas e pouca exploração das representações gráficas e tabulares. Todas essas representações são partes da construção do conceito de função por parte de alunos;

em conjunto, as representações formam uma ferramenta para uma compreensão e aquisição do conceito de função integrado, versátil e rico. Ficando o desafio para o professor de Matemática em suas aulas de levar em consideração o conceito de função e suas representações múltiplas ao estudo de Álgebra Escolar.

O tema função é apresentado em muitas das escolas de ensino básico raramente fugindo do paradigma dado por definições, exemplos predominantemente algébricos e aplicações dos conceitos matemáticos de forma isolada. O professor deve ficar atento para não cair nessa proposta que privilegia os procedimentos algorítmicos ao invés de compreensões essenciais para o ensino de funções.

Dentre as cinco grandes ideias, podemos também eleger a quinta grande ideia, assim como o conceito de função, como central e unificadora de todas as ideias para melhor responder à pergunta norteadora de nossa pesquisa e para que possamos ter uma visão geral de como podemos desenvolver uma compreensão essencial de funções na Matemática Escolar, aliada ao uso de representações múltiplas.

Van de Walle (2006) salienta a importância dessas *grandes ideias,* expressando-se assim sobre funções e as suas representações múltiplas:

> As funções são as ferramentas usadas para modelar matematicamente todos os tipos de mudança no mundo real. Representar funções em diferentes maneiras pode levar à análise e compreensão daquela mudança. Os alunos na escola média desenvolverão uma compreensão de métodos múltiplos de expressar relações funcionais do mundo real (palavras, gráficos, equações e tabelas). Trabalhando com estas diferentes representações de funções permitiremos aos alunos desenvolver uma compreensão completa deste importante conceito.(...) As relações funcionais podem ser expressas em contexto real, gráficos, equações algébricas, tabelas e palavras. Cada representação para uma dada função é simplesmente um modo diferente de expressar a mesma ideia. Cada representação fornece uma visão diferente da função. O valor de uma representação depende do seu próposito (Van de Walle, 2006, p.284).

Van de Walle (2006) enfatiza que há cinco modos diferentes de interpretar ou representar uma função: através de um contexto, de uma tabela de valores, da linguagem, do gráfico e da equação algébrica. Cada uma dessas cinco representações incorporam modos diferentes de comunicação da mesma regra funcional ou de correspondência. É importante perceber que cada representação expressa a mesma ideia, ainda que forneça um modo diferente de olhar ou pensar sobre a função. O valor de cada representação está no modo pelo qual ela ajuda a ver e compreender a função de um modo diferente do que as outras fazem:

> A ideia mais importante é perceber que, para uma dada função, cada uma dessas representações ilustra a mesma relação. O *contexto* fornece uma incorporação da relação fora do mundo da matemática. A *linguagem* ajuda a expressar a relação de uma maneira significativa e útil. As *tabelas* explicitamente associam elementos selecionados que são emparelhados pela função. A variação conjunta é implícita no emparelhamento dos números. O *gráfico* traduz os pares de números numa imagem. Qualquer ponto no gráfico da função tem duas coordenadas. A função é a regra que relaciona a primeira coordenada à segunda. A *equação* expressa a mesma relação funcional com a economia e o potencial do simbolismo matemático (VAN DE WALLE, 2006, .290-291).

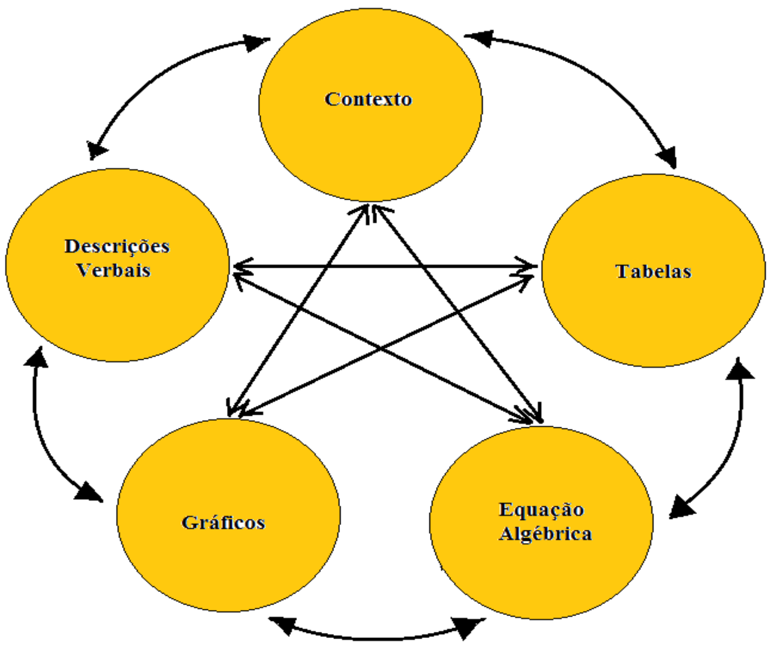


Figura 04: Modelo das cinco representações diferentes de uma função segundo Van de Walle (2006).

Nem toda função tem representação num contexto do mundo real, entretanto o padrão de uma sequência pode ser visto como o contexto concreto de uma representação de uma relação funcional. Por isso, conexões entre essas diferentes representações são importantes para o estudo de relações e funções. Para qualquer função dada, os alunos devem perceber que todas essas representações estão conectadas e ilustram a mesma relação, embora cada representação forneça uma perspectiva diferente sobre a função.

Retomando as ideias de Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), as funções podem ser representadas em múltiplas maneiras, incluindo representações algébricas (simbólicas), gráficas, verbal e tabelar. Para esses autores existem quatro compreensões essenciais que são incorporadas à grande ideia cinco (representações múltiplas). Serão destacadas a seguir aquelas que são consideradas mais significativas para os alunos aprenderem:

> *Compreensão Essencial 5a*. As funções podem ser representadas de várias maneiras incluindo, através de meios algébricos (por exemplo: equações), gráficos, descrições verbais e tabelas.
>
> *Compreensão Essencial 5b*. Mudando o modo que a função é representada (por exemplo: algebricamente, com um gráfico, em palavras, ou com uma tabela) não faz mudança de função, embora representações diferentes destaquem diferentes características, e de alguma maneira apresenta somente uma parte da função.
>
> *Compreensão Essencial 5c.* Algumas representações de uma função devem ser mais úteis que outras, dependendo do contexto.
>
> *Compreensão Essencial 5d.* Conexões entre representações algébricas e gráficas de funções são especialmente importantes no estudo de relações e mudanças (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010, p.10).

Comparando essas duas visões de representações múltiplas, podemos perceber grandes concordâncias e similaridades. Autores como Van de Walle (2006) e Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) trazem embutidas nessas grandes ideias as *compreensões essenciais* que fornecem focos para o estudo de funções e cada uma destas compreensões deveriam ser explicitamente endereçadas ao ensino e à aprendizagem de função na Educação Básica.

As funções podem ser representadas de diferentes maneiras, incluindo regras, ou fórmulas, tabelas, gráficos e descrições verbais. Essa importante noção é capturada na compreensão essencial 5a. Representações diferentes de função nos ajudam a ganhar compreensões mais efetivas dentro de muitos aspectos de relações e mudanças.

Como afirmado na compreensão essencial 5b, mudando a forma na qual uma função é representada (por exemplo: algebricamente, com um gráfico, numa tabela ou com palavras) não traz mudança para a função. Entretanto, de acordo com a Compreensão 5c, algumas representações de funções podem ser mais úteis que outras, dependendo do contexto no qual uma função é usada. Representação de funções em múltiplas formas e análise de funções de perspectivas diferentes são aspectos críticos de aprendizagem de função. Os padrões do NCTM (2000) recomendam que os alunos do Ensino Médio compreendam relações e funções e selecionem conversão flexivelmente entre elas e uso de várias representações para elas, incluindo representações de tabela, símbolo, gráfico e verbal.

Muitas das abordagens de Álgebra que fazem uso de representações múltiplas são definidas como abordagens funcionais. Muitas dessas pesquisas são sobre a compreensão do conceito de função por alunos, principalmente na representação e análise de gráficos em ambientes tecnológicos. Por exemplo: Dubnisky e Harel (1992); Goldenberg, Lewis e O'Keef (1992); Schwartz e Yerushalmy (1992); Leinhardt et al (1990) e Romberg et al (1993) com um foco particular sobre o estabelecimento de conexões entre a representação simbólica e gráfica de função, frequentemente com o uso de calculadoras gráficas. Entretanto, nem todas as pesquisas envolvendo representações múltiplas incluem ambientes tecnológicos, pois alguns estudos têm incluído representações múltiplas dentro do contexto de problemas do mundo real ou situações de modelagem (apud KIERAN, 2007).

A importância da visualização como uma ferramenta representacional e interpretacional tem sido uma área contínua de interesse entre pesquisadores de Álgebra Escolar (ARCAVI, 2003; DREYFUS, 1991). Trabalhos recentes produziram evidências de que o mesmo avanço de alunos demonstrou uma relutância em usar representações visuais (EISENBERG; DREYFUS, 1991), preferindo representações literais simbólicas a representações gráficas, mesmo quando a forma é mais complicada. Mais recentemente, esboçando o encontro de Schoenfeld, Smith e Arcavi (1993) e Moschkovich, Schoenfeld e Arcavi (1993), Knuth (2000) examinou alunos do nono ao décimo segundo ano sobre compreensões do conceito de funções lineares, encontrou dificuldades dos alunos em fazer conexões entre representações literais simbólicas e gráficas. Resultados semelhantes foram encontrados por Slavit (1998) num estudo onde as calculadoras gráficas eram disponibilizadas. Segundo Heid et al (1995), as pesquisas trazem evidências para o ensino de função se voltar focado sobre representações múltiplas relacionadas à emergência recente de ferramentas tecnológicas (calculadoras gráficas e softwares computacionais) onde alunos e professores possam construir e analisar diferentes representações de funções mais eficientemente (apud KIERAN, 2007).

De modo geral, na Matemática Escolar, o ensino de função se dá via Álgebra, com grande destaque para a exploração das variações de sinal de função e resolução de inequações do ponto de vista mais analítico, pouco para os aspectos gráficos e quase nada para as explorações tabulares tais como taxa de variação constante, segunda diferença constante, taxa de variação não constante com fator proporcional constante, por exemplo.

No final dos anos 80 e início dos anos 90 essa abordagem foi bastante criticada e surgiram diversos pesquisadores que apontavam um caminho no sentido das representações múltiplas de funções onde cada uma dessas representações tem sua importância para explicitar melhor as características e propriedades de cada uma delas. O importante não é privilegiar um só tipo de representação e, sim, diferentes representações para a mesma função: a equação algébrica, o gráfico e a tabela. Entretanto, a riqueza no trabalho com funções vai estar no desenvolvimento de habilidade de não somente compreender e usar cada representação de função, mas também conectar as diferentes ideias e representações.

Segundo Kieran (2007), a visão de Álgebra Escolar tem sido amplamente considerada pelos pesquisadores acima citados – movendo-se de uma visão literal simbólica e de uma manipulação simbólica para uma visão que contemple representações múltiplas e o uso de ferramentas tecnológicas – assim também tem sido a visão de como a Álgebra é aprendida, e, consequentemente, a forma como as funções são aprendidas. Kieran (2007) conclui que, de acordo com o corpo de pesquisas compelidas, elas devem evidenciar que os alunos derivam significados de objetos algébricos para recursos múltiplos. Assim, a ênfase na visualização que ocorreu nos anos 90 passa para uma visualização relacionada ao movimento seguido da representação gráfica e, posteriormente, coordenando ambos para as representações tabulares e gráficas.

Mais do que trabalhar com cada uma dessas representações de forma isolada, todas essas pesquisas convergem para a coordenação entre as diversas representações apontando um novo caminho para o conhecimento de funções. Assim, compreender essencialmente o que é função passa a significar saber coordenar representações e essa nova abordagem tem, como ponto forte, as novas tecnologias, tais como as calculadoras gráficas e os softwares computacionais que geram gráficos vinculados às tabelas e às equações algébricas.

Familiaridade com as características típicas de tabelas, gráficos e regras para protótipos de famílias de funções por meio de recursos pedagógicos e tecnológicos podem ajudar os alunos, quando eles forem resolver problemas que envolvam generalização de diferentes representações múltiplas. Dentro desse contexto, representações múltiplas de funções, no seu ensino-aprendizagem, estão embutidas as grandes ideias e compreensões essenciais de função, desde um grande repertório de propriedades e características conceituais de funções e suas representações, tais como o de fazer escolhas apropriadas a situações específicas no estudo de função até estabelecer conexões das diferentes representações delas entre si.

Podemos perceber que nesse contexto de representações múltiplas de função, além das compreensões essenciais intrínsecas ao que diz respeito às representações propriamente ditas – representações múltiplas de funções – também nelas estão embutidas as demais ideias fundamentais do conceito de função, covariação e taxa de variação, famílias de funções; e composição e transformação de funções. Essas ideias essenciais de funções estão todas conectadas e interconectadas. Por isso, a ideia de linearidade de conteúdos passa a não fazer sentido. Devemos explorar, nas situações-problema, as ideias e compreensões essenciais de funções visando ao desenvolvimento do ensino-aprendizagem dos conteúdos da temática função.

3.3. A função ao longo do currículo

Desde o século XVII é que surgiram os primeiros registros de álgebra nos currículos, e, até os dias de hoje, estão ocorrendo mudanças significativas no currículo dessa disciplina no que diz respeito ao enfoque explorado, ora enfatizando um aspecto ou outro, de o conceito de função matemática fazer parte da história da Álgebra no currículo escolar (KILPATRIK; IZSÁK, 2008). É certo que currículo, como o concebemos atualmente, surge somente no final do século XIX. Decerto, esses autores estão se referindo aos registros em livros-textos com finalidade didática.

Na década de 1880 a 1890 do século XIX, fortemente influenciado pela modernização das indústrias, muitas escolas na Europa começaram a considerar o conceito de função como sendo o núcleo da Matemática do Ensino Secundário. Segundo Nordgaard o tema função era utilizado para dinamizar o currículo, unificar os ramos da Matemática, correlacionar Matemática com Ciência, introduzir os alunos à Teoria Matemática e proporcionar mais aplicações. Nesses estudos também está citado que, em 1904, Félix Klein[4] propôs que a ideia de função representada graficamente devia formar a noção central do ensino de Matemática, e como uma consequência natural, os elementos do Cálculo deveriam ser incluídos no currículo de todas as nove séries da escola secundária (KILPATRICK; IZSÁK, 2008).

No ano seguinte em uma conferência em Merano, Itália, as reformas propostas por Klein foram adotadas pela Sociedade Alemã de Cientistas da Natureza. Foi nesse encontro que a expressão alemã funktionales Denken (pensamento funcional) foi criada. O endosso de Klein ao conceito de função influenciou a escola secundária ao redor do mundo, mudando o foco das equações para o foco das funções (KILPATRICK; IZSÁK, 2008).

Na Europa como vimos, no final do século XIX e início do século XX, as funções estiveram presentes nas reformas curriculares de ensino de Matemática como uma ideia unificadora que contemplaria a Geometria das Transformações, a Álgebra e os demais ramos da Matemática e, aqui no Brasil, houve certa reverberação desse movimento tendo a figura de Euclides Roxo[5] como o seu maior expoente, fortemente, influenciado e defensor das ideias de Félix Klein. Euclides Roxo se envolveu como protagonista nas Reformas Francisco Sales e Capanema nas décadas de 30 e 40, ambos foram referências para o Programa de Matemática das escolas secundárias no Brasil daquela época (VALENTE, 2002).

O conceito de função está ligado aos movimentos inovadores do ensino de Matemática desde a proposta de reforma curricular alemã no início do século XX por Félix Klein e, mais recentemente, nas publicações do NCTM a partir da década de 1980 a âmbito internacional. E, no Brasil, desde as Reformas da década de 30 e 40 do século passado aos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) a partir de 1997 e, sobretudo, nas demais publicações, tais como PCNEM (Parâmetros Nacionais do Ensino Médio) – (1999), PCN$^+$EM (2002) e OCEM (Orientações Curriculares para o Ensino Médio) – (2006).

[4] A Matemática, desde muitos séculos, está presente na formação educacional de diversos povos e culturas. No entanto, a Educação Matemática começa com um matemático prussiano-alemão, Félix Klein (1849-1925), que se preocupou com o seu ensino. Félix Klein foi professor da universidade de Göttingen na Alemanha e gozava de muito prestígio, tanto em nível acadêmico quanto político e social, liderou e norteou as mudanças pretendidas na escola secundária com repercussão, não somente em seu país, como também na Inglaterra, França e Estados Unidos. Ele é considerado o precursor da Educação Matemática (SHUBRING, 1999).

[5] Euclides Roxo foi um homem de visão, de espírito vanguardista. Ele atuou como professor e diretor do Colégio Pedro II no Rio de Janeiro, no início do século XX (VALENTE, 2002).

A partir da década de 80 do século XX, o NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática) publica vários documentos. Dentre eles destacamos Principles and Standards for School Mathematics – Princípios e Padrões para a Matemática Escolar (2000) que recomenda, para os programas de matemática, nos assim denominados padrões para Álgebra do pré-escolar ao 12º ano habilitar todos os alunos para:

> Compreender padrões, relações e funções;
>
> Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
>
> Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas e;
>
> Analisar a variação em diversos contextos (NCTM, 2000 tradução: APM, 2008, p.39).

No Brasil, apoiados em ideias dos Standards do NCTM, surgem os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais): PCN-Matemática- 1º e 2º ciclos-1997; PCN-Matemática- 3º e 4º ciclos-1998 e PCN-Ensino Médio-1999.

Ater-nos-emos a esse último documento que diz respeito às áreas curriculares que devem estar presentes na Base Nacional Comum dos Currículos do Ensino Médio: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Mais especificamente, nos restringiremos à Matemática que faz parte de uma delas e partiremos para a nossa preocupação que é estudar e analisar o documento no que diz respeito à *função* no Ensino Médio, na qual apresenta critérios centrais preconizados por este documento, tais como contextualização, conexões e interdisciplinaridade entre os diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático ou, ainda, na relevância cultural do tema.

Novamente aparece o tema *função* enfatizando o caráter integrador que permite exploração, tanto no que diz respeito às suas aplicações, dentro ou fora da Matemática, e mostra-nos que o seu ensino não pode ser isolado:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de

> situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para a interpretação e investigação em Matemática (BRASIL, 1999, p.p.256-257).

Também os PCNEM (1999) têm vindo a valorizar a representação e comunicação, defendendo o desenvolvimento, em Matemática, de competências e habilidades. Neste quesito, e mesmo que ainda esteja implicitamente embutido o conceito de *função* pela sua natureza, vale destacar duas delas que julgamos pertinentes ao desenvolvimento desse tópico em Matemática:

> Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.);
>
> Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa (BRASIL, 1999, p.259).

Dando continuidade e, em consonância com estas mesmas ideias, que dizem respeito ao desenvolvimento do pensamento funcional, é publicado no Brasil o documento PCN^{+}-Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (2002), referendando-as:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelo descritivo de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2002, p.121).

Mais uma publicação complementar é lançada: OCEM (Orientações Curriculares para o Ensino Médio), em 2006. Desse documento, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, nas questões de conteúdos de Matemática, na temática Função vão-se esmiuçando os conteúdos e sugerindo metodologias de como podem ser trabalhadas:

> O estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio, tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (...) (BRASIL, 2006.p.72).

Alcançando o nível estadual, o documento Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco-Matemática (2008), após as considerações gerais, a BCC-PE discorre, em seu segundo segmento, acerca de um debate sobre o conteúdo do Ensino Fundamental e Médio de Matemática permeado de considerações baseadas em pesquisas recentes em educação matemática, impulsionadora de grandes debates dos conceitos matemáticos que são trabalhados na educação básica em Matemática, sugerindo caminhos metodológicos, vejamos um trecho no eixo-temático Álgebra e Funções para o Ensino Médio que trata o documento da BCC-PE:

> As funções têm papel central na formação do Ensino Médio, principalmente por seu papel de modelo matemático para o estudo das variações entre grandezas em fenômenos do mundo natural ou social. Esse aspecto das funções deve ser priorizado, em lugar de uma abordagem essencialmente simbólica e de difícil compreensão por parte dos alunos. Em particular, a definição de função baseada na ideia de produto cartesiano de dois conjuntos aparece como bastante desaconselhável, tanto do ponto de vista matemático, como do didático (BCC-PE, 2008, p.106).

Em consonância com as próprias ideias preconizadas pelos documentos oficiais PCNEM, OCEM, e a BCC-PE este trecho sugere e aponta um trabalho metodológico que tem uma abordagem de funções na perspectiva da modelagem de fenômenos reais porque proporciona uma aprendizagem consistente e duradoura e através da vivência e criatividade de práticas didático-pedagógicas adequadas e eficientes tomando a Álgebra das funções como papel de destaque tornando-a temática central que transitaria por todos os ramos da matemática, fazendo conexões com outras áreas do conhecimento numa visão interdisciplinar e transdisciplinar.

A BCC-PE (2008), para as compreensões essenciais que dizem respeito aos elementos que caracterizam o conceito de função, a composição e transformação de funções e a covariação e taxa de variação de função, recomenda que os conceitos de domínio, imagem, função composta e função inversa sejam gradualmente construídos, desde que em situações significativas para o aluno e sem excessos de simbologia. Os conceitos de crescimento e decrescimento e, em particular, o de taxa de variação de uma função merecem atenção especial, por sua importância no estudo das funções como modelos matemáticos para os fenômenos em que ocorrem relações entre grandezas variáveis.

Já, para a compreensão essencial de famílias de funções a BCC-PE (2008) traz a função linear ligada à proporcionalidade e sugere o trabalho, do ponto de vista funcional, das sequências numéricas, relacionando a função afim às progressões aritméticas. No estudo da função quadrática recomenda explorar as características da parábola de modo que se possa evitar a confusão, por parte do aluno, entre parábolas e outras curvas que são gráficos de funções não lineares. A função exponencial aparece como de fundamental importância no conhecimento científico, particularmente dentro da própria Matemática. Seu estudo se relaciona com as progressões geométricas. A função logarítmica, porém, apresenta sua importância como inversa da função exponencial e as funções trigonométricas como modelos matemáticos para fenômenos periódicos. As funções seno e cosseno no ensino das funções trigonométricas são fundamentais, pois, com base nelas, é possível construir-se, gradualmente e com compreensão, modelos simples para muitos fenômenos da natureza.

Podemos observar também que há necessidade urgente de se sair do movimento de uma abordagem tradicional, que traz mudança da forma algébrica para a tabela e, recorrendo a processos de tradução de cômputos de valores numéricos ou, ainda, mudança de tabela para gráfico, recorrendo aos processos de plotagem de pontos para um movimento de uma abordagem baseada em problemas, que realize conversão de gráfico para tabelas analisando e interpretando gráficos de funções, mudar de tabela para descrições verbais recorrendo à descrição de padrões verbais, transformar descrições verbais em gráfico por meio da construção qualitativa de gráficos, passar de gráfico para tabela através da interpretação e generalização de dados e transitar da representação tabular para a representação simbólica, usando processos interpretativos de encontrar padrões. Em resumo, uma abordagem baseada em problemas fornece aos alunos oportunidades para a construção e interpretação gráfica, generalização de dados, encontrando padrões e outros processos interpretativos (COULOMB; BERENSON, 2001).

Desde os estudos e pesquisas financiados pela NSF – National Science Foundation (Fundação Nacional para a divulgação e ensino de Ciências) a partir da década de 50 nos Estados Unidos preocupados com o fracasso no ensino de Ciências, principalmente Matemática, é que podemos observar o esforço e o empreendimento dos seus pesquisadores para trazer melhoria ao seu ensino e à sua aprendizagem. A abordagem curricular de Matemática tendo como eixo central função, já se fazia presente nos programas do NSF. Na década de 80, o NCTM publica diversos documentos nos Estados Unidos da América, influenciando os documentos curriculares nacionais aqui no Brasil. Em todos esses programas de pesquisas e planos de desenvolvimento de currículos, eles sugerem o ensino de Matemática (Álgebra) numa perspectiva curricular para a construção do pensamento matemático numa linha funcional como uma das formas de fornecer aos alunos um poderoso instrumento de compreensão e aquisição de conceitos matemáticos fundamentais.

Ao longo dessa trajetória e por várias razões, muitos esforços foram empreendidos no sentido de desenvolver um currículo voltado para uma visão da Álgebra baseada em *funções*, e esta última baseada em problemas, na medida em que as funções podiam representar uma relação entre quantidades variáveis num contexto do mundo real. Outro fator decisivo que favoreceu uma visão curricular baseada em funções foi o advento de novas tecnologias tais como a popularidade de calculadoras e computadores que tornou possível a realização de novas atividades, principalmente as que fazem uso de representações múltiplas conectadas – equação algébrica, tabelas e gráficos por exemplo. Assim, o avanço das pesquisas em educação matemática vem influenciando o currículo de modo que muitas dessas descobertas tais como as que dizem respeito ao processo pelo qual os alunos fazem conexões entre representações e situações-problema, sugerem um trabalho voltado à coordenação de representações e situações-problemas que ajudam na compreensão do conceito de função (KILPATRICK; IZSÁC, 2008).

3.4. Resolução, proposição, exploração de problemas e formação de conceitos em Vygotsky

Nesta pesquisa realizaremos uma experiência de ensino-aprendizagem que corresponderá a um processo de ação/interação em sala de aula. Por essa razão, necessitamos de uma definição no que diz respeito à metodologia de ensino adotada para a execução desse trabalho. Abaixo tentaremos explicar e direcionar o caminho escolhido, a metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Proposição e Exploração de Problemas, aliada ao uso das representações múltiplas dentro do contexto de estudo das funções matemáticas.

Desde os primórdios da humanidade os seres humanos se deparam com situações, no seu cotidiano, que demandam uma tomada de decisão na busca de uma resolução para um determinado problema que enfrentem. É justamente dessa necessidade que o homem inventa, cria estratégias, planos de ação e objetos materiais que promovem a diminuição dos seus esforços ou mesmo a resolução dos problemas que estejam confrontando na sua realidade.

Podemos afirmar que resolver problemas é uma atividade intrínseca à Matemática, ou seja, ao fazer matemático. Mas, afinal, o que é um problema matemático? As pesquisas em educação matemática indicam que só estamos diante de um problema quando não sabemos a sua resolução de imediato, porém que estejamos interessados em desvendá-lo. Dessa motivação tomamos para nós o problema e começamos a investigá-lo na tentativa de encontrar caminhos que possivelmente possamos trilhar para achar uma resposta. Portanto, estar-se diante de um problema se torna relativo, dependendo da pessoa ou grupo de pessoas que estejam interessados na sua resolução, visto que para aqueles indivíduos ou grupos que já sabem a resposta, o problema não se configurará mais como um problema.

> Um problema é uma situação em que um indivíduo ou um grupo é solicitado a desempenhar uma tarefa na qual não existe nenhum algoritmo disponível que determine completamente o método de resolução. A realização desta tarefa tem que ser desejada pelo indivíduo ou grupo. De outro modo a situação não pode ser considerada um problema (LESTER, 1980, p. 287)

É de senso comum, imaginar um problema matemático expresso por meio de um enunciado. No entanto, sabemos que qualquer situação que está a nos desafiar pode vir a se constituir em um problema, ou seja, a simples mudança na maneira de obter o resultado de uma questão pode representar para muitos indivíduos um grande problema.

Desde o final do século XIX e início do século XX é que a resolução de problemas começa a circular nas primeiras discussões educacionais com a metodologia de projeto de John Dewey e os métodos ativos de aprendizagem da Escola Nova. No entanto, somente com o trabalho de George Polya *How to Solve It*, traduzido para o português como *A arte de resolver problemas*, publicado em 1945 é que se pode falar em metodologia de Resolução de Problemas imaginada para uma sala de aula de Matemática, embora essa obra discuta a resolução de problemas gerais e não somente da Matemática (NOTAS DE AULAS DE ANDRADE, 2012).

Schroeder e Lester (1989) apresentaram três concepções de ensino da resolução de problemas: 1) Ensinar para a resolução de problemas, ou seja, tendo o fim na resolução de certos problemas, geralmente ficando para o final da apresentação do conteúdo, como os problemas de aplicação; 2) Ensinar sobre a resolução de problemas enfatizando as heurísticas e as quatro fases do Polya: compreensão do problema, planejamento de um plano de ação, execução do plano e fazer retrospecto. Porém, a grandeza do trabalho de Polya não está nos quatro passos para resolver um problema de Matemática. Pois, o próprio Polya não concebeu esses passos de uma maneira sequenciada e rígida. Para um bom leitor de Polya, é possível destacar no seu trabalho as descobertas, as heurísticas, a investigação matemática que se assemelha a de um detetive, a tentativa e erro, a procura de um problema mais simples para entender um mais complexo, o esboçar de uma tabela, de um gráfico, um esquema, o equacionar de um problema, a generalização e a verificação fazendo o trabalho de volta. Enfim, todos os esforços de heurísticas, de raciocínios que não se dão de maneira fixa, ou seja, de um trabalho de investigação do pensar matemático; 3) Ensinar via/através da resolução de problemas, tomando como ponto de partida o problema para fazer toda a construção do saber e do saber fazer matemático.

Retomando a discussão, falávamos acima que há certa relatividade na concepção de problema matemático. Com a apresentação das três concepções de ensino da resolução de problema, faz-se necessário, um esclarecimento a respeito das velhas práticas docentes que transformam as aulas de Matemática numa apresentação de definições, exemplificações, seguida de exercícios repetitivos que em nada contribuem para um efetivo ensino de Matemática. Intuímos que toda atividade que se transforma em rotina é um mero exercício e não um problema, uma vez que um problema se apresenta toda vez que o sujeito não tem um modelo definido e precisa mobilizar seus conhecimentos prévios para poder encontrar uma resposta.

Somente na década de 80 a resolução de problema entra como tema central da Matemática Escolar no currículo norte-americano com a publicação do documento *Uma agenda para ação* do NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática) dos Estados Unidos da América. Alavancando grandes pesquisas no ensino de matemática sobre a resolução de problemas com forte preocupação em descobrir as heurísticas dos exímios resolvedores de problemas.

Acabando a década de 80 com todas as recomendações de ação, por Andrade (1998 apud Onuchic, 1999), a resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação de conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal. O foco está na ação por parte do aluno. A Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino passa a ser o lema das pesquisas e estudos de resolução de problemas para os anos 90.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN (BRASIL, 1997) e os demais documentos, que foram publicados nos anos seguintes, enfatizam o procedimento de ensino focado na resolução de problemas em matemática, desde as séries iniciais e ao longo da escolaridade. A concepção de problema neste documento é explicada assim:

> Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a resolução não está disponível de início, mas é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de resolução. O que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função dos conhecimentos de que dispõe (BRASIL, 1997, p.33)

Onuchic (1999) e Onuchic e Alevatto (2004) apresentaram um Primeiro Roteiro da proposta uma metodologia do Ensino-Aprendizagem através da Resolução de Problemas, de maneira resumida. Os passos são: formação de grupos, registro dos diferentes resultados, defesa pelos grupos (plenária), análise dos resultados, consenso dos resultados e formalização do conteúdo. Para a construção de conteúdos específicos de Matemática esta metodologia é bastante eficaz. Desde então, vemos muitos trabalhos de dissertação de mestrado e teses de doutorado em educação matemática, aqui no Brasil, que adotam para o trabalho de intervenção em sala de aula a metodologia de Ensino-Aprendizagem através da Resolução de Problemas. Nos anos mais recentes, essa metodologia está sendo denominada de metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

Onuchic e Allevato (2011) constataram, nas pesquisas desenvolvidas e nas experiências com formação de professores, que esses últimos têm enfrentado muitas dificuldades para trabalhar Matemática em sala de aula e na implementação da metodologia da Resolução de Problemas com seus alunos, porque muitas vezes faltam conhecimentos prévios aos seus alunos. Tentando atender à demanda de prover os alunos de conhecimentos prévios necessários ao desenvolvimento mais produtivo da metodologia de ensino Resolução de Problemas e de ajudar aos professores nesse empreendimento, elas incluíram novos elementos e criaram o Segundo Roteiro que, em síntese, consiste na preparação do problema; na leitura individual; na leitura em conjunto, resolução do problema; na observação e incentivo, registro das resoluções na lousa, plenária, busca do consenso e formalização do conteúdo.

Na leitura em conjunto que consiste em formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora, nos grupos, Onuchic e Allevato (2011, p.83) recomendam:

> 1. Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
> 2. Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

Na nossa experiência de sala de aula de Matemática podemos observar que as dúvidas e os problemas subsidiários que os alunos enfrentam na Resolução de problemas envolvem muitas dificuldades desde a leitura e interpretação de um texto, já que o problema de Matemática é um pequeno texto. As dificuldades de conceitos matemáticos básicos que nós, professores julgamos necessários e naquele momento de trabalho esperamos, na maioria das vezes, que os alunos já deveriam dominar, se faz importante o professor esclarecer, revisar e ampliar a compreensão dos nossos alunos para que eles possam se desenvolver no nível em que eles se encontram, e, a partir desse trabalho poder galgar graus mais elevados de compreensão na Resolução de Problemas.

Já Andrade (1998) trabalhou a metodologia de ensino-aprendizagem via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas na sua dissertação de mestrado onde apresentou a resolução e exploração de problemas a partir da relação Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-RS) envolvendo dois aspectos: o processo e o produto como componentes essenciais de resolução de problemas. Para esse autor essas relações não são lineares e também não seguem uma sequência de passos. Como essa metodologia não apresenta um roteiro rígido, ela é bastante flexível e ampla para o trabalho escolar numa visão menos internalista e mais externalista da Matemática, aliada a um grande aprofundamento teórico crítico tal como o fez Vygostsky com o construtivismo sócio-cultural, Paulo Freire, com a educação crítica, e a filosofia falibilista de Imre Lakatos tendo em vista uma abordagem de ensino de Matemática muito mais do que conceitos e processos matemáticos apresentando uma sala de aula numa perspectiva mais ampla levando-se em consideração as questões sociais, políticas e culturais.

De acordo com Andrade (1998/2009), a experiência que compreende a relação Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Solução é denominada de uma experiência de Resolução de Problemas. A uma experiência que caminha a partir da relação Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese denominamos de uma experiência de Exploração de Problemas. A relação Problemas-Trabalho-Reflexões e Síntese baseiam-se em um processo de Codificação e Descodificação. *Codificar* um problema ou uma dada situação é representá-la em outra forma, outro código, outra linguagem, numa forma mais curta, mais simplificada e mais conveniente. A codificação refere-se também a todo trabalho de síntese que é desenvolvido em torno de um problema ou uma dada situação. Vale ressaltar que o próprio problema dado já se constitui em um código. Enquanto d*escodificar* um problema ou uma dada situação é procurar o seu significado, é procurar entendê-lo, é decifrar a mensagem que ele expressa e, sobretudo, é também fazer uma análise crítica dessa mensagem. Neste trabalho, a descodificação refere-se, principalmente, a toda *análise crítica* que se faz sobre um problema, sobre sua resolução ou sobre cada trabalho feito.

> Quando o aluno busca compreender o problema que lhe é dado e procura representá-lo em um código possível de operacionalização, está fazendo, quase que simultaneamente, um trabalho de descodificação e de codificação. Este trabalho ajuda o aluno a explorar e a resolver esse problema. A codificação e a descodificação podem considerar vários objetos. A codificação e a descodificação de problemas são ferramentas utilizadas no processo de Resolução e Exploração de Problemas e devem, sistematicamente, estar presentes em todo o trabalho que se faz em torno dele. O trabalho de codificação e descodificação é sempre continuado. A codificação e descodificação podem ser usadas como ferramentas na compreensão de um problema. Em certas ocasiões, o professor pode codificar o problema dado em uma forma que o torne mais compreensivo para os alunos. O professor pode fazer um desenho representativo do problema dado, pode discutir uma determinada parte do problema, etc. As diferentes codificações e descodificações, feitas por alunos e professores, podem ajudar a chegar a uma compreensão mais ampla do problema e podem sugerir diversos caminhos de resolução e indicar novas explorações, sendo que o trabalho feito por um aluno pode ajudar na compreensão do problema por parte de outro aluno e, quando um aluno codifica ou descodifica um problema dado, ele também passa a ter uma melhor compreensão do mesmo (ANDRADE, 1998, p. 25-26).

Uma experiência de Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas (RECDP) é uma experiência que compreende em sua totalidade uma experiência de Resolução e Exploração de Problemas, tendo como ferramentas de trabalho a codificação e descodificação. Ressaltamos que, para nossa pesquisa em particular, as representações múltiplas de funções passam a ser uma ferramenta na exploração de problemas que envolvem o processo de codificação e descodificação. Na compreensão e interpretação do problema surgem as representações e elas são usadas tanto para codificar quanto para descodificar o problema.

Ao longo dos anos de docência, no Ensino Médio, observamos muita dificuldade dos alunos em aprender conceitos e fazer uso de representações matemáticas, e a dificuldade de se ensinar com compreensão no contexto da resolução de problemas. Por isso optamos, para um trabalho de ação/intervenção em sala de aula, por aplicar a metodologia do ensino-aprendizagem via resolução, proposição e exploração de problemas aliado ao uso das representações múltiplas. Pois, o enunciado do problema traz sempre algo de novo a ser explorado no contexto de uma sala de aula, e o planejamento do trabalho é flexível, podendo ganhar vários formatos e explorações, inclusive podendo ser ampliado para discussões de temáticas sócio-político-culturais ou se restringir aos aspectos puramente matemáticos, realizando investigações matemáticas cada vez mais amplas nesse trabalho de exploração do problema.

Nesta perspectiva, o trabalho não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas corretas aplicando procedimentos mecânicos de forma adequada e convincente. Porque, ainda assim, não é garantia de ter havido apropriação do conhecimento em questão. É necessário criar um ambiente escolar em que os alunos possam pôr à prova os resultados, serem estimulados a questionar sua própria resposta, questionar o problema, transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, evidenciando assim uma concepção de ensino e aprendizagem pela via da ação refletida e não pela mera reprodução de conhecimentos (BRASIL, 1997).

Todo o nosso trabalho de investigação em sala de aula está pautado no intuito de desenvolver ideias amplas e flexíveis no fazer pedagógico cotidiano a partir e através da resolução, proposição e exploração de problemas em sala de aula. Por essa razão, esses encontros, no dia a dia escolar, estarão sinalizando um possível caminho. Entretanto, a prática de sala de aula é bastante flexível e o professor, ao levar para o aluno resolver ou formular um problema na aula de Matemática, está sujeito a muitas surpresas, e outros fatores, como o tempo pedagógico e a dinâmica de uma sala de aula, podendo favorecer e, ao mesmo tempo, dificultar o seu desenvolvimento. Porém isso, em hipótese nenhuma, impedirá o professor de focar o seu ensino na perspectiva da Resolução de Problemas.

Diante de tudo isso, sentimos a necessidade de irmos além da Resolução de Problemas matemáticos. Pensando nesse ir além da Resolução de Problemas, propomos também que na nossa ação/interação em sala de aula, nossos alunos possam propor e explorar problemas, não se contentando com a resposta final do problema e, para que esse movimento possa acontecer eficazmente, faz-se necessário criarmos em sala de aula um ambiente escolar que forneça possibilidades de colocar os alunos a se engajarem ativamente na resolução de problemas e de conscientizarem-se dos problemas que existem à nossa volta como, por exemplo, os problemas que envolvem temas sócio-político-culturais.

As pesquisas mais recentes em Educação Matemática tratam tanto da resolução como da proposição e exploração de problemas e retratam esses componentes como uma das principais atividades, do pensar e do fazer matemática. A atividade matemática consiste em resolver, elaborar e explorar problemas. Esta atividade central é um hábito que povoa a mente dos matemáticos, que envolve não apenas respostas corretas, mas sim perguntas bem formuladas. De modo que resolver, propor e explorar problemas consistirá em engajar um indivíduo ou um grupo de indivíduos a uma atividade pessoal ou social que deverá levar a uma apropriação de conhecimentos matemáticos.

A abordagem da proposição de problemas na Matemática parece ter sido primeiramente introduzida pelos autores Brown e Walter em torno das décadas de 70 e 80. Entretanto, os estudos sobre a pesquisa em proposição de problemas de maneira mais sistematizada é mais recente. Segundo English e Sriraman (2010), ela começa com os trabalhos de Brown e Walter (2005) e English (2003). Fazer com que os alunos possam elaborar seus próprios enunciados, vai exigir deles um controle maior sobre os elementos e objetos matemáticos do seu domínio na proposição de problemas. Vejamos como a autora brasileira Chica (2001, p.151) se refere ao trabalho com a proposição de problemas:

> Quando o aluno cria seus próprios textos de problemas, ele precisa organizar tudo que sabe e elaborar o texto, dando-lhe sentido e estrutura adequados para que possa comunicar o que se pretende. (...) O aluno deixa, então, de ser um resolvedor para ser um propositor de problemas, vivenciando o controle sobre o texto e as ideias matemáticas.

A proposição de problemas surge a partir da exploração de problemas. Nesta última perspectiva, um problema ou situação-problema seria uma atividade que possibilitaria realizar um trabalho não repetitivo e reflexivo sobre elementos que fazem parte do mundo, da realidade, das experiências e das vivências dos alunos. Nesse trabalho há uma intenção de envolver os alunos, emocional e intelectualmente, na situação proposta. Principalmente, quando a situação-problema em si não é a de chamar a atenção do aluno, devendo o professor problematizá-la, fazendo perguntas aos alunos, instigando-os a tomar para si a situação, colocando-a em ação, compreendendo e questionando os problemas da sua realidade, bem como os da situação-problema proposta (ANDRADE, 1998). Vejamos como Andrade explica a exploração de problemas:

> Na exploração de problemas, inicialmente é proposta uma situação-problema, em que os alunos realizaram um trabalho sobre ele. Juntos, professor e alunos discutem o trabalho feito em um processo de reflexões e de sínteses, chegando, ou não, à resolução do problema, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões. Nesse processo, o trabalho de exploração de problemas não se acaba, não se limita à resolução do problema, podendo ir além, e se refere a tudo o que se faz nele a partir da relação problema-trabalho-reflexões e sínteses (P-T-RS). No trabalho de exploração de problemas, há um prazer e uma alegria em ir-se cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso; há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola e, por isso, pode ir outra vez e mais outra vez (ANDRADE, 1998, p.26)

Desse modo, da exploração de problemas podemos extrair que o problema não acaba com a sua resposta. Pode-se pensar além da questão, tirar outras questões e outros raciocínios, num ir e vir que acaba quando se encerra a exploração, por aquele grupo ou sujeito, e que, em outra ocasião, novos olhares poderão surgir na apresentação do mesmo problema.

Os alunos, na exploração de problemas, irão trilhar um caminho que não está pronto. Há sempre algo que se pode fazer além da apresentação de sua resolução e dar-se-á esse trabalho por encerrado quando o grupo não tiver mais questionamentos, podendo, em outro momento, ou em outro contexto, ser retomado, e, novas explorações e problematizações poderão ser levantadas e que, até então, não haviam sido percebidas nem exploradas.

Da exploração de problemas, certamente temos um grande espaço para se trabalhar com questões que envolvem a interdisciplinaridade (conexões com outras áreas do saber) e transdisciplinaridade (conexões com atitudes, valores, ética, cidadania) que extrapolam os muros da escola e podem trazer para a sala de aula de Matemática os problemas do cotidiano que o cidadão e a sociedade estejam enfrentando na sua realidade. Sobretudo na exploração de temas sociais, políticos e culturais que ajudam a formar cidadãos conscientes dos seus direitos e deveres, críticos e reflexivos prontos para exercer plenamente a sua cidadania.

Na exploração de problemas procuramos resoluções alternativas, além da tradicional. Portanto, para formarmos exploradores de problemas e não somente solucionadores de problemas, devemos propor que o mesmo problema seja analisado sob diferentes aspectos tanto do ponto de vista matemático como fora dele. É claro que isso nem sempre será possível com qualquer problema. Por isso é que, nas situações-problema propostas, ora a resolução de problemas encerra o processo de investigação matemática e ora o problema pode ser resolvido por vários caminhos e estratégias diversificadas. Além disso, depois que o aluno compreender realmente o problema explorado no desenvolvimento do trabalho em grupos, ele deve ser incentivado a explorar extensões – problemas ampliados e variações do mesmo problema, por exemplo, a partir de um tema político-social, ou outro contexto que possa fazer sentido.

A temática das funções é bastante rica para o trabalho com Resolução de Problemas porque ele pode recorrer a várias estratégias tais como a busca de padrão de regularidade, uma equação algébrica, a construção de tabelas, soluções gráficas e situações que permitam a exploração de problemas através de algumas ampliações do problema dentro ou fora da Matemática.

A Resolução de Problemas como linha de pesquisa permanece com o mesmo nome. Entretanto, atualmente a ela incorporamos novos elementos e ferramentas que venham a favorecer novas questões, novas perspectivas, ampliando cada vez mais o campo. Para o século XXI podemos observar, na literatura, um leque amplo de possibilidades e perspectivas que vêm surgindo no cenário de pesquisas nacionais e internacionais que trabalham com essa metodologia de ensino da Resolução de Problemas tais como a formulação de problemas, investigação matemática e resolução de problemas sob o enfoque da modelização matemática.

A Resolução de Problemas está no auge. Se, na década de 90, percebemos certo declínio das pesquisas em Resolução de Problemas na sala de aula, nesse mesmo período, os estudos da psicologia cognitiva voltaram-se para os processos heurísticos da

Matemática produzida fora da sala de aula. Atualmente, segundo English e Sriramann (2010) percebemos uma forte tendência das pesquisas em Resolução de Problemas na sala de aula na perspectiva da modelização matemática sob uma visão interdisciplinar.

Nossa metodologia de ensino se propõe a trabalhar a resolução, a proposição e a exploração de problemas aliada ao uso das representações múltiplas, em que o diálogo, a interação social, a colaboração e o compartilhamento de ideias entre aluno-aluno, professor-aluno, professor-alunos, são extremamente importantes para que possamos viabilizar nossa proposta didático-pedagógica de maneira adequada. Como ela não é uma sequência rígida de passos. É necessário ponderação, na maneira de como trabalhar com esses recursos de forma coerente e não jogarmos aleatoriamente, na sala de aula, simplesmente tal metodologia. Diante desse sistema complexo apresentado, a perspectiva interacionista de Vygotsky[6] (1896-1934), junto com outros constructos de sua teoria, tais como mediação, zona de desenvolvimento proximal e a formação de conceitos vão nos ajudar a esclarecer e entender o caminho metodológico por nós adotado.

O elo entre trabalhar com a resolução, proposição e exploração de problemas e representações múltiplas é a mediação, como também são elementos mediadores o professor, os alunos, o livro, a calculadora, o computador, dentre outros. O próprio processo e todas as suas fases e produtos desse trabalho são, também, mediados. Nesse processo, tanto a resolução, como a proposição e a exploração de problemas e as representações múltiplas são elos que provocarão o ensino-aprendizagem de Matemática não mais pela via direta ($S \rightarrow R$), por meio de um processo simples de estímulo-resposta e passam a ser uma relação mediada que requer um elo intermediário X de segunda ordem, que Vygotsky chamou de signo e aqui nós denominaremos de resolução, proposição, exploração de problemas, dentre outros elementos. Em outras palavras, todas essas denominações formam um sistema de signos e instrumentos que é colocado no interior dessa estrutura operacional entre o estímulo e a resposta. “O termo colocado indica que o indivíduo deve estar ativamente engajado no estabelecimento desse elo e, consequentemente, o processo simples estímulo-resposta é substituído por

[6] Dentre as diversas formas de se grafar o nome do referido teórico optamos pela forma mais usualmente encontrada Vygotsky embora saibamos que a forma aportuguesada seja Vigotski. No entanto, podemos encontrar também as formas Vigotsy, Vygotski que são consideradas igualmente corretas. De acordo com Marta Kohl de Oliveira, especialista em Vygotsky, aqui no Brasil todas as quatro grafias podem ser usadas.

um ato complexo, mediado” (VYGOSTSKY, 2007, p.33). Comumente, o modelo teórico de Vygotsky de mediação é representado da seguinte forma:

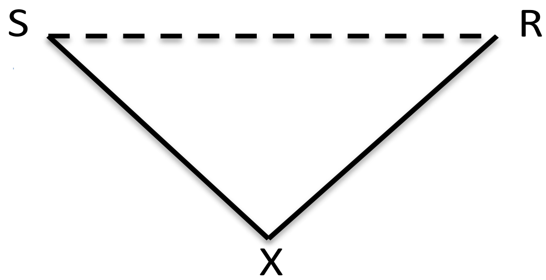


Figura 05: Modelo teórico de mediação de Vygotsky

Vale salientar que, trazendo o modelo triangular de Vygotsky para a sala de aula de Matemática, o S representa o ensino e o R a aprendizagem, em que o processo de ensino-aprendizagem só pode ocorrer por meio de elementos mediadores como o professor, os alunos, a resolução, a proposição e a exploração de problemas, as representações múltiplas e os múltiplos contextos que compõem esse sistema tão complexo, que venham auxiliar e melhorar o desempenho do aluno em Matemática.

No âmbito de sua Teoria, Vygotsky elaborou o conceito de zona de desenvolvimento proximal (ZDP). Em nosso trabalho esse constructo servirá de grande valia. Vejamos como Vygotsky define ZDP:

> A zona de desenvolvimento proximal é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da resolução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VIGOSTSKY, 2007, p.97).

O ponto de partida dessa discussão é o fato de que tudo aquilo que os indivíduos conseguem realizar por conta própria sem nenhum tipo de ajuda está no nível de capacidade real dos indivíduos. A esse repertório de capacidade autônoma Vygostsky chamou de nível de desenvolvimento real que é o nível de desenvolvimento das funções mentais do indivíduo que se estabeleceram como resultado de certos ciclos de desenvolvimento já completados, já amadurecidos.

As pesquisas de Vygotsky e seus colaboradores mostraram que a medida do nível de desenvolvimento real não é uma boa medida do nível de desenvolvimento de um indivíduo, pois o nível de desenvolvimento potencial é o nível em que o indivíduo se encontra no desenvolvimento de tarefas com a ajuda de outros colegas ou de um adulto – pai, professor. Em outras palavras: é o nível que mede a capacidade potencial do indivíduo. Portanto, sob a orientação de uma pessoa mais experiente, o indivíduo é capaz de ir mais longe e a melhor medida para o desenvolvimento do indivíduo é o nível de desenvolvimento potencial. Por essa razão é que as atividades de sala de aula deverão ser planejadas e realizadas sempre levando em consideração a zona de desenvolvimento proximal dos nossos alunos; que levará a uma modificação dos níveis.

> Zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadureceram, mas que estão em processo embrionário. Essas funções poderiam ser chamadas de *brotos* ou *flores* do desenvolvimento, em vez de *frutos* do desenvolvimento. O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente (Vygotsky, 2007, p. 98)

Ao identificar o nível de desenvolvimento real do aluno, é possível pensar em atividades que o ajudem a avançar. Estas atividades deverão se encontrar na zona de desenvolvimento proximal do aluno. Devemos trabalhar sempre nessa variação promovendo ao aluno resolução, proposição e exploração de problemas aliado ao uso de representações múltiplas. O que hoje está no nível de desenvolvimento potencial amanhã estará no nível de desenvolvimento real. No entanto, se a atividade escolar estiver abaixo da ZDP, o aluno vai perder o interesse porque já não será nenhuma novidade para ele. Pois, a situação deve ser um problema novo para ele. E se ela estiver acima de seu nível de desenvolvimento, ele não conseguirá atingir esse nível e logo perderá seu interesse pela situação e acabará se desmotivando completamente da tarefa a ser realizada.

Assim a aprendizagem do aluno se dá mediante modificações nos níveis de desenvolvimento e não mais dependendo dos estágios de desenvolvimento quando o aluno, por exemplo, problematizando e compreendendo essas transições e conexões no contexto da resolução, proposição e exploração de problemas ele estará saindo de um nível para outro fazendo essa variação na ZDP através da colaboração dos colegas no trabalho em equipe ou sob a orientação do professor. Assim, "aquilo que é a zona de desenvolvimento proximal hoje será o nível de desenvolvimento real amanhã – ou seja, aquilo que um indivíduo pode fazer com assistência hoje, ele será capaz de fazer sozinho amanhã" (VYGOSTKY, 2007, p.98).

> A zona de desenvolvimento proximal capacita-nos a propor uma nova fórmula, a de que *o bom aprendizado* é somente aquele que se adianta ao desenvolvimento, ou seja, o aprendizado desperta vários processos internos de desenvolvimento, que são capazes de operar somente quando o indivíduo interage com pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros. Uma vez internalizados esses processos tornam-se parte das aquisições do desenvolvimento independente do indivíduo (VYGOTSKY, 2007, p. 102-103).

Tudo que é tratado na escola tem sua relação específica com o curso do desenvolvimento do indivíduo, relação essa que varia na medida em que o indivíduo vai de um estágio para outro baseado no conceito da zona de desenvolvimento proximal. Isso nos leva a pensar nos conteúdos formais das disciplinas, como por exemplo, o tópico das funções matemáticas e a busca de ferramentas metodológicas que possam nortear o seu trabalho em sala de aula.

Podemos notar que as representações múltiplas não somente no contexto de ambiente computacional, mas, sobretudo, a partir e através de situações-problemas do mundo real ou ainda do contexto da própria matemática, estarão na zona de desenvolvimento proximal auxiliando os alunos no processo de resolução, proposição e exploração de problemas como mais um recurso que deve ser trabalhado na sala de aula de maneira pedagogicamente adequada envolvendo dentre outros aspectos, a formação de conceitos. Entendemos conceito como uma abstração que traz em si os elementos essenciais de um conjunto de ideias e compreensões interrelacionados.

> A formação de conceitos é o resultado de uma atividade complexa, em que todas as funções intelectuais básicas tomam parte. No entanto, o processo não pode ser reduzido à associação, à atenção, à formação de imagens, à inferência ou às tendências determinantes. Todas são indispensáveis, porém insuficientes sem o uso do signo, ou palavra, como meio pelo qual conduzimos as nossas operações mentais, controlamos o seu curso e as canalizamos em direção à solução do problema que enfrentamos (VYGOTSKY, 2008, p. 72-73).

Como no nosso estudo estamos interessados em compreender as ideias essenciais de função matemática por alunos envolvendo, naturalmente, os processos de formação de conceitos, vejamos uma dificuldade de aprendizagem dos adolescentes e também dos adultos enunciada por Vygotsky (2008, p.99):

> O adolescente formará e utilizará um conceito com muita propriedade numa situação concreta, mas achará estranhamente difícil expressar esse conceito em palavras, e a definição verbal será, na maioria dos casos, muito mais

> limitada do que seria esperando a partir do modo como se utilizou o conceito. A mesma discrepância também ocorre no pensamento dos adultos, mesmo em níveis mais avançados.

Além da situação-problema que, por si só, não desencadeará a formação do conceito, um fator determinante para o surgimento do pensamento conceitual são, sem sombra de dúvida, as tarefas com que o jovem se depara ao ingressar no mundo cultural, social, profissional e político dos adultos (VYGOTSKY, 2008). Por isso, deve existir a necessidade do trabalho em sala de aula transcender às questões meramente disciplinares indo além desse entendimento na formação de atitudes, valores e personalidades.

Vygotsky e seus colaboradores na sua pesquisa de formação de conceitos distinguem dois tipos de conceitos: 1) Os conceitos espontâneos ou cotidianos são formados pelos indivíduos no contato com o ambiente social, ou seja, na família e na sociedade em geral. Vygotsky preferia chamá-los de cotidianos, evitando assim, a ideia de que eles houvessem sido inventados espontaneamente pelo indivíduo. Exemplos de conceitos cotidianos seriam os conceitos de *irmão* e *casa* que são adquiridos fora da sala de aula e que nunca foram apresentados aos alunos de uma forma organizada e relacionada a outros conceitos. 2) Os conceitos científicos são aprendidos pelos indivíduos na escola e só existem no contexto de uma educação formal por assim apresentarem-se através de um conhecimento sistematizado e validado pela cultura de uma comunidade escolar ou acadêmica. Tais conceitos cobririam os aspectos essenciais de uma área do conhecimento e seriam apresentados como um sistema de ideias interrelacionados. Assim, nas ciências sociais, quando a área do conhecimento estudada foi o comunismo na União Soviética e os conceitos esclarecedores introduzidos foram, por exemplo, *servidão*, *exploração*, *burguês*, *revolução* o entendimento desses conceitos científicos estão dentro de um contexto organizado desse movimento social ocorrido na União Soviética e estão relacionados a outros conceitos que são adquiridos somente numa educação formal (VAN DER VEER; VALSINER, 2009).

Os conceitos cotidianos são trazidos pelos alunos para a escola por meio das suas experiências pessoais e coletivas e por eles adquiridos na sua realidade social e cultural. Por essa razão é que os problemas do cotidiano servem de elemento de mediação na formação de conceitos científicos. O conhecimento matemático é de fato um sistema de conceitos científicos. Mas os indivíduos desenvolvem no dia a dia muitos conceitos espontâneos que poderão ser aproveitados na sala de aula.

Por outro lado, por exemplo, no estudo das funções matemáticas – conceitos científicos – os conceitos esclarecedores, por exemplo, são: *conceito de função, taxa de variação, famílias de funções,* dentre outros que são ideias essenciais do tópico de estudo das funções que constituem um conjunto de ideias essenciais interrelacionadas de modo que só poderá existir um desenvolvimento e compreensão efetiva das funções matemáticas num contexto escolar ou de educação formal.

Os conceitos científicos transformam gradualmente a estrutura dos conceitos cotidianos dos indivíduos e ajudam a organizá-los num sistema. Isso promove a ascensão dos indivíduos para níveis mais elevados de desenvolvimento. Assim, podemos concluir que os conceitos cotidianos são um produto do aprendizado fora da escola e os conceitos científicos são produto do aprendizado escolar (VYGOTSKY, 2008). Portanto, os conceitos científicos modificam-se passando a fazer parte dos conceitos cotidianos escolares dos alunos dentro dessa dinâmica de trabalho, na perspectiva de estarmos criando ambientes de aprendizagem que favoreçam as ZDPs, acreditamos poder elevar significativamente os níveis onde essas variações ocorrem. “Os conceitos científicos desenvolvem-se para baixo por meio dos conceitos espontâneos; os conceitos espontâneos desenvolvem-se para cima por meio dos conceitos científicos” (VYGOSTSKY, 2008, p.136). Há como um movimento no qual os científicos descem na direção da realidade concreta e os espontâneos sobem buscando a sistematização, a abstração e a generalização mais ampla. Os dois atuam num processo de ida e volta que podemos representar da seguinte maneira: ↑↓↑↓.

Como vimos existem segundo Vygotsky dois tipos de conceitos, desenvolvendo-se *de cima* (conceitos científicos) e *de baixo* (conceitos cotidianos) que revelam a real natureza na inter-relação entre o desenvolvimento real e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Os conceitos cotidianos podem ser modificados na ZDP por meio da cooperação dos alunos e com a ajuda do professor. Os conceitos cotidianos necessitam ser melhores explicitados e há necessidade de se fazer conexões com os conceitos científicos. Portanto, na sala de aula o professor pode ouvir, falar com os seus alunos, para trazer os conceitos cotidianos para a sala de aula, e proporcionar-lhes acesso aos conceitos científicos, de modo que os alunos possam construir verdadeiros conceitos, ao invés de preconceitos.

Outro fator muito importante na aquisição de um conceito é o grau de generalidade. Na compreensão de Vygotsky (2008), na sua investigação dos conceitos reais, descobriu-se que as ideias das crianças em idade pré-escolar resultam da elaboração de generalizações que predominam durante uma fase anterior. A transformação dos preconceitos que são geralmente os conceitos aritméticos da criança em idade escolar sem nenhuma variação em grau de generalidade em conceitos verdadeiros, tais como os conceitos algébricos dos adolescentes, é alcançada por meio das generalizações do nível anterior:

> No estágio anterior, certos aspectos dos objetos haviam sido abstraídos e generalizados em ideias de números. Os conceitos algébricos representam abstrações e generalizações de certos aspectos de números, e não dos objetos, indicando assim uma nova tendência – um plano de pensamento novo e mais elevado (VYGOTSKY, 2008, p. 143).

Desse modo podemos observar no estudo de função matemática via resolução, proposição e exploração de problemas que os alunos poderão evoluir para um nível mais elevado de pensamento quando ocorrer generalização mediante a percepção de regularidade de padrões concretos ou numéricos, conseguindo substituir os números por letras e elaborando uma lei de formação que traduza o fenômeno natural ou social estudado favorecido pela criação de um ambiente de interação social na sala de aula de Matemática.

Vygotsky e seus colaboradores concluem que os conceitos científicos ensinados na escola e os conceitos cotidianos não eram compatíveis, mas sim parceiros em um inter-relacionamento complexo. Por um lado, pode-se distinguir entre conceitos que refletem (científicos) e que não refletem (cotidianos) propriedades essenciais dos fenômenos estudados – segundo o raciocínio de Vygotsky, essencial se refere a características abstratas e não perceptuais. O domínio de um ou outro tipo de conceito seria refletido nas respostas da criança a perguntas, suas maneiras de resolver tarefas, dentre outras. Por outro lado, os conceitos científicos são introduzidos em um ambiente muito especial que envolve o treinamento de várias habilidades metacognitivas.

> Assim, as crianças são solicitadas a ensaiar esses conceitos, declará-los explicitamente, explicá-los, etc. O treinamento de habilidades (meta)cognitivas provavelmente será refletido no modo como a criança soluciona diversas tarefas. Vygotsky nunca tentou distinguir esses dois aspectos do domínio de conceitos científicos e, na verdade, sua noção de conceitos científicos envolvia claramente o treinamento de habilidades meta(cognitivas). Pois, provavelmente é o domínio dessas habilidades que leva às realizações mais importantes na adolescência, ou seja a tomada de

consciência e o uso arbitrário de instrumentos mentais" (VAN DER VEER; VALSINER, 2009, p.301).

Sintetizando as ideias de Vygostsky (2008) na concepção acerca do desenvolvimento dos conceitos científicos que, diferentemente dos conceitos cotidianos, estão organizados em sistemas hierárquicos de interrelações, Podemos incluir as compreensões essenciais de funções num sistema complexo de conceitos que envolverá uma atitude metacognitiva para uma efetiva compreensão na criação de um meio no qual a consciência e o domínio se desenvolverá num nível de sua definição e de sua relação com outros conceitos. O processo de ensino-aprendizagem que ocorre na escola propicia o acesso ao patrimônio cultural historicamente acumulado pela humanidade e a procedimentos metacognitivos, isto é, de consciência reflexiva em torno deste conhecimento que está sendo adquirido. No entanto, o processo de compreensão de um conceito com o grau de generalidade e complexidade da função matemática se dará ao longo da escolaridade até os níveis de estudos superiores.

Desse modo para identificação de processos de pensamento humano colocamos a metacognição como elemento que permite a reflexão sobre o desenvolvimento de cada passo dado, verificando acertos e erros. Finalmente podemos ir além da descoberta de uma solução refletindo sobre os processos de forma consciente dos passos tomados, podendo ir e vir na resolução de um problema. Pode ser possível, também, identificar uma resposta absurda, mesmo quando ainda não for possível achar a resposta, avaliar o desenvolvimento de uma resolução de um problema, apontar falhas, formular novas questões mais pertinentes para um problema sem solução, justificar a sua resposta e a resolução apresentada por outros.

A nossa metodologia de trabalho em sala de aula é a Resolução de Problemas numa perspectiva interacionista de Vygotsky aliada às diversas modalidades de se fazer Matemática resolvendo, formulando (propondo) e explorando problemas por meio da mobilização e confluências de representações múltiplas e extensões dos problemas a contextos cada vez mais abrangentes, que possam contemplar o fazer matemático e a conscientização de problemáticas fora da Matemática.

4. CAMINHAR METODOLÓGICO DA PESQUISA

Nesse capítulo, apresentamos as caracterizações de uma pesquisa qualitativa por Lüdke e André (1987) e Bogdan e Biklen (1994). Em seguida, trazemos uma reflexão sobre a pesquisa pedagógica, de Lankshear e knobel (2008), para definir nossa metodologia da pesquisa, na qual atuamos como professor-pesquisador da nossa própria prática de sala de aula. Descrevemos a escola onde foi realizado o trabalho de campo, a turma de alunos que foi sujeito coletivo da pesquisa, os instrumentos utilizados para o levantamento/coleta dos dados e como realizamos as ações/interações em sala de aula. A reunião dessas caracterizações, instrumentos e procedimentos de ação/interação em campo constituem nosso caminhar metodológico percorrido e adotado na realização desta pesquisa.

4.1. Pesquisa qualitativa na modalidade pedagógica

A metodologia adotada nesta pesquisa foi qualitativa, por entendermos que este tipo de abordagem trata o fenômeno em toda sua profundidade, ou seja, ela busca a sua compreensão e seus significados e não somente sua explicação. Nessa perspectiva, elegeu-se a pesquisa qualitativa porque de acordo com Lüdke e André (1987), ela tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como o seu principal instrumento. Os dados levantados/coletados foram predominantemente descritivos, a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto e a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo em que o pesquisador não se preocupa em buscar evidências provenientes de hipóteses pré-definidas, mas sim o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada por meio de um trabalho intensivo de campo.

A investigação fluirá dentro do ambiente escolar, tendo a sala de aula como habitat natural que fornecerá os dados a serem levantados/coletados e o professor, como seu principal instrumento. Os autores, Bogdan e Biklen (1994, p.48), se referem aos investigadores e a investigação qualitativos assim:

> Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. (...) A investigação qualitativa é descritiva: os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem dentre outras formas as notas de campo. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos.

Dentre as inúmeras modalidades de pesquisa qualitativa em educação, nossa pesquisa se enquadra numa modalidade denominada pesquisa pedagógica na qual se vem discutindo a possibilidade e necessidade de se realizar pesquisa com o professor pesquisando sua própria prática, exercendo o duplo papel de professor e pesquisador. A análise e a interpretação da sua própria prática possibilitará a viabilização de uma proposta pedagógica de ensino-aprendizagem. Pesquisa pedagógica significa professores pesquisando suas próprias salas de aula. Primeiro, a pesquisa pedagógica está confinada à investigação direta ou imediata das salas de aula; segundo, o principal pesquisador em qualquer trabalho de pesquisa pedagógica é o professor cuja sala de aula está sob a sua investigação (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008).

A pesquisa pedagógica como as demais pesquisas, possui seus adeptos, como também há aqueles que não a aceitam. A aceitação desta modalidade de pesquisa baseia-se no fato de que ela não é quantitativa, nem psicométrica. Ela surge da intencionalidade de se ocupar um papel principal, na tendência dos estudos dos termos referentes ao cotidiano da sala de aula, e a sua objetividade está na sua subjetividade. Pois, para o seu desenvolvimento é preciso o envolvimento de seus atores no processo ensino-aprendizagem, tendo o professor-pesquisador como objeto de estudo, a sala de aula.

Assim, compreendemos que a pesquisa em sala de aula tem repercussão direta na transformação da prática docente do professor-pesquisador, traz impacto direto para a realidade do micromundo da sala de aula investigada. Ela nasce da preocupação e inquietação dos professores a um problema, uma questão e identificamos pesquisadores pedagógicos em todos os níveis, da pré-escola ao ensino superior, envolvidos, individualmente ou em grupos, em investigação autogerada, sistemática e informada, realizada visando aprimorar sua vocação como educadores profissionais. A pesquisa pedagógica também traz mudanças significativas para o campo de pesquisa contribuindo para melhorar o ensino ou a formação dos alunos (LANKSHEAR; KNOBLE, 2008).

Justifica-se o uso dessa abordagem, porque a pesquisa pedagógica pode ser realizada em sala de aula ou em qualquer outro lugar onde se possa obter, analisar e interpretar informações pertinentes às orientações de um professor enquanto pesquisador. A pesquisa pedagógica segundo Lankshear e Knobel (2008, p.18):

> (...) pode envolver a observação de sua própria sala de aula, a reflexão sistemática das notas de campo contendo descrições dessas aulas sobre as suas próprias experiências elucidadas através das questões teóricas ou conceituais que sustentam tal pesquisa. E finalmente, pode ser fundamentada por meio dos dados coletados através das aulas ministradas implicando numa variedade potencial de informações, interpretações e considerações relevantes ao campo de pesquisa realizada. (...) um pesquisador sério não está meramente interessado em *algo que funcione*, mas em entender como e por que funciona e/ou como pode precisar ser adaptado para funcionar em outras circunstâncias ou aplicar-se a outros casos.

Assim, os professores nesta abordagem se envolvem na atividade de pesquisa que levará ao seu próprio aprimoramento profissional, sem estar com isso preocupado com a simples funcionalidade da sua pesquisa para aquela comunidade local e sim devendo funcionar em outras circunstâncias e valha para outros casos mais gerais. Portanto, não se trata de desenvolvimento de receitas. Mas, sim de trazer uma reflexão respaldada e justificada por meio de uma teoria mesmo quando da apresentação de algo pragmático. Pois, a pesquisa pedagógica é considerada uma pesquisa acadêmica em educação que está conectada com objetivos sociais e políticos mais amplos, favorecendo o conhecimento da sua realidade no contexto escolar para transformá-lo, visando melhoria de suas práticas e de seus colegas de profissão através do diálogo entre seus pares e divulgação de suas pesquisas para a comunidade acadêmica.

Portanto, o professor-pesquisador não vai se engajar na coleta sistemática e rigorosa de dados empíricos extraídos cruamente, e sim ele dará nova vida aos dados já existentes na forma de conhecimento pessoal por meio de *composição* no sentido amplo do termo (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p.23). Em outras palavras, a pesquisa não pode perder o caráter sistemático e metódico que caracteriza um trabalho de investigação, mesmo que o professor-pesquisador pretenda lidar com problemas ou questões de ordem prática, o diferencial no seu trabalho é justamente essa nova apresentação que os dados trazem carregados de significado pessoal e validade quanto à pertinência dos já existentes servindo de focos de atenção especial para o professor-pesquisador.

Assim, a pesquisa pedagógica deve estar fundamentada teoricamente por alicerces sólidos e por adoção de uma postura crítica perante sua prática docente. Ele requer, por parte do professor-pesquisador, um papel ativo na construção reflexiva do seu próprio desenvolvimento profissional, favorecendo uma melhor compreensão de suas ações mediadoras de conhecimentos comprometidos com o fazer pensar, e de seu processo interacional com os seus alunos, não devendo resultar meramente na recepção passiva de conhecimentos por parte de seus alunos.

4.2.Trabalho de campo da pesquisa

A pesquisa foi realizada na prática escolar do Ensino Médio brasileiro, em uma Escola Pública Estadual de Pernambuco, classificada como escola de porte médio, localizada em um bairro das imediações do centro da cidade de Recife, zona leste da capital pernambucana de grande circulação comercial, mas onde ainda existem muitas residências. É uma escola de fácil acesso devido à sua localização privilegiada, facilitada pela grande convergência de várias linhas de ônibus.

A escola é conhecida por ter tido um passado de glória e foi modelo de referência na Educação Básica na cidade de Recife no final da década de 70 e 80. A escola esteve em grande evidência na mídia (jornal, rádio e TV) que, costumeiramente, anunciavam os seus eventos culturais, artísticos e científicos. Porém a partir da década de 90, principalmente a partir do início do século XXI, foi perdendo seu status, devido a mudanças políticas e sociais sofridas ao longo da história da educação pernambucana.

Hoje essa escola é estadual na modalidade de ensino regular, funcionando nos turnos manhã e tarde. Pela manhã funciona o Ensino Fundamental de 6º ao 9º ano e, à tarde, o Ensino Médio de 1º ao 3º ano. Ainda não foi contemplada com nenhum regime de escola integral, como atualmente é bastante comum nas escolas de Ensino Médio do Estado de Pernambuco. Curiosamente, no turno da noite nessa escola, funciona outra modalidade de ensino, vinculada a outra instituição, ou seja, o prédio é cedido para esse fim.

Porém, a nossa escolha se deu justamente por se tratar de uma escola pública que enfrenta dificuldades comuns às demais e, também, por uma questão de acesso, familiaridade e respectivo aceite da proposta de realização desta pesquisa. Somos professor dessa escola, saímos licenciado com carga horária total para cursar as disciplinas do mestrado, porém retornamos à sala de aula desta escola no ano 2012 para realizar o trabalho de campo desta pesquisa. Fomos professor-pesquisador de uma única turma do 1º ano do Ensino Médio desta escola. E finalmente, após defesa, voltaremos ao trabalho efetivo, no qual continuaremos a dar nossa contribuição e retornos a esta comunidade escolar com prestação de serviços de qualidade.

A instituição é adequada aos propósitos do trabalho de investigação. A escola apresenta uma infraestrutura física razoável, necessária à realização da nossa pesquisa. Tem um espaço externo amplo, duas quadras, uma delas coberta, um campo de futebol, biblioteca, laboratório de informática[7], secretaria, sala de direção, sala de coordenação pedagógica, sala de professores, sanitários, 17 salas de aulas para 50 alunos cada, auditório para 120 alunos e recursos de multimídia (data show, televisores e dvds). Vale ressaltar a necessidade de construção de uma cantina e refeitório para merenda.

Presenciamos uma ausência de horas de trabalho pedagógico destinadas ao planejamento coletivo e por áreas para que venha a ser criado um espaço onde o corpo docente se encontre para discutir e promover estratégias de melhoria no processo de ensino-aprendizagem. Os professores simplesmente cumprem horários correspondentes às atividades pedagógicas de forma isolada. Há reuniões de direção com o corpo docente, com bastante frequência, para tratar de questões predominantemente burocráticas. Em um primeiro momento, sinto que o maior problema que a escola enfrenta hoje é a falta de um trabalho pedagógico que consiga reunir, unir e maximizar as forças e potencialidades de seu recurso humano, minimizando suas limitações neste campo.

Nas últimas reuniões do ano de 2012, foi elaborado coletivamente um projeto, envolvendo toda a comunidade escolar, intitulado: *Articulando conhecimentos, resgatando valores*; a ser trabalhado durante todo o ano letivo de 2013, com vários

---

[7] O laboratório de Informática da escola têm as máquinas computacionais. Porém, desde o início do ano letivo houve a promessa de colocá-las em funcionamento. Mas, até a finalização desta pesquisa do ano corrente 2012, os computadores não foram instalados para que o laboratório pudesse entrar em funcionamento.

planejamentos e sugestões de ações a serem executados, tendo em vista superar dificuldades e problemas enfrentados.

4.3.Turma de alunos

O conjunto dos alunos é considerado como sujeito coletivo desta pesquisa, representado pela turma do 1º ano do Ensino Médio regular, do turno da tarde, num total de 44 alunos com 16 alunos do sexo masculino e 28 alunos do sexo feminino, com idades entre 14 a 17 anos, distribuídos por idades da seguinte forma: 9 alunos de 14 anos; 23 alunos de 15 anos; 10 alunos de 16 anos e 2 alunos de 17 anos. Durante o processo em que foi realizada esta pesquisa, houve a transferência de uma aluna e a chegada de outra.

A turma é formada por adolescentes oriundos das camadas sociais populares e de uma pequena parcela de uma classe média de família de trabalhadores assalariados, que podem pagar despesas de transporte coletivo para que os seus filhos possam frequentar a escola.

Os alunos que fazem parte dessa escola são de comunidades (bairros) diferentes de várias localidades da cidade, trata-se de uma comunidade flutuante bastante heterogênea nos aspectos social, cultural e econômico. Por isso mesmo, nosso trabalho de investigação deve estar orientado no sentido de atender a essa demanda cheia de diversidade, na promoção de equidade e justiça social no oferecimento de um ensino de qualidade.

A escolha do ano escolar surgiu pelo fato de, tradicionalmente, o conteúdo das funções matemáticas ser abordado com mais ênfase no 1º ano, conforme documentos e autores de livros didáticos, favorecendo nossa possibilidade de passar mais tempo investigando o desenvolvimento e compreensões essenciais deste tópico de ensino. Ainda, em virtude de termos percebido, ao longo de nossa prática docente, as dificuldades de aprendizagem do conceito de função quando os alunos se deparam com a resolução de problemas, sobretudo quando da conversão de representações gráficas para as representações algébricas e representações tabulares para representações algébricas e vice-versa.

4.4. Levantamento dos dados

Os dados obtidos no trabalho de campo foram levantados/coletados através de aulas ministradas, incluindo as notas de aulas do professor-pesquisador com os registros escritos de pequenas anotações, feitas durante as aulas, à medida que elas foram acontecendo, e com registros de anotações após as aulas, escritas de memória recente. As descrições das aulas e produções de alunos são informações que se constituem em material para as análises das aulas nessa pesquisa. Procuramos, na medida do possível, nas descrições das aulas, trazer os fragmentos dos diálogos que ocorrem em sala de aula na tentativa de mostrar a participação dos alunos através do aparecimento de suas vozes, embora nem sempre fosse possível estar ao mesmo tempo em todos os grupos de trabalho.

Nesse sentido, os dados analisados incluem as notas de aulas, as falas, informações e comentários que tenham sido escritos, juntamente com as produções de alunos de atividades realizadas durante as aulas. No entanto, quando analisamos as aulas ministradas que incluem referências a esses itens assim registrados, estamos analisando nossa própria prática em sala de aula e como a vemos no processo de ensino-aprendizagem por meio de uma reflexão fundamentada teoricamente.

4.5. Ação/interação em sala de aula

O trabalho de ação/interação em sala de aula foi constituído de quatro unidades didáticas: I) Conceito de Função – 8 horas-aula; II) Função Afim – 12 horas-aula; III) Função Quadrática – 13 horas-aula e IV) Função Exponencial – 8 horas-aula. Em um total de 27 encontros com carga horária total de 41 horas-aula com aulas de 50 minutos de modo a podermos produzir uma reflexão acerca do processo ensino-aprendizagem baseado na compreensão e aquisição das ideias essenciais para desenvolver o raciocínio funcional: conceitual, linear, quadrático e exponencial por meio de um conjunto de atividades em situações-problemas com o objetivo de promover interação aluno-aluno e aluno-professor.

Os grupos de trabalho não foram fixos, ora os alunos puderam livremente formar as suas equipes, ora fizemos sorteios usando o diário de classe na formação das equipes, ora escolhemos os alunos para a formação dos grupos. Desse modo os alunos puderam transitar de um grupo para outro. O trabalho em grupo teve muitas constituições desde o trabalho em dupla, até no máximo grupos de cinco alunos, nas aulas de maior frequência. No entanto, na medida do possível, deu-se preferência à formação de pequenos grupos.

Exploramos o trabalho, predominantemente, em pequenos grupos como um recurso para dinamizar a ação pedagógica, estimular a participação ativa dos alunos no processo de ensino-aprendizagem, promover interações entre alunos e ajudá-los na formação de conceitos a partir das discussões levantadas em sala de aula. Por meio desse trabalho em grupo visamos melhorar a qualidade da interação entre os alunos nas equipes, propiciando relações de trocas de experiências e informações. Portanto, em uma perspectiva vygotskiana, o desenvolvimento e o aprendizado estão interrelacionados e se dão mais eficazmente no convívio social quando os alunos têm oportunidade de se desenvolver na Zona de Desenvolvimento Proximal, que ocorre na interação com seus pares e com o professor na qualidade de adulto mais experiente.

Nesta perspectiva de trabalho, o professor é o mediador desse processo de ensino-aprendizagem, propondo desafios aos alunos e orientando-os a resolvê-los. Assim, por meio de intervenções, o professor pode contribuir para a elevação dos níveis superiores de desenvolvimento que ainda não foram consolidados, mas que estão em vias de desenvolvimento estado latente. Este processo se torna mais rico quando são oferecidas atividades em grupos, em que os alunos mais adiantados poderão cooperar com os demais.

O trabalho em grupo, portanto, estimula o desenvolvimento do respeito pelas ideias dos outros, a valorização e a discussão de argumentos, apresentações de resoluções e questionamentos a partir de diversos pontos de vistas, favorecendo não somente a troca de experiência, de informações, mas também criando situações que favoreçam o desenvolvimento da socialização, da cooperação e do respeito mútuo entre os alunos, possibilitando uma aprendizagem mais significativa e enriquecedora.

O trabalho em grupo foi centrado na ação/interação dos alunos sobre o objeto de aprendizagem – função – por meio de cooperação e compartilhamento entre os grupos de trabalho e da mediação do professor, não só com a finalidade de facilitar a aprendizagem, mas também para tornar o ensino mais crítico e mais criativo, garantindo a participação de todos os envolvidos no processo de ensino-aprendizagem.

Não recorremos à gravação nem à filmagem porque no universo de uma turma constituída de 44 alunos, as ações poderiam perder naturalidade e não tínhamos como acompanhar com a utilização de tais recursos todas as equipes de trabalho, devendo-se para este intento um esforço por parte do professor-pesquisador no movimento de circulação na sala de aula tentando acompanhar os trabalhos que foram desenvolvidos durante cada uma das sessões de encontros. E também, pelo fato de considerarmos ser possível a realização de algumas anotações em sala de aula a partir de observações relevantes à investigação que estão presentes nos comentários de descrições e fragmentos de diálogos das aulas, e, termos nos comprometidos com a tarefa de descrevermos as aulas sempre ao final de cada encontro.

Para um melhor esclarecimento dos códigos de abreviação adotados nas descrições, fragmentos de diálogos e análises das aulas, o professor-pesquisador foi representado por PP e o grande grupo por GG. Ainda, tendo em vista a necessidade de mantermos o anonimato dos sujeitos da pesquisa, os alunos foram denominados individualmente por: A01, A02, A03, A04, ..., A43, A44, A45. Na lista de frequência havia o A14 que nunca compareceu à aula, sendo contabilizados 44 alunos, formando a turma do primeiro ano do Ensino Médio, constituindo assim o sujeito coletivo da pesquisa. No final do primeiro semestre houve a transferência da aluna A10 e no início do segundo semestre houve a chegada da aluna A46, que não apresentou dificuldade de adaptação às aulas. No início de outubro houve a chegada da aluna A47, mas já haviam acabado os encontros de aulas relativas ao estudo desta pesquisa.

A seguir, registramos como se deu nosso contato inicial com a turma de alunos e desenvolvemos os estudos relacionados à pesquisa de campo propriamente dita, com as descrições e análises a cada encontro, dividimos em 4 unidades por uma questão, meramente didática, na distribuição dos conteúdos que teve como objetivo principal desenvolver compreensão das cinco ideias essenciais de funções via resolução, proposição e exploração de problemas. Para análise das informações qualitativas assim obtidas, durante as ações/interações em sala de aula com os alunos, tínhamos além das grandes ideias de funções, as metodologias alternativas de trabalho e a formação de conceitos em que nos apoiamos em Vygotsky.

5. DESCRIÇÕES E ANÁLISES DAS AULAS

Nesse capítulo, apresentamos como se deu nossa imersão na sala de aula como professor da turma do 1º ano, praticamente, desde o início do ano letivo até o final. De modo que parecesse o mais natural possível para os alunos. Delimitamos o período de pesquisa de campo propriamente dita, trazendo um recorte do que foi nossa experiência didática em sala de aula, na qual atuamos como professor-pesquisador que pesquisa sua própria prática docente, descrevendo e analisando as aulas que foram ministradas sobre o conceito de função, funções afins, funções quadráticas e funções exponenciais. Terminamos as discussões dessa experiência em sala de aula, trazendo uma síntese resultante das descrições e análises que foram feitas durante a execução desse trabalho de campo.

5.1. Primeiros contatos

Na escola, no início do ano letivo, houve algumas mudanças relativas à distribuição de turmas. Até que se pudessem ajustar o horário da escola e definir a turma de trabalho para a realização desta pesquisa. Por isso, justificamos aqui outro professor ter iniciado as aulas nesta turma. Anterior ao início desta pesquisa, ministramos aulas, dando continuidade à programação que se iniciara com outro professor que trabalhou o conteúdo de Matemática *conjuntos.*

Os conteúdos por nós trabalhados, antes do início desta pesquisa, foram: resolução de problemas com conjuntos, conjuntos numéricos, intervalos numéricos e o plano de coordenadas cartesianas. Neste trabalho em sala de aula tivemos oportunidade de conhecer melhor a turma de alunos e introduzi-los, gradualmente, em um ambiente de resolução de problemas. No início houve muita resistência a essa nova abordagem de ensino-aprendizagem por parte dos alunos, porque eles estavam acostumados ao professor apresentar as resoluções dos problemas e explicar, primeiramente, os conteúdos para em seguida passar uma lista de exercícios para eles resolverem.

Antes da ação/interação propriamente dita para esta pesquisa, houve um trabalho impedindo que os alunos criticassem ou debochassem dos colegas que cometiam erros em que tinham que atuar perante a turma. A intervenção também neste período se deu no sentido de se construir um ambiente de respeito às diferenças, do saber ouvir, do respeitar a fala do colega no trabalho em grupo e do saber se posicionar diante dos colegas na defesa de argumentos nas plenárias promovidas em sala de aula.

Foi necessário em alguns momentos conscientizá-los, neste período de adaptação, pois os alunos eram adolescentes e estavam em fase de formação de atitudes e personalidades. Pedimos para alguns alunos retirar o fone de ouvido no transcorrer das sessões de trabalho, retirassem os pés das carteiras, deixassem a maquiagem para antes ou depois da aula. Aos poucos eles foram se desvencilhando dos antigos hábitos porque a atividade em sala de aula requereu por parte deles uma atitude de participação ativa durante toda a aula, desde a leitura individual, ao trabalho em equipe que se deu preferencialmente em pequenos grupos, na solicitação de registro e defesa para o grande grupo.

Desde os primeiros dias de aulas deixamos acordado que a avaliação deles seria realizada durante todo o processo de ensino-aprendizagem, em todos os momentos e continuamente eles estariam sendo avaliados e que a avaliação seria predominantemente qualitativa. O resultado da avaliação bimestral é extraído de somatórios das atividades (SA) desenvolvidas em sala de aula e uma verificação de aprendizagem (VA) individual no final do bimestre. O resultado final a cada bimestre é feito da média aritmética entre SA e VA. Por outro lado, o regimento escolar recomenda que a avaliação seja contínua e deva priorizar os aspectos qualitativos em relação aos quantitativos.

A ação/interação foi iniciada em 19/04/2012 com término em 30/08/2012, período este correspondente a aproximadamente duas unidades letivas, com um recesso no meio desse período, sem contar também com a semana destinada a provas de unidades de todas as disciplinas, obedecendo assim à organização interna da escola, em torno de dois meses efetivos, no qual se criou as condições para o levantamento/coleta de dados por meio das aulas ministradas, notas de aulas, análises das descrições das aulas e produções escritas dos alunos ao final de cada encontro de aulas.

A seguir, apresentamos as descrições e análises das aulas, que corresponde ao recorte do trabalho de campo, mostrando um contínuo de uma sala de aula, explorando o conceito de função, função afim, função quadrática e função exponencial, visando o desenvolvimento de compreensão de ideias essenciais de funções.

5.2. Unidade didática I: Conceito de função

Nessa unidade didática, totalizamos *8 horas-aula*, distribuídas em 6 encontros com descrições e análises de cada aula. Exploramos o conceito de função e representações múltiplas de funções, a partir dos problemas da Matemática Discreta e de contextos de padrão concreto. As funções inversas e as funções compostas foram justificadas na resolução e exploração de problemas, sem excesso de simbologia e de manipulações algébricas.

5.2.1. Descrição e análise do encontro 01

Aulas 01 e 02 (Data 19/04/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 1.1: Conceito de função e representações múltiplas de funções.

Neste encontro, trabalhamos a Atividade 1.1.

Atividade 1.1: A secretária de uma escola de Ensino Médio precisa comprar dois tipos diferentes de produtos de escritório para a sala da diretoria. O primeiro produto tem preço unitário de R$ 5,00 e o segundo produto tem preço unitário de R$ 10,00. A secretária tem R$ 100,00 disponíveis para usá-los na compra desses dois tipos diferentes de produto. Pede-se:

A) Montem uma tabela mostrando a relação entre todas as quantidades possíveis na realização de uma compra incluindo esses dois tipos diferentes de produtos;

B) Façam um esboço gráfico dessa relação entre essas duas quantidades;

C) Descrevam a equação que expressa a quantidade de produtos de R$ 10,00 relacionada à quantidade de produtos de R$ 5,00;

D) Determinem para quais valores numéricos está definida a quantidade possível na compra de produtos de R$ 5,00 nessa relação;

E) Encontrem a variação dos valores para a quantidade possível na compra de produtos de R$ 10,00 nessa relação.

Distribuímos a atividade 1.1 em papel impresso e papéis milimetrados para todos os alunos e, em seguida, pedimos-lhes que fizessem primeiramente uma leitura individual do problema. Após a leitura, houve inicialmente algumas manifestações por parte de alunos, como o caso do aluno A41, disparador do seguinte diálogo entre professor-aluno(s) e vice-versa:

> *A41: Eu posso comprar* 20 *produtos de R*$ 5,00 *ou* 10 *de R*$ 10,00, *já que os dois resultados dão R*$ 100,00.
>
> *PP: Façam uma leitura mais atenta do problema, vejam que existe uma condição.* (Pausa) *E agora, você acha que é possível?*
>
> *A41*: *Não professor, ela precisa comprar sempre dois tipos diferentes de produtos.*
>
> *PP para o GG: Ok! Pessoal. A aluna A41 chegou à conclusão de que a secretária não pode comprar somente um tipo de produto, vocês concordam com ela?*
>
> GG: *Concordamos* (coro)
>
> *A18: Professor, eu tentei começar com* 1 *produto de R*$ 5,00, *mas não teria como fazer compras de produto de R*$ 10,00 *pra dar R*$ 95,00. *Então, eu pensei compro* 50 *reais de cada produto, ou seja,* 10 *produtos de R*$ 5,00 *e* 5 *produtos de R*$ 10,00, *seria essa a resposta?*
>
> *GG: Sim* (Alguns alunos responderam)
>
> *PP: Ok! Concordo com vocês. Porém, essa é apenas uma opção de compra e nós precisamos obter todas as quantidades possíveis de compra distribuindo os dois tipos de produtos* (dirigindo-se ao GG). *Bom, pessoal. Formem grupos de quatro alunos para vocês trocarem ideias e discutirem juntos as suas soluções*.
>
> *A35: Professor, eu encontrei algumas soluções. Acabei.*
>
> *PP: Falta fazer mais, continue.*

Demos um tempo à turma e continuamos circulando pelos grupos. Observamos que boa parte dos grupos já haviam completado todas as possibilidades. Perguntamos ao grande grupo sobre as possibilidades de compras e eles disseram por unanimidade que eram 9.

> Comentário*:* Observamos que os alunos A08, A16, A29, A39 usaram o método de tentativas sucessivas e elencaram todas as quantidades possíveis de distribuição na compra dos dois tipos

de produtos sem seguir nenhuma ordem, apresentando dificuldades na organização de dados que são bastante úteis para a observação de regularidades de padrões e também na construção de gráficos de funções. A representação numérica segundo Friedlander e Tabach (2001) precede todas as outras na resolução de problemas.

Pedimos para o grande grupo prestar atenção na montagem da tabela para que eles pudessem organizar melhor os dados encontrados. No entanto, alguns alunos não atenderam a essa solicitação e mantiveram suas tabelas como já haviam feito.

Comentário: Ficamos surpresos com o aluno A43 que até então sempre demonstrou sentir muita dificuldade nas aulas de Matemática e foi o primeiro aluno a nos mostrar a representação tabular com os dados organizados e o gráfico corretamente pronto. Pareceu-nos, a partir do caso em questão, quando os alunos fazem matemática em um ambiente de resolução de problemas, ela se torna um empreendimento mais satisfatório, portanto os indivíduos que se sentem incomodados com um ensino centrado no professor começam a desenvolver mais autonomia.

Solicitamos para o aluno A43 dar continuidade ao trabalho e socializar suas formulações e validações para o pequeno grupo do qual fazia parte. Logo, em seguida o aluno A20 que estava em outra equipe de trabalho nos pergunta: *O que é esboço?* Respondemos que do ponto de vista matemático para o que foi solicitado em questão, trata-se do desenho do gráfico dessa relação. Referimo-nos assim, sem muito rigor matemático, nem mesmo, no sentido do dicionário Ferreira (2011), quando se refere ao delineamento em linhas gerais de uma obra de desenho, ou seja, um conjunto de traços iniciais para dar ideia de esboço.

Comentário: Os alunos A06, A20, A30 e A45 estavam no mesmo grupo e representaram essa relação por meio de uma reta. Por outro lado, a maioria dos alunos representou a relação normalmente através de um conjunto de pontos discretos. Fica parecendo que a representação por uma reta é mais comum, quando o aluno já estudou gráfico de função afim em anos anteriores. As representações gráficas de funções discretas do ponto de vista histórico são as primeiras compreensões da noção de função como relação entre quantidades, enquanto as representações de funções de variável real por meio de uma curva contínua surgem com a ideia de movimento. As alunas A40 e A44 não conseguiram representar a relação entre as quantidades na compra de dois produtos diferentes por meio de uma equação algébrica. Elas foram os únicos alunos que não estavam engajados efetivamente no seu grupo, embora tenhamos nos aproximado delas para incentivá-las a trabalhar em grupo. Como os demais alunos estavam empenhados no trabalho em grupo, isso provavelmente favoreceu a troca de ideias e acabaram encontrando algum tipo de representação algébrica. O aluno no Ensino Médio já vivenciou a Álgebra, no estudo das equações e facilmente no trabalho em equipe conseguiram chegar à equação linear que modela o problema proposto. Agora, no Ensino Médio, precisamos verificar se eles haviam compreendido a ideia de variável, se eles haviam dado o salto qualitativo de que o x é uma variável relacionada ao y na função, representando uma função onde as letras apresentam relação de interdependência.

Circulamos por vários grupos de alunos, escutando-os e observando as suas representações no desenvolvimento da questão da letra C.

Comentário: Observamos que a representação mais usual foi a equação linear $5x + 10y = 100$, provavelmente porque ela está modelizando a situação-problema. Mas, esperávamos encontrar a solução de algum ou mais alunos que pusesse a equação na forma convencional de função, pois ela permite mostrar a relação de dependência entre as variáveis x e y. Segundo Booth (1984/1995), nas equações algébricas resolvemos problemas colocando x como incógnita e o sinal de igualdade como indicador de uma relação de equivalência. Enquanto na exploração desse problema proposto intentávamos que os alunos percebessem que as letras x e y no problema proposto fossem vista como variáveis que variam entre si e o sinal de igualdade passasse a ser visto, não mais indicando uma equivalência de expressão algébrica como na equação, mas sim indicando uma relação entre quantidades variáveis no estudo de função.

Pedimos para o grande grupo prestar atenção na pergunta da questão da letra C, já que ela pede a equação algébrica que está relacionando a quantidade de produtos de R$ 10,00 à quantidade de produtos de R$ 5,00. Enfatizamos na ideia de uma primeira grandeza mudando uma segunda grandeza de modo que eles pudessem distinguir a variável independente e dependente, mesmo sem explicitar os termos nesse momento da aula.

Comentário: Possivelmente tenhamos induzido os alunos a buscar outra equação. O grupo composto por A06, A20, A30, A45, escreveu abaixo da equação linear $5x + 10y = 100$, a equação $y = 10 - \frac{1}{2}x$. Nossa expectativa era de que pudessem apresentar a equação algébrica da função, mostrando a relação de dependência entre as variáveis, sendo x a variável independente (campo de definição da função) e y a variável dependente (campo de variação da função). Observamos que, por meio da nossa mediação, os alunos conseguiram realizar a transição das equações para as funções, notando que as funções foram criadas para representar variações entre duas grandezas.

Inquirimos ao pequeno grupo como eles fizeram para obter esta nova equação. Os alunos A30 e A20 deram respostas no sentido da percepção de suas conclusões por meio da visualização da tabela e do gráfico, mas não justificaram com maiores explicações.

Comentário: Os alunos haviam percebido o comportamento dessas variações, investigando a tabela e analisando o gráfico da função, embora ainda não conseguissem explicar nem justificar sua compreensão. Os alunos precisam avançar na metacognição, adquirindo controle e consciência dos processos de aquisição do conhecimento que estava sendo desenvolvidos com uma compreensão dos conceitos matemáticos. Pois, de acordo com Vygotsky em Van der Ver e Valsiner (2009), o treinamento de habilidades metacognitivas possivelmente se refletirá no modo como os indivíduos resolvem problemas, na tomada de decisões e no uso de representações mentais.

Observamos que eles haviam dispensado qualquer artifício de cálculo para chegar aos resultados obtidos, enquanto outros alunos realizaram transformações algébricas para chegar a uma resposta satisfatória para essa questão do ponto de vista da Matemática para a representação da equação, mostrando a relação entre a quantidade de produtos de dez reais e a quantidade de produtos de cinco reais.

Comentário*:* Apenas os alunos A18 e A36 transformaram a equação, demonstrando passo a passo o processo algébrico, por eles utilizado, com compreensão. Os demais alunos do seu grupo apenas escreveram as respostas dos seus colegas, pois, quando inquiridos sobre o processo de resolução não havia compreensão do que eles haviam registrado como cálculo algébrico. Circulando pela sala de aula, pudemos observar que a maioria dos alunos responderam as letras D e E através de dois conjuntos por extenso $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ e $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ respectivamente. Os alunos nos seus grupos nos perguntavam se estava certo. O aluno fica sempre esperando que o professor confirme ou não a resposta. *Veja se está certa ou errada!* Notamos que há falta de habilidades metacognitivas. O aluno não é capaz de avaliar o seu próprio processo de aprendizagem, ele se torna dependente do professor. Os alunos A07, A27, A41 e A45, além da representação por extenso, responderam do seguinte modo: $\{x \in N/2 \leq x \leq 18\}$ e $\{x \in N/1 \leq x \leq 9\}$.

O conteúdo de intervalos numéricos foi trabalhado dentro de situações-problemas e contextos que foram significativos para os alunos como as questões envolvendo pontuação de diversas modalidades esportivas, antes de darmos início a esta pesquisa. Provavelmente, por essa razão, essas respostas tenham surgido com naturalidade. Apenas o aluno A10 percebeu que o intervalo da letra D não poderia ser representado como subconjunto dos números naturais compreendidos entre 2 e 18 porque só podiam ser números naturais pares entre 2 e 18, incluindo o 2 e o 18, apesar do aluno A10 não saber como escrever isso em linguagem simbólica.

Comentário: Preferimos não levar essa questão nesse momento para o GG, deixando-os bem à vontade na resolução do problema para que eles pudessem aproveitar os últimos momentos da aula trocando ideias com os seus parceiros de equipe. Ficamos atentos ao desenvolvimento da atividade que foi proposta aos alunos. Porém, neste primeiro momento, acompanhamos os trabalhos que os alunos estavam realizando sem haver uma interferência mais direta sobre as decisões tomadas por eles.

Por meio de representações múltiplas no trabalho em grupo, os alunos utilizaram tabelas, equações e gráficos e, ainda de maneira intuitiva, conseguiram escrever os conjuntos do domínio e imagem dessa relação sem usar essa nomenclatura, apenas enumerando a variação de cada produto. O conceito de função é muito complexo segundo estudos de Markovits, Eylon e Buckheimer (1995) e Cooney et al. (2002), porque envolve os componentes da definição de função, tais como o seu domínio e a sua imagem, devendo serem introduzidos na medida em que forem aparecendo nos problemas trabalhados em sala de aula e, também, devido às suas diversas representações.

Iniciou-se uma primeira leitura individual, em que os alunos realizaram algumas considerações e primeiras inferências na tentativa de obter uma solução para o problema. Os alunos resolveram a situação-problema, usando representações múltiplas que foram favorecidas pelo trabalho em equipe. Percebemos que a resolução de problemas favorece o aluno que não gosta da inércia de uma sala de aula, onde o professor trava monólogos, como o caso do aluno A43, que nos surpreendeu mostrando-se ativo e engajado na resolução do problema e possivelmente com outra metodologia se mantivesse estático, esperando o professor dar uma solução.

Entretanto, registramos falta de processos metacognitivos de um modo geral na turma, pois ainda não víamos os alunos analisando o seu próprio pensamento, esperando que o professor confirmasse se a solução encontrada por eles estava certa. Houve confrontos de ideias, rejeições e consensos entre eles nos seus respectivos grupos. Nesse primeiro encontro não houve formalização do conhecimento matemático como etapa final da aula. Deixamos os alunos trabalhando livremente em grupos e circulamos na sala de aula observando o trabalho dos alunos na resolução de problemas em grupo.

Predominantemente, a aula foi dialogada na interação professor-aluno e professor-alunos. As interações entre os alunos entre si ocorreram no trabalho em grupo, mas não tivemos como registrar todos os diálogos que estavam acontecendo em sala de aula em todos os grupos de trabalho, pois ficamos observando o desenvolvimento das resoluções que os alunos estavam realizando e não fizemos mais intervenções no final da aula deixando-os livres para interagirem entre eles. Por outro lado, pudemos constatar esse nível de interação entre alunos por meio da produção coletiva das respectivas resoluções que eles apresentaram.

Optamos, inicialmente, por realizar pequenas intervenções porque não queríamos deixar os alunos desmotivados para o trabalho e houve menos interferência quando o aluno estava trabalhando nos seus respectivos grupos. Tanto nós, na qualidade de professor-pesquisador, como os colegas mais experientes fizeram o papel de mediadores, favorecendo a aprendizagem, onde os alunos puderam sair do desenvolvimento potencial para o real. Portanto, a ponte foi representada pelos alunos e o professor que trabalharam no que Vygostsky (2007) chamou de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), responsáveis pelas variações que ocorreram durante esse primeiro encontro.

Podemos evidenciar que os alunos mobilizaram conhecimentos numéricos como a de representação de conjuntos numéricos por extensão e por compreensão de propriedades, justificando sua linguagem a partir da necessidade surgida durante a resolução de problemas. Também na construção de tabelas, ao realizarem levantamentos de informações do enunciado do problema. Quanto ao conhecimento algébrico, os alunos modelaram o problema por meio de uma equação linear e, depois da mediação do professor, a equação funcional do problema e o gráfico de função apareceram. E quanto ao conhecimento geométrico, eles representaram a função por pontos discretos no domínio dos números naturais, com exceção de uma das equipes de trabalho que uniu os pontos traçando uma reta.

5.2.2. Descrição e análise do encontro 02

Aula 03 (Data 20/04/2012)

<u>Conteúdos desenvolvidos na atividade 1.1</u>: Conceito de função e representações múltiplas de função.

Neste encontro, continuamos explorando as questões da atividade 1.1.

Apresentação de quatro resoluções que foram selecionadas, mostrando a frequência maior de respostas comuns pelos alunos, resoluções estas, que foram digitalizadas e mostradas em data show para discussões, consensos e possíveis refutações. A primeira projeção apresentou a questão A, resolvida pelo aluno A39, montando uma tabela sem seguir uma ordem na sua apresentação.

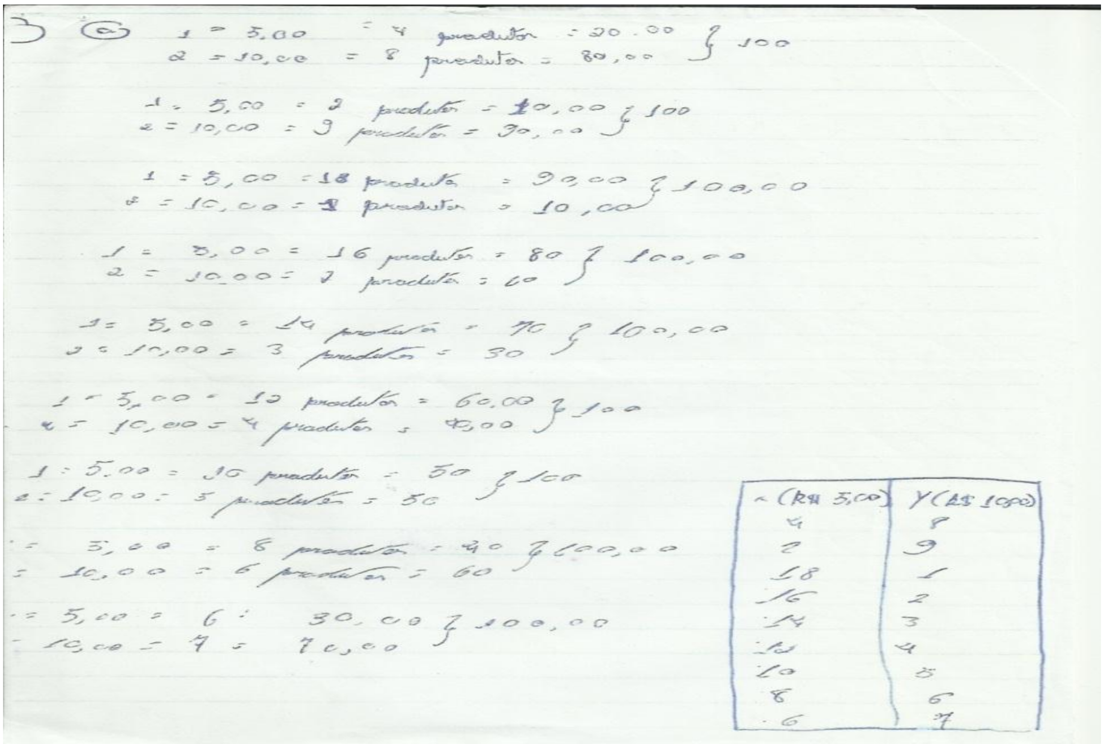
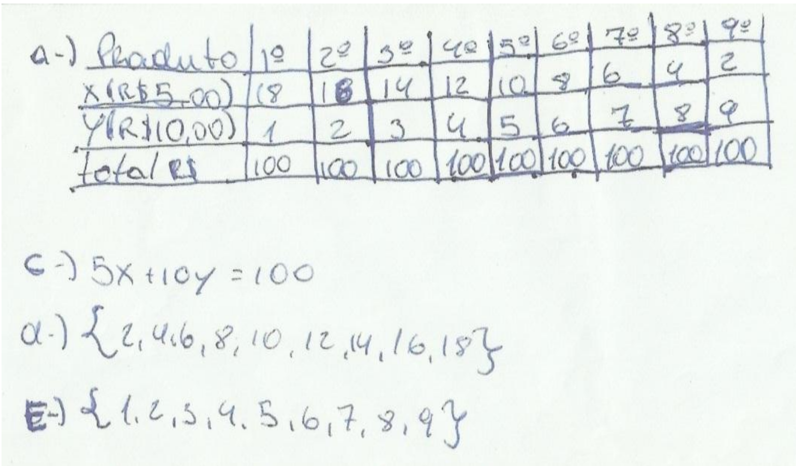


Figura 06: Resolução da atividade 1.1 do aluno A39, representando seu grupo.

Comentário: Podemos perceber que houve uso e abuso do sinal de $(=)$. Por outro lado, ilustramos as atividades tais quais foram apresentadas pelos alunos e podemos observar que eles utilizaram o método da tentativa e erro, mesmo não tendo postos corretamente o sinal de $(=)$ e de não terem colocado a unidade de medida (R\$). Embora, esta última apareça na tabela que eles construíram.

Perguntamos aos alunos o que eles achavam dessa solução, alguns alunos responderam que a tabela não estava em ordem. Daí, corroboramos com o grande grupo, sugerindo que poderíamos melhorá-la. E logo em seguida apresentamos para a turma a atividade relativa a essa mesma questão pelo aluno A06, representando o seu grupo.



a-)

Produto	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
x(R$5,00)	18	16	14	12	10	8	6	4	2
y(R$10,00)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
total R$	100	100	100	100	100	100	100	100	100

c-) $5x + 10y = 100$

a-) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

E-) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Figura 07: Resolução da atividade 1.1 do aluno A06, representando seu grupo.

PP: *E agora, está melhor assim a tabela feita pelo aluno A06?*

GG: *Sim*. (Um coro total)

PP: *Por quê?*

A19: *Porque é melhor pra desenhar o gráfico.*

PP: *Mas mesmo assim isso não impediu o aluno A39 de localizar todos os seus pontos corretamente no gráfico.*

A19: *O importante é saber localizar os pontos no gráfico.*

PP: *Certo! Porém, eu entendo a necessidade de colocar as ideias em ordem. Em outra situação, a falta de organização pode atrapalhar o raciocínio. No entanto, é por meio de tentativas, como foram feitas pelo o aluno A39 junto com seu grupo, que vamos descobrindo as coisas em Matemática e somente depois desse desenvolvimento é quando podemos passar a organizar as informações encontradas. Agora, eu gostaria que vocês se concentrassem na letra C apresentada pelo aluno A06:* $5x + 10y = 100$. *Ok. Vou passar para a solução apresentado pelo aluno A07. Percebem que ele mostrou uma segunda relação* $y = 10 - \frac{1}{2}x$*?*

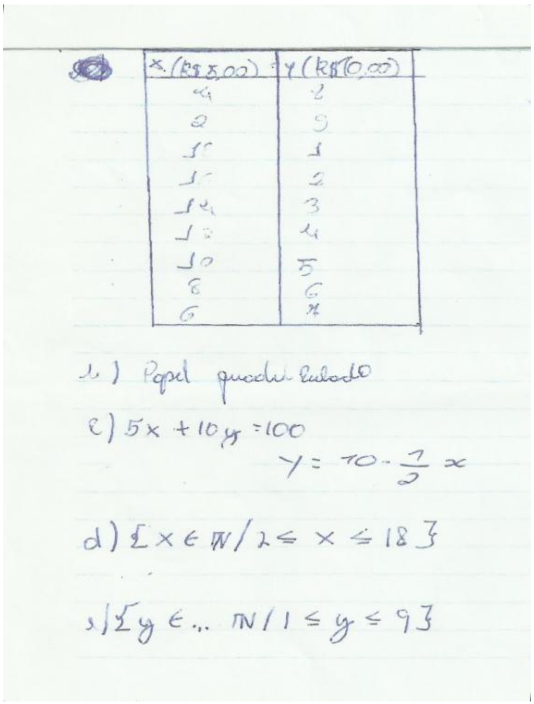


Figura 08: Resolução da atividade 1.1 pelo aluno A07, representando seu grupo.

Comentário: Podemos perceber que no intervalo da letra D, faltou restringir os valores do intervalo em somente pares, pois não serve 3, 5, 7, 9, ..., 17.

A21*: Professor, eu entendi que 10 menos a metade da quantidade do produto 1 dá a quantidade do produto 2.*

PP*: Vocês concordam com A21?*

A18*: Tá correto. Pois,* $10 - \frac{2}{2} = 9$, $10 - \frac{4}{2} = 8$, $10 - \frac{6}{2} = 7$, $10 - \frac{8}{2} = 6$, $10 - \frac{10}{2} = 5$, $10 - \frac{12}{2} = 4$, $10 - \frac{14}{2} = 3$, $10 - \frac{16}{2} = 2$, $10 - \frac{18}{2} = 1$. *Bate direitinho nessa nova equação.*

PP*: Bem, mas será que existe um método em que nós possamos encontrar essa relação diretamente da equação 5x + 10y = 100?*

GG ao PP*: Sei não, professor. Ah! Eu sei fazer* (Algumas vozes).

PP*: A aluna A36 apresentou uns artifícios de cálculos algébricos para chegar numa outra solução. A36, você poderia vir ao quadro nos mostrar como você fez para chegar à solução* $y = 10 - \frac{1}{2}x$*?*

A27*: Eu posso ir*. (Dirigiu-se à lousa para registrar o seu procedimento operatório).

Depois que a aluna A36, desenvolveu a questão da letra C na lousa. Fizemos o papel de tradutor do seu pensamento em uma exposição dialogada, fazendo os alunos recordarem-se dos princípios aditivo e multiplicativo no cálculo algébrico para isolar y. Perguntamos se os alunos haviam compreendido o processo adotado pela aluna A36 e eles todos pareceram concordar. Projetamos o gráfico esboçado pelo aluno A43:

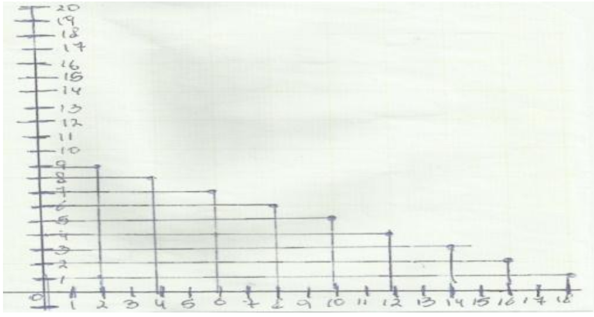


Figura 09: Representação gráfica da atividade 1.1 do aluno A43, representando seu grupo.

Comentário: Podemos perceber, neste gráfico, que o aluno A43, não teve o cuidado de nomear os eixos, dificultando a leitura do gráfico, pois não dá para identificar qual é a variável dependente e a independente no plano cartesiano em questão.

PP*: E aí, está certo? Todos pareceram concordar e nesse momento, o professor perguntou ao GG. E se nós uníssimos os pontos, vocês acham que ficaria certo?*

A41*: Não, professor. Nas aulas de reta numerada ficou claro que a gente só pode unir os pontos se existirem infinitos pontos entre um e outro.*

PP*: Ok, A41. Vejam vocês que o problema se refere a uma situação de um contexto do mundo real. Portanto, o domínio está no conjunto dos números naturais. Logo, os valores são discretos, eles não existem continuamente. Mas apenas em momentos ou locais específicos.*

Retomamos a projeção do aluno A06.

PP*: Concentrem-se, agora, nas letras D e E. O que vocês acham dessas soluções? (O GG pareceu concordar). E agora, mostrando a projeção do aluno A07. Olhem para as soluções das letras D e E, vocês concordam com essas respostas?*

A10*: Professor, a letra D só pode ser números pares?*

PP ao GG*: Vocês concordam com o aluno A20.*

GG*: Sim* (Coro). *Mas, por quê?*

A45*: Neste caso é melhor representar esse conjunto por extenso.*

PP*: Vou lhes apresentar uma solução por compreensão de propriedade desse conjunto que seria mais adequada do ponto de vista da Matemática* $\{x \in N\ onde\ x = 2n\ para\ todo\ n \in N/2 \leq x \leq 18\}$ (registramos na lousa essa solução).

GG*: Isso é muito difícil, professor*. (Alguns alunos comentaram)

PP*: Vocês entenderam o porquê de termos que explicar melhor a variação de números pares?*

A10*: Mais ou menos, eu sei que todo número par é múltiplo de 2 e divisível por dois por isso ele pode ser representado por 2n.*

PP*: Ok.* (A sirene toca).

Devido às dificuldades apresentadas pelos alunos tanto, em estabelecer uma relação entre a variação de quantidades na representação funcional algébrica quanto na anotação de conjuntos domínio e imagem, em realizar generalizações de ideias e convenções matemáticas, escolhemos, para esse encontro, um trabalho mais diretivo num sentido de chamar a atenção dos alunos para as produções de significados da noção de função, representações múltiplas e conjuntos domínio e imagem de função.

Análise das formulações e validações produzidas no trabalho dos alunos em grupo, mobilizando múltiplas representações: tabulares, equações e gráficos. Embora tenhamos dirigido o debate por meio de questionamentos e provocações, os alunos realizaram consensos e indícios de refutações de ideias, sobretudo nas múltiplas equações equivalentes na representação algébrica da função. Entretanto, quando precisamos traduzir o pensamento da aluna A36, ficou evidente para nós que faltou exercitarmos na turma a metacognição, pois o ideal seria, naquele momento da aula, que a aluna A36 explicasse o seu pensamento para a turma, podendo avaliar a sua produção e ganhando mais segurança na apresentação de suas resoluções para sua turma. Finalizamos a aula por meio da apresentação da linguagem matemática do conjunto domínio do ponto de vista mais rigoroso da Matemática.

Devido à nossa preocupação em relação ao tempo pedagógico de uma aula de 50 minutos, houve uma predominância do diálogo entre professor-aluno e professor-alunos. Embora na sistematização da representação convencional do conjunto domínio entre números pares, pudemos registrar a interação entre dois alunos entre si. De modo geral, a mediação ocorreu por meio do professor e pela produção coletiva dos alunos.

Foi possível aos alunos analisarem as representações múltiplas de funções produzidas por eles mesmos a partir das confluências de ideias, onde uma função não muda porque mudou a sua representação, favorecendo realizar conexões entre as representações nos campos numérico, algébrico e gráfico. Estas visões das compreensões essenciais da ideia de representações múltiplas podem ser referendadas nos estudos de Van de Walle (2006) e Cooney, Beckmann e Lloyd (2010). Não houve nesse momento, por parte dos alunos, indícios da compreensão de que algumas representações de uma função devem ser mais úteis que outras, dependendo do contexto.

No entanto, neste encontro, os alunos evidenciaram compreensão intuitiva de função como relação de dependência entre grandezas que é constituinte de uma primeira compreensão para chegar ao conceito formal de função, segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), isto é, compreensão essencial 1a com a ideia de associação dos elementos do domínio com valor único para os elementos do conjunto imagem. As ideias de variação do campo de definição (domínio) e campo de variação da função (imagem) foram exploradas de forma intuitiva, sem haver nomeação e definições formais desses componentes do conceito de função, já que podemos indiciar as primeiras compreensões da existência desses elementos com a percepção dos alunos em realizar uma distinção entre uma e a outra forma de variação.

A compreensão conceitual correspondente à compreensão essencial 1b, de acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), pôde ser registrada através dos diálogos estabelecidos em sala aula com a compreensão de que existem funções discretas e contínuas, a primeira sendo representada por pontos discretos e a segunda unindo-se os pontos que dá uma ideia ampla de funções, não se restringindo apenas as funções contínuas.

A linguagem convencional da Matemática com seu caráter rigoroso e formal, não fora de fácil apropriação. Apesar do nosso trabalho de mediação, no papel de tradutor dessa linguagem, sua aquisição é demorada e demanda certo tempo ao longo do currículo escolar de Matemática, pudemos observar que a maioria dos alunos não compreendeu a notação convencional do conjunto dos números inteiros pares compreendidos entre a e b, excluindo a e b. Provavelmente, porque essa linguagem seja muito rebuscada para as mentes dos nossos adolescentes, que preferiram a representação do conjunto por extenso. Novamente, podemos evidenciar que a representação numérica é mais espontânea com os alunos, mobilizando-as sozinhos sem a nossa intervenção, enquanto a representação algébrica requer a nossa mediação de modo que os alunos possam atingir níveis mais sofisticados e abstratos de pensamento.

5.2.3. Descrição e análise do encontro 03

Aula 04 (Data 25/04/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 1.2: Conceito de função e representações múltiplas de funções.

Neste encontro, trabalhamos a atividade 1.2:

Atividade 1.2: Um hotel projetado, recentemente, tem P quartos pequenos medindo 25 m^2 e G quartos grandes medindo 40 m^2. Os arquitetos têm 1000 m^2 de espaço disponível.

A) Montem uma tabela, mostrando a relação entre todas as áreas possíveis na distribuição desse espaço de 1000 m^2 disponíveis para a construção de quartos com as medidas P e G.

B) Escrevam uma equação que expresse a quantidade de quartos grandes em relação à quantidade de quartos pequenos, ou seja, relacionando P e G.

C) Determinem o seu domínio e o seu conjunto imagem;

D) Os planos para o hotel, na questão anterior, foram revistos e a quantidade de espaço disponível aumentou para 1600m^2. Encontre a nova relação entre essas quantidades. Esboce seu gráfico junto com o gráfico original. Como podem ser comparados os dois gráficos? (Adaptado do livro: MCCALLUM et al., 2011. p.127-128)

Entregamos o texto da situação-problema 1.2 em papéis impressos e papéis milimetrados para os alunos. Em seguida, pedimos-lhes que fizessem uma leitura inicial sozinhos da situação proposta e demos-lhes um tempo para que a resolvessem. Nesse ínterim, pedimos para os alunos formarem grupos constituídos de trio, podendo assim facilitar a realização da tarefa no compartilhamento de ideias, um ajudando o outro num trabalho de cooperação e colaboração. Deixamos os alunos, trabalhando nos grupos e, de quando em quando, circulamos na sala de aula para acompanhar o desenvolvimento das questões pelos alunos.

> A29: *Professor o que é o domínio e a imagem? Ainda não foi falado isso pra gente.*
>
> PP ao GG: *Nesse primeiro momento, vamos chamar de domínio o conjunto formado por todos os elementos de entrada que dizem respeito à variação da quantidade de quartos pequenos que podem ser distribuídos no espaço que foi disponibilizado. E o conjunto imagem, o conjunto formado por todos os elementos de saída que dizem respeito à variação da quantidade de quartos grandes que podem ser distribuídos na área disponibilizada.*
>
> A36: *O domínio é o conjunto da primeira coluna da tabela e a imagem é o conjunto formado com os elementos da segunda coluna da tabela que acabamos de montar.*
>
> PP: *Essa não é uma resposta mais apropriada do ponto de vista da Matemática, mas faz sentido.*

PP ao GG: *Nós podemos entender o domínio como o campo de definição da função com valores que estão no eixo horizontal. E a imagem, o campo de variação da função com valores que estão no eixo vertical, relacionados aos elementos do domínio.*

A30: *Professor é pra gente construir dois gráficos?*

PP ao GG: *Sim, mas é para esboçar o gráfico da nova relação junto com o gráfico original e assim poder comparar melhor os dois gráficos.*

A11: *Eu já fiz professor.*

PP ao GG: *Comparando os dois gráficos, o que vocês percebem?*

A36: *Eles possuem a mesma distância, porém seus pontos não se encontram.*

PP: *Isso mesmo, os pontos do gráfico original mantêm a mesma distância dos pontos do gráfico dessa nova relação.*

Dividimos a lousa em três partes e selecionamos três alunos representantes de equipes distintas para registrar a resolução das questões na lousa. Salvo algumas pequenas divergências, de modo geral todos haviam realizado as resoluções mais ou menos parecidas.

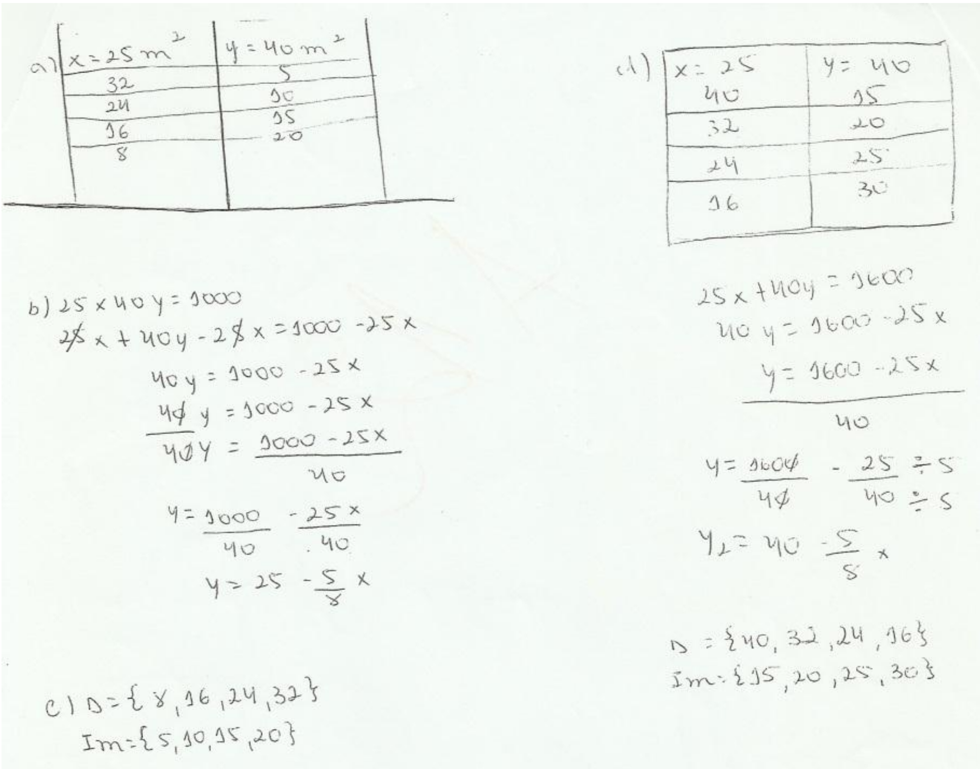


Figura 10: Resolução da atividade 1.2 apresentada pelo aluno A27, representando seu grupo.

Diante do exposto, resolvemos fazer mais perguntas ainda relacionadas à situação-problema 1.2. Escrevemos as duas equações na lousa $y_1 = 25 - \frac{5}{8}x$ e $y_2 = 40 - \frac{5}{8}x$, em seguida pedimos para os alunos observarem o que há de comum

entre as equações. Nesse momento, apenas o aluno A12 respondeu o coeficiente $-\frac{5}{8}$.
Insistimos com o grande grupo com a pergunta do que eles achavam desse coeficiente estar relacionado com alguma propriedade.

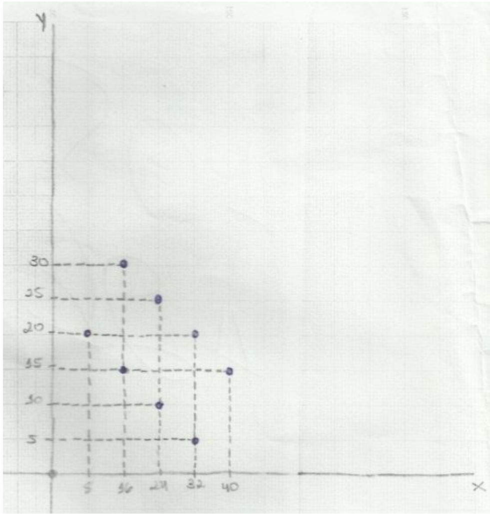


Figura 11: Representação gráfica da letra D para o comportamento dos gráficos esboçados no mesmo plano pelo aluno A20, representando seu grupo.

> Comentário: O eixo x e y estão registrados, porém como o problema está inserido em um contexto, faltou nomear x indicando valores do tamanho de quartos pequenos e y indicando valores de tamanho de quartos grandes.
>
> A40: *Eu acho que tem a ver com o fato do gráfico ser parecido.*
>
> A18: *A gente também notou que os pontos nos dois gráficos têm a mesma distância.*
>
> A19: *Também é do mesmo tipo, só muda a área que passou de 1000 m^2 para 1600 m^2. Mas, os tipos de quartos permaneceram os mesmos.*
>
> PP: *De fato, podemos explorar muita coisa ainda e os comentários de vocês fazem sentido.*
>
> Comentário: Como a taxa de aumento fora a mesma para as duas funções e os gráficos dessas funções subiram na mesma inclinação, os alunos haviam percebido que de modo geral, se o comportamento de duas funções distintas mantiver a mesma distância uma da outra, terão consequentemente a mesma taxa de variação e ambas serão paralelas. Isso contribuiu significativamente para os alunos desenvolveram uma compreensão inicial do conceito essencial de funções, a ideia de taxa de variação. Essa observação por parte dos alunos também poderá fornecer um bom alicerce para a compreensão da ideia de função afim.
>
> *PP: Na situação-problema 1.2, acabamos de ver que a área do espaço a ser distribuída para cada valor da variação da quantidade de quartos pequenos está associada a um único valor para a variação da quantidade de quartos grandes. Isto, em Matemática, significa dizer que a quantidade de quartos grandes depende da quantidade de quartos pequenos. Em outras palavras que a quantidade de quartos grandes é função da quantidade de quartos pequenos.*

Continuamos em uma exposição dialogada, exemplificando para a turma vários exemplos de funções em situações do nosso dia a dia. Por exemplo: o crescimento de uma planta é função dos dias decorridos a partir da plantação da muda; o valor a ser pago num posto de gasolina é função da quantidade de combustível que se coloca; o resultado das eleições é uma função dos gastos de campanha; a distância que um automóvel percorre, mantendo a mesma velocidade é função do tempo para um dado percurso; o pagamento mensal de um vendedor de loja é função da quantidade de peças por ele vendidas no mês. Também na geometria, por exemplo: o perímetro de um triângulo equilátero é função do seu lado; a área de um quadrado é também função do seu lado, dentre outros.

> Comentário: Gradualmente, fomos introduzindo a compreensão essencial 1a do conceito de função conforme apresentado pelos autores Cooney, Beckmann e Lloyd (2010). A partir da exploração do problema proposto pelos alunos, fomos sistematizando a ideia de unicidade com apresentação da linguagem matemática mais corrente para nos referirmos à relação de dependência entre grandezas como uma coisa que está em função de outra através da associação da variável independente com valor único para a variável dependente.

Chamamos a atenção da turma, tendo em vista a sistematização dos conteúdos explorados, na sessão deste encontro, para que eles pudessem observar ainda que como houve uma variação entre duas grandezas que acabaram denominando de x e y. O x é chamado de variável independente e o y de variável dependente. Para cada elemento x do domínio está associado um único valor y imagem da função, assim eles puderam compreender a ideia-chave do conceito de função. O y pode ser representado por $f(x)$. A leitura para $f(x)$ é função de x (valor da função no ponto). O ponto $(2,3)$, numa função, pode ser interpretado como $f(2) = 3$. Foi importante deixar claro para os alunos que as variáveis poderiam ser representadas por outras letras. Por exemplo, na situação-problema 1.2, nós poderíamos ter chamado as variáveis de P e G. Ou ainda, G poderia ser representado por $G(P)$, função G de P.

PP: *Agora, mudando um pouquinho de assunto, vocês poderiam me dizer qual é a diferença de incógnita e variável?*

> A19: *A incógnita é o termo desconhecido.*
>
> PP: *Muito bem. E a variável?*
>
> A26: Uma letra que representa um número qualquer de um conjunto que pode variar.
>
> PP: *Isso mesmo, um símbolo que pode assumir um conjunto de valores que pode ser finito ou infinito.*
>
> PP: *E o que é uma função?*
>
> A05: *É a relação entre duas quantidades.*
>
> PP: *Certo, podemos dizer que função é a relação entre duas grandezas. Já que grandeza é tudo que pode ser medido ou quantificado.*
>
> PP: *Ok, mas qual é a característica principal de uma função?* (Silêncio) *A função é uma associação em que todo elemento do conjunto do domínio da função tem um único valor para*

o conjunto imagem.

A20: *Não entendi muito bem.*

PP: *Assim A20, não podemos ter dois ou mais elementos de imagem relacionada a um único valor do domínio. No entanto, podemos ter dois ou mais elementos do domínio associado à única imagem. Por exemplo: na equação* $y = x^2$, *podemos ter* $x = -3$ *e* $x = 3$ *igual ao mesma imagem* $y = 9$. *Então, a equação está definida para uma função de variável real. Porém, se for contrário, a equação não vai está definindo uma função.*

Substituímos na lousa os valores na equação mencionada anteriormente para verificar essa afirmação a fim de convencê-los da nossa explicação. Encerramos a aula falando para os alunos que a equação é a representação simbólica da função, mas nem toda equação representa uma função, como por exemplo, a equação $x^2 + y^2 = 1$. Nesta equação, mostramos para os alunos que para $x = 0$, podemos ter $y = -1$ ou $y = 1$. Como neste caso, a equação apresenta dois valores de saída para uma única entrada, ela é perfeitamente uma boa equação, porém, não representará uma função. E outra, uma função não tem que ser uma equação, embora uma função possa ser representada por uma equação. Ela pode também ser um conjunto de pares ordenados, mas nem todo conjunto de pares ordenados é função. A equação ou um conjunto de pares ordenados só representará uma função mediante condições especiais. Em outras palavras, se passar pelo critério do valor único. Por isso, a função apresenta restrições, limites, assim como os problemas do mundo real. Portanto, o estudo de função é muito importante para modelar tais fenômenos da realidade.

Enfatizamos ainda mais dando continuidade à explicação que era muito importante eles compreenderem esse critério de uma entrada para uma única saída, significando que não podemos ter o mesmo valor de $f(x)$ como uma saída para diferentes entradas. Pois, a função pode ter as mesmas saídas para diferentes entradas, mas não pode ter diferentes saídas para a mesma entrada. Assim, o critério para definição de uma função é uma saída com uma exigência de entrada da função, ressaltamos que esta regra foi criada pelos matemáticos para que todo mundo obtivesse os mesmos resultados, ou melhor, fosse consistente a respeito do que estivessem conversando.

Comentário: Tornamo-nos enfáticos no trabalho de sistematização das ideias que estavam sendo construídas, porque precisávamos garantir que as compreensões essenciais que envolvem o conceito de função estivessem bem compreendidas pelos alunos, sobretudo as compreensões essenciais do conceito de função que, de acordo com os idealizadores das grandes ideias Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), colocam três compreensões essenciais a serem desenvolvidas no Ensino Médio. Portanto, o conceito de função é unificador no conhecimento matemático. É importante para o aluno desse nível de ensino compreender a

> regra do valor único (1a), isso irá contribuir para o entendimento mais adiante de que o domínio e a imagem de funções não precisam ser números (1c), assim como eles já indiciavam a compreensão de que a função não precisa ser representada por uma equação, nem precisa apresentar uma variação contínua nem mesmo seguir a um padrão de regularidade (1b). A única exigência para ser função é passar pelo critério de unicidade. Eis aqui a ideia-chave de função que abarca todas as compreensões conceituais de funções desde as séries iniciais aos estudos superiores de Matemática.

O conceito de função foi tratado ainda como variação entre quantidades discretas. O domínio e a imagem recorreram à ideia intuitiva de entrada-saída, foi interpretado dentro do contexto do problema e graficamente como variações do eixo horizontal e vertical. Percepção da mesma taxa de variação nas funções indicando paralelismo entre os modelos lineares sem formalização desse conhecimento, havendo, apenas, uma problematização dessa questão por nós instigada. Apresentamos a definição de função como associação de *valor único* e como *relação de dependência* (se o valor de uma quantidade determinar o valor da outra, dizemos que a segunda quantidade é função da primeira), trouxemos vários exemplos de descrições verbais de situações do dia a dia e da geometria mostrando a relação de dependência entre variações de grandezas contínuas.

Houve leitura inicial individual. Formamos grupos de três alunos em que houve confrontos e consensos de soluções apresentadas na lousa, problematizações partindo dos questionamentos do professor a partir das formulações e validações apresentadas pelos alunos representando o seu grupo. Formalização do conhecimento matemático em que podemos atuar explorando o conceito de função tendo como elemento disparador o contexto da situação-problema. Exploramos os conceitos de incógnita e variável antes da ideia de variável dependente e independente e enfatizamos a ideia-chave de *unicidade* no conceito de função.

A aula foi bastante interativa, existindo o registro de diálogos entre professor-aluno, professor-alunos e os alunos entre si. Podendo, assim, chegarmos à definição verbal de função através da resolução de problemas e da mediação feita pelo professor, na apresentação e na busca de atribuição de significados para a formação desse conceito. O contexto, a resolução de problemas, as representações múltiplas, os alunos e o professor formam elos mediadores que favoreceram a compreensão e a aquisição do conceito de função.

Percebemos, na aula, o movimento da exploração dos conceitos espontâneos para a formação de conceitos científicos chegando à definição de função matemática nos aproximando das ideias de Vygotsky (2008), que diz que o conceito científico aparece somente na escola. Por exemplo, função como regra que recebe números como entrada e associa a cada entrada exatamente um único número de saída, mostrando que a saída é uma função da entrada. E, fora dela, como exemplo de conceito cotidiano, a palavra função expressa a noção de uma coisa dependendo da outra. Embora a ideia seja a mesma, na Matemática, o significado vem a ser mais preciso e rigoroso.

Oportunizamos, nesse encontro, mobilizar os conhecimentos prévios sobre incógnita e variável, pois, de acordo com Booth (1995), a incógnita na equação é vista como indicador de uma relação de equivalência e a variável como uma quantidade que varia que é necessária à construção dessa ideia de relação de dependência entre variáveis, função. Por isso, foi importante checarmos se esses dois conceitos estavam bem compreendidos, por parte dos alunos, para poder falar em função concebida como relação entre quantidades para mais adiante podermos formalizar o conceito de função.

Quanto às representações múltiplas de funções, procuramos realizar confluências entre as ideias e compreensões de funções imbricadas na situação-problema, ideias estas preconizadas pelos estudos de Van de Walle (2006) e Cooney, Beckmann e Lloyd (2010). Houve conexões do estudo de função à Geometria Analítica, na representação de dois modelos lineares de variações discretas, dando ideia de paralelismo, ainda que de maneira intuitiva. Na exploração de problemas matemáticos podemos realizar confluências de ideias dentro dos campos da própria Matemática, realizando articulações e conexões da Álgebra com outros campos da Matemática. Por exemplo, da Álgebra com a Geometria. A introdução ao estudo da Geometria Analítica pode ser justificada, a partir dos problemas que surgem na sala de aula dentro do estudo das funções.

5.2.4. Descrição e análise do encontro 04

Aulas 05 e 06 (Data 26/04/2012).

Conteúdos desenvolvidos na atividade 1.3: Conceito de função, destacando a habilidade de fazer generalizações a partir da observação de padrões que apresentam uma regularidade; combinação e transformação de funções (função inversa) e representações múltiplas de funções.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 1.3:

Atividade 1.3: Observe a sequência de triângulos formados por palitos de fósforos:

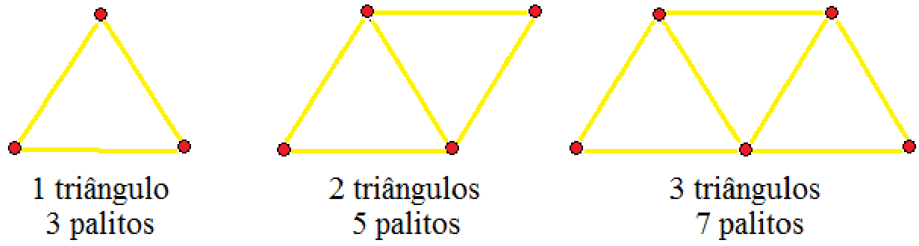


Figura 12: Sequências de padrões geométricos da atividade 1.3.

Continuando a sequência de figuras. Pede-se:

A) Montem uma tabela que faça corresponder o número de triângulos ao número de palitos respectivamente;

B) Encontrem a equação algébrica que indica que o número de palitos depende do número de triângulos que se quer formar;

C) Quantos palitos são necessários para formar 89 triângulos?

D) Quantos triângulos serão formados com 101 palitos de fósforos?

E) Representem essa função no gráfico;

F) Determinem o seu domínio e o seu conjunto imagem;

G) Encontrem a expressão de T em função de P. (Adaptado do livro: SMOLE; DINIZ, 2010, p. 108)

Após leitura individual da situação-problema, todos os alunos já haviam construído a tabela do número de palitos em função do número de triângulos formados, a dúvida era até que número eles deveriam parar.

A21*: Professor, eu faço até quanto?*

PP: Você acha que para num determinado número?

A21: *Não, porque nunca acaba. Eu vou fazer até* 10.

PP: *Dez, já são bastante razoáveis.*

A25: *Não sei como achar a equação algébrica.*

PP: *Pedimos para achar a equação que indica a relação de dependência do número de triângulos que se quer formar a partir da composição deles com palitos de fósforos.*

GG: *Não sei. Tá difícil*. (barulho e agitação).

PP: *Calma pessoal. Devemos educar nossos olhos e passarmos a enxergar o que está na nossa frente. Vejam isso, essa sequência tem um padrão, uma certa regularidade.*

A35: *Sei, a gente vai acrescentando sempre* 2.

PP ao GG: *Vocês concordam com A35?*

GG: *Sim* (Alguns responderam, mas não acrescentaram algo mais)

PP: Dá para perceber que es*se valor é uma constante?*

GG: *Sim*. (Coro).

A24: *Professor. Isso é uma sequência de números ímpares?*

PP: *Você saberia dizer como escrever isso de uma maneira geral?* (Silêncio) *Vamos olhar para a sequência dos padrões das figuras que ilustram o problema.*

A04: *Poder ser* $T = 3P$.

PP: *Tente substituir* P *por* $1, 2, 3, \ldots$

A04: *Dá* $3, 6, 9, \ldots$ *são números múltiplos de* 3, *não dá ímpares.*

A06: *Eu vejo que pode ser sempre a quantidade de triângulos duas vezes, porque é sempre dois lados pra formar um triângulo mais um fósforo pra completar.*

PP: *Sim, mas como você representaria essa equação de maneira geral?*

A06: *Acho que* $2T + 1$.

Comentário: Seja $n \in N$, temos $2n$ quando for par e $2n - 1$ ou $2n + 1$ quando for ímpar. Podemos observar que a expressão $2n - 1$, não foi levantada como uma hipótese igualmente possível para a questão, possivelmente porque se testada numericamente, não encontraríamos valores válidos para a sequência numérica gerada por meio do padrão geométrico concreto da atividade proposta.

A41: *Professor, eu encontrei essa expressão também, mas fiz primeiro* $3 + 2(T - 1)$. *Eu vi que começa sempre com três, um triângulo inteiro e, depois, é só multiplicar duas vezes* $(T - 1)$ *porque um lado pertence a dois triângulos. Daí, eu fui resolvendo e encontrei* $2T + 1$.

PP: *Escreva o seu desenvolvimento na lousa, por favor, A41.*

A41: *Tudo bem, professor.*

A44: *Eu pensei de maneira diferente. Tomando todos os triângulos e depois, tirando deles o lado que pertence a dois triângulos ao mesmo tempo. Encontrei* $3T - (T - 1)$. *Mas, encontrei* $2T - 1$.

PP: *O seu raciocínio está correto, mas a resposta ainda não é essa. Quem gostaria de ir ao quadro mostrar essa simplificação pra gente?*

A20: *É só fazer o jogo de sinal e lembrar para fazer menos com menos dá mais. Por isso, fica* $3T - T + 1$ *que dá* $2T + 1$.

Comentário: O aluno fez menção a um procedimento mecânico envolvendo o jogo de sinal e não mostrou compreender essencialmente as operações com números inteiros relativos.

PP: *Muito bem. Por favor A20, escreva isso na lousa.*

PP: *Agora, terminem de resolver as questões nos seus respectivos grupos* (o tempo transcorreu bem tranquilo, no entanto, quando chegaram na letra da questão G começaram a fazer perguntas).

GG: *Professor, explique pra gente a letra G.* (várias vozes).

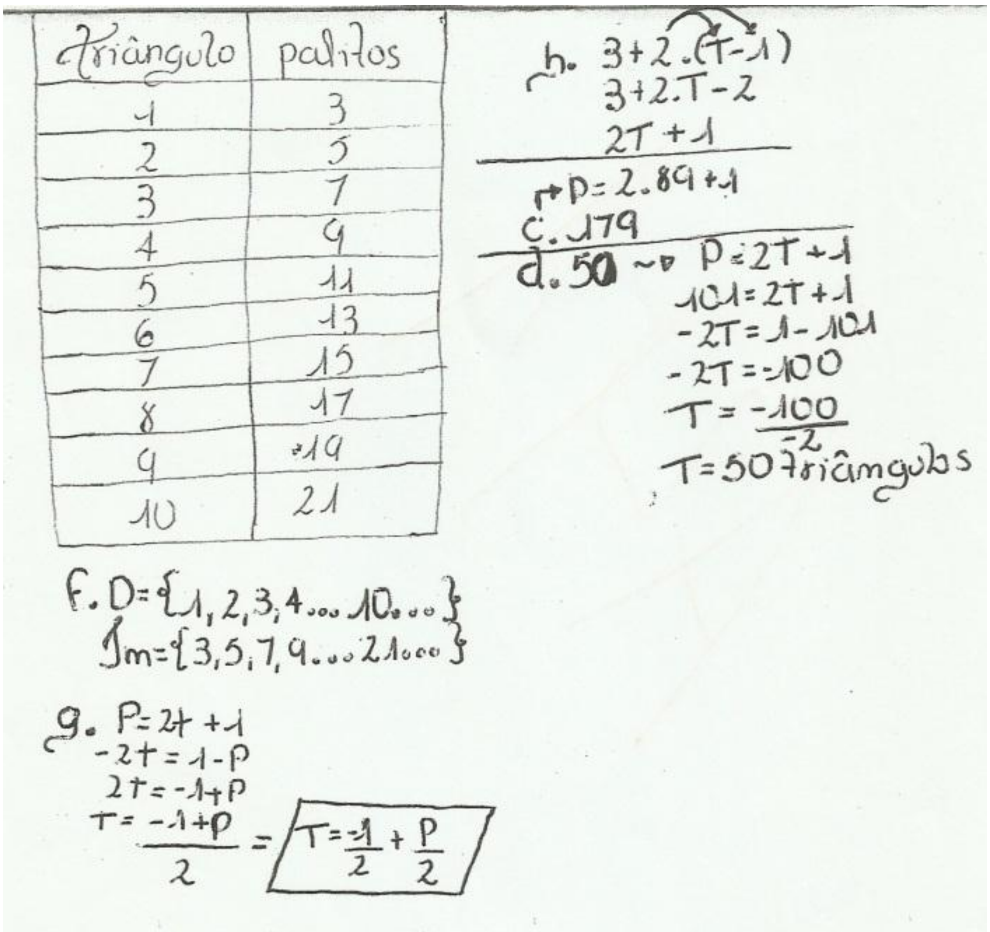
PP: *A letra G pede para escrever uma equação de P em função de T. Em outras palavras, o número de triângulos dependerá do número de palitos. É o caminho inverso da letra B, ela desfaz o que essa função faz. Uma operação inversa é usada para desfazer uma operação. Além de invertermos cada operação, invertemos a ordem em que as operações são efetuadas, já que temos que desfazer primeiro a última operação.*

GG: *Já sei, já sei...* (algumas vozes)

PP: *Quem poderia fazer a letra G no quadro?*

A16: *Eu faço.*

PP: *OK, A16. Você encontrou* $T = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}P$*. A gente pode escrever essa equação também como* $T = \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}$*, esclarecendo para o GG algumas passagens realizadas pelo aluno A16 e mostra outros caminhos equivalentes.*



triângulo	palitos
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17
9	19
10	21

b. $3+2.(T-1)$
$3+2.T-2$
$2T+1$

$P=2.89+1$
c. 179

d. 50 ~> $P=2T+1$
$101=2T+1$
$-2T=1-101$
$-2T=-100$
$T=\frac{-100}{-2}$
$T=50$ triângulos

f. $D=\{1,2,3,4...10...\}$
$Im=\{3,5,7,9...21...\}$

g. $P=2t+1$
$-2t=1-P$
$2t=-1+P$
$T=\frac{-1+P}{2} = \boxed{T=\frac{-1}{2}+\frac{P}{2}}$

Figura 13: Resolução da atividade 1.3 apresentada pela aluna A41, representando seu grupo.

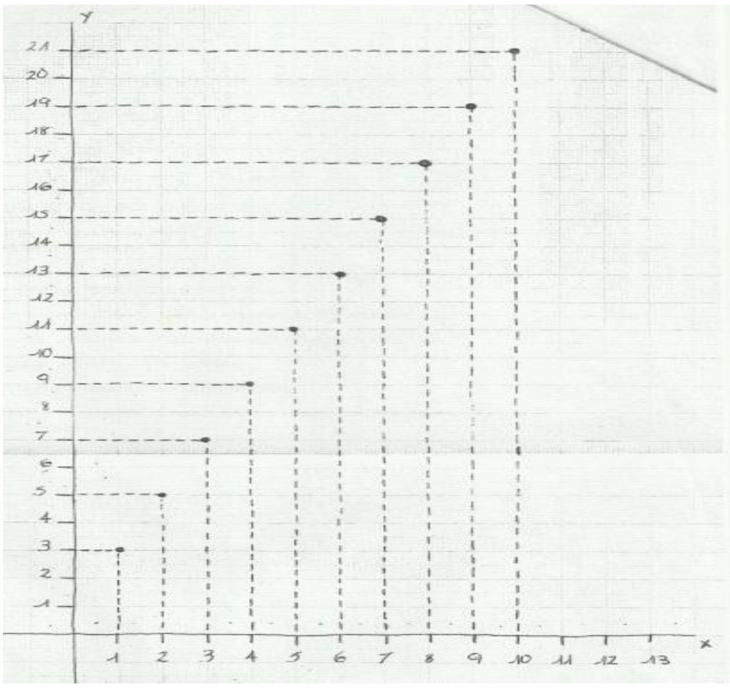


Figura 14: Representação gráfica da letra C apresentada pela aluna A41, representando seu grupo.

O conceito de função nesse encontro foi trabalhado a partir da observação de regularidades de padrões geométricos de sequências numéricas; representações múltiplas de funções; domínio e imagem no conjunto dos números naturais e combinação e transformação de funções na obtenção de uma função inversa em que os alunos mostraram uma aquisição desses conteúdos no trabalho coletivo por meio de suas produções apresentadas na lousa e a atividade que foi entregue no final da aula.

A problematização da situação favoreceu múltiplas resoluções na generalização da fórmula funcional tais como $3T-(T-1)$, $3+2(T-1)$ e $2T+1$ com o uso de raciocínios mediante observações e visualizações percebidas por eles, compreendendo e identificando regularidades no contexto do padrão apresentado. Houve confrontos e consensos de resoluções apresentadas na lousa a partir das formulações e validações levantadas pelos alunos individualmente e em grupo. Finalizamos a aula sistematizando os processos de cálculo algébrico na determinação de função inversa.

Além da interação professor-aluno e professor-alunos, registramos duas passagens bastante significativas do diálogo entre alunos, lembrando que houve mais interações entre alunos que ocorreram nos seus respectivos grupos. Porém, nos concentramos mais no diálogo com o grande grupo para poder realizar as mediações que se fizeram necessárias ao desenvolvimento e formação dos conceitos científicos tal como a operação inversa de função.

Podemos dizer que houve um trabalho de estabelecimento de conexões da Álgebra na generalização de fórmulas para os padrões geométricos de sequências numéricas, além das representações tabulares e gráficas. As primeiras representações numéricas de acordo com Vygotsky (2008) estão num nível dos conceitos cotidianos, enquanto que as generalizações algébricas estão num nível mais elevado de abstração que exigirá, por parte dos indivíduos, a formação de conceitos científicos.

Houve coordenações de conceitos e representações de funções que se deram dentro da própria Matemática. Segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), as funções são aplicadas a uma vasta gama de situações, elas são aplicadas para outros casos que não àqueles da variação contínua como, por exemplo, as sequências numéricas. Nesse encontro foi possível a realização de muitas explorações e investigações matemáticas a partir de um padrão concreto, disposto geometricamente, em uma sequência numérica que favoreceu o desenvolvimento do pensamento funcional.

Para Sessa (2009) existem duas vias de acesso ao ensino de Álgebra. A primeira, sob o ponto de vista da generalização e abstração e a segunda, do ponto de vista funcional a partir da relação de dependência entre variáveis. Podemos dizer que o caminho metodológico desse encontro seguiu essas duas vias de acesso contribuindo, decisivamente, para uma compreensão mais ampla em que o conceito de função foi aplicado através da junção de duas vias de acesso. Os alunos, nesse encontro, generalizaram fórmulas e estabeleceram relação de dependência entre variáveis.

5.2.5. Descrição e análise do encontro 05

Aula 07 (Data 27/04/2012)

<u>Conteúdos desenvolvidos na atividade 1.4</u>: Conceito de função, destacando a habilidade de fazer generalizações a partir da observação de padrões que apresentam uma regularidade; combinação e transformação de funções (função inversa) e representações múltiplas.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 1.4:

Atividade 1.4: Observe a sequência de figuras formadas com palitos de fósforos:

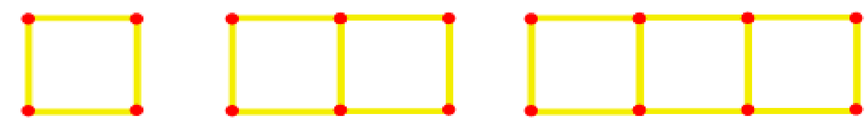


Figura 15: Sequências de padrões geométricos da atividade 1.4.

Continuando a sequência de figuras. Pede-se:

A) Montem uma tabela que relacione o número de quadrados ao número de palitos necessários a sua construção;

B) Quantos palitos seriam necessários para formar 105 quadrados?

C) Determinem a expressão que indica o número P de palitos em função do número Q de quadrados;

D) Quantos quadrados são formados com 67 palitos?

E) Esbocem o gráfico dessa função;

G) Encontrem o domínio e a imagem dessa função.

H) Determinem a expressão de Q em função de P. (Adaptado do livro: DANTE, 2004, p.122)

Entregamos o material de trabalho para os alunos, a situação-problema 1.4, em papéis impressos, e também papéis milimetrados para auxiliá-los na construção de gráfico. Pedimos para que os alunos lessem o problema com bastante atenção e solicitamos a formação de trios de alunos.

Circulamos na sala de aula e observamos que os alunos, na sua grande maioria, foram construindo quadradinhos sobrepostos um a um, mas depois apagaram para elaborar a tabela, em média, com elementos de 1 a 10 quadradinhos. A primeira dificuldade dos alunos surgiu justamente para, na hora de calcular a quantidade de palitos, dizer quantos foram necessários para formar 105 quadrados, pois, os alunos ainda não dispunham de uma fórmula geral.

A09: Professor. Pode ser $P = 3Q$.

PP: Vamos testar por 1, 2, 3, 4, ... Qual o valor que encontramos?

A09: Dão 3, 6, 9, 12, ... A partir do terceiro termo já não dá mais.

PP: Você observa alguma regularidade na sequência?

A09: Aumenta de 3 em 3.

A08: Professor, eu acho que é $P = 4Q$.

PP: Façam as contas.

A08: $4 \cdot 1 = 4$; $4 \cdot 2 = 8$ *já não bate. Daí, Professor. Eu pensei assim* $P = 4Q - (Q - 1)$ *porque a gente pega todos os quadrados inteiros menos os lados que pertencem ao mesmo quadrado. Pra achar a letra B, eu fiz* $P = 4 \cdot 105 - (105 - 1) = 420 - 104 = 316$.

PP: Muito bem! Mas, como você poderia simplificar essa expressão?

A18: Eu vejo que pode ser $P = 3Q + 1$. *Pois, Q é sempre igual a um quadrado faltando um lado mais um fósforo pra completar a figura. Daí, eu posso resolver diretamente a letra B, assim* $P = 3Q + 1 = 3 \cdot 105 + 1 = 315 + 1 = 316$.

PP: Será que existiria mais uma expressão equivalente a essas que acabamos de encontrar? (Silêncio)

A31: Eu achei $P = 4Q - (Q - 1)$. *Pego todos os quadrados inteiros e diminuo deles os lados que fazem parte de dois quadrados. Só que isso dá* $P = 3Q + 1$, *que é bem mais fácil de fazer as contas.*

Nas questões envolvendo a descoberta de padrões numa sequência, preferimos travar um diálogo inicial para mediar o trabalho e entender melhor como anda a compreensão dos alunos ao generalizar fórmulas matemáticas. Porque se tivéssemos deixado os alunos livres, eles acabariam apagando o registro de alguns episódios interessantes.

Comentário: A representação algébrica de função é mais difícil porque envolve o desenvolvimento de um nível de pensamento superior como mencionou Vygostsky (2008) nos seus estudos, que requer muitas vezes um trabalho de mediação para que os alunos possam chegar aos níveis das abstrações e generalizações. Provocamos e instigamos, em um trabalho na Zona de Desenvolvimento Proximal, de modo que os alunos pudessem, nas suas investigações e explorações do padrão concreto das sequências, descobrir uma regularidade que fosse representada por meio de uma equação algébrica da função.

Continuando a circular na sala de aula observamos que os gráficos de alguns alunos deixavam muito a desejar, pois envolve a ideia de escala, uma escolha de uma unidade padrão proporcional aos valores de ambos os eixos. Muitos deles acabam localizando os pontos meio que aleatoriamente, sem que para isso, tivessem feito uma escolha adequada. Nas demais questões, os grupos trabalharam tranquilamente.

Comentário: De acordo com Friedlander e Tabach (2001), todas as formas de representações de funções apresentam vantagens e desvantagens, com a representação gráfica podemos apontar vantagens no sentido de ela ser uma imagem clara da função de grande apelo visual e desvantagens no sentido de obscurecer a compreensão da função devido à confusão gerada pelas escalas adotadas, quando os alunos não levam em consideração a proporcionalidade dos valores que estão sendo representados graficamente.

Novamente foi-nos necessário realizar algumas intervenções na última questão que envolveu a ideia de função inversa. Explicamos para a turma que a questão G pede a expressão de P em função de Q. Agora, Q passa a ser função de P. Logo, essa nova função gerada mediante algumas transformações é a inversa da função $P = 3Q + 1$. A partir dessas observações os alunos na sua grande maioria conseguiram obter a função inversa da função original da situação-problema proposta.

> Comentário: Neste momento, a compreensão essencial de função 4d, ainda não fora explorada na sua essência. Registramos uma transformação de função por alunos no sentido de mudar a posição das variáveis para assim obter outra função, a função inversa. Porém a realização de procedimentos algébricos ainda não é garantia de estarmos diante de uma compreensão efetiva sobre inversão de função. Portanto, apontamos a necessidade de trabalharmos a sistematização dessas ideias para construirmos assim uma compreensão essencial de que obedecendo às condições especiais a função pode ter inversa.

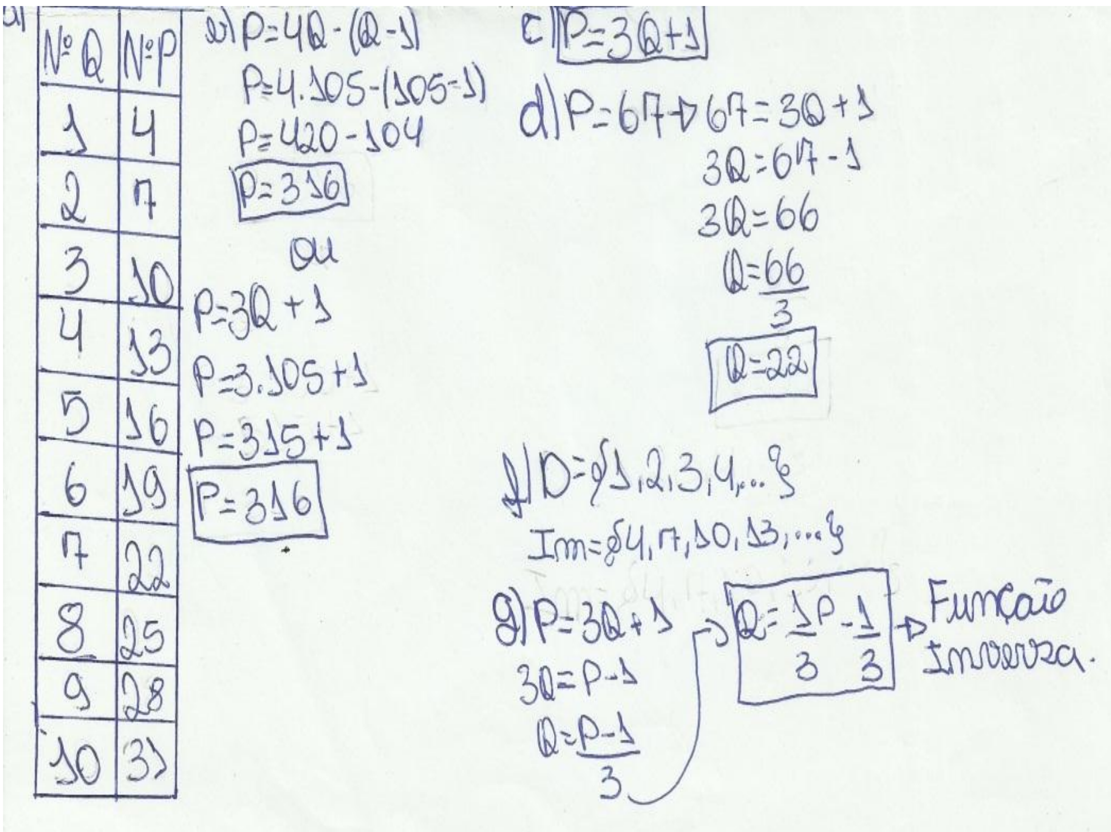


Figura 16: Resolução da atividade 1.4 apresentada pelo aluno A18, representando seu grupo.

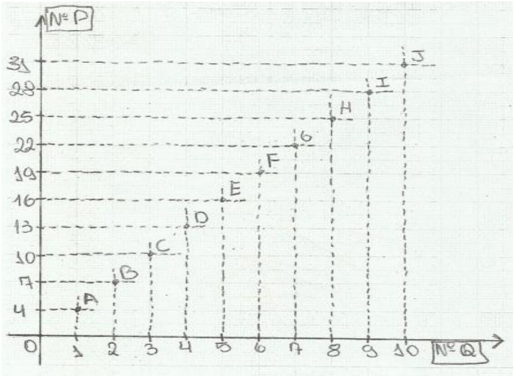


Figura 17: Representação gráfica da atividade 1.4 apresentada pelo aluno A18, representando seu grupo.

Como parecia não haver mais problemas, resolvemos explorar mais essa situação, copiando na lousa a seguinte pergunta: Quantos quadrados são construídos com 2.651 fósforos? (Deu um tempo para os alunos responderem à questão).

PP: E aí, qual a solução encontrada por vocês?

A15: Professor, eu encontrei 884 quadrados e sobra um fósforo. Não dá exato.

PP: A15, você pode ir ao quadro escrever a sua resolução.

A15: Beleza, professor.

Discutimos a questão com o grande grupo que demonstrou compreensão e parecia não haver mais dúvida. Em seguida, retomamos a discussão da função inversa apresentando-lhes a notação f^{-1} para função inversa e chamamos a atenção dos alunos para o fato de que essa representação é diferente de $\frac{1}{f}$ (função recíproca). Na letra G, por exemplo, se passamos a chamar a função $f(x) = 3x + 1$, a determinação da sua inversa corresponderia a $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$. Mostrou-lhes que na prática para obter a inversa de uma função: trocamos x por y e y por x. Porém, a explicação dessa regra está no fato de que a inversa de uma função é simétrica em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. A bissetriz é a reta $y = x$. Logo, em seguida, esboçamos num mesmo gráfico f e f^{-1} para ilustrar nossa exposição dialogada. Pareceu-nos que eles haviam compreendido nossa explicação com os esboços de gráficos feitos na lousa.

Ainda do ponto de vista de efetuar uma operação seguida de sua operação inversa, isto significa, nos levar de volta para onde começamos. Por exemplo, a operação inversa somar 10 é subtrair 10. Se começarmos com qualquer número x e efetuarmos essas operações nessa ordem, voltamos para onde começamos: $x \rightarrow x + 10 \rightarrow (x + 10) - 10 \rightarrow x$. Vejamos o seguinte: Encontrem uma sequência de operações que desfaça: multiplique por 3 e depois some 7. Alguns alunos responderam: *Basta subtrair 7 e dividir por 3.* Chamamos atenção, dizendo para eles que poderíamos obedecer ao seguinte: subtrair 7 e multiplicar por $1/3$. Outro fato igualmente importante é que nem toda operação tem uma inversa. E explicamos que a operação de elevar um número ao quadrado não tem uma operação inversa. Por exemplo: $-5 \rightarrow (-5)^2 = 25 \rightarrow \sqrt{25} \rightarrow 5$. De modo que os alunos puderam notar que não voltamos para o número com o qual começamos. Pois, não existe uma operação inversa para a operação de elevar ao quadrado que funcione para todos os números.

> Comentário: Podemos observar a partir do que havíamos discutido e apresentado aos alunos algum indício da compreensão essencial 4d para que fôssemos admitir mais adiante que somente as funções bijetoras são invertíveis. Esta compreensão essencial 4d é extremamente convencional e complexa, por isso optamos explorá-las nas resoluções de problemas, sem mergulharmos em manipulações e procedimentos algébricos mais rebuscados.

Escrevemos a representação de função $f(x) = 5x - 8$ na lousa e pedimos para os alunos sua inversa. O grande grupo respondeu: *É só somar ao x o número 8 e dividir tudo por 5.* De onde podemos evidenciar que todos compreenderam bem a ideia que está por trás da inversão de função como mais uma operação passível de simples resolução, desfazer o que a função dada faz.

Nesse encontro, a turma teve oportunidade de retomar ideias já trabalhadas anteriormente e outras que foram aprofundadas, e melhor compreendidas a partir da metodologia de ensino via resolução e exploração de problemas. Os alunos nos seus grupos, junto com a nossa intervenção, conseguiram chegar à generalização de uma fórmula matemática que servisse para todos os casos. Ainda deram múltiplas apresentações de fórmulas matemáticas equivalentes para o padrão concreto, dispostos geometricamente na formação de quadrados com palitos sobrepostos, formando uma sequência numérica descobrindo a regularidade desse fenômeno observado.

O trabalho na perspectiva da resolução e exploração de problemas contribui para a compreensão e a aquisição dos conceitos e representações de funções, a partir da produção coletiva dos alunos por meio das suas hipóteses levantadas inicialmente, suas primeiras formulações e validações feitas e o trabalho de sistematização dos conteúdos que o professor foi proporcionando, através de diálogos e discussões mantidos no sentido de possibilitar a criação de um ambiente em que a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) estivesse, sempre, presente como elemento disparador de níveis mais elevados de pensamento.

Os alunos, nos seus respectivos grupos, saíram do nível aritmético para o algébrico quando encontraram múltiplas expressões equivalentes que exprimiam a regularidade do padrão dessa sequência numérica representada, concretamente, pela formação de quadrados com palitos. Para Friedlander e Tabach (2001), o uso dos números é importante na aquisição de uma primeira compreensão de um problema e na investigação de casos particulares. Por isso, foi necessário aos alunos realizarem testagens numéricas para poder chegar a uma conclusão concisa, geral e efetiva, que trouxessem a regularidade do padrão concreto através de uma equação algébrica, representando a relação funcional entre as variáveis envolvidas no problema.

Encarregamo-nos de sistematizar o conteúdo que tratou da obtenção da função inversa, deixando evidente para o grande grupo a compreensão essencial 4d, Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), que diz que, sob condições apropriadas, as funções têm inversas. Fizemos considerações sobre como usar a ideia de função inversa para desfazer o que a função dada faz. No entanto, não deixamos de apresentar o procedimento prático e o significado gráfico de se operar inversamente funções.

Pudemos observar o movimento do trabalho metodológico via resolução de problemas à exploração de problemas quando julgamos que não haveria mais dúvidas, na resolução do problema, e formulamos mais questões para que fossem analisadas sob um novo aspecto ainda não tratado e poder estender a compreensão do pensamento matemático dos alunos para níveis mais elevados de conhecimentos. Podemos afirmar que o trabalho, nessa perspectiva, vem contribuindo para o desenvolvimento das ideias e das compreensões essenciais de funções, na medida em que estamos avançando os níveis dentro do campo das explorações de ideias matemáticas que estavam embutidas no problema.

5.2.6. Descrição e análise do encontro 06

Aula 08 (Data 04/05/2012)

<u>Conteúdos desenvolvidos na atividade 1.5</u>: Conceito de função e combinação e transformação de funções (função composta).

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 1.5:

Atividade 1.5: Uma fábrica que produz sapatos calcula o seu lucro por meio da equação $L = 0{,}4V$, onde L é o lucro e V o preço de venda desse sapato para o comércio. Por sua vez, o preço V de venda é calculado fazendo-se $V = 20 + 2P$, onde P é o valor gasto com a matéria-prima para a fabricação desse sapato. Vemos, então, que o lucro L é dado em função do preço V, e este é dado em função do gasto P.

A) Determinem o lucro diretamente do gasto P com a matéria-prima.

B) Sabendo que para fabricar esse produto foram gastos $R\$\,50{,}00$ com matéria-prima, de quanto foi o lucro na venda desse sapato?

C) Se o produto for vendido com um lucro de $R\$\,36{,}00$, quantos reais foram gastos com matéria-prima?

(Extraído do livro: GIOVANNI; BONJORNO, 2005, p.145)

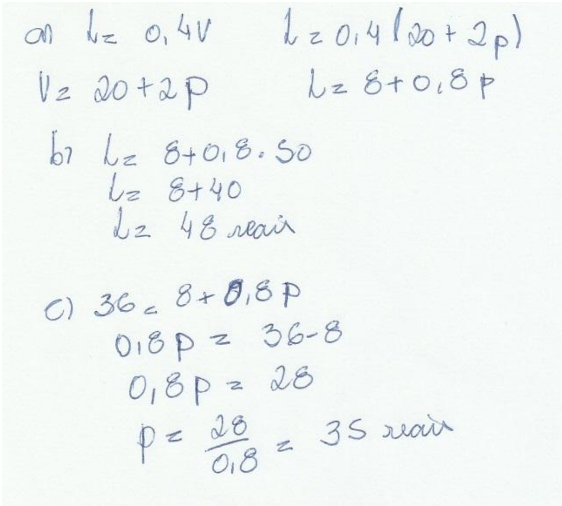
Entrega do material impresso com a situação-problema 1.5. Solicitamos para o grande grupo que fizessem uma leitura inicial da situação-problema. Após leitura individual, a aluna A25 questiona a letra A: *Como assim, professor. Determinar o lucro diretamente do gasto P?* Neste momento, chamamos a atenção do grande grupo, mostrando que a primeira equação L é função de V, na segunda V é função de P. Logo, a questão da letra A pede a equação V que é função de P diretamente. Esse processo em Matemática é chamado de composição de funções. Após essa explicação nos pareceu que o grande grupo compreendeu como proceder para chegar a um resultado satisfatório para esta questão.

> <u>Comentário</u>: A compreensão inicial que os alunos tiveram a partir dessa explicação consistiu na concepção de função que transforma os valores de entrada, segundo uma regra específica, obtendo um novo valor no final do processo, saída (imagem). Neste caso particular, sobre um número P que atuou primeiro em uma função L e, depois, sobre a imagem assim obtida, tornou a atuar em outra função V, obtendo assim a função composta $L(V(P))$.

Aproximamo-nos, novamente da aluna A25. Percebemos que ela não aplicara a propriedade distributiva corretamente. Nesse momento, orientamos a aluna A25 no procedimento e finalmente ela concluiu a resolução da questão. Orientamos a aluna A25 que passasse para as outras questões, dando prosseguimento à resolução da situação proposta. Em seguida, solicitamos para o grande grupo que formassem equipes de quatro pessoas para juntos trocarem ideias sobre as questões da atividade 1.5.

Continuamos circulando pela sala de aula a fim de observarmos os alunos na resolução das questões. De um modo geral, essa situação-problema foi a que os alunos encontraram menos dificuldade até o momento. Não houve muitas divergências nas apresentações das resoluções referentes às questões da atividade 1.5.

Elegemos três alunos de grupos diferentes para responder às questões no quadro, respectivamente: letra A (A43); letra B (A35) e letra C (A22).



a) $L = 0,4V$ $\quad L = 0,4(20+2p)$

$V = 20+2p$ $\quad L = 8+0,8p$

b) $L = 8+0,8.50$

$L = 8+40$

$L = 48$ reais

c) $36 = 8+0,8p$

$0,8p = 36-8$

$0,8p = 28$

$p = \frac{28}{0,8} = 35$ reais

Figura 18: Resolução da atividade 1.5 apresentada pelo aluno A09, representando seu grupo.

Em seguida, realizamos uma retrospectiva dos raciocínios adotados pelos alunos que foram ao quadro, apresentando a resolução de suas equipes e, finalmente chegamos a concluir a aula falando de *função composta* a partir da situação-problema trabalhada em aula, dando-lhe uma conotação mais formal $L\ o\ P\ =\ L\left(V(P)\right) = 8 + 0{,}8P$. Demos algumas explicações, na tentativa de fazê-los compreender a operação de composição de funções, para assim obtermos a composição de funções. Usamos a metáfora saída da primeira função como a entrada da segunda, esclarecendo que V é a função de dentro e L é a função de fora. O processo de composição de duas funções é semelhante ao processo de calcular uma função, exceto que, em vez de substituir um número por uma variável independente, substituímos por outra função. Realizamos mais alguns esboços de esquemas gráficos a fim de que eles viessem a compreender melhor esses mecanismos de composição de funções.

Mostramos aos alunos outros exemplos: Dados $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 3$, de $R \rightarrow R,$ determinar fog e gof. Desenvolvendo as expressões:

$$fog = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 \text{ e}$$

$$gof = g(f(x)) = f(x^2) = x^2 + 3.$$

Chamamos a atenção dos alunos para o fato de que só podemos realizar a composição de função quando a imagem de g estiver contida ou for igual ao domínio de f com o objetivo de darmos prosseguimento às formalizações dos conteúdos explorados na aula, a partir da resolução da situação-problema que foi proposta.

Enunciamos a condição especial para a composição de funções, explicando para os alunos que fazemos a composição fog, desde que a imagem de g esteja contida ou seja igual ao domínio f. Chamamos a atenção dos alunos no sentido de eles perceberem que o domínio de fog é o conjunto dos valores de x no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f. Para formalizarmos os conteúdos explorados na aula, a partir da resolução da situação-problema que foi proposta com a apresentação de diagramas gráficos que ilustravam o caso da função composta e explorarmos a noção de domínio da composta de funções em uma exposição com o objetivo de fazê-los compreender o que estava sendo mostrado.

> Comentário: Nesse momento, os alunos estavam diante de questões da Matemática propriamente dita de forma descontextualizada, em um nível de abstração muito alto. Eis aí um grande desafio de fazermos os alunos compreenderem conceitos tão sofisticados de difícil conexão com os conceitos do cotidiano dos nossos alunos e com o mundo real. Pois, trazer à tona um problema contextualizado sobre função composta é possível, porém a partir dele justificarmos que somente em condições especiais podemos formar funções compostas não nos pareceu uma tarefa simples, muito menos para os alunos. Os alunos ficaram atentos à nossa explicação, mas não houve interação por parte deles diante do que estava sendo apresentado. É evidente que houve muita participação dos alunos durante o processo de resolução do problema, nas plenárias e defesas das resoluções apresentadas por eles e nas chamadas à lousa para compor funções. Ao perguntarmos se eles haviam compreendido bem o que fora exposto, eles responderam: *Sim. Assim, assim. Não*. Enfim, não tivemos como verificar de fato se houve compreensão por parte dos alunos. Houve apenas possíveis indícios de algum avanço na compreensão procedimental de compor funções.

O estudo dessa temática da função composta foi realizado via exploração do problema trabalhado em sala de aula, sem excesso de simbolismo e mecanismos algébricos de composição de funções, muito embora, nossa prática de sala de aula, dentro dessa temática, nos tenha indicado que a compreensão efetiva do conteúdo função composta não é tão simples assim. O processo de efetuar composição de funções vai além desses casos explorados nessa sessão de aula.

Portanto, não podemos afirmar que os alunos compreenderam completamente função composta, admitindo sua existência somente em condições adequadas, pois essa compreensão essencial 4d, tornou-se muito complexa, de difícil transposição em sala de aula esse conteúdo, muito embora os alunos tenham compreendido o procedimento de compor funções como, por exemplo, a função composta fog, sobre um número x que atuou primeiro em uma função f e, depois, sobre a imagem obtida, tornou a atuar em outra função g.

Houve inicialmente, a leitura individual do problema, em que os alunos chegaram a um raciocínio coerente em relação à resolução do problema. A questão proposta não foi um problema que apresentou grandes obstáculos para os alunos resolverem. Entretanto, foi oportuna a apresentação desse problema porque trabalhamos com a representação algébrica das funções descritas no enunciado do problema, que é uma linguagem clara e concisa, muito usada na Matemática e é necessário que os alunos consigam ter domínio sobre ela de modo que ela venha a se tornar familiar para eles.

> Comentário: O problema mostrou uma situação cotidiana, porém veio com equações algébricas de funções, uma linguagem puramente matemática, além da representação verbal da enunciação do problema, os alunos precisaram interpretar as representações algébricas, que são domínios importantes no estudo de Matemática que eles precisam ter controle sobre elas. Nesse sentido, os alunos não apresentaram dificuldades de analisar e de interpretar a questão do problema proposto.

Podemos perceber que os alunos no trabalho em grupo se comunicaram entre si, trocando informações, formulando e validando ideias desenvolvidas coletivamente de forma cooperativa e colaborativa dentro da perspectiva da metodologia de ensino via resolução e exploração de problemas. Os grupos de trabalho obtiveram as resoluções para as questões propostas. No entanto a sistematização das ideias que foram exploradas nas questões ficou ao nosso encargo e trazê-las à tona, como a operação de composição de funções faz parte de uma das compreensões essenciais da grande ideia denotada como transformação e composição de funções, de acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010).

Observamos que os alunos avançaram mais na resolução do problema envolvendo a função composta e nos procedimentos de obtenção de funções compostas. Em outras palavras: eles avançaram no quesito procedimental, enquanto os aspectos conceituais essencialmente ainda precisam ser mais trabalhados e explorados ao longo do currículo escolar. Acreditamos que possivelmente a compreensão deste conteúdo ocorrerá após experiência dos alunos em níveis de pensamento mais avançado.

5.3. Unidade didática II – Função Afim

Nessa unidade didática, totalizamos *12 horas-aula*, constituintes de 9 encontros com descrições e análises de cada aula. Enfatizamos mais os problemas da Matemática Contínua, explorando o conceito de função constante e identidade. Formalizamos a compreensão essencial de famílias de funções afins e a ideia essencial de covariação e taxa de variação que surgiram na resolução e exploração dos problemas. Houve, também, a formalização da compreensão essencial de função inversa, a apresentação de funções recíprocas e um problema de contexto envolvendo a construção de uma função por partes, ampliando assim o conceito de função. Em relação aos temas políticos, sociais e culturais exploramos contextos de saúde, meio ambiente, salário, imposto de renda, dentre outros.

5.3.1. Descrição e análise do encontro 07

Aulas 09 e 10 (Data 05/05/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 2.1: Conceito de função; famílias de funções (subfamílias constante e identidade) e representações múltiplas de funções.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 2.1:

Atividade 2.1: Uma companhia aérea, especializada em voos nacionais, possui um programa que premia seus passageiros mais assíduos com passagens gratuitas para voos internacionais. Cada trecho percorrido dá ao passageiro um bônus de 1 ponto. Ao acumular 10 pontos em um ano, o passageiro ganha mais uma passagem grátis. Assim, se você voar de Recife a Fortaleza, que corresponde a uma distância aérea de 629 quilômetros, você ganha 1 ponto. Se você voar de Recife a Porto Alegre, que corresponde a uma distância aérea de 2.977 quilômetros, você também ganha 1 ponto. Portanto, qualquer trecho, independentemente dos quilômetros correspondentes, vale 1 ponto para o passageiro.

A) Escrevam a equação da função pontos ganhos, em uma viagem, em função da quantidade de quilômetros percorridos;

B) Esbocem o gráfico dessa função (pontos ganhos em função dos quilômetros percorridos);

C) Determinem o domínio e a imagem dessa função.

(Adaptado do livro de GIOVANNI; BONJORNO, 2005, p. 157.)

Entrega de material impresso, leitura individual, demos um tempo para que os alunos pudessem desenvolver a situação-problema por conta própria.

> PP: *Ok. Formem grupos de quatro pessoas para vocês terminarem juntos de resolver esse problema.* (Começou a circular na sala de aula observando o desenvolvimento dos alunos nos grupos).
>
> A21: *Professor, para uma distância de* 629 *quilômetros, você ganha um ponto, viajando* $2\,977$ *quilômetros você também ganha um (1) ponto. Então, para qualquer distância é sempre um ponto ganho.*
>
> PP: *Isso mesmo, A21. A imagem dessa função é sempre um (1) para todos os elementos do campo de definição, em outras palavras, do domínio da função.*
>
> A35: *Não existe mudança na saída dessa função.*
>
> PP: *Sim. Estamos diante de um tipo especial de função chamada constante. Justamente, porque no campo de variação, a sua imagem é sempre o mesmo valor.*
>
> A07: *Professor, a equação dessa função é* $y = 1$.
>
> PP: *Também pode ser representada por* $f(x) = 1$. *O importante é que vocês entendam que para todo valor de* x *no campo do domínio dessa função existe apenas um único valor corresponde que é igual a* 1, *sua imagem.*
>
> A09: *É uma relação de infinitos valores para um. A gente, já viu que muitos para um é uma função.*
>
> A01: *Professor, como fica o gráfico dessa função? Já que* x *pode ser qualquer valor e* y *é sempre* 1.
>
> A16: *O* x *não pode ser negativo, A01. Não faz sentido quilômetros negativos.*
>
> PP: *A grandeza quilômetros apresenta restrições, ela é válida somente no campo de definição do conjunto dos números racionais positivos,* Q_+^*. (O PP faz o registro na lousa dessa observação)
>
> A28: *Também não vale para* 0 *quilômetros, se você não viajar de jeito nenhum também não ganhará nenhum ponto.*
>
> PP para o GG: *E como vocês representarão a exclusão do zero no gráfico? Lembram-se dos intervalos numéricos?*
>
> GG: *Bolinha vazia.* (coro)
>
> PP: *Ótimo. Agora, imaginem esses valores numéricos à direita do zero com um único valor correspondente na ordenada* 1. *O que vocês acham que vai acontecer?*
>
> A43: *Professor, vai dar uma infinidade de valores sempre na altura* 1.
>
> PP: *Vocês vão poder unir esses pontos e formar uma semirreta?*

A43: *Dá para unir os pontos porque a gente viu que entre dois números racionais existe uma infinidade de números racionais.*

PP: *Muito bem. Qual o domínio e a imagem dessa função?*

A15: *O domínio são números racionais positivos.*

PP: Q_{+}^{*} *ou ainda* $\{x \ \in Q/x > 0\}$ (Mostra na lousa enfatizando a representação dos conjuntos) *E a imagem?*

A40: *A imagem dessa função é* 1.

PP: *Isso mesmo, a imagem dessa função é o conjunto unitário* $\{1\}$ (O PP faz o registro na lousa).

A27: *Essa questão foi fácil de fazer.*

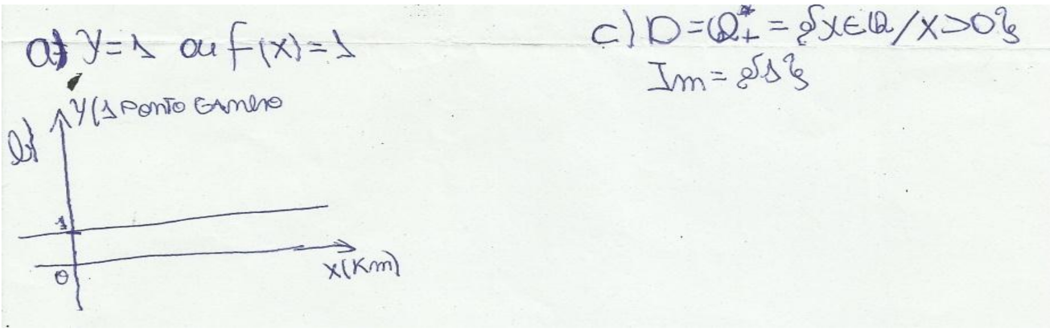


Figura 19: Representações algébricas e gráficas, seguida da representação simbólica dos conjuntos domínio e imagem apresentada pelo aluno A18, representando seu grupo.

<u>Comentário</u>: Circulamos na sala de aula, observando o desenvolvimento dos alunos nos grupos de trabalho, notamos que existiam representações gráficas que não estavam adequadas ao problema, pois na ordenada de unidade um, o intervalo na reta deveria está aberto e não poderia ter dado continuidade à esquerda de 1. Por isso, resolvemos nesse momento fazer intervenções, tirando as dúvidas e esclarecendo detalhes tanto da representação gráfica quanto das anotações e simbologias matemáticas que pediam mais rigor e precisão.

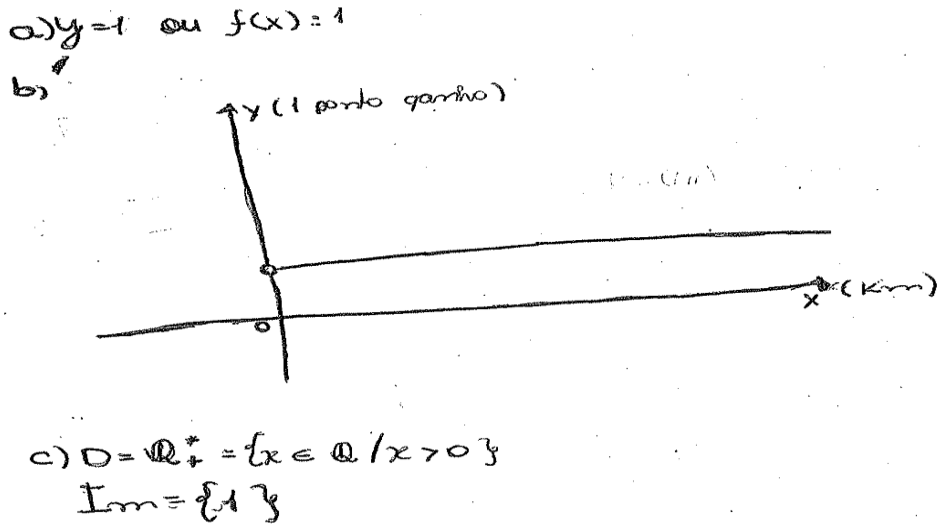


Figura 20: Representações algébricas e gráficas, seguida da representação simbólica dos conjuntos domínio e imagem apresentada pelo aluno A11, representando seu grupo.

PP ao GG: *Vocês compreenderam bem esse problema de hoje?*

GG: *Sim.* (coro)

PP: *Vejam só, alunos. O importante é, além de darmos uma resposta correta a uma dada questão, compreendermos tudo que foi discutido nesse exemplo de situação-problema. Como essa questão pode fazer parte do cotidiano das pessoas que viajam de avião e ganham bônus, podemos dizer que é uma situação do mundo real, está dentro de um contexto. No entanto, na Matemática nós precisamos nos distanciar um pouquinho da realidade para tirar conclusões mais gerais. Por exemplo, podemos representar todas as funções constantes por* $y = f(x) = c$*, vejam que nesse caso o domínio e a imagem são números reais, ok.*

A42: *A função constante vai ser sempre representada por uma reta.*

PP: *Por uma reta paralela ao eixo dos* x *(eixo das abscissas). E quando* c *for maior do que zero? O que vocês acham que deve acontecer?*

A24: *Fica acima de zero.*

PP: *E quando* c *for negativo?*

A41: *Fica abaixo de zero.*

PP: *Isso mesmo. Para* $c > 0$*, a reta será paralela ao eixo dos* x *e ficará acima do zero. E para* $c < 0$*, a reta será paralela ao eixo dos* x *e ficará abaixo de zero.* (Registramos essa observação na lousa).

PP: *A35, você poderia representar na lousa o gráfico da função* $y = -3$.

A35: *Tudo bem*. (Dirigiu-se à lousa para representar o gráfico da função).

PP: *E agora, qual é o seu domínio e a sua imagem?*

A35: *O domínio pertence aos números reais e a imagem é o elemento unitário* -3.

PP: *A31, você poderia representar na lousa a função* $y = 4$*?*

A31: *É fácil, professor.* (A31 faz o registro do gráfico na lousa).

PP: *Além da função constante, outra função bastante simples e importante é* $f(x) = x$*, que é denotada função identidade.*

A28: *A gente já viu que ela é a função espelho da função inversa.*

PP: *Muito bem lembrado. Ela é a reta bissetriz dos quadrantes ímpares. A principal característica dessa função é o fato dela passar pela origem do gráfico* $(0,0)$ *e cortar o primeiro e terceiro quadrantes numa inclinação de* $45°$. (Representamos a função $y = x$ na lousa enfatizando as características dessa função).

A proposta de trabalho metodológica para essa sessão de aula foi o ensino-aprendizagem via resolução de problemas. A partir da leitura individual, seguiu-se a formação de grupos de quatro alunos para o trabalho coletivo de interpretação e análise do problema proposto. O problema pode ser considerado do mundo real, mesmo não fazendo parte da realidade da maioria dos alunos de escola pública porque eles não costumam viajar de avião. Mas, isso não os impediu de compreender a situação-problema que tratou da bonificação por viagem de avião e isso, para eles, poderia ser transposto para uma situação qualquer de compras com bônus.

A resolução do problema não foi considerada difícil para os alunos. Entretanto o trabalho de sistematização do conteúdo, o professor tirando dúvidas, esclarecendo inadequações de representações gráficas, anotações e simbologias matemáticas e também no sentido da transposição da situação-problema da realidade para chegar à generalização da função constante de variável real, precisou da nossa intervenção, trabalhamos na Zona de Desenvolvimento Proximal dos alunos oportunizando a elevação dos níveis potenciais para níveis psicológicos mais superiores.

Os alunos puderam sair do particular para o geral e do geral para o particular, em um movimento dialético segundo o pensamento de Vygotsky (2008). Podemos perceber que esse movimento ocorreu a partir da situação-problema que estava dentro de uma situação real que foi representada por uma função constante de variável racional chegando à generalização mais ampla para uma função constante de variável real com a ajuda do professor. E após essa generalização, solicitamos a dois alunos irem à lousa para construir o gráfico de duas funções constantes constituintes de exemplos de casos particulares de funções.

Isso tudo nos fez refletir sobre o processo de aquisição e compreensão de um conceito. Não podemos conceber um caminho, seguindo um modelo linear do tipo: definição, exemplos e exercícios rotineiros. Precisamos partir de um problema real ou fictício que favoreça a abstração e, nesse processo, podermos abstrair os elementos secundários e nos atermos aos elementos essenciais de um dado conceito, tais como as suas características, os seus traços, as suas representações e suas situações que particularizam tal conceito a ser apreendido.

No final da sessão de aula neste encontro, trabalhamos a formalização do conteúdo função constante e função identidade. Não constatamos, nesse encontro, dificuldade de aceitação por parte dos alunos da função constante como função, muito embora Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) tenham enfatizado que as dificuldades de ensino de funções, na confusão causada no estudo de função constante, para muitos alunos, é a de não aceitarem funções constantes como funções. O aluno A09, por exemplo, compreendeu que a relação muitos para um, viria a representar uma função. Pareceu-nos que houve uma compreensão por parte dele da ideia essencial de função como *valor único*. Pudemos perceber também, que para o aluno A28 a função identidade fazia parte do seu repertório de informação, pois, ela é o espelho da função inversa. Aproveitamos para trazer mais explicações sobre a função identidade, trazendo as características e propriedades que a torna um caso muito particular de função.

Podemos evidenciar que uma compreensão essencial do conceito de função por alunos passa necessariamente pela ideia de valor único quando percebemos que os alunos foram capazes de compreender que tanto a função constante quanto a função identidade são exemplos legítimos de funções que passam pelo crivo da ideia essencial do conceito de função. Ficou claro para eles que a relação um para um e muitos para um são exemplos de função, quando o contrário, relação de um para muitos não seria função. Esta ideia de unicidade quando bem desenvolvida pode abarcar todos os exemplos e compreensões conceituais de função tanto as funções com domínio numérico quanto as funções com domínio não numérico. Esta última compreensão não foi contemplada pelo nosso estudo, compreensão essencial (1c) segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), deixando o desenvolvimento e ampliação desta ideia ao longo do currículo.

5.3.2. Descrição e análise do encontro 08

Aula 11 (Data 06/05/2012)

<u>Conteúdos desenvolvidos na atividade 2.2</u>*:* conceito de função; covariação e taxa de variação; famílias de funções (função afim); combinação e transformações de funções (função inversa) e representações múltiplas de função e múltiplas conexões não matemáticas com temáticas de saúde.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 2.2:

Atividade 2.2: Uma dona de casa vivia uma vida sedentária, pois, afora seus afazeres domésticos, ela não praticava atividades esportivas e também se alimentava muito mal ingerindo poucas verduras e frutas em sua alimentação diária. Com isso, o seu peso[8] chegou a 100 kg. Daí, ela foi ao médico, porque precisava emagrecer e, sob orientação médica, fez um regime. Sabendo que o peso dessa dona de casa era de 100

---

[8] *Peso*, aqui é empregado no sentido popular, correlato à *massa*. Do ponto de vista físico *massa* significa quantidade de matéria de um corpo. Enquanto *peso*, na Física, tem a ver com o produto da massa pela aceleração de gravidade. Em outras palavras, *peso* é a medida da força que a gravidade exerce sobre os corpos, puxando-os para o centro da Terra.

kg e ela emagreceu 5 quilos por semana, podemos estabelecer uma relação entre o peso e o tempo. Sabendo que o peso ideal dessa dona de casa era de 65 kg. Pede-se:

A) Elaborem uma tabela relacionando o tempo relativo ao peso perdido por essa dona de casa por semana;

B) Escrevam a equação da função peso versus tempo;

C) Quantas semanas serão necessárias para que a dona de casa adquira o peso ideal?

D) Representem graficamente essa função;

E) Determinem o domínio e a imagem dessa função;

F) Estabeleçam a equação da função tempo versus peso;

H) Qual o comportamento dessa função, ela é crescente ou decrescente?

Entrega de material impresso e papéis milimetrados, seguida de leitura individual da situação-problema. Demos um tempo para que os alunos pudessem ter inicialmente um contato com a situação-problema e, também, para trabalhar, mais adiante, nos seus respectivos grupos, levando sua contribuição e poder também fazer descobertas coletivamente.

> A25: *Professor, eu vou começar a partir do tempo zero e peso 100 kg pra começar. Daí, depois de uma semana diminuindo 5 kg, que dá 95 kg, depois de 2 semanas 90 kg, 3 semanas, 85 kg e assim vou fazendo.*
>
> PP: *Pode continuar.*
>
> A42: *A equação da função é P = 100 – 5T.*
>
> PP: *Ok, muito bem.*
>
> A25: *Eu vou parar a minha tabela em 7 semanas que dá 65 Kg. Pois, o problema diz que peso ideal da dona de casa era de 65 kg.*
>
> A42: *E já responde a pergunta da letra G. São necessárias sete semanas para que a dona de casa adquira o peso ideal. Agora, professor. O gráfico dessa função para nesse ponto porque ele não vai continuar até o infinito.*
>
> <u>Comentário</u>: Em uma dieta real, isso não é verdade porque se perde mais peso no início e, depois vai emagrecendo menos. No entanto, a discussão por parte dos alunos, não enveredou por esse questionamento.
>
> PP: *O gráfico dessa função está restrito a certo intervalo. Então, ao elaborar seus gráficos vocês vão tirar o seu domínio e a sua imagem. Lembrem-se: o domínio se encontra no eixo horizontal (abscissas) e a imagem no eixo vertical (ordenada). Ok. Formem grupos de quatro*

alunos para concluírem o trabalho juntos. E vejam também a possibilidade de explorar outras ideias.

Circulamos na sala de aula enquanto os alunos trabalhavam em grupo. Decorrido certo tempo, propusemos que dois dentre os diversos grupos pudessem expor a resolução na lousa. E os respectivos grupos elegessem um representante para realizar a exposição na lousa.

A12 representando o G1 (registrou na lousa a situação-problema 2.2 representando a grandeza tempo em semanas por T e grandeza *peso* em quilogramas por P, $D = \{T \in Q/0 \leq T \leq 7\}$ e $Im = \{P \in Q/65 \leq P \leq 100\}$. Efetuando transformações algébricas, encontrou a função inversa de $P = 100 - 5T$ correspondendo a $T = 20 - \frac{1}{5}P$, e respondeu que o comportamento da função é decrescente.

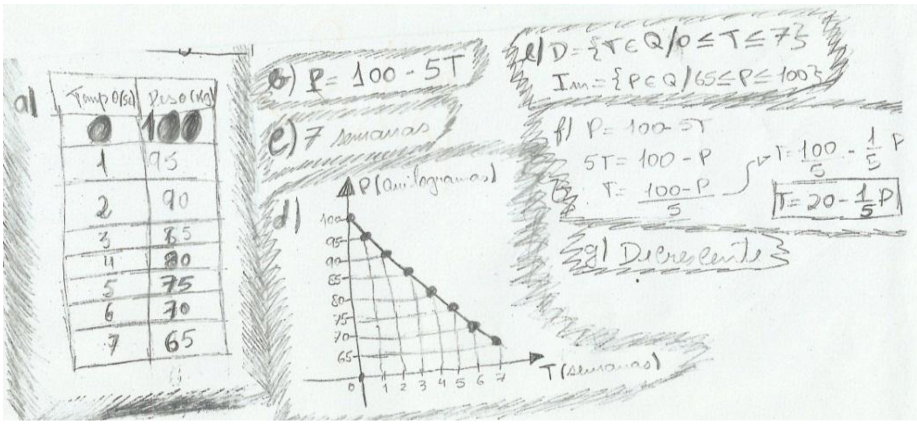


Figura 21: Resolução da atividade 2.2 apresentada pelo aluno A12, representando o seu grupo.

Enfatizamos, para o grande grupo, que o gráfico da função esboçada pelo aluno A12 é uma função contínua, ele junto com colegas de grupo uniram os pontos que foram localizados. Daí, pedimos para eles justificarem o porquê de ter procedido dessa maneira. O aluno A12 responde: *Porque as duas grandezas são medidas, a primeira tempo e a segunda "peso" que podem ser representadas por números racionais. Por isso, a função é contínua.* Reforçamos essa ideia comentando que as variáveis do gráfico são contínuas porque elas existem continuamente sem interrupção, e não apenas em intervalos ou locais pontuais e distintos.

Comentário: Em um contexto mais amplo, poderíamos nos referir à função contínua, pertencendo assim ao conjunto dos números reais, quando trabalhamos com grandezas que expressam medidas, incluindo obviamente os números racionais e irracionais, razões mensuráveis e incomensuráveis. Em outras palavras, as funções de variáveis reais são contínuas e as funções de variáveis inteiras, cujas grandezas são usadas para a contagem, são funções de variáveis discretas.

A45, representando o Grupo 2, realizou o registro apenas mudando as letras das variáveis que ele preferiu chamar de x e y, independente e dependente respectivamente. E de resto ficou tudo muito parecido com a resolução apresentada pelo grupo A12. No entanto, a função inversa de $y = 100 - 5x$, encontrada por ele e seu grupo foi $x = 20 - \frac{1}{5}y$.

PP: *Tudo bem. Vejo que houve concordância entre os dois grupos em muitos aspectos das perguntas inclusive em gráficos e comportamento de gráfico também. A45, por que vocês responderam que o comportamento dessa função é decrescente?*

A45: *Porque na medida em que aumenta o tempo o "peso" diminui. Dá pra ver isso no gráfico, ele vai de fato decrescendo.*

PP: *Ok. Agora, o que me chamou atenção foi a sua resposta para a função inversa. Embora esteja correto, precisamos realizar alguns ajustes para poder respeitar as convenções matemáticas. Normalmente, os matemáticos chamam de x a variável independente e a variável de y dependente. E para resolver essa situação da função inversa eles trocam o x pelo y e vice-versa. E a nova função agora invertida passa a ser $y^{-1} = 20 - \frac{1}{5}x$ ou $f^{-1}(x) = 20 - \frac{1}{5}x$. Como já falei em aulas anteriores a razão de tudo isso está no fato da função inversa ser simétrica em relação à reta $y = x$. É certo que o mais importante é que vocês tenham compreendido o sentido do que está aí exposto na lousa por A45. Alguma dúvida?* (O PP se dirigindo ao GG).

GG: *Entendi* (Alguns apenas balançavam a cabeça concordando que sim).

PP: *Agora, mudando de assunto e explorando essa situação no quesito saúde, aA dona de casa do problema deve se preocupar com o seu peso para evitar que problema, considerado grave, enfrentado hoje pela população mundial e que está também atingindo a população brasileira?*

A16: *A obesidade, professor. A dona de casa do nosso problema deveria pesar 65 kg, certamente ela era baixinha e já chegou a pesar 100 kg, já pensou uma pessoa de 1,50m pesando 200 kg. Vai apresentar sérios problemas de saúde.*

PP: *Tudo bem, eu concordo com você. No entanto, a preocupação com o peso só deve existir nesses casos considerados mórbidos ou quando depois de uma avaliação médica. Não devemos nos preocupar com os ditames da moda. Sabemos que muitas adolescentes acabam adquirindo uma doença como bulimia ou anorexia. Na primeira delas o indivíduo come bastante e depois se sente culpado, e procura eliminar o alimento ingerido de alguma forma, e, com o passar do tempo usando essa prática, o indivíduo passa a não sentir mais fome. O que acaba desencadeando um processo de anorexia, que é a falta de apetite, podendo ocasionar a morte. E tudo isso acaba acontecendo devido ao excesso de preocupação com o peso.*

A23: *Como aquelas manequins de passarela, professor.*

PP: *Bom, podemos pensar que elas devam ser bem assistidas. Porém, o importante é respeitarmos as diferenças e cuidar melhor da nossa saúde. Se na avaliação médica o seu peso estiver dentro das medidas de acordo com o IMC (Índice de Massa Corporal) então, você não precisa se preocupar.*

A30: *A professora de biologia já nos ensinou a fazer as contas é só dividir o nosso peso pela medida da altura ao quadrado pela fórmula:* $IMC = \frac{P}{H^2}$.

PP*: Muito bem, e só puxando um pouquinho mais para o nosso estudo, esta fórmula do IMC é função do peso e da altura. Em outras palavras, o IMC é diretamente proporcional ao peso e inversamente proporcional ao quadrado da altura. Só para recordar diretamente proporcional quando uma grandeza aumenta e a outra na mesma proporção ou vice-versa. Por exemplo: quando uma duplica a outra também duplica na mesma proporção, quando uma cai para um terço a outra também cai para um terço na mesma proporção, entre outros. E inversamente proporcional quando uma grandeza aumenta e a outra diminui na mesma proporção ou vice-versa. Por exemplo: se uma duplica a outra cai para metade proporcionalmente, se uma cai para um terço a outra triplica proporcionalmente, entre outros.*

A metodologia de ensino-aprendizagem via resolução de problemas foi o caminho predominante nesta sessão de aula. Sugerimos a leitura individual no início da aula, os alunos individualmente levantaram as primeiras hipóteses na resolução do problema, sugerimos a formação de grupos, depois foram eleitos dois alunos de grupos distintos para defender em plenária as resoluções de suas equipes, fizemos alguns comentários exercendo a função de mediador no processo de compreensão e aquisição de conceitos trabalhados, tais como o comportamento da função ser decrescente ou crescente, a questão do gráfico ser contínuo ou discreto, o conjunto domínio e imagem, a inversão de função, dentre outros aspectos.

Dentro ainda, dos aspectos conceituais, presenciamos certa fluência nas descobertas feitas pelos alunos individualmente e nos seus respectivos grupos. Formularam representações numéricas, na construção de tabelas; formularam representações algébricas na descoberta do modelo de equação algébrica da função afim; construíram a representação gráfica da função. Foram levantadas múltiplas representações para a mesma função que estava inicialmente representada verbalmente dentro do contexto apresentado pela situação-proposta.

No entanto, ao final da aula, pudemos notar extensões do problema que podem ser enquadrados numa metodologia de ensino-aprendizagem via exploração de problemas, a fórmula do índice de massa corporal, mencionada pelo aluno A30. Aproveitamos para chamar a atenção do grande grupo sobre esse enfoque referente a essa temática, enfatizando o estudo da função em relação às grandezas diretamente e inversamente proporcionais e outras questões de contextos não matemáticos como o tema da obesidade que estava implícito no problema considerado, como um problema de saúde pública que atinge países desenvolvidos e pobres. Outras discussões da temática da saúde vieram à tona, uma vez que são temas próximos aos adolescentes, como o problema da bulimia e anorexia.

Percebemos que foi possível explorar os conceitos matemáticos, predominantemente, foi dado ênfase aos aspectos matemáticos. Entretanto, o enunciado do problema trouxe algo de novo a ser explorado além da Matemática que extrapola os muros das escolas. Por isso, foi dado espaço na aula de Matemática para as discussões que dizem respeito à saúde pública, inicialmente provocada pelo professor, depois, seguiu-se um diálogo entre alunos e professor sobre a temática da obesidade, bulimia e anorexia. Houve a preocupação de compreender e questionar os problemas da realidade, bem como da situação que lhes foram proposta.

Acreditamos que a metodologia de ensino-aprendizagem na perspectiva da resolução e exploração de problemas possa fortalecer tantos os processos como os produtos da resolução de problemas porque estamos nesse trabalho possibilitando uma análise mais ampla para o problema-proposto, explorando não somente os conceitos matemáticos que estão imbricados no problema, bem como as possíveis extensões que podem ser de caráter matemático ou de responsabilidade social dos indivíduos e grupos de indivíduos que estamos formando. Desse modo o mesmo problema pôde ser analisado em diferentes aspectos tanto do ponto de vista da Matemática como fora dela.

5.3.3. Descrição e análise do encontro 09

Aula 12 (Data 11/05/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 2.3: conceito de função; covariação e taxa de variação; famílias de funções (função afim); representações múltiplas de função e conexões múltiplas aos contextos não matemáticos meio ambiente, tal como a questão do desperdício de água, na promoção de debate sobre a necessidade de evitar o desperdício de água.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 2.3:

Atividade 2.3: Uma caixa-d'água de formato cúbico e de capacidade de 2000 litros está totalmente cheia. Para lavar o quintal, a dona de casa abriu uma torneira que retirava 10 litros de água por minuto. Supondo que a caixa-d'água não seja alimentada durante todo o tempo de lavagem e que a vazão da torneira permaneça constante. Pede-se:

A) Montem uma tabela que relacione o tempo decorrido na lavagem em minutos e o volume de água consumido em litros;

B) Determinem a equação algébrica que mostra a dependência do volume em função do tempo;

C) Esbocem o gráfico dessa função;

D) Após quanto tempo a caixa-d'água ficou vazia?

E) Qual o comportamento dessa função, ela é crescente ou decrescente?

F) Volume e tempo são grandezas de proporcionalidade direta ou inversa?

G) O desperdício de água no Brasil ocorre em grande escala. Lavar quintais e calçadas é hábito de muitos brasileiros, sobretudo nas cidades pequenas, médias e de grande porte. A água potável é um recurso natural findável e não desperdiçá-la é preciso. Qual a sugestão de vocês para que nós possamos desperdiçar menos água? (Adaptado do livro: NETTO et al, 2005. p.11)

Entrega de material impresso e papel milimetrado para ajudar na construção do gráfico. Leitura individual do problema para que os alunos possam se familiarizar com a situação-problema e possam inicialmente ter argumentos, levantar hipóteses, realizar conjecturas a serem compartilhadas entre seus colegas da sala de aula e coletivamente possam melhor formular e validar ideias que estão sendo desenvolvidas.

A16: *Eu vou fazer de 1 até 10 minutos.*

PP: *É um bom começo.*

A36: *Vai mudando de 10 em 10.*

PP: *Chamamos esse valor de taxa de variação dessa função. E quanto à palavra taxa, o que vocês entendem por ela?*

A10*: É um imposto que é cobrado da gente.*

A31: Pode ser de tantos por centos.

PP: Poderia ser uma porcentagem. Vocês lembram: qual é o significado da palavra porcentagem?

A27: É uma razão de um número sobre cem.

PP: Certo, vocês estão lembrados do que quer dizer razão em Matemática?

A45: Um quociente entre dois números inteiros.

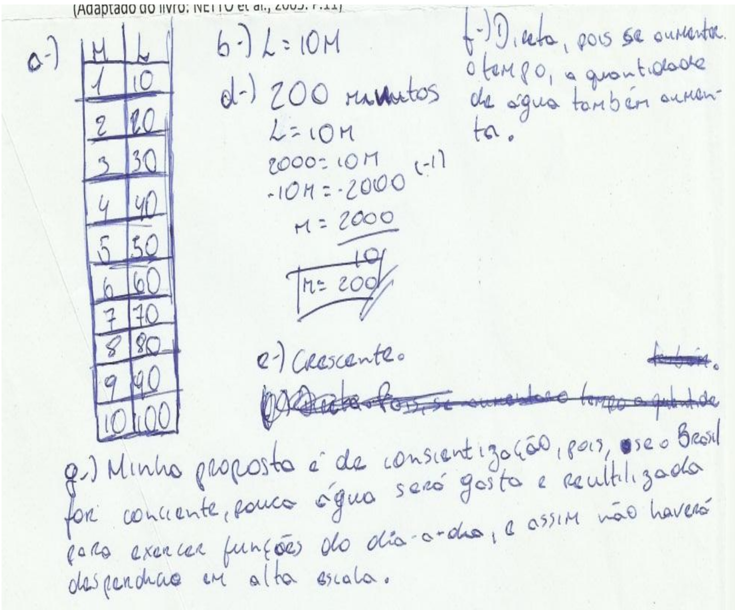
PP: Esta razão poderia estar numa relação entre duas grandezas variáveis, sendo uma dependendo da outra. Poderíamos chamá-la assim de taxa de variação.

A23: *Na função* $y = 10x$*, dez é a taxa de variação dessa função.*

Comentário: O aluno conceituou erroneamente razão como quociente. Enquanto, razão é adequadamente conceituada, segundo Van de Walle (2009), como uma comparação multiplicativa entre duas grandezas e a proporção é a equivalência entre duas ou mais razões. A proporcionalidade é uma das ideias fundamentais da Matemática. Por outro lado, nossa explicação incitou o aluno a racionar sobre a ideia de razão como relação (comparação) entre duas grandezas variáveis para chegar à compreensão de taxa como uma comparação entre essas grandezas que podem ser de mesma natureza ou de natureza distinta. A ideia de proporcionalidade foi explorada quando o aluno A23 demonstrou possuir *senso de covariação*, isto é, ele compreendeu que a taxa (razão) indica uma relação (comparação) em como duas grandezas variam juntas e foi capaz de perceber como a variação de uma está relacionada com a variação da outra, chegando a concluir que 10 seria a taxa de variação da função.

PP: *Você pode representar as variáveis usando outras letras se assim preferir. Ok. Bom, agora formem grupos de quatro pessoas e comecem a trabalhar com seus colegas. Nesse momento, eu prefiro não interferir. Aproveitem para dialogar com seus parceiros de grupo.*

Circulamos na sala de aula, observando mais os alunos nos seus trabalhos em grupo. Pena, que não dava sempre para ouvirmos as trocas de ideias entre os alunos porque a turma era muito grande. Enquanto, circulávamos na sala de aula observávamos que as respostas não divergiam essencialmente umas das outras. Mas, estávamos satisfeito com o fato de os alunos estarem se habituando a lidar com problemas matemáticos. Decorrido algum tempo, selecionamos dois grupos para expor na lousa a situação 2.4.



a-)

M	L
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	60
7	70
8	80
9	90
10	100

b-) L = 10M

d-) 200 minutos
L = 10M
2000 = 10M (-1)
-10M = -2000
M = 2000/10
M = 200

e-) Crescente.

f-) Direta, pois se aumentar o tempo, a quantidade de água também aumenta.

g-) Minha proposta é de conscientização, pois, se o Brasil for conciente, pouca água será gasta e reultilizada para exercer funções do dia-a-dia, e assim não haverá desperdício em alta escala.

Figura 22: Resolução da atividade do 2.3 apresentada pelo aluno A06, representando seu grupo.

A06 representando o grupo 1 (Montou a tabela de 1 a 10, denominou a equação da função de L = 10M. Porém, o que nos chamou a atenção foi o fato dele ter representado o gráfico a partir da origem mesmo, não tendo levado em consideração esse ponto na sua tabela.

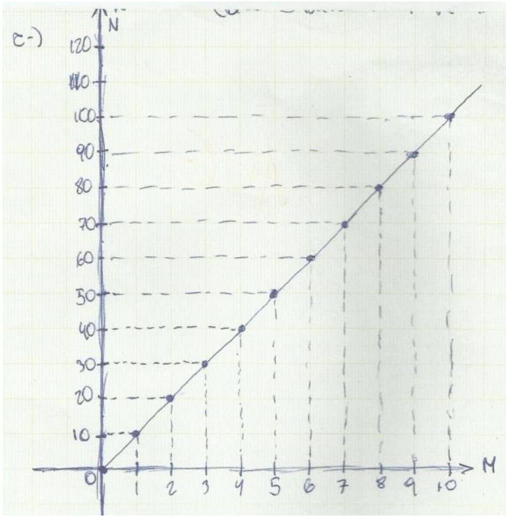


Figura 23: Representação gráfica da atividade 2.3 apresentada pelo aluno A06, representando seu grupo.

PP: *Por que vocês começaram o gráfico a partir da origem do sistema?*

A06: *Professor, porque quando M for zero, como L = 10M, o resultado* é $L = 10 \cdot 0 = 0$.

PP: *Ok. Porém, a resposta mais adequada do ponto de vista matemático é que esta função é linear e uma das características dessa função é que ela passa obrigatoriamente pela origem dos sistemas. Agora, mais uma pergunta: M poderia ser igual a – 1?*

A06: *Não faz sentido, professor. O tempo não pode ser negativo.*

PP: *Então, o gráfico dessa função é uma reta que passa pela origem?*

A06: *Não, professor. O gráfico dessa função é uma semirreta porque ela tem origem mas não terá fim.*

PP: *Muito bem. Voltando ao problema da caixa d'água que tem 2000 litros, acontece que passado algum tempo a água acaba. Com isso, o que vai acontecer com o gráfico dessa função?*

A06: *Isso tudo quer dizer que o gráfico é um segmento de reta, tem começo e tem fim.*

PP: *Tudo bem. Porém, essa discussão é importante para a gente ter consciência do que está sendo construído e o do seu significado. E a sugestão ou proposta para evitar o desperdício d'água?*

A06: *A nossa proposta é de conscientizar, pois se o Brasil for consciente, pouca água será gasta e poderá ser reutilizada para exercer funções do dia a dia, e assim não haverá desperdício em alta escala.*

PP: *Mas, você acha que só no Brasil?*

A06: *Não, professor. Esse problema é no mundo todo.*

PP: *Muito bem. Vamos passar para o outro grupo.*

A17, representando o grupo 2, montou a tabela na lousa a partir de 0 e adotou um intervalo de 10 em 10 até chegar em 200 minutos, representou a equação da função por V = 10T e o gráfico como um segmento de reta, classificou o comportamento da função em crescente, respondeu que as grandezas envolvidas na questão é diretamente proporcional, pois quando o tempo aumenta, a quantidade de água despejada também aumenta na mesma proporção. Em relação à proposta para evitar o desperdício d'água esse grupo sugeriu usar balde d'água ao invés de mangueira. Ainda sugeriram o uso de dois baldes, um com água e sabão e outro com água limpa. Reduzir o tempo debaixo do chuveiro no banho, fechar a torneira enquanto escovam os dentes e consertar torneiras e a rede hidráulica no geral da casa, caso requeiram consertos.

Vamos voltar para as discussões matemáticas propriamente ditas, retomando a situação-problema 2.4, enfatizamos a ideia da função linear, modelando proporcionalidade direta, podendo representá-la pela forma geral $y = ax$. Mostrando caso particular da função afim com $b = 0$, evidenciando para os alunos que a característica principal da função linear é a de modelar a proporcionalidade direta e que passa obrigatoriamente pela origem do sistema. Chamamos a atenção do grande grupo para que eles pudessem perceber que ao descobrirem a taxa de variação da função, já podemos achar a equação dessa função, pois, o parâmetro b é sempre zero.

Neste encontro, já foi previsto por meio da última questão que faríamos extensões do problema para problemáticas e questionamentos além da própria Matemática, sem prejuízo do enfoque nas explorações matemáticas, propriamente ditas. O encontro inicialmente percorreu um caminho metodológico de ensino-aprendizagem via resolução de problemas com leitura individual em que os alunos sozinhos levantaram hipóteses importantes para a resolução do problema. Medíamos o trabalho, ajudando os alunos na construção do conhecimento por meio de perguntas e questões que estavam sendo levantadas. Selecionamos dois alunos de equipes distintas para fazerem as defesas dos seus respectivos grupos para o grande grupo, no intuito de haver possíveis confrontos e consensos sobre as resoluções do problema que foram apresentadas.

Houve muitas descobertas e explorações matemáticas, na sessão de aula. Para uma compreensão da melhor representação gráfica do problema-proposto, promovemos o diálogo por meio de provocações, sempre instigando os alunos a pensarem sobre o problema, com os alunos acabando chegar à conclusão de que a melhor representação gráfica, para a situação-problema, não seria uma reta nem uma semirreta, e sim um segmento de reta. A ideia de taxa de variação surge em meio aos questionamentos feitos pelo professor, entretanto sua apresentação e denominação requerem, por parte do adulto mais experiente, que se fizesse essa ponte, trabalhando na Zona de Desenvolvimento Proximal dos alunos de modo que eles pudessem adquirir um vocabulário e uma compreensão dos assim chamados conceitos científicos.

Os alunos realizaram também representações algébricas quando chegaram à equação algébrica da função linear como modelo da proporcionalidade direta. No entanto, a fórmula geral de uma função linear e o raciocínio de forma organizada para apresentação das principais características dessa subfamília de funções. Tivemos que realizar o papel de mediador dessa compreensão, embora, por conta própria, os alunos já tivessem demonstrado ter certo domínio, mesmo que ainda fosse de forma fragmentada, desse conhecimento, que precisavam de uma arrumação.

Muitas ideias fundamentais da Matemática exploradas, os alunos não conseguiam deduzir por conta própria. Eles apresentaram indícios de compreensão delas, mas se fez necessário o nosso trabalho de mediação no sentido de organizá-las. A ideia essencial de proporcionalidade ficou clara na exploração do problema proposto. Isso significou dizer que para eles haviam compreendido que em toda proporção, temos uma equação linear $y = ax$, onde x é uma variável, a é uma constante de proporcionalidade e y depende do valor x: se x dobra, y dobra; se x cai a um terço, y cai a um terço.

No processo de formalização de conteúdos enfatizamos que a constante de proporcionalidade a é uma razão entre duas grandezas $\frac{y}{x}$. Desse modo podemos evidenciar que os alunos compreenderam que, em toda proporção, se aumento a quantidade x, aumento a quantidade y; se diminuo a quantidade y, diminuo na mesma medida a quantidade x. Sendo assim, eles compreenderam que x e y representaram a relação de dependência entre duas grandezas e a razão a é a taxa de variação constante da função linear, caso particular da função afim. Esta última característica é a compreensão essencial da função linear.

O trabalho de metodologia de ensino-aprendizagem se estendeu via exploração de problemas para questões fora da Matemática, mas que tem uma grande importância para a nossa sobrevivência atual e futura. A água potável, recurso natural não renovável, pois precisamos urgentemente pensar em como evitar o seu desperdício. Os alunos apresentaram algumas sugestões, mostrando-se conscientes dessa problemática, enfrentada pela humanidade em todas as partes do planeta.

Embora tenhamos aberto espaço para a temática do meio ambiente, água, o protagonista desta sessão de aula foi a Matemática, onde finalizamos a aula, sistematizando as ideias e explorações matemáticas discutidas durante o encontro, chamando a atenção dos alunos para a subfamília função linear, sua forma geral e parâmetros; enfatizamos a ideia de taxa de variação neste tipo de função. Sendo assim, a temática das funções se apresenta muito rica para o trabalho de resolução e exploração de problemas, pois podemos recorrer a várias estratégias de resolução, como achar a equação algébrica da função, construir tabelas e gráficos e ainda analisar e explorar a situação-problema através de algumas ampliações tanto dentro como fora da Matemática.

5.3.4. Descrição e análise do encontro 10

Aulas 13 e 14 (Data 12/05/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 2.4: covariação e taxa de variação; famílias de funções; representações múltiplas de funções; ressaltando a análise de gráficos raciocinando sobre taxas de mudanças sem quaisquer números envolvidos na situação.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 2.4:

Atividade 2.4: Hora do banho

Maria está tomando banho. Ela enche a banheira, entra nela, lava-se, sai da banheira e escoa a água.

1) Qual gráfico mostra o que acontece com o nível da água na banheira? Justifique;

2) O que está errado com cada um dos outros gráficos? Justifique.

O eixo vertical está representando a altura da água na banheira e o eixo horizontal está representando o tempo.

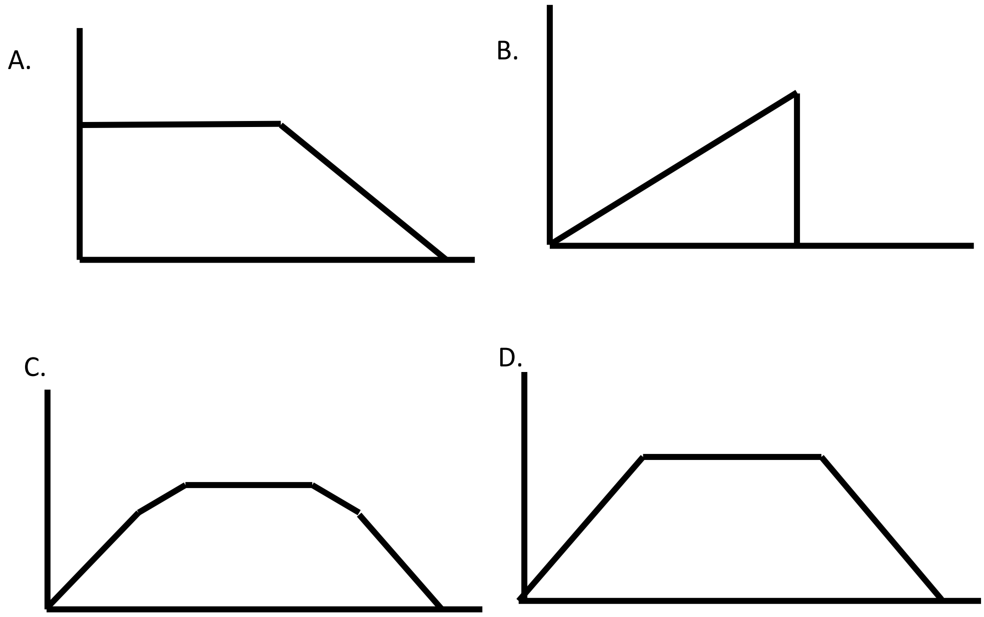


Figura 24: Gráficos A, B, C e D, ilustrativos da atividade 2.4.

(Adaptado do livro *Atividades e Jogos com Gráfico*: SMOOTHEY, 1997, p. 13)

Distribuição de material impresso, leitura individual e divisão da turma em grupos de quatro alunos.

> A25: *A alternativa que responde a primeira pergunta é B, pois a menina enche a banheira de água e depois escoa.*
>
> PP: *Na subida de água, a reta está inclinada e ela é crescente. Por outro lado, você está admitindo que o escoamento de água representado por uma reta vertical, você acha mesmo que a água escoa de uma só vez assim que a menina abre a vazão da banheira?*
>
> A25: *Não pode ser assim. A reta deve ficar inclinada, só que agora diminuindo, descendo ladeira.*
>
> A44: *Eu acho que é alternativa D.*
>
> PP: *Justifique a escolha dessa alternativa. Diga, por quê?*
>
> A44: *No primeiro momento a água sobe, depois permanece no mesmo nível enquanto a menina está tomando banho e depois o nível de água baixa quando a menina escoa a água da banheira. Então, só pode ser a alternativa D, o gráfico é parecido com um trapézio.*
>
> PP: *Eu tenho impressão que você não levou em consideração dois momentos que são muito importantes. O momento em que a menina entra na banheira e depois que ela sai da banheira.*
>
> A44: *Professor, quando a menina entra, o nível de água aumenta um pouquinho, depois fica estável enquanto ela toma banho e o nível diminui um pouquinho quando ela sai de dentro d'água. E depois, diminui mais rápido quando ela escoa a água da banheira.*

A21: *Então, só pode ser a alternativa C. Pois, primeiro ela enche a banheira, o que aumenta o nível, entra na banheira colocando primeiramente os seus pés (o que aumenta ainda mais) depois de se sentar e banhar-se, a água fica no mesmo nível. Terminado o banho, ela se levanta, a água diminui um pouco, e depois de sair da banheira, a água é escoada.*

PP: *Eu quero que vocês respondam as duas perguntas sempre justificando as suas respostas. Ok.*

Circulamos na sala de aula, observando o trabalho dos grupos. O professor deu um tempo para os alunos interagirem entre si nos seus respectivos grupos e selecionou dois grupos que representariam os dois modos, ligeiramente diferenciados de respostas às questões da situação-problema.

O primeiro grupo era composto pelos alunos A12, A13, A15 e A17. Pedimos para eles elegerem um aluno dentre os quatro alunos para vir à frente da lousa explicar para o grande grupo como eles responderam as questões da situação proposta *Hora do banho.* O aluno A12, representando o primeiro grupo: *Para a primeira pergunta, respondemos alternativa C, pois ela enche, entra, lava-se e escoa a água.* A partir desta observação pedimos para o aluno A12 registrar na lousa o esquema que ele no seu grupo tinha produzido (O aluno registrou na lousa o esquema indicando cada uma dessas fases descritas por ele na sua equipe de trabalho).

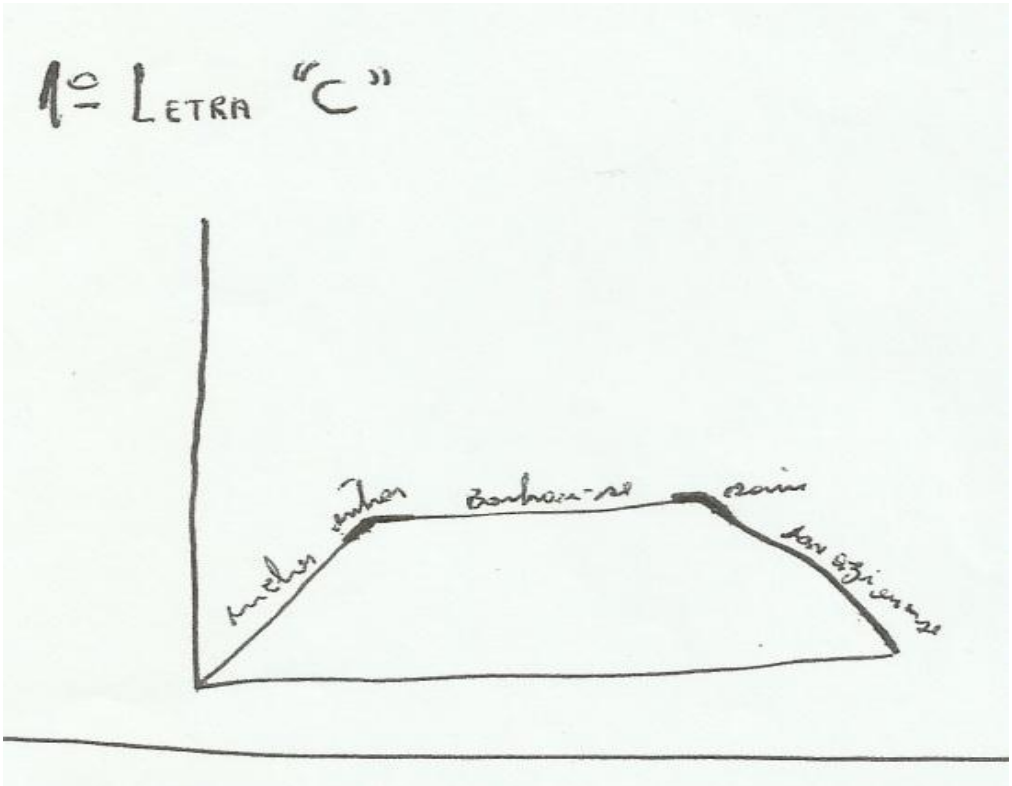


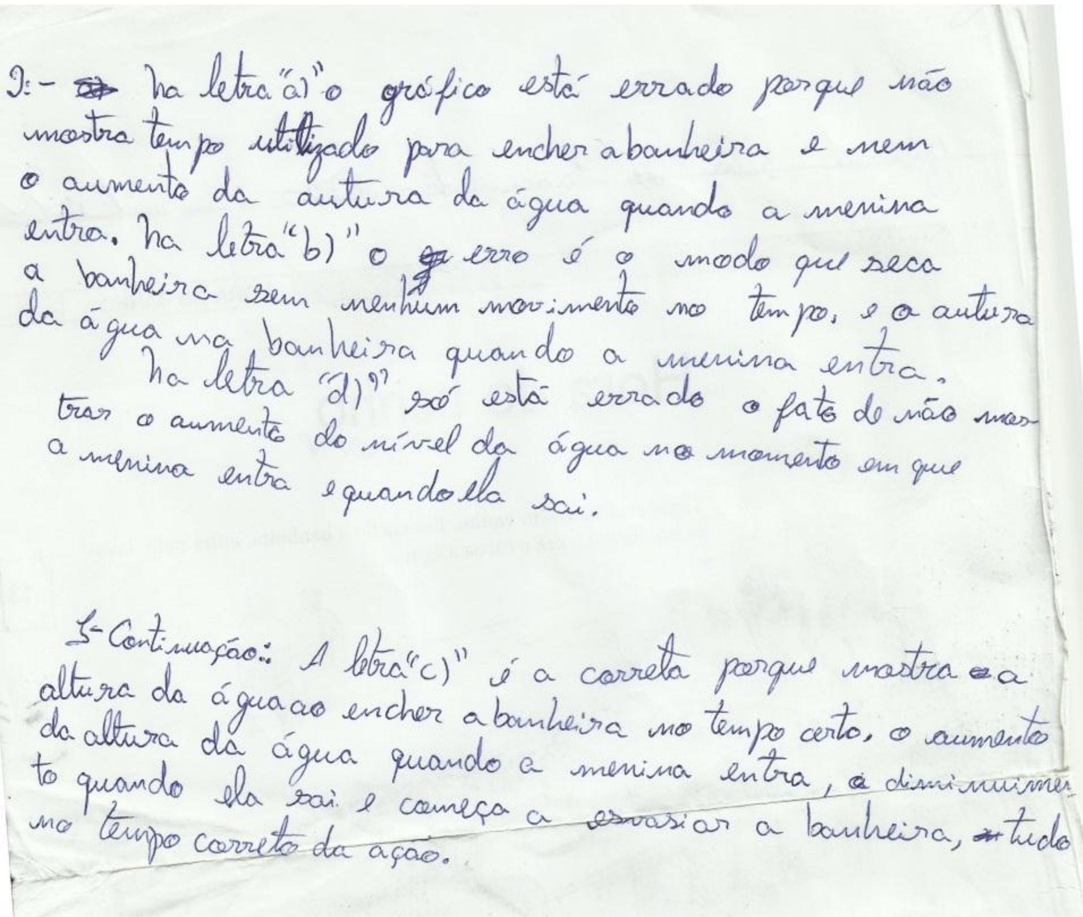
Figura 25: Representação gráfica da questão um (1) da atividade 2.4 do aluno A13, representando seu grupo.

O aluno A12 dá a seguinte explicação na alternativa A, o nível da banheira começa totalmente cheio depois vai secando até a banheira ficar vazia. Na alternativa B, o nível é aumentado e logo o nível despenca, esvaziando a banheira totalmente sem ter dado tempo de a água escoar. Na alternativa D, o nível de água da banheira aumenta, ficou parada e depois foi esvaziando, mas não contou quando a menina entrou nem quando ela saiu da banheira.

O segundo grupo selecionado foi formado pelos alunos A08, A21, A23, A44 e o grupo elegeu o aluno A21 para responder as perguntas para grande grupo.

PP: *Bom, precisamos ganhar tempo, a aluna A21 já nos respondeu como ela justificou a primeira pergunta que não divergiu muito das respostas dos demais colegas do seu grupo. Então resta apenas a segunda pergunta* (Preocupação do professor pesquisador em relação à gestão do tempo pedagógico disponível).

A21 representando o segundo grupo: *O gráfico da alternativa A está errado, pois, mostra o nível da água, já alto, mas ele enche primeiro, antes de entrar. O Gráfico da alternativa B está errado porque só mostra quando ela põe a água e a tira depois do banho. O gráfico da alternativa D também está errado, porque não mostra quando a garota só pôs uma parte do seu corpo, o que aumentou apenas um pouquinho o nível da água.*

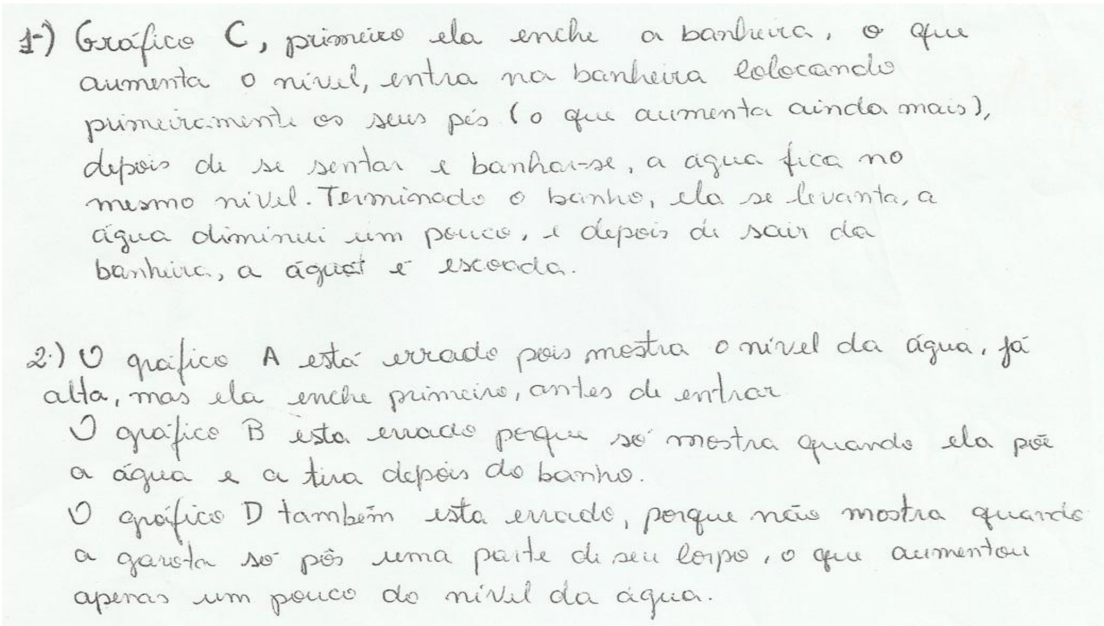

2:- na letra "a)" o gráfico está errado porque não mostra tempo utilizado para encher a banheira e nem o aumento da autura da água quando a menina entra. na letra "b)" o erro é o modo que seca a banheira sem nenhum movimento no tempo, e a autura da água na banheira quando a menina entra.
na letra "d)" só está errado o fato de não mostrar o aumento do nível da água no momento em que a menina entra e quando ela sai.

1- Continuação: A letra "c)" é a correta porque mostra a altura da água ao encher a banheira no tempo certo, o aumento da altura da água quando a menina entra, a diminuimento quando ela sai e começa a esvaziar a banheira, tudo no tempo correto da ação.

Figura 26: Justificativas e explicações das questões um (1) e dois (2) da atividade 2.4 pelo A20, representando seu grupo.

<u>Transcrição do texto da figura 26</u>: 2. Na letra "a" o gráfico está errado porque não mostra o tempo utilizado para encher a banheira e nem o aumento da altura da água quando a menina entra. Na letra "b" o erro é o modo que seca a banheira sem nenhum movimento no tempo, e a altura da água na banheira quando a menina entra. Na letra "d" só está errado o fato de não mostrar o aumento do nível da água no momento em que a menina entra e quando ela sai. 1. Continuação: A letra "c" é a correta porque mostra a altura da água quando a menina entra na banheira, a diminuição quando ela sai e começa a esvaziá-la, tudo no tempo correto da ação.

Reunimos os consensos do grande grupo na busca de respostas que fossem mais adequadas para modelar a situação que retratou a Hora do banho de Maria, desse modo o grande grupo escolheu a alternativa C. Chegamos a fazer os alunos raciocinarem sobre o aumento, a diminuição ou a permanência do mesmo nível de água em relacão à taxa de variação da função. Concluímos em conjunto que a altura da água na banheira em relação ao tempo decorrido no banho. Temos uma variação de duas grandezas que variam juntas, a altura da água na banheira e o tempo que nos dão uma ideia de covariação que é o modo como as duas grandezas variam juntas. Sabemos também que existe uma medida que descreve o tipo de covariação que está sendo efetuada, a chamada taxa de variação. Pois bem, quando a água está enchendo a banheira, o valor da taxa de variação positiva, quando a menina entrou na água o valor dessa taxa se alterou, no entanto ela continuou positiva. Quando a menina permaneceu dentro da banheira se lavando o nível estava estável e a taxa de variação zero. Quando ela saiu da banheira o nível da água caiu e a taxa de variação passou a ser negativa, quando a água está escoando a taxa se alterou, mas continuou negativa. Vemos, portanto que a função afim tem uma taxa de variação constante que pode ser positiva ou negativa e determinará o comportamento dessa função em crescente ou decrescente. E para o caso particular da função constante essa taxa de variação é sempre zero.


1-) Gráfico C, primeiro ela enche a banheira, o que aumenta o nivel, entra na banheira colocando primeiramente os seus pés (o que aumenta ainda mais), depois de se sentar e banhar-se, a agua fica no mesmo nivel. Terminado o banho, ela se levanta, a água diminui um pouco, e depois de sair da banheira, a água é escoada.

2.) O grafico A está errado pois mostra o nivel da água, já alta, mas ela enche primeiro, antes de entrar
O gráfico B esta errado porque só mostra quando ela põe a água e a tira depois do banho.
O gráfico D também esta errado, porque não mostra quando a garota só pôs uma parte de seu corpo, o que aumentou apenas um pouco do nivel da água.

Figura 27: Justificativas e explicações das questões um (1) e dois (2) da atividade 2.4 pela aluna 21, representando seu grupo.

Transcrição das justificativas e explicações da atividade 2.4 pela aluna A2, representando seu grupo: 1. Gráfico C, primeiro ela enche a banheira; o que aumenta o nível. Entra na banheira colocando primeiramente os seus pés (o que aumenta ainda mais). Depois de se sentar e banhar-se, a água fica no mesmo nível. Terminado o banho, ela se levanta, a água diminui um pouco, e depois de sair da banheira, a água é escoada. 2. O gráfico A está errado, pois mostra o nível da água, já alto, mas ela enche inicialmente a banheira, antes de entrar. O gráfico B está errado porque só mostra quando ela põe a água e a tira depois do banho. O gráfico D também está errado, porque não mostra quando a garota só pôs uma parte de seu corpo, o que aumentou apenas um pouco do nível da água.

Comentário: Nesta atividade, os alunos conseguiram interpretar a situação-problema em linguagem verbal para gráfica, mas sem usar quaisquer dados específicos, equações ou números. Eles observaram e se concentraram em analisar em como os gráficos aumentam ou diminuem e o quão rápido ou lentamente se comportam. Desse modo, eles puderam indiciar com a nossa mediação, a compreensão de que os gráficos estavam aumentando, seja continuamente com uma taxa crescente, decrescente ou sem nenhuma mudança, representada por um gráfico horizontal paralelo ao eixo das abscissas.

A situação-problema, apresentada nesta sessão de aula, vem expressa na linguagem verbal e pediu-se a representação gráfica mais adequada para traduzir a situação proposta. Outro detalhe muito importante, cada questão pedia para os alunos que justificassem as duas questões levantadas pela situação do dia a dia, a hora do banho. Temos assim, duas situações problemáticas: a primeira, conversão da representação verbal para a representação gráfica, diretamente, sem que para isso tenhamos que utilizar números. Esta é uma situação-problema que não exigiu raciocínios sobre números, portanto não precisou da representação numérica para responder aos questionamentos feitos neste problema, muito menos de representação algébrica. A segunda exigiu domínio de raciocínios metacognitivos, em que os alunos foram capazes de refletir sobre as análises dos gráficos propostos pelas alternativas da situação-problema.

Segundo Lester (1980), um problema é uma situação em que a um sujeito ou a um grupo deles é solicitado desempenhar uma tarefa na qual não existe nenhum algoritmo disponível que possa determinar o método de resolução, e ainda, a realização desta tarefa deve ser desejada pelo sujeito ou grupo de indivíduos. Na situação-problema, nesta sessão de aula, os raciocínios não foram números, mas necessário se fez, por parte dos alunos, fluir entre dois tipos de representação: verbal e gráfica. A resolução de um problema, não precisa passar por tratamentos numéricos, e ainda assim, ser considerada um problema. Pois, além da exigência e emergência de se elaborar um raciocínio adequado para a situação-proposta, ela foi um convite para os alunos da turma raciocinar sobre a variação entre duas grandezas e sobre a descrição gráfica desse movimento, todos os alunos estavam envolvidos no trabalho de buscar uma resolução para a situação-proposta que envolveu uma situação do cotidiano, a hora do banho.

Após as leituras individuais e nos trabalhos em grupo vemos um diálogo entre o professor-aluno e alunos entre si, favorecido pelas primeiras tentativas de compreensão do problema, em que tanto o professor quanto os alunos mais experientes realizaram a ponte de mediação que Vygotsky (2007) chamou de Zona de Desenvolvimento Proximal. Dando continuidade ao trabalho de metodologia de ensino-aprendizagem via resolução de problemas, os grupos de trabalho foram compostos por quatro alunos que eles tiveram oportunidade de trocar informações. Escolhemos duas equipes, cada equipe escolheu um aluno para representar o seu grupo na defesa das questões que eles haviam chegado para a situação proposta.

Todos os alunos conseguiram relacionar a situação-problema ao gráfico correspondente e, na linguagem deles, mesmo apresentando erros linguísticos, pudemos evidenciar que houve um trabalho de metacognição, tanto nas suas defesas de questões apresentadas para o grande grupo quanto nas explicações verbais das justificativas apresentadas, por eles, nas análises dos gráficos, por meio de suas produções escritas sobre as mudanças de variação dos gráficos propostos como alternativas possíveis para aquela situação cotidiana da hora do banho de Maria.

Após o grande grupo entrar num consenso sobre os questionamentos referentes à situação-proposta, realizamos a sistematização dos conteúdos explorados no problema, pois, a covariação e a taxa de variação são conceitos científicos, que foram explorados espontaneamente pelos alunos a partir da situação do dia a dia que tratou da hora do banho de uma garota. Entretanto, o estudo da variação do sinal de um gráfico de uma função, de forma organizada e formal, foi introduzido pelo professor, no papel do adulto mais experiente, que trouxe o conhecimento institucionalizado através das definições de covariação e sinal da taxa de variação para cada situação observada: crescente se for positiva; decrescente se for negativa e constante se for nula. Os alunos puderam chegar a essas mesmas conclusões, mas em Matemática, a linguagem é mais precisa. Portanto, os conceitos científicos que foram trabalhados em sala de aula precisaram de um mediador para a compreensão e a aquisição deles de modo mais efetivo.

5.3.5. Descrição e análise do encontro 11

Aula 15 (Data 11/05/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 2.5: covariação e taxa de variação; famílias de funções (função afim); combinação e transformação de funções (função inversa) e representações múltiplas de função.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 2.5:

Atividade 2.5: Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível de água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, conclui-se que o nível de água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.

O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado:

Tabela 2: Representação tabular da atividade 2.5.

Número de bolas (x)	Nível de água (y em cm)
5	6,35
10	6,70
15	7,05

Disponível em: www.penta.ufgs.br

Acesso em: 13 jan.2009 (adaptado)

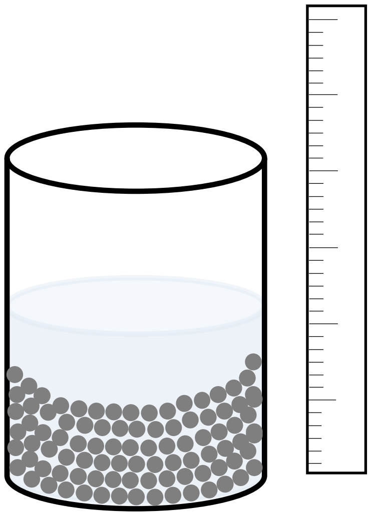


Figura 28: Desenho ilustrativo da atividade 2.5.

Qual é a expressão algébrica que permite calcular o nível de água (y) em função do número de bolas (x)?

A) $y = 30x$

B) $y = 25x + 20,2$

C) $y = 1,27x$

D) $y = 0,7x$

E) $y = 0{,}07x + 6$

Da questão anterior, esbocem o seu gráfico e determinem a sua função inversa. (Adaptado do ENEM-2008)

Entregamos o material impresso, demos um tempo, para que os alunos se familiarizassem com a situação-problema e pedimos-lhes para formar grupos de quatro alunos. Circulamos em sala de aula, observando o desenvolvimento dos trabalhos dos alunos em grupo. Como a frequência neste encontro foi de 40 alunos, havia 10 grupos trabalhando. Nosso objetivo era o de localizar as ideias semelhantes e diferentes entre eles, sempre escolhendo de preferência um grupo que não tinha ainda se apresentado em aulas anteriores. Decorrido certo tempo, conseguimos localizar duas maneiras diferentes de apresentar a mesma resolução para o problema proposto. Logo em seguida, selecionamos dois grupos para expor na lousa suas respectivas resoluções.

O primeiro grupo foi formado pelos alunos A11, A28, A32 e A45. Eles elegeram o aluno A45 para expor a solução na lousa para o grande grupo:

O aluno A45 realizou explorações matemáticas na tabela, observando que os elementos de entrada aumentavam de cinco em cinco e os elementos de saída aumentavam de $0{,}35$ em $0{,}35$. Mas, não deu continuidade, apenas justificou que o gráfico dessa função seria uma reta e que a função seria afim. Logo, em seguida, ele escolheu dois primeiros pares ordenados da tabela e chamou de $A(5;\, 6{,}35)$ e $B(10;\, 6{,}70)$ e disse que a função afim era da forma $y = ax + b$. Substituiu os pontos de coordenadas A e B na equação da função e montou um sistema de equações, resolvendo-o por meio do método da adição: $\begin{cases} 6{,}70 = a \cdot 10 + b \\ 6{,}35 = a \cdot 5 + b \end{cases}$. Encontrou: $a = 0{,}07$ e $b = 6$. A partir dos valores obtidos, determinou a função afim que modelava o experimento. Substituiu os valores de a e b, encontrando que $y = 0{,}07x + 6$. Sendo assim, entre as opções apresentadas na questão, o modelo matemático que lhe permitiu calcular o nível da água y em função do número de bolas x foi a alternativa E. O aluno A45 esboçou o gráfico da função a partir dos dois pares ordenados retirados da tabela desprezando a escala e uniu os pontos traçando uma reta.

PP se dirigiu ao GG: *Vocês concordam com essa representação gráfica para esta situação?*

GG: *Não, professor* (Coro)

PP ao GG: *Por que não?*

A09 (Apenas a aluna respondeu): *Porque o problema fala de quantidades de bolinhas que é contagem, e o gráfico dessa função vai ficar representado por pontos.*

PP: *Isso mesmo, sempre que o domínio de uma função for uma grandeza discreta. Ele fará parte do conjunto dos números naturais positivos (inteiros positivos) e o gráfico dessa função serão pontos discretos.*

A45: *Então, eu vou apagar a reta que eu tracei e vou deixar somente os pontos.*

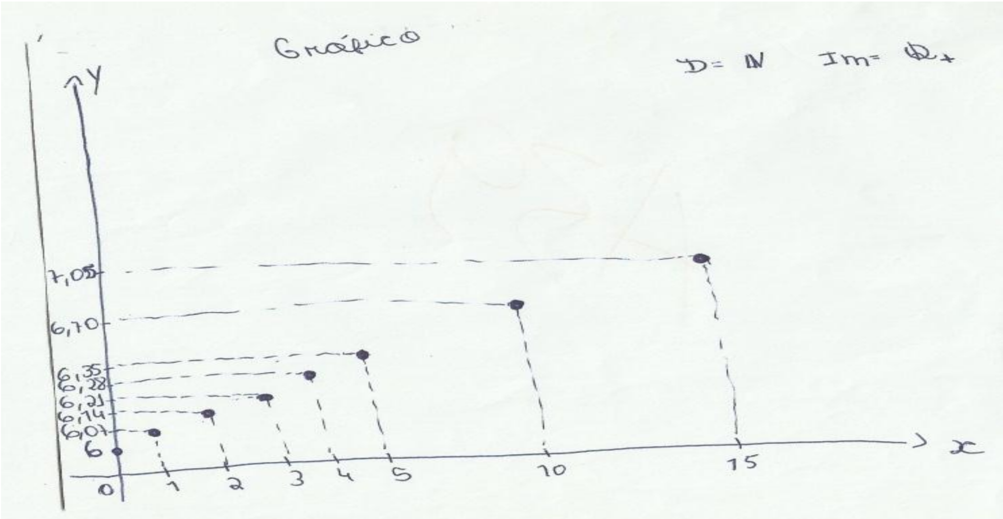


Figura 29: Representação gráfica da atividade 2.5 pelo aluno A39, representando seu grupo.

PP: *Ok. Faltou determinar a inversa dessa função que você acabou de obter.*

A45: *Eu pensei assim, usando a operação inversa. Fiz as contas desfazendo as operações feitas. Na função inversa entra x menos 6 e divide tudo isso por* 0,07. ($\mathrm{y}^{-1} = \frac{\mathrm{x}-6}{0{,}07}$, escreve a equação algébrica da função inversa na lousa).

PP: *Vamos para o próximo grupo*.

O segundo grupo que escolhemos foi constituído por A16, A23, A25 e A39. O grupo elegeu a aluna A16 para resolver o problema na lousa.

A aluna A16 observou que os números de bolas x que estavam na primeira coluna (entrada) aumentavam de cinco em cinco, enquanto a segunda coluna que marcava o nível de água y aumentava de $0{,}35$ a $0{,}35$. Ela chamou $0{,}35$ de variação de saída. E cinco de variação de entrada. Como $10 - 5 = 15 - 5 = \ldots = 5$. E $6{,}70 - 6{,}35 = 7{,}05 - 6{,}70 = \ldots = 0{,}35$. Então, chegou à taxa de variação dessa função, calculando a razão constante: $\frac{0{,}35}{5} = 0{,}07$. Continuou observando que a função era do tipo afim $y = ax + b$ e a seria a taxa de variação da função. Logo, ela substituiu na forma geral da função, encontrando $y = 0{,}07x + b$. Finalmente, substituiu por meio do par ordenado (5; 6,35), obtendo o valor de $b = 6$ e chegou ao modelo da equação algébrica da função afim: $y = 0{,}07x + 6$. Ela comparou o resultado com as alternativas apresentadas e disse: *alternativa correta é a letra E.*

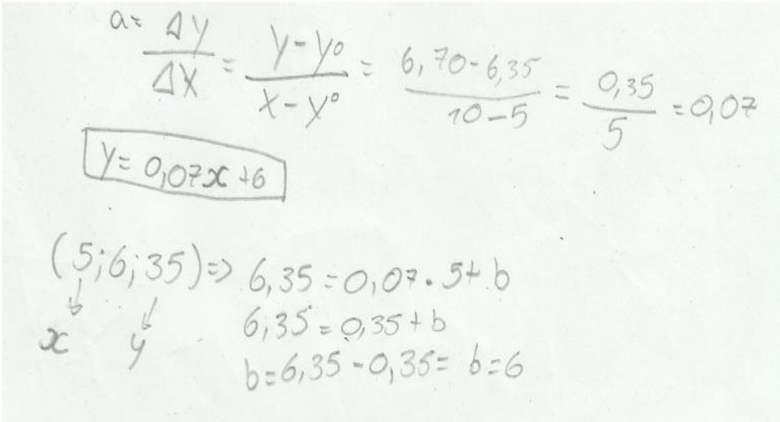


Figura 30: Resolução da atividade 2.5 pelo aluno A39, representando seu grupo.

Para a função inversa, o grupo anterior já havia apresentado e, sugerimos que eles não precisavam apresentá-la. Pois, havíamos percebido que o procedimento adotado por essa equipe não foi o mesmo do grupo anterior, mas precisávamos ganhar tempo e a equipe anterior fez uma boa síntese da compreensão essencial de inversão de funções.

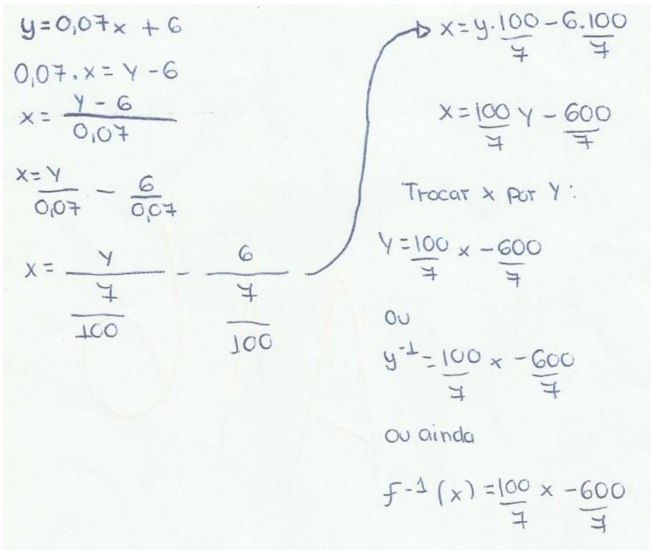


Figura 31: Procedimento algébrico na obtenção da função inversa relativa à atividade 2.5 pela aluna A16, representando seu grupo.

Para a aluna A16, a função inversa também poderia ser $f^{-1}(x) = = \frac{100\,x - 600}{7}$. (A aluna A16 escreve na lousa esta anotação)

No entanto, enfatizamos para o grande grupo que o mais importante é compreendermos que a função inversa desfaz a função original e que a inversa só existe em condições especiais – um para um, característica das funções bijetoras. Portanto, só existe função inversa se a função dada for bijetora. Após essas explicações, todos pareceram concordar e compreender as observações que estavam sendo apontadas. Seguimos mostrando para a turma de alunos que a ideia de taxa de variação foi muito explorada nessa situação-problema, porém seria necessário dar uma arrumada nas ideias. Vimos que a taxa de variação é a variação da saída sobre a variação da entrada, matematicamente podemos registrar essa informação através da fórmula:

$$\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{\mathrm{y} - \mathrm{y_o}}{\mathrm{x} - \mathrm{x_o}} = \frac{\text{diferença entre as saídas}}{\text{diferença entre as entradas}}.$$

Anotamos esta fórmula na lousa, chamando a atenção dos alunos para ela por meio de deduções na obtenção dela, utilizando a semelhança de triângulos por meio de uma ilustração gráfica. Evidenciamos para o grande grupo que na função afim a taxa de variação é constante (a), portanto $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. E a constante b é o intercepto do eixo dos y, é fácil achar b pelo ponto $(0, \mathrm{b})$. Pois, é justamente neste ponto que a função corta o eixo dos y (ordenadas). Também, elucidamos para a turma de alunos que podemos interpretar a taxa de variação como inclinação sobre percurso através do seu gráfico. Ilustramos na lousa a fórmula para o cálculo da taxa de variação de uma função afim e o gráfico representativo desta situação.

> *Comentário*: Neste momento final, sistematizamos os conteúdos explorados, nesta sessão de aula, mostrando as fórmulas trabalhadas, dando significado às constantes da função afim e esboçando gráficos ilustrando as situações que foram apresentadas e discutidas em aula. Dessa maneira enfatizamos a compreensão essencial 3b, a função afim é caracterizada por uma taxa de variação constante. De acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), racionando a partir da ideia fundamental de proporção sobre a semelhança de triângulos, permitirá deduzirmos que a função afim têm uma taxa de variação constante e a fórmula é do tipo $f(x) = ax + b$ para a e b constantes.

A resolução de problemas na perspectiva da modelação matemática dentro do processo de ensino-aprendizagem é utilizada como instrumento na busca de relações de dependência entre grandezas, envolvendo tanto situações oriundas do dia a dia quanto de outros campos do conhecimento matemático. Nesta questão específica que foi proposta, ela trouxe uma situação que pode ser realizada por meio de um experimento, cuja relação entre variáveis número de bolas (variável independente) e nível da água (variável dependente) pode ser modelizada por uma função afim. Esta questão apresentou uma relação de proporção direta entre o número de bolas acrescentado ao copo com água e o valor correspondente, em centímetros, deslocado pela água, característica essa fundamental da função afim. Os alunos perceberam, na tabela, que, a cada grupo de cinco bolas acrescentadas ao copo, o nível da água é deslocado para cima em 0,35 cm. A forma como essa relação aconteceu caracterizou a relação de variáveis em uma função afim do tipo $y = 0{,}35x + 6$.

Pudemos observar que o aluno A45 representou seu grupo, confundindo o gráfico contínuo com o discreto e teve problema com a escala gráfica. Na primeira dificuldade o aluno A45 evidenciou não ter ampliado o conceito de função para situações de variação não contínua que corresponde à compreensão essencial (2a) referente ao conceito de função segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010). Na segunda dificuldade, o aluno A45 apresentou problema na noção de escala, ele localizou os pontos desproporcionalmente, segundo Friedlander e Tabach (2001), os alunos apresentam dificuldades nas representações gráficas porque elas podem não ter a precisão necessária, sendo influenciadas pelas escalas ou outros fatores externos.

A questão para outra equipe foi considerada como do tipo tabela, uma vez que os dados necessários para a sua resolução se encontram organizados em forma de tabela. Em uma tabela, é necessário interpretar os dados apresentados nas suas colunas e linhas, o que significou traduzi-los de modo que se pôde atribuir significado às informações com base na ideia essencial de compreensão de função de acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), segunda grande ideia de *covariação e taxa de variação*. A covariação como variação conjunta das duas grandezas envolvidas no problema, enquanto a taxa de variação como a medida dessa covariação, consistindo na obtenção da razão entre a variação de uma em relação à variação da outra. Isto requereu, além da leitura e interpretação dos dados, o uso de cálculos matemáticos a partir das formulações e generalizações que traduzissem o modelo de situação proposta.

Conforme Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), sob condições especiais, as funções podem ter inversas. Essa compreensão corresponde à compreensão essencial (4a). Podemos observar que o aluno A45, representando o seu grupo, compreendeu a operacionalização de como se deu a inversão de função, uma operação que desfaz a anterior, invertendo as operações e a ordem delas. Obtendo assim a função inversa da equação algébrica que modelou a situação-problema. No entanto, sentimos necessidade de realizar intervenções. Segundo Vygotsky (2007), o professor pode atuar como mediador na qualidade de um adulto mais experiente, trazendo explicações referentes às condições apropriadas de funções para poderem ser invertíveis, a partir da observação de que ela deva estar submetida à relação um para um, ser bijetora.

A orientação metodológica, dessa sessão de aula, foi a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução de problemas. Após a leitura individual, seguiu-se a formação de grupos. Escolhemos dois grupos distintos para fazer as defesas. Os grupos livremente escolheram o seu representante, foram feitas refutações e consensos das resoluções apresentadas, mediamos o encontro fazendo observações importantes durante o processo e finalizamos a aula, sistematizando a compreensão essencial de função inversa, a ideia essencial de covariação e taxa de variação, a compreensão essencial de função afim, explicando os significados das constantes e suas interpretações gráficas.

Pudemos evidenciar compreensão essencial das ideias de funções em relação aos vários aspectos que foram explorados, para que a ideia do conceito de função fosse aplicada a outros casos que não seja a variação contínua, pois o gráfico da função fora representado por alunos por meio de pontos discretos, mostrando a contribuição dessa compreensão no sentido deles terem buscado uma ampliação do conceito através dessas experiências. Percebemos que os alunos compreenderam a ideia de covariação e taxa de variação. Eles exploraram o problema proposto deduzindo que o comportamento da função fora caracterizado pela função afim com taxa de variação constante e fórmula geral $f(x) = ax + b$. Ficou claro também que os alunos mostraram compreensão de que a função inversa só pode ser obtida mediante condições especiais, a de ser bijetora.

5.3.6. Descrição e análise do encontro 12

Aula 16 (Data 18/05/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 2.5: covariação e taxa de variação; famílias de funções (função afim); combinação e transformação de funções (função inversa) e representações múltiplas de função.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 2.6:

Atividade 2.6: Preencha as lacunas da segunda coluna, completando a tabela abaixo, para a função $T(H)$. Em seguida, explique porque essa função não tem uma taxa de variação constante.

Tabela 3: Representação tabular da atividade 2.6.

H	T
3	*10*
6	5
12	
24	
48	

De acordo com a tabela, determine a equação dessa função e esboce o gráfico dela, admitindo que o domínio e a imagem da função estejam no conjunto dos números racionais absolutos (Adaptado do livro: COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010, p. 44).

Entrega de material impresso e papel milimetrado, seguida de leitura individual da situação-problema (O PP deu um tempo).

A25: *Eu completei a tabela com 0, -5 e -10.*

PP: *Como você pensou para chegar nesse resultado? Você acha que faz sentido?*

A25: *Pela variação de T que é -5.*

PP: *Você já verificou a variação de H?*

A25: *6 – 3 = 3; 12 -6 = 6; 24 – 12 = 12 e 48 – 24 = 12. Vai dobrando o valor.*

A04: *Professor, não tem taxa de variação constante, o próprio problema afirma isso. Logo, a função não pode ser afim.*

PP: *Por quê?*

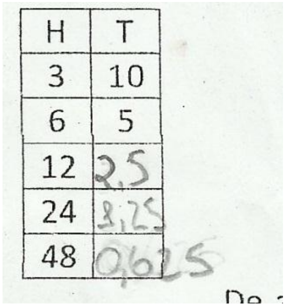
A04: *Porque quando uma grandeza aumenta a outra diminui.*

PP: Você observou alguma regularidade?

A04: *Professor, enquanto a grandeza T vai dobrando seu valor, a grandeza H vai caindo pela metade.*

PP: *Muito bem, A04. Agora, vou deixar vocês juntos trabalhando em grupos de 4 alunos para trocarem ideias com seus colegas de turma.* (ficamos circulando na sala de aula observando o desenvolvimento dos alunos na busca de resolução para a situação-problema 2.6) *Vamos fazer o seguinte selecionaremos dois grupos distintos e o grupo elege o seu representante para ambos virem aqui na frente mostrar a solução. Porém, hoje vamos fazer um pouquinho diferente vamos estabelecer um diálogo entre os dois alunos e nós vamos mediando a conversa dos dois representantes.*

A20 representando o primeiro grupo: *Professor, eu completei a tabela com 2,5; 1,25 e 0,625.*



H	T
3	10
6	5
12	2,5
24	1,25
48	0,625

Figura 32: Completando a tabela da atividade 2.6 pela aluna A36, representando seu grupo.

Solicitamos ao grande grupo para determinar a equação algébrica dessa função e que eles construíssem o seu gráfico. O aluno A20, explicando para a sua equipe de trabalho, percebeu que o gráfico não daria uma reta, porque à medida que os valores de H aumentam, os valores de T vão se tornando cada vez menores. Instigamos ao grupo de trabalho do aluno A20, perguntando se eles poderiam unir esses pontos. O aluno A20, representando o primeiro grupo responde: *Posso, porque o domínio e a imagem pertencem aos números racionais positivos. Daí, entre um número e outro existem infinitos números. Podemos imaginar infinitos pontos.*

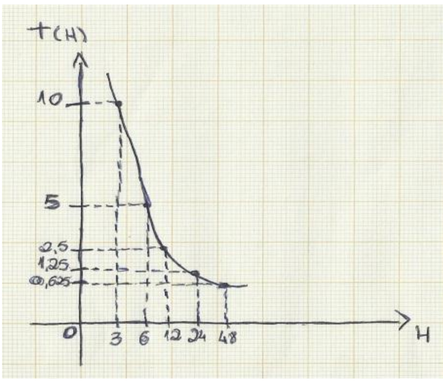


Figura 33: Representação gráfica da atividade 2.6 pela aluna A15, representando seu grupo.

Para a aluna A25, representando o segundo grupo, as grandezas são contínuas. Mas o gráfico não dá uma reta, ele fica meio encurvado.

Neste momento pontuamos algumas observações, mostrando que unindo esses pontos descrevemos uma curva que os matemáticos chamam de hipérbole e esse tipo de função modela as mudanças inversamente proporcionais que são denominadas de função recíproca. A sua forma geral é $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}$ ou $\mathrm{f(x)} = \mathrm{a} \cdot \frac{1}{\mathrm{x}}$ com $\mathrm{a} \neq 0$. Registramos essas novas informações na lousa. Em seguida fizemos os alunos evidenciarem que o gráfico dessa função nunca tocará o eixo dos x por menor que seja seu valor nem nunca tocará o eixo y por maior que seja o valor. Isto, em Matemática quer dizer que a função tende para o infinito. Logo em seguida a aluna A25, representando o segundo grupo diz: *A gente encontrou a equação da função* $T(H) = \frac{30}{H}$.

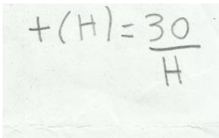


Figura 34: Representação algébrica da função da atividade 2.6 pela aluna A25, representando seu grupo.

Para a aluna A20, representando o segundo grupo que nesse momento ainda não tinha encontrado a equação algébrica da função para ela passou a fazer sentido: $30 \div 3 = 10$; $30 \div 6 = 5$; $30 \div 12 = 2{,}5$; $30 \div 24 = 1{,}25$ e $30 \div 48 = 0{,}625$. Ela chegou a essa conclusão, validando os seus cálculos, usando a calculadora do celular para os resultados decimais.

> PP: *Podemos observar na aula de hoje, que existem situações não lineares, ou seja, a taxa de variação não é constante. No entanto, para as funções recíprocas podemos observar que o produto das duas variáveis é sempre constante.*
>
> A aluna A20 representando o segundo grupo: *Eu percebi que* $3 \cdot 10 = 6 \cdot 5 = 12 \cdot 2{,}5 = 24 \cdot 1{,}25 = 48 \cdot 0{,}625 = \cdots = 30$.
>
> O PP se dirige ao GG: *Podemos generalizar essa situação da seguinte forma: a função recíproca* $y = \frac{a}{x}$ *modela relações entre grandezas inversamente proporcionais de modo que:* $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \ldots = a$. *Sendo* a *o coeficiente de proporcionalidade inversa da função recíproca*. (Registramos na lousa essas observações).

Enfatizamos para o grande grupo que duas grandezas são inversamente proporcionais quando uma grandeza aumenta e outra diminui ou quando uma diminui e outra aumenta proporcionalmente. De modo que se uma grandeza dobra o seu valor, a outra vai ser reduzida para metade. Quando uma grandeza é reduzida a um terço, a outra será triplicada.

Neste encontro, procuramos ganhar tempo. Pois uma aula de 50 minutos passa muito rápido, muito embora para trabalharmos com a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução de problemas, sabermos que demanda certo tempo para podermos realizar um trabalho produtivo e frutífero tanto para o aluno no seu aprendizado quanto para o professor na satisfação do seu trabalho. Por outro lado, o ideal é que possamos a cada sessão de aulas concluirmos a execução de uma dada situação-problema.

Podemos observar que após a leitura inicial do problema e formação de grupos para o trabalho, como havíamos previsto não houve muitas divergências na apresentação de resoluções para as questões que foram propostas. Tivemos a ideia de selecionar dois alunos de grupos distintos e o professor na mediação das apresentações dessas duas equipes. Nessa altura dos acontecimentos, os alunos além de já terem adquirido a postura de contrapor seus argumentos para os colegas, também sabiam prestar atenção à fala dos colegas quando estavam em plenárias discutindo e debatendo as suas argumentações. Por essa razão, o simulacro criado estrategicamente pelo professor para ganhar tempo foi bem sucedido.

As explorações nas tabelas pelos alunos na busca de alguma regularidade, nos mostra a importância das tabelas que trazem sempre informações valiosas de função que ela está representando, espontaneamente os alunos começam a trabalhar dentro de ações individuais ou coletivas em cima de descobertas, de achados que nem sempre são os mais adequados, mas que a sua investigação independente vai fazer deles um resolvedor e explorador de problemas. Podemos observar que a ideia de estudar a covariação e taxa de variação na tabela que lhes foram apresentadas, já estava fazendo parte dos seus repertórios na busca por uma regularidade, eles acabaram descobrindo que a tabela que estava representando a função não tinha uma taxa de variação constante, não poderia ser representada por uma reta, visto que somente a função afim apresenta tais características, portanto a função representada por essa tabela não poderia ser afim.

No trabalho em grupo, de repente, alguém teve a ideia de completar a tabela com valores que eles puderam fazer a verificação de que o produto das duas grandezas envolvidas na tabela foi igual a 30. Eles puderam nesse momento desenvolver a habilidade de fazer validações para confirmar os seus resultados descobertos. Como estava valendo para todos os exemplos numéricos da tabela, nosso trabalho de mediador se intensificou mais no sentido de fazermos os alunos enxergarem uma lei de formação geral que servisse para todos os elementos que fossem dispostos na tabela. Nesse momento, surge a dificuldade comum em sala de aula, no estudo de funções, pois as representações algébricas, geralmente, não surgem assim tão espontaneamente como as representações numéricas. Entretanto, à medida que o desenvolvimento desta habilidade de generalizar foi aumentando pudemos ver os alunos chegarem até elas com certa fluência. Em outras palavras, de acordo com Vygotsky (2008) eles chegaram aos níveis de pensamento superior, abstrato e algébrico.

Podemos observar, através deste encontro, que os alunos já estavam se apropriando da compreensão de uma função poder ser representada por um gráfico discreto ou contínuo, pois eles já estavam justificando as representações de funções a partir de bons argumentos matemáticos sobre o campo de definição de uma função estar dentro do conjunto dos números naturais (inteiros positivos) ou dentro do conjunto dos números racionais positivos.

Esta questão proposta dá uma nova ideia para turma de alunos. Nem toda função será representada por uma reta, pois existem funções que não apresentam taxa de variação constante. Na nossa situação-proposta, o aluno A20 percebeu que, à medida que H está aumentando, T vai diminuindo em valores cada vez menores e essa observação levou o aluno a entender porque o gráfico que representa esta função vai se encurvando. Esta é mais uma ideia que foi sendo ampliada a partir deste encontro, pois existem funções lineares e não lineares.

Neste encontro, trabalhamos com uma situação fora do contexto real. Podemos dizer que se tratou de uma situação descontextualizada que requereu a conversão da representação tabular em representações gráfica e algébrica, permitiu aos alunos realizarem muitas descobertas importantes dentro do estudo de funções. Essas passagens não foram problemáticas para os alunos nesta sessão de encontro de aula. Por isso, não entendemos essa obsessão de se trabalhar tudo dentro de um contexto do mundo real, pois na Matemática, os contextos reais algumas vezes podem parecer apenas um modelo grosseiro de uma dada realidade e isso foi discutido pelos alunos. Eles precisam desenvolver o senso crítico, a exemplo de uma resposta absurda a um problema matemático em que muitas vezes o aluno pode não saber a resposta correta, mas saberá que aquela resposta não é adequada para aquela dada situação.

Finalizamos a aula fazendo as devidas sistematizações de conteúdos novos para os alunos, a função recíproca, modelo da proporcionalidade inversa e representada por uma curva chamada hipérbole, mostrando as generalizações e dando exemplos de como funciona a proporcionalidade inversa, através de explicações que elucidam as explorações matemáticas desta sessão de encontro de aula. Foi importante, para nós, neste encontro, não termos deixado para o próximo encontro fechar com as ideias que foram desenvolvidas durante a aula, mesmo o professor tendo pouco tempo para fazer este trabalho. Na verdade, trabalhar a metodologia de ensino-aprendizagem via resolução de problemas exigirá do professor uma habilidade de gerenciar o tempo disponível para realização de explorações matemáticas pelos alunos e ainda não poder deixar de lado as formalizações matemáticas pelo professor que são necessárias, ficando sob nossa responsabilidade essa etapa final do trabalho docente.

5.3.7. Descrição e análise do encontro 13

Aula 17 (Data 25/06/2012)

<u>Conteúdos desenvolvidos na atividade 2.7</u>: famílias de funções, contra-exemplos para distinguir situações lineares de não lineares e representações múltiplas de funções.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 2.7:

Atividade 2.7: A distância entre Recife e uma cidade do sertão de Pernambuco é de 600 km, o tempo gasto para um móvel percorrer essa distância depende da sua velocidade média adotada (Considerando uma situação idealizada em que a velocidade média fosse constante, podendo-se viajar de carro, de trem ou de bicicleta. Admitindo a trajetória sem obstáculos.).

A) Montem uma tabela com valores para a velocidade média em quilômetros por hora e o tempo em horas;

B) Escrevam a equação algébrica dessa função;

C) Esbocem o gráfico dessa função;

D) A função apresenta uma proporcionalidade direta ou inversa? Justifiquem.

Entrega de material impresso, papel milimetrado e calculadoras comuns.

Inicialmente, pedimos para os alunos realizarem uma leitura individualmente e tentarem resolver a atividade por conta própria. (Demos um tempo, circulamos na sala de aula para vermos como eles se sentiam nesse primeiro momento).

A28: *Já que eu posso viajar de carro, de trem ou de bicicleta. Eu posso começar com valores baixos e depois vou aumentando até 180 quilômetros por hora.*

A05: *Eu já acho 180 quilômetros por hora uma velocidade alta para dirigir um carro, mas como o problema diz que a trajetória não tem obstáculos, até dar pra pensar.*

A45: *Eu já viajei de carro com meu pai a 180 quilômetros por hora.*

A20: *Seu pai está dando um mau exemplo.*

A31: *Eu penso que a gente deve começar com valores baixos como 10, 20, 30, 40, 50, 60, 100, 120 que, divididos por 600, dão valores exatos.*

A08: *É verdade, dá 60, 30, 20, 15, 12, 10, 6 e 5.* (Fez as contas usando a calculadora).

PP: *Muito bem pessoal. Agora, formem grupos de quatro alunos, pois estavam todos na sala de aula, totalizando 11 grupos.*

<u>Comentário</u>: Nesse encontro, decidimos formar os grupos de acordo com a chamada do diário de classe. Houve reclamações por parte dos alunos. Mas, no final acabamos os convencendo que seria bom diversificar como de fato vinha acontecendo só que hoje obedeceríamos à ordem de chamada.

PP: *Vamos formar grupos de acordo com a chamada, o primeiro grupo será formado pelos alunos A01, A02, A03 e A04, o segundo grupo será formado pelos alunos A05, A06, A07 e A08 e assim por diante.* (Continuamos fazendo a chamada dos grupos para não haver dúvidas, deixamos os alunos trabalhando e circulamos na sala de aula).

Aproximamos do grupo 10, formado pelos alunos A38, A39, A40 e A41.

A40: *A gente escolheu os valores 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160 e 180 quilômetros. Mas, fazendo as contas na calculadora para 600 dividido por 140 dá 4,285714... Não dá exato.*

A41: *A gente pode arredondar para 4,29 com duas casas decimais, já é um bom resultado?*

A38: *Também, 600 dividido por 180 dão 3,333333... É uma dízima periódica.*

A41: *A gente faz a mesma coisa, arredonda para 3,33.*

A39: *Só tem um problema, porque quando a gente multiplica* $20 \cdot 30 = 600;\ 40 \cdot 15 = 600;\ 80 \cdot 1{,}5 = 600;\ 100 \cdot 6 = 600;\ 120 \cdot 5 = 600.$ *Agora,* $140 \cdot 4{,}29 = 600{,}6;\ 180 \cdot 3{,}33 = 599{,}4.$ *Já* $160 \cdot 3{,}75 = 600.$ (Boa parte das contas foi feita usando a calculadora).

A38: *Eu sei que a melhor maneira de representar um número racional quando for uma dízima periódica é deixá-lo na forma de fração.*

A33: *Eu fiz as contas usando valores fracionários e o resultado do produto é sempre igual a 600.*

A41: *Mas, fica mais difícil de representar no gráfico. Com o papel milimetrado fica mais fácil a gente deixar na forma decimal. É só localizar um ponto que se aproxime dos valores que a gente acabou de achar.*

Deixamos o grupo 10 discutindo entre eles e aproximamo-nos do grupo 1, formado pelos alunos A01, A02, A03 e A04 que foi o único grupo que trabalhou somente com valores exatos. Eles disseram que facilitaria as contas e a localização dos pontos no gráfico.

> A02: *O gráfico vai ser uma curva.*
>
> A04: *Eu não lembro o nome dessa curva.*
>
> A01: *Ela é a curva das grandezas inversamente proporcionais, pois quanto maior a velocidade menor será o tempo do percurso.*
>
> A03: *Proporcionalmente inversa ao mesmo valor 600.*
>
> A02: *É verdade, nem tudo que aumenta e diminui ou diminui e aumenta é inversamente proporcional, só ser for inversamente proporcional a um mesmo valor.*

Escolhemos os grupos 1 e 10 para resolver a situação-problema 2.7 na lousa.

O primeiro grupo a desenvolver atividade na lousa foi o grupo 10 representado pela aluna A41:

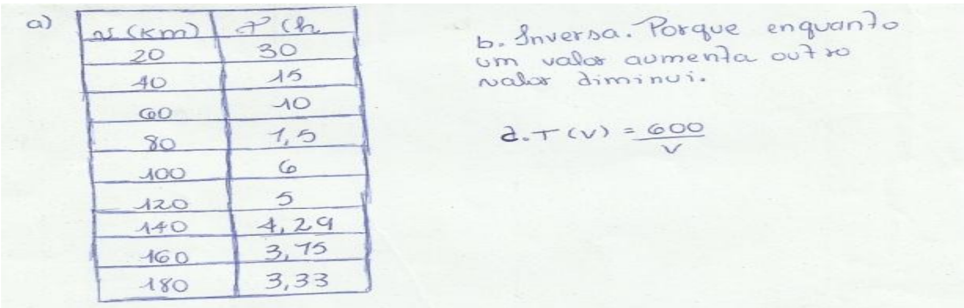


Figura 35: Representações tabulares e algébricas da função e justificativa para o modelo de proporção inversa da atividade 2.7 pela aluna A41, representando seu grupo.

Após o desenvolvimento das letras A, B, C e D.

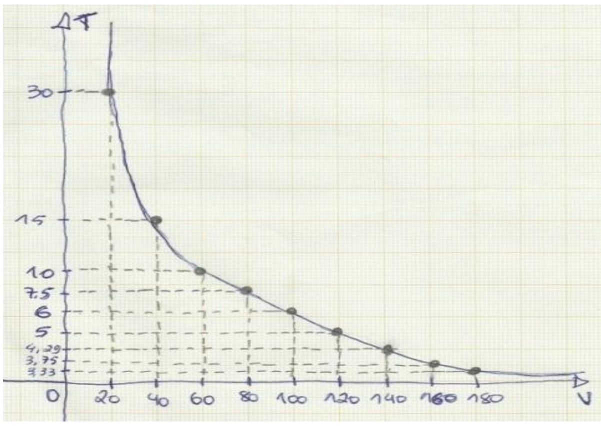


Figura 36: Representação gráfica da atividade 2.7 pelo aluno A43, representando seu grupo.

Interrogamos ao grande grupo se eles estavam de acordo com a apresentação dessas respostas que foram apresentadas e nos pareceu que a maioria dos alunos havia concordado.

> A02: *Professor, na letra B, está faltando completar a frase. Dizer inversa, porque um valor aumenta enquanto outro diminui não basta porque uma grandeza aumenta e a outra diminui ou ao contrário, proporcionalmente a um mesmo valor, que é a razão inversa que a gente achou igual a 600.*
>
> PP: *O mesmo vale para grandezas diretamente proporcionais quando uma grandeza aumenta e a outra aumenta ou quando uma grandeza diminui e a outra diminui na mesma razão direta. Por exemplo, o lado e o perímetro de um quadrado são diretamente proporcionais?*
>
> A19: *São diretamente proporcionais, pois quando o lado aumenta o perímetro também aumenta e quando o lado diminui o perímetro diminui na mesma.*
>
> A41: *A área do quadrado também aumenta quando o lado aumenta e diminui quando o lado diminui.*
>
> PP: *E agora, você acha que a área em função do lado é uma função linear, ou seja, ela está modelando a proporcionalidade direta?*
>
> A41: *Não, professor. Por que o expoente da variável é 2.*
>
> A19: Pra ser direta ou inversa deve ter uma razão direta ou inversa.
>
> A30: *A equação dessa função que acabamos de estudar é* $T = \frac{600}{v}$.
>
> A15: *Eu escrevi* $T(v) = \frac{600}{v}$.
>
> PP para o GG: *E lembrem-se, a variável independente* v *não está definida para zero, o domínio dessa função se restringe para qualquer valor racional positivo. A função poderia ser representada também assim* $f(x) = \frac{600}{x}$ *ou* $y = \frac{600}{x}$*?*
>
> GG: *Sim*. (Coro).

Chamamos grupo 1 representado pelo aluno A03 para responder a atividade 2.7. Não houve muita divergência. Apenas o grupo 1 escolheu somente valores exatos e justificou melhor a pergunta da letra B evidenciando a constante de proporcionalidade inversa igual a 600.

> PP para o GG*: Vocês concordam com a apresentação dessas respostas pelo grupo 1?*
>
> GG: *Concordamos.* (Coro).
>
> A32: *Só acho estranho a gente admitir que a viagem foi realizada de bicicleta, trem ou carro.*
>
> A29: *Se for de bicicleta só pode ser 10, 20 e 30 quilômetros por hora. Acho que de trem também, não deve passar de 50 quilômetros por hora. Já de carro depende do lugar, em curvas perigosas a velocidade não pode ser alta, numa viagem quando a gente passa dentro das cidades o motorista não pode ultrapassar 60 quilômetros por hora.*
>
> A18: *Eu só gosto de viajar em alta velocidade, quando eu ganhar muito dinheiro eu quero comprar um carrão bem possante que eu possa andar a mais de 180 quilômetros por hora pelas estradas afora conhecendo tudo quanto é lugar no Brasil.*

A22: *O carro em alta velocidade é difícil de controlar.*

A09: *Mas o problema não fala em obstáculos.*

PP: *De fato, é um problema idealizado. No mundo real temos que pensar em todas essas questões que vocês levantaram.*

Nesta sessão de encontro, após leitura individual e dentro das discussões coletivas, pudemos observar que os alunos levantavam conjecturas com certa fluência, testavam as hipóteses feitas, constatavam regularidades e certos desvios, faziam estimativas e davam aproximações com duas casas decimais. Outro ponto importante foi o fato deles também realizarem a leitura do problema com senso crítico à medida que levavam em consideração o meio de transporte para percorrer os 600 quilômetros e as condições ideais que o problema levava em consideração, quando na realidade, existem outras variáveis que não foram levadas em conta no problema e eles puderam admitir que o modelo de situação proposta no problema, não seria condizente dentro de uma realidade do mundo real.

A aula foi bastante interativa onde podemos observar uma crescente participação de todos os alunos, na colocação de seus posicionamentos diante das questões que eram levantadas, eles apresentavam bons argumentos nas suas defesas e eram também refutados pelos colegas quando apresentavam argumentos pouco convincentes e/ou politicamente incorretos, sem que para isso o professor precisasse chamar a atenção para uma dada exploração matemática ou para moralizá-los. Entre eles mesmos o diálogo fluía e o processo de conscientização se dava entre eles. Vemos nesse encontro um crescente movimento das vozes dos nossos alunos se fazendo mais presentes durante as aulas, diminuindo a predominância da relação professor-aluno para a relação aluno-aluno.

Quanto às ideias e compreensões essenciais trabalhadas nesse encontro, podemos observar que os alunos elaboraram tabelas numéricas, investigaram a existência de regularidade, descobriram que o padrão através do produto entre as grandezas resulta sempre em um valor igual ou aproximadamente igual a 600, escreveram a equação algébrica para a função que estava representada dentro de um contexto em linguagem verbal, representaram graficamente a função por meio de uma curva. Isso significava que eles estavam conseguindo diferenciar funções lineares de funções não lineares. Enfim, podemos afirmar que eles conseguiram fluir entre múltiplas representações de funções com certa naturalidade depois de terem atingido um nível maior de abstração.

Como, nesse encontro, o objetivo era apresentar um problema que estivesse dentro de um contexto que se aproximasse de uma situação real, foi muito importante termos registrado o questionamento dessa suposta realidade pelos alunos. Já em relação ao trabalho de sistematização dos conteúdos explorados neste problema não se fez necessário porque os alunos de forma mais independente trouxeram as resoluções do problema através dos dois representantes de grupos distintos que foram à plenária defender suas respectivas resoluções com desenvoltura. Certamente, como não poderia deixar de ser, houve nesse encontro alguns pontos mínimos em que se fez necessário à mediação do trabalho pelo professor.

Nessa perspectiva, abriu-se um espaço de diálogo muito importante em um trabalho de metacognição em que os alunos justificavam as suas inferências e conclusões feitas durante o processo de conhecer e explorar o problema proposto. Justificavam explicando por que a função recíproca modela a proporcionalidade inversa e, quando questionados com outros exemplos, souberam justificar com propriedade e na observação de incoerência de algumas assertivas que foram provocadas pelo professor, melhorando, assim, sua compreensão do conceito de função e, sobretudo, da família de funções não lineares, o caso particular da função recíproca.

5.3.8. Descrição e análise do encontro 14

Aula 18 (Data 26/05/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 2.8: covariação e taxa de variação; família de funções (função afim) e representações múltiplas de função, ressaltando conexões com múltiplos contextos extra-matemáticos como, por exemplo, o meio ambiente com o impacto ambiental na construção da Refinaria de Petróleo no Estado de Pernambuco e os benefícios econômicos trazidos pela Refinaria de Petróleo para a região e ainda os ataques de tubarão no litoral sul de Pernambuco e sua extinção de algumas espécies pelo homem.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 2.8:

Atividade 2.8: No gráfico seguinte está representado o volume de petróleo existente em um reservatório de 26 m^3 inicialmente vazio.

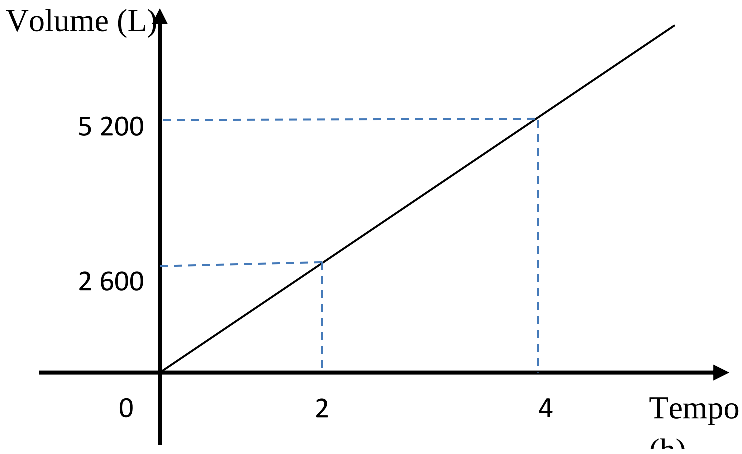


Figura 37: Gráfico ilustrativo da atividade 2.8.

A) Em quanto tempo o reservatório estará cheio?

B) Qual é a equação da função que expressa o volume V, em litros, de petróleo existente no reservatório em função do tempo t, em horas?

C) A atividade que vocês acabaram de desenvolver envolveu o petróleo, embora nela o contexto explorado tenha sido somente a interpretação gráfica da situação e os dados que eles informam. Explorando mais esse contexto, sugerido pela atividade: O que vocês têm a dizer a respeito da Refinaria de Petróleo, aqui em Pernambuco, considerada como um grande empreendimento econômico para a região? (Adaptado do livro: IEZZI et al, 2010, p. 81).

Entrega do material impresso e leitura individual da atividade, demos um tempo para que os alunos, sozinhos pudessem, nesse primeiro momento apreender o enunciado e as perguntas que envolvem a atividade 2.8.

Mantivemos a organização dos grupos da aula anterior de acordo com a chamada do diário de classe: grupo 1 (A01, A02, A03 e A04); grupo 2 (A05, A06, A07 e A08) e assim por diante, totalizando 11 grupos.

A27: *A gente vai precisar transformar 26* m^3 *em litros.*

A35: *É fácil, basta multiplicar por 1000. Já que 1*m^3 *= 1000 dm*^{3} *e 1*$dm^3 = 1l$*. Por isso, 26*$m^3 = 26\ 000$ *litros.*

A08: *O gráfico dessa função é uma reta que têm três pontos conhecidos*: $(0{,}0);\ (2{,}2\ 600);\ (4, 5\ 200)$.

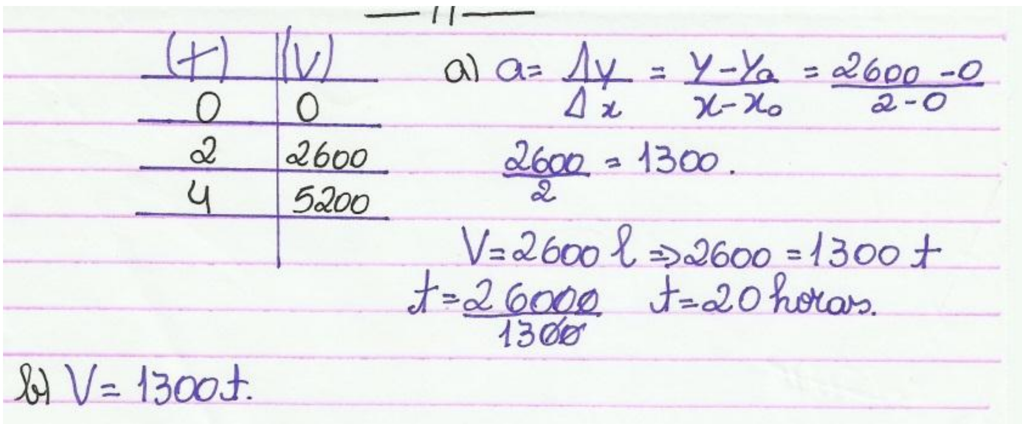
A13: *É preciso só de dois pontos pra gente escrever a equação de uma função representada por uma reta.*

Circulamos na sala de aula e demos mais um tempo de modo que os alunos pudessem trabalhar em suas respectivas equipes. Selecionamos o grupo constituído pelos alunos A18, A19, A20 e A21 para responder na lousa a atividade 2.8 e eles elegeram o A21 dessa vez porque A20 já havia participado bastante nas aulas passadas.

A21 representando o seu grupo: Primeiro, ela achou a taxa de variação dessa função, observou que o gráfico tinha o formato de dois triângulos retângulos semelhantes que possuem uma mesma razão. Em outras, palavras ele trabalhou a semelhança de triângulos: $\frac{2\,600-0}{2-0} = \frac{5\,200-2\,600}{4-2} = \frac{2\,600}{2} = 1\,300$. Então, a aluna A21 concluiu que a taxa de variação dessa função é $1\,300$. Outra coisa que a aluna também percebeu é que a reta passa pela origem do sistema cartesiano, logo a função é linear do tipo $\mathrm{y} = \mathrm{ax}$, ou seja, $\mathrm{V} = 1\,300\mathrm{t}$ que responde a letra B. E para responder a letra A, resolveu a equação, que consistiu em achar o elemento de entrada a partir da informação da equação que representa a função e o valor da saída: $1\,300\mathrm{t} = 26\,000 \rightarrow \mathrm{t} = \frac{26\,000}{1\,300} \rightarrow \mathrm{t} = 20$ horas.

Em seguida convocamos o grupo formado pelos alunos A34, A35, A36 e A37 para responder a mesma atividade 2.8 na lousa e eles escolheram a aluna A35 para representá-los no grupo.

Não houve muita diferença no procedimento apresentado. Apenas a aluna A35, montou inicialmente uma tabela, em seguida, calculou a taxa de variação pela fórmula $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$.



— 11 —

(t)	(V)
0	0
2	2600
4	5200

a) $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{2600 - 0}{2 - 0}$

$\frac{2600}{2} = 1300.$

$V = 2600\ell \Rightarrow 2600 = 1300t$

$t = \frac{26000}{1300}$ $t = 20$ horas.

b) $V = 1300t.$

Figura 38: Resolução da atividade 2.8 pela aluna A38, representando seu grupo.

PP ao GG: *Vocês concordam com as duas soluções que estão expostas na lousa?*

GG: *Concordamos.* (Coro).

A26: *Professor, como a função é linear. Dá pra ver que ela passa pela origem. A gente não precisa calcular a diferença entre saídas e entradas. É só dividir diretamente* $\frac{2\,600}{2} = \frac{5\,200}{4} = 1\,300$ *pra achar a taxa de variação.*

PP para o GG: *Ok. Em relação à questão C, o que vocês têm a dizer?*

A45: *A Refinaria de Petróleo Abreu e Lima fica em Suape, litoral sul de Pernambuco, aqui no nosso Estado.*

A12: *Tá previsto para o próximo ano 2013 seu funcionamento. A Petrobrás só mostra vantagem pra região, prometendo até plantar árvores da mata local e capacitar as pessoas para trabalhar lá.*

A19: *Eu soube que já gastaram quatro bilhões de reais e já foi gasto 12 bilhões de reais na Refinaria de Suape* (Informação dada pelo aluno sem citar a fonte).

A06: *É muito dinheiro, mas acho que Pernambuco vai tirar vantagem. Pois, terá a maior refinaria do Brasil.*

A33: *Eu me preocupo com a poluição. Pois, a gente vê muitos acidentes de navios que carregam petróleo, derramando óleo no mar, e isso causa um estrago danado ao meio ambiente, matando os peixes e toda a forma de vida que vive no mar.*

A40: *E mais do que as matas, os mares e os oceanos são os maiores produtores de oxigênio do planeta.* (Informação dada pelo aluno sem citar a fonte).

A21: *Na verdade, desde a construção do porto de Suape houve uma grande destruição ao ambiente porque lá era um lugar onde os tubarões se alimentavam e se reproduziam. E depois disso, eles começaram a aparecer em todo o litoral, e a partir de então, houve muitos ataques aos surfistas e banhistas.*

A32: *Eu continuo surfando lá na praia do Paiva e Porto de Galinhas. A gente que é surfista não tem medo de tubarão.* (risos).

A18: *Eu já mergulhei em Porto de Galinhas. O instrutor disse que existem muitas histórias que o povo conta do tubarão, só que a maioria deles não ataca o homem.*

A06: O *homem é o pior inimigo do tubarão.*

PP: *É importante analisarmos sempre os dois lados da história, nessas duas questões levantadas tanto do empreendimento da Refinaria de Petróleo quanto à questão dos ataques do tubarão, existem duas faces que nós precisamos examinar com cuidado. No entanto, a minha dica para os banhistas é de respeitar sempre os avisos que estão nas praias e não entrar em mar aberto, não atravessar os arrecifes para a sua segurança.*

A questão trabalhada, neste encontro, explorou a conversão da representação gráfica para a representação algébrica de uma função linear. Precisamos explorar esse tipo de conversão e tratamento, que geralmente, se apresenta problemática dentro de um trabalho na perspectiva das grandes ideias de funções apresentadas pelos idealizadores Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), que colocam a emergência e a necessidade de se ter que transitar em meio e entre as representações múltiplas de funções. Este tipo de conversão entre representações gráficas para álgebra não foi igualmente direta, pois exigiu dos alunos a realização de diversos tratamentos algébricos, a partir da análise gráfica, até chegar à equação algébrica da função, representada pelo gráfico que foi mostrado na questão proposta. Já em relação à questão subsidiária de conversão de medidas de volume para a medida de capacidade a turma não apresentou dificuldades.

No primeiro momento, a metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática ocorreu via resolução de problemas por meio de leitura individual, formação de grupos, escolhas de representantes de grupo para realizar defesas de resolução da questão proposta, houve consensos sobre as resoluções apresentadas. O primeiro grupo defendeu a resolução por meio da identificação dos três pontos de coordenadas que estavam representadas, visivelmente, pelo gráfico da questão proposta. Seguida da escolha de dois pontos de coordenadas e substituição deles na forma geral de uma função afim, montando um sistema de equações do primeiro grau com duas equações e duas incógnitas, sistema este possível e determinado. O segundo grupo recorreu ao cálculo da taxa de variação da função e em seguida fez a substituição na forma geral da função afim, não divergindo muito do procedimento feito pelo grupo anterior. Enquanto, a aluna A26 conseguiu identificar o gráfico desta função como representativa de uma função linear, subfamília da função afim, que possui características muito particulares: passam pela origem do sistema cartesiano e modelam a proporcionalidade direta. Esta última observação foi evidentemente, percebida quando ela diz como descobriu a taxa de variação da função linear, fazendo diretamente a proporção $2600{:}2 = 5200{:}4 = 1300$, obtendo assim a função linear $y = 1300x$.

> <u>Comentário</u>: Podemos perceber que os alunos evidenciaram as características da função linear que, além de ter a taxa de variação constante e passar pela origem do sistema cartesiano, modela a proporcionalidade direta. Eles puderam intuir que a taxa de variação é $\frac{y}{x}$ e deduziram que a fórmula geral para determinarmos a função linear é $y = ax$. Caso particular, da família de função afim com $b = 0$.

No segundo momento por meio da questão C, o trabalho de metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática se deu via exploração de problemas não matemáticos. Porém o debate foi promovido a partir do trabalho de extensão do problema que, até então, estava dentro da própria Matemática, tratando da conversão de representação de função gráfica para algébrica, convergindo para a discussão da temática do meio ambiente a partir do questionamento dos impactos provocados pelas mudanças que estão acontecendo em Suape. Houve uma interação muito boa entre os alunos, trouxeram informações novas para a turma e todos demonstraram interesse pelo debate, pois puderam apresentar livremente suas opiniões. Nesse momento, deixamos os alunos expressarem suas ideias, sem corrigi-los, deixando para o final da aula uma reflexão mais crítica a respeito dos benefícios econômicos do empreendimento em Suape e os cuidados que os surfistas e banhistas devem ter ao entrar no mar.

Há quem alegue já se ter muitos conteúdos específicos de Matemática para serem trabalhados durante o curso do Ensino Médio e o professor ainda se preocupar com outras questões que não fazem parte da sua disciplina, ver tudo isto como um excesso de preocupações desnecessárias. Aqui, não estamos sugerindo que o professor de Matemática se torne um ambientalista, um especialista em Ecologia. Apenas, defendemos que se possa abrir um espaço nas aulas de Matemática para o debate, que foi provocado a partir da resolução de um problema matemático, trazendo, se assim possível for, uma reflexão em torno de nossa realidade, auxiliando os alunos na sua formação para uma cidadania mais plena.

5.3.9. Descrição e análise do encontro 15

Aula 19 (Data 27/05/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 2.9**:** Covariação e taxa de variação; famílias de funções (funções por partes); representações múltiplas de funções, ressaltando conexão com o tema cidadania na cobrança de impostos pelo governo e o uso de novas tecnologias tal como a calculadora para tornar rápido os cálculos e não deixar a atividade enfadonha.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 2.9:

*Atividade 2.9***:** Dentre as diferentes formas de imposto cobrado pelo governo, o imposto de renda retido na fonte consiste no cálculo que a fonte pagadora (empresa), fazendo uso da tabela abaixo, deduz do salário bruto de seu funcionário uma parcela referente a esse imposto. Então, nesse caso, a base de cálculo é o salário bruto do funcionário. De acordo com essa tabela, o imposto de renda retido na fonte é “tantos por cento” do salário bruto menos a parcela de dedução a ser descontada.

Tabela 4: Tabela progressiva mensal a partir do exercício de 2011, ano-calendário de 2010.

Base de cálculo mensal em	Alíquota %	Parcela a deduzir do

R$		imposto em R$
Até 1.499,15	0	0,00
De 1.499,16 até 2.246,75	7,5	112,43
De 2.246,76 até 2.995,70	15,0	280,94
De 2.995,71 até 3.743,19	22,5	505,62
Acima de 3.743,19	27,5	692,787

Fonte: www.receita.fazenda.gov.br/aliquotas/contribfont.htm. Acesso em 04/03/2012.

A) Escrevam a lei de formação da função do imposto em relação ao salário bruto;

B) Qual o imposto retido na fonte para funcionários que ganham R$ 1.396,78, R$ 1.800,00, R$ 2.500,00, R$ 3.000,00 e R$ 5.000,00?

C) Esbocem o gráfico dessa função.

Entrega do material impresso com a atividade a ser trabalhada, para leitura individual, e calculadoras comuns para realizar os cálculos. Demos um tempo para os alunos começarem a desenvolver a situação-problema por conta própria.

Após a leitura individual, seguiram-se alguns comentários de alunos:

A16: *O Brasil é o país que cobra mais imposto no mundo*.

A24: *Se fosse usado nas escolas, nos hospitais e na segurança para o povo, tudo bem*.

A27: *É verdade, mas a gente sabe que no Brasil, nada funciona direito.*

A30: *O pior de tudo é com a saúde, pois as pessoas acabam morrendo nos hospitais sem serem atendidas.*

A21: *Meu pai diz que a escola ruim é prejuízo futuro*.

PP: *Eu concordo com ele, a educação faz o trabalho de transformação social, de conscientização de um povo além de levar informação para os cidadãos. Por isso, o futuro do Brasil está nas mãos de vocês, vejam só a responsabilidade. Muito bem, vamos agora, nos concentrarmos no problema do imposto de renda retido na fonte.*

A discussão retornou mais concentrada na questão do imposto de renda retido na fonte de acordo com a proposta da situação-problema:

A43: *Percebi que na tabela nem todo mundo paga imposto de renda. A gente sabe que até num confeito, a gente tá pagando imposto, outro tipo de imposto*.

A42: *O que é esse imposto de renda mesmo?*

PP: *É o imposto cobrado pelo governo baseado na renda e nos bens móveis e imóveis que o cidadão possui*.

A02: *Tem gente que deixa de pagar esse imposto, o povo que tem muito dinheiro, dono de empresa e de indústria.*

PP: *Não podemos generalizar. Mas, sabemos que o trabalhador não tem como deixar de pagar o imposto de renda porque ele é descontado diretamente na conta-salário. Está certo?*

Comentário: É importante o professor saber gerenciar o tempo disponível para as questões fora da Matemática, evitando que os alunos se dispersem, sem deixar com isso de ouvir as vozes dos alunos por meio de seus discursos que estão carregados de emoção e impressões que eles carregam do seu mundo vivido em suas relações sociais com a família e com a sociedade de modo geral.

Orientamos o trabalho voltando para as questões mais específicas da Matemática que podem ser explorados no problema. E seguiu-se o diálogo abaixo:

PP: *Qual a equação algébrica da função do imposto de renda por meio desta tabela que nos foi apresentada?*

A17: A tabela diz que o *imposto de renda é igual alíquota sobre o salário menos o valor a ser deduzido, tipo uma fórmula.*

A05: *Têm muitas mudanças dependendo do salário que a pessoa recebe.*

A39: *Para cada intervalo a gente tem uma equação diferente*.

A26: *A função tem mais de uma equação*.

PP: *Sim, você tem razão. Por isso, a função da situação-problema é chamada de função por partes ou função definida por várias sentenças.*

Percebemos que os alunos avançaram na compreensão do problema e solicitamos a formação de grupos de quatro alunos. Foram formados 11 grupos e ficamos circulando, na sala de aula, observando o desenvolvimento da situação-problema pelos alunos.

Neste encontro de aula, selecionamos três grupos distintos para responder as letras A, B e C respectivamente. E o grupo elegeu um dos seus colegas como representante para ir à lousa responder a questão.

A aluna A15 representando o grupo G observou que um trabalhador com rendimento igual ou inferior a $R\$$ 1.499,15 ficou isento do imposto de renda ($IR = 0$). Já um trabalhador que ganhava, por exemplo, $R\$$ 4.000,00 por mês teriam descontos, em reais, de: $27,5\%\ de\ 4.000 = 1.100$, como a dedução seria $692,78$. Ela observou que o imposto de renda, seria deduzido assim $1.100 - 692,78 = 407,22$. A aluna A15 percebeu que, em geral, se o salário do trabalhador é x, seu imposto de renda $f(x)$ seria calculado assim: Se $x \leq 1.499,15$ então $f(x) = 0$, se $1.499,16 \leq x \leq 2.246,75$ então $f(x) = 0,075x - 112,43$, se $2.246,76 \leq x \leq 2.995,70$ então $f(x) = 0,15x - 280,94$, se $2.995,71 \leq x \leq 3.743,19$ então $f(x) = 0,225x - 505,62$ e se $x > 3.743,19$ então

$f(x) = 0{,}275x - 692{,}78$.

Perguntamos o que eles haviam percebido da exposição da aluna A15, apenas o aluno A20 respondeu que faltou escrever a equação algébrica da função, pois, da forma como fizeram, são várias equações que ainda precisam ser reunidas em uma só função. Neste momento chamamos a atenção da turma para escrever o f(x) uma vez, seguida de uma igualdade. Ponha chaves, e escreva as equações acompanhadas dos seus respectivos intervalos. Essa é a forma convencional de escrever uma função por partes. Solicitamos à aluna A15 para reescrever a equação algébrica da função. A aluna A15 escreveu na lousa a notação convencional, de acordo com as instruções que acabara de receber.

Solicitamos o próximo grupo, o aluno A31 foi à lousa, representando o grupo, notou que $f(1.396{,}78) = 0$ (Isento de imposto de renda). Encontrou:

$f(1.800) = 0{,}075 \cdot 1.800 - 112{,}43 = 135 - 112{,}43 = 22{,}57$;

$f(2.500) = 0{,}15 \cdot 2500 - 280{,}94 = 375 - 280{,}94 = 94{,}06$;

$f(5.000) = 0{,}275 \cdot 5000 - 92{,}78 = 1.375 - 692{,}78 = 682{,}22$.

(Todos os cálculos foram feitos usando a calculadora)

A aluna A31, pergunta se eles vão poder usar a calculadora na prova. Respondemos que se necessário usaremos sem problema. Pois, a calculadora é mais uma ferramenta que pode ser explorada na formação de conceitos matemáticos.

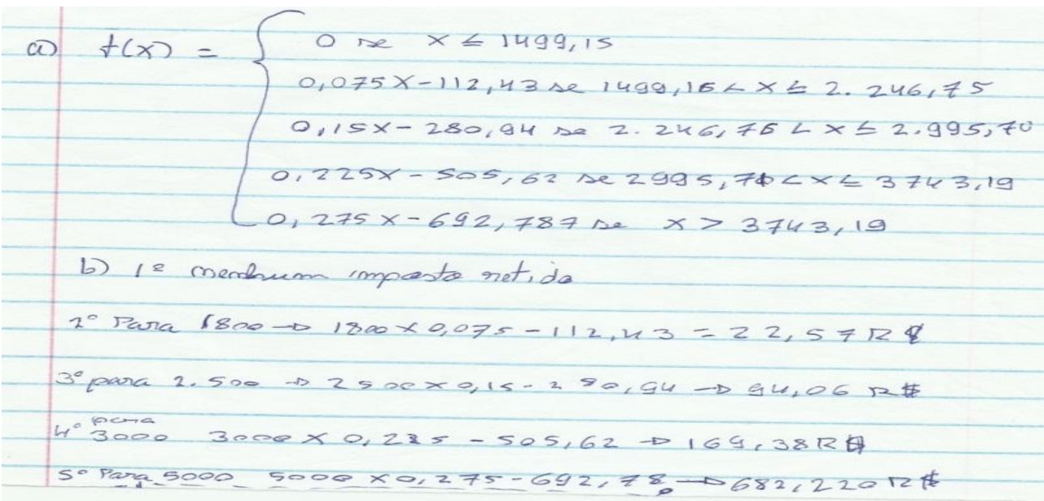


Figura 39: Resolução das letras A e B relativas à atividade 2.9 pelo aluno A07, representando seu grupo.

Os alunos não estavam conseguindo construir o gráfico dessa função, a dificuldade maior, nos pareceu, era de eles terem que lidar com montantes altos, a calculadora ajudou muito nos cálculos, porém a interpretação desses valores no gráfico exigia um pouco mais deles. Por isso, fizemos algumas observações por meio de uma explicação dialogada para o grande grupo, auxiliando-os na construção do gráfico. De modo que todos os alunos, com a nossa mediação, no final da aula haviam construído o gráfico da função.

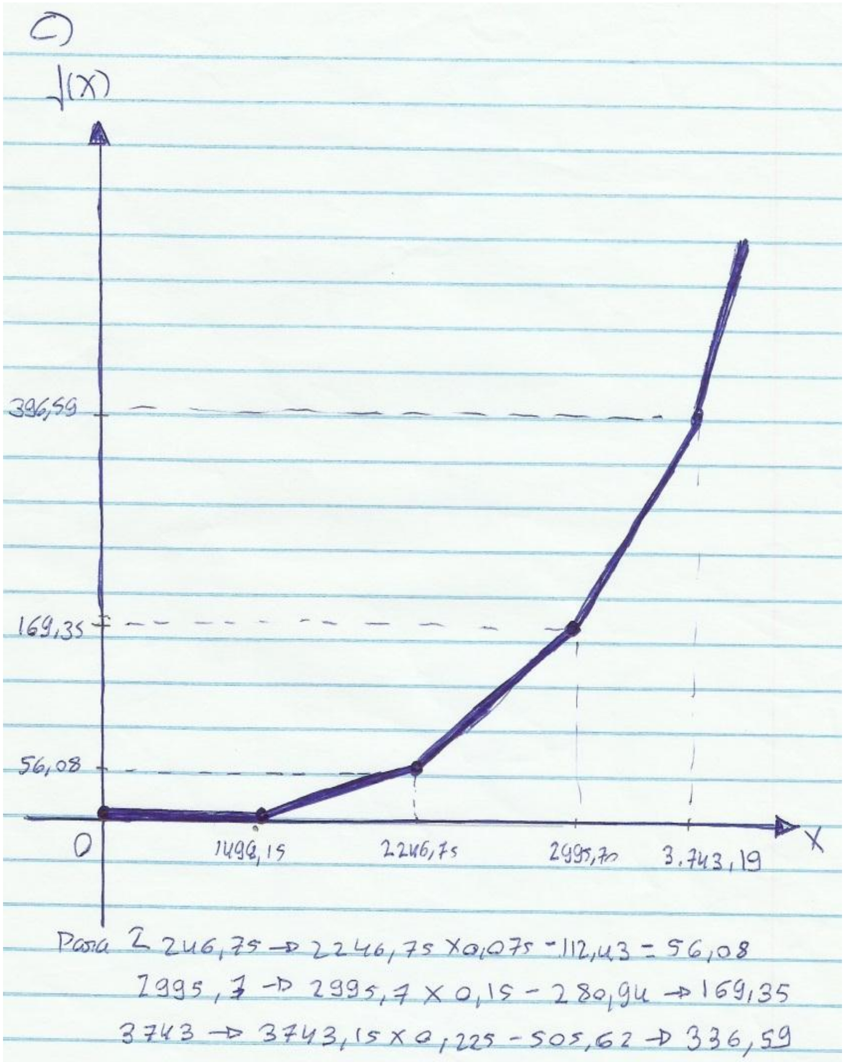


Figura 40: Representação gráfica da atividade 2.9 pelo aluno A07, representando o seu grupo.

Os debates e discussões, que o próprio problema trazia, incitavam os alunos na promoção de seus questionamentos da problemática político-social que os ajudavam na interpretação do problema. Foi importante registrarmos a presença do professor na mediação do debate no sentido de não deixar os alunos se perderem em divagações, mas que fossem gradativamente trazendo as explorações de ideias matemáticas que resolvessem as questões que a situação-problema pedia. Isso aconteceu com a participação de todos e mediação do professor, os alunos começaram a apresentar avanços significativos para a compreensão do problema.

A metodologia de ensino-aprendizagem via resolução de problemas seguiu a linha de leitura individual, formação de grupos, seleção de três alunos distintos de grupos diferentes que conseguiram apresentar as resoluções das questões A e B. Embora para a questão C, não houvesse inicialmente essa naturalidade na apresentação de uma representação gráfica que traduzisse a situação-problema proposta.

> Comentário: A representação gráfica se configurou como uma das mais difíceis representações de funções, onde as escalas, os montantes de valores altos foram empecilhos para uma representação sem a nossa ajuda, é diferente o sentido da construção de um gráfico de uma função para sua apresentação gráfica para os alunos, quando os alunos veem o gráfico de função, podemos observar que eles facilmente começam um trabalho no sentido de analisar e interpretar o gráfico, facilitado por esse tipo de representação. No entanto, a construção do gráfico ainda é um grande obstáculo a ser vencido, precisamos caminhar no sentido de os alunos poderem enxergar a representação algébrica de uma função acompanhada da visualização de seu gráfico.

Houve uma discussão em torno do uso da calculadora que mostra ainda hoje certa insegurança por parte dos alunos. Embora eles fizessem uso da calculadora principalmente dos aplicativos de seus celulares, a dúvida deles era sempre a mesma, se eles poderiam usar na prova, avaliação escrita final do bimestre letivo. Expusemos abertamente nosso ponto de vista de que, quando necessário, a calculadora é mais uma ferramenta que pode ser explorada na formação de conceitos matemáticos, pois mais do que cálculos, a Matemática trabalha com raciocínios.

Evidenciamos, nesse encontro, as dificuldades de aquisição dos alunos da linguagem matemática com suas convenções e simbolismos arbitrários, registrando a necessidade do professor fazer o papel de mediador dessa linguagem para trazer uma compreensão mais efetiva aos alunos em torno dessas questões. Outro ponto que podemos apontar foi a dificuldade dos alunos em fazerem a representação gráfica da função definida por partes, devido certamente aos valores de montantes altos que foram explorados no problema. Foi necessário trabalharmos na Zona de Desenvolvimento proximal com os alunos, tirando dúvidas na tentativa de elucidar a todos os procedimentos de construção de sua representação gráfica.

Por fim, os alunos compreenderam que uma função, pode ser dada por várias equações, cada uma referente a uma parte distinta do domínio. Isso também contribuiu para que o conceito de função fosse ampliado, não se restringindo somente ao caso linear e sim a uma combinação de tais características. O conceito de função por partes foi bastante importante para mostrarmos também aos alunos uma aplicação de uma situação de modelação de problemas do mundo real.

5.4. Unidade didática III: Função Quadrática

Nessa unidade didática, totalizamos *13 horas-aula*, constituintes de 8 encontros com descrições e análises de cada aula. A exploração de problemas ganha contornos mais evidentes, em seguida, exploramos a compreensão essencial da família de funções quadráticas. Depois, apresentamos um problema de modelização de um fenômeno físico *lançamento de uma bola no ar* e estendemos explorações para as questões políticas e sociais. Trabalhamos com a problemática da transição da representação gráfica para a algébrica e situações de contexto puramente matemático, visando à familiaridade na aquisição dessa linguagem científica.

5.4.1. Descrição e análise do encontro 16

Aula 21 (Data 27/07/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 3.1**:** Exploração de área máxima na tentativa de chegar a uma das características principais de função quadrática, destacando a exploração de problemas no sentido de questionar mais o problema, não devendo encerrar com uma única resolução para uma dada pergunta, explorando mais a questão e fazendo mais perguntas até que se esgote o interesse da turma pelo problema.

Neste encontro, trabalhamos com a questão A da atividade 3.1:

Atividade 3.1: A) Um arame de $20\,m$ deve ser usado para fazer um cercado. Determine a área desse cercado, sendo ela a maior área possível. (Problema disparador/anotação na lousa).

Início do segundo semestre. Antes de iniciar a aula, propriamente dita, conversamos um pouco com a turma, perguntamos: *Como foram de recesso? Se tinham viajado, descansado muito, se foram à praia, se jogaram muito bola?* Dentre outras coisas triviais que os alunos costumam fazer durante o período de férias, recesso escolar. E logo depois colocamos na lousa o seguinte enunciado: Um arame de $20\,m$ deve ser usado para fazer um cercado. Determine a área desse cercado, sendo ela a maior área possível. Solicitamos para eles fazerem uma leitura atenta deste enunciado de maneira que possam compreender a pergunta do problema. Logo, em seguida, pedimos aos alunos que formassem grupos de três pessoas para pensarem juntos sobre o problema. A aluna A23 comentou: *Já, professor. Vamos conversar mais sobre as férias*? Enquanto, alguns alunos começaram a manifestar opiniões a partir da leitura do enunciado, pois aparentemente, este problema lhes pareceu óbvio.

A43: *A maior área é um quadrado.*

A22: *Um quadrado de área cinco.*

A44: *Acontece que cinco é o lado do quadrado e não sua área.*

A34: *Professor, como a gente faz pra calcular a área?*

PP: *Você não está lembrado da fórmula para o cálculo da área de um quadrado?*

A29: *É só multiplicar o lado vezes o lado*.

PP: *Isso mesmo, a área de um quadrado é lado vezes lado ou lado ao quadrado.*

A40: *Encontrei 25 m^2*.

PP: *Vocês acham que essa já é a solução do problema? Pensem em uma outra alternativa para esse mesmo problema.*

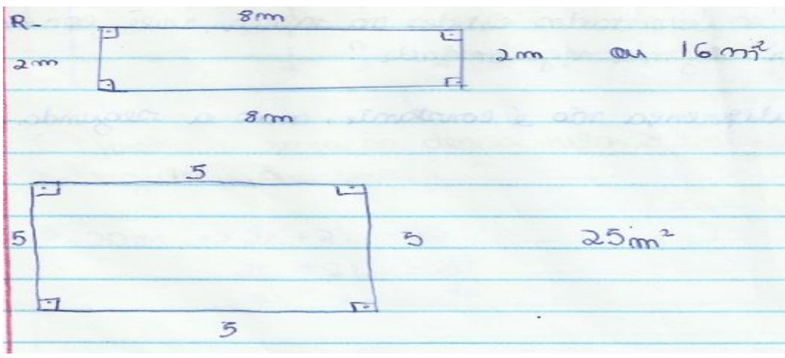


Figura 41: Resolução da questão A da atividade 3.1 pela aluna A36, representando o seu grupo.

Observamos, neste momento, que a aluna A22 estava muito interessada na sua equipe de trabalho na aula e estava inserida no contexto da resolução e exploração de problemas, mostrando iniciativa na apresentação de resoluções para o problema em questão, complementando com sugestões e refutando ideias no diálogo com os seus pares. Enquanto, as alunas A05 e A03 que, normalmente costumavam faltar às aulas, na unidade passada, se aproximaram nos pedindo para que lhes explicasse como fariam para resolver o problema. Pois, ainda não tinham incorporado à nova metodologia e estavam esperando que começássemos a unidade letiva explicando o novo assunto.

A05: *Professor eu quero que o Senhor me explique*.

PP: *Eu quero que você pense sobre o enunciado que foi colocado na lousa e troquem ideias com a sua equipe. Não deve ser tão difícil, você tem um arame que mede 20m de comprimento e você deve pensar em como aproveitar a maior área possível com essa medida.*

A aluna A18 que na ocasião fazia parte da mesma equipe das alunas A05 e A03 disse: *Pensei no número 4,4 e fazendo as contas dão 19,36.* (Recorrendo a calculadora do celular).

PP: *Podem continuar a investigação.*

Neste momento, observamos outro grupo que estava confundindo perímetro com área, embora tenham usado de muita criatividade na imaginação de figuras tais como hexágonos, pentágonos, trapézios, dentre outros como possíveis formas geométricas para a resolução do problema. Por isso, resolvemos chamar a atenção do grande grupo.

PP ao GG: *Eu gostaria de saber de vocês qual a diferença de perímetro e área?*

A30: *Perímetro é a soma dos lados e área é a base vezes altura ou lado vezes o lado quando for quadrado.*

PP: *Você definiu perímetro e disse como calcular a área de um retângulo e também de um quadrado. Porém, ainda não nos disse o que é área?*

A20: *Professor, a área é a região plana em torno do perímetro.*

PP: *A superfície é a união da região plana interna com o seu perímetro.*

A31: *Eu aprendi que área é a medida de superfície e a sua unidade padrão de medida é o metro quadrado.*

Recolhemos as resoluções apresentas pelas equipes e observamos que houve um consenso por parte do GG, enfatizamos para a turma as definições de perímetro como soma dos comprimentos dos lados de um polígono e área como medida de superfície de uma região plana cuja unidade padrão é o metro quadrado. Depois de nos certificarmos de que eles haviam compreendido bem os conceitos de perímetro e área, pedimos para eles retornarem ao enunciado do problema proposto e pensassem em outra resolução. Pois, 25 m^2 é a maior área do retângulo de perímetro 20m que corresponde à área do quadrado de lado 5m. Porém, o enunciado não falou em determinar o maior retângulo possível usando um arame de 20 metros. Portanto, busquem outra resolução para esse mesmo problema e tragam na próxima aula.

Se pensarmos que a atividade central do matemático é dentre outras, além de resolver problemas, também explorar problemas indo mais adiante. Não podemos limitar o pensamento matemático dos nossos alunos. Por isso, deixamos nesse encontro, que eles tentassem estratégias de resoluções por conta própria, aproveitamos as ideias dos alunos mesmo que não levassem à resposta certa, não trouxemos resoluções prontas e acabadas, mas sim deixamos que eles sentissem o raciocínio que estava sendo desenvolvido até chegar a resoluções mais adequadas à situação que lhes foi proposta.

Observamos que, à primeira vista, o problema pareceu aos alunos bastante simples, mesmo existindo, por parte deles, equívocos quanto aos conceitos de perímetro e área que poderiam ter se transformado num problema secundário. Porém, houve um trabalho de mediação por parte do professor de maneira que eles pudessem avançar na resolução e exploração do problema. Num primeiro momento, os alunos não haviam percebido que o problema não pedia para determinar o maior retângulo possível, e deram como resposta um quadrado de maior área possível. Portanto, foi necessário o professor provocar a exploração do problema que levou os alunos a pensar em resolver o problema para uma área circular, admitindo implicitamente que estamos procurando o polígono de maior área possível com perímetro fixo.

Outro ponto que foi evidenciado, neste encontro, foi o fato de que a turma era muito heterogênea e ainda podemos observar a resistência de alguns alunos no trabalho de resolução e exploração de problemas, demonstrando certa expectativa de que o professor fosse explicar para eles como fazer para resolver o problema proposto. Por outro lado, tínhamos sempre a expectativa de que eles fossem construindo suas ferramentas de controle e passassem gradativamente a tomar decisões por conta própria.

Abriu-se desse modo um espaço de trabalho coletivo para que os alunos pudessem avançar na qualidade das suas produções. No entanto, o tempo pedagógico disponível para o trabalho era sempre uma preocupação que tínhamos em vista, por isso solicitamos a formação de pequenos grupos, ainda que em uma turma grande não fosse possível interagirmos com cada grupo específico, precisamos criar nos alunos certo espírito de inventividade e criação de maneira que eles fossem adquirindo certa autonomia nos seus grupos de trabalho, de modo que entre eles pudessem realizar mediações entre si, favorecendo desse modo à compreensão do problema em cada grupo de trabalho sem a ajuda do professor.

Devido ao pouco tempo pedagógico destinado a aula deste encontro, não nos foi possível solicitarmos aos grupos que fossem à lousa expor os seus procedimentos, muito embora tivéssemos a oportunidade de ver uma diversidade de estratégias que foram usadas através das questões que nos foram entregues no final da aula, alguns alunos haviam imaginado diversas figuras geométricas planas na tentativa de obter a maior área possível e alguns outros chegaram à área do círculo, mesmo não tendo apresentado a resolução mais adequada para o problema. Assim neste contexto, o processo de ensino-aprendizagem envolveu os alunos em um trabalho em grupo em que eles entraram em ação e interação entre seus pares e foram capazes de realizar formulações, validações e refutações na resolução e exploração do problema proposto.

5.4.2. Descrição e análise do encontro 17

Aulas 22 e 23 (Data 01/08/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 3.1**:** Exploração de área máxima na tentativa de chegar a uma das características principais de função quadrática, destacando a exploração de problemas no sentido de questionar mais o problema, não devendo encerrar com uma única resolução para uma dada pergunta, explorando mais a questão e fazendo mais perguntas até que se esgote o interesse da turma pelo problema.

Neste encontro, continuamos com a atividade 3.1, trabalhando as questões B, C, D e E:

Atividade 3.1 (Continuação):

B) Qual a maior área retangular possível a ser construída com um arame de 20 metros? (Oralmente).

C) Construam uma tabela estabelecendo a relação entre a largura do retângulo e a sua área de acordo com os valores dos resultados possíveis que foram obtidos na investigação feita por vocês. (Oralmente).

D) Observando os resultados obtidos na tabela, vocês conseguem enxergar alguma regularidade? (Oralmente)

E) Esbocem o gráfico dessa relação usando os valores da tabela. (Oralmente).

Havíamos analisado as possíveis resoluções do problema da aula anterior e notamos que alguns alunos haviam pensado no círculo, fato esse percebido pela aluna A22 que se prontificou a responder assim que foi refeito a pergunta. Percebemos que alguns alunos também lembravam a fórmula do comprimento da circunferência e da área do círculo, porém nenhum deles conseguiu desenvolver a questão em casa, sozinho.

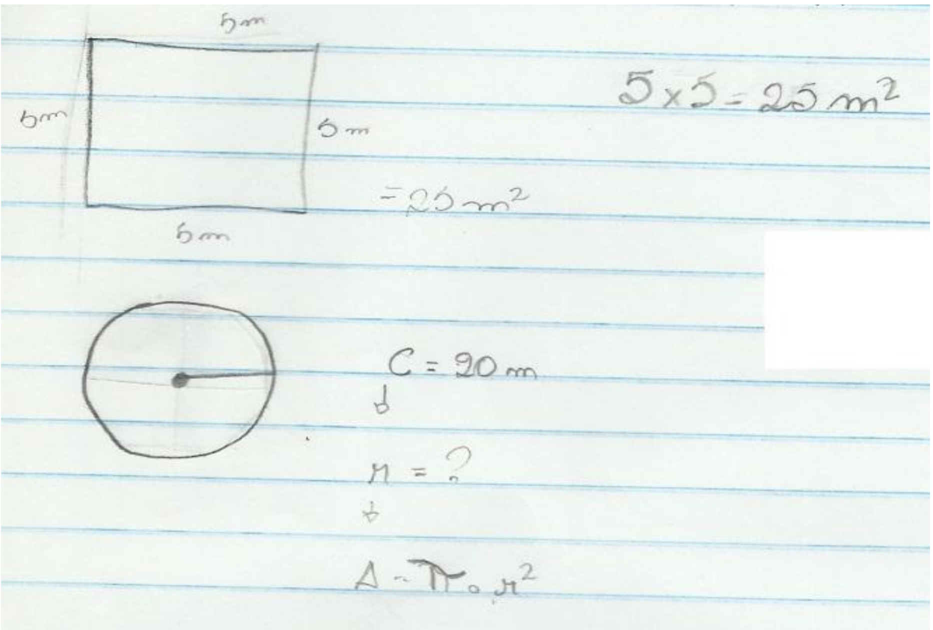


Figura 42: Resolução da questão A relativa à atividade 3.1 pelo aluno A17, representando o seu grupo.

Por isso resolvemos fazer uma mediação, mostrando para eles, por meio de uma exposição dialogada, o cálculo para determinar o raio dessa circunferência a partir da medida de seu comprimento, e depois calcularmos, juntos, a medida da área do círculo. Do seguinte modo:

$$C = 2\pi r \to 2\pi r = 20 \to r = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi} \cong \frac{10}{3{,}14} \cong 3\ m$$

e $A = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \cong 9 \cdot 3{,}14 \cong 28{,}26\ m^2$.

PP: *Por favor, A35. Façam na calculadora a divisão 10 por 3,14.*

A35: *Encontrei 3,18471...*

PP: *Podemos arredondar para 3?*

A35: *Sim, professor.*

A01: *Agora, ficou fácil. É só substituir três (3) na fórmula da área do círculo.*

PP: *Agora, A35. Façam 9 vezes 3,14*.

A22: *Encontramos 28,26m^2* (cálculo feito usando a calculadora do celular)

A20: *Então a maior área possível é um círculo de aproximadamente 28,26 metros quadrados.*

PP: *Podemos afirmar que a maior área possível de um polígono é um círculo porque podemos admitir o círculo como um polígono regular de infinitos lados.*

A12: *E o maior retângulo possível é um quadrado de 25 metros quadrados.*

Retornamos a exploração do problema que se iniciou com a determinação da maior área possível a ser construída com um arame de 20 metros. Agora, reformulando a questão, assim: Qual a maior área retangular possível a ser construída com um arame de 20 metros? Como os alunos já sabiam a resposta, pedimos-lhes para que desenhassem retângulos variados de modo a verificar e a validar suas conclusões.

A25: *Professor, eu estou construindo passo a passo os desenhos dos retângulos possíveis:* $1 \cdot 9$; $2 \cdot 8$; $3 \cdot 7$; $4 \cdot 6$; $5 \cdot 5$; $6 \cdot 4$; $7 \cdot 3$; $8 \cdot 2$ *e* $9 \cdot 1$.

A21: A gente encontrou *9, 16, 21, 24, 25, 25, 24, 21, 16 e 9 metros quadrados.*

A13: *Confirmado, o retângulo de maior área é um quadrado de 25 metros quadrados que é o mesmo resultado que a gente já tinha achado.*

PP: *Vocês acham que o quadrado é um retângulo?*

A25: *Não professor, são figuras diferentes, o quadrado tem lados iguais.*

A09: *Todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado. O retângulo tem dois pares de lados opostos paralelos e ângulos retos. Enquanto, o quadrado apresenta essas mesmas qualidades, só que todos os seus lados são iguais. Pois, o quadrado é muito regular.*

Solicitamos aos alunos que elaborassem uma tabela, relacionando a largura do retângulo com a sua área, de acordo com os valores encontrados na investigação passo a passo que foi feita. Logo, em seguida pedimos para que os alunos observassem algumas regularidades de padrões na tabela montada.

R –

h	A
0	0
1	9
2	16
3	21
4	24
5	25
6	24
7	21
8	16
9	9

Figura 43: Representação tabular da atividade 3.1 pela aluna A23, representando a seu grupo.

Comentário: A primeira diferença corresponde a 7, 5, 3, 1, −1, −3, −5, −1 e a segunda diferença corresponde a −2 sempre constante. Notamos que houve um engano do aluno ao invés de registrar sete (7), escreveu um (1).

A30: *A primeira diferença não é constante. De 1 a 5 a função é crescente e de 5 a 10 ela é decrescente. Essa relação não é uma função afim.*

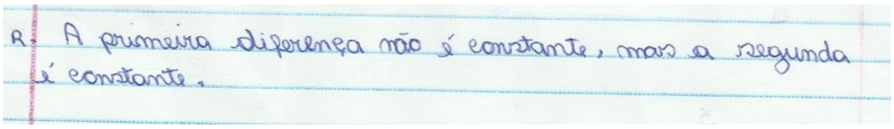


Figura 44: Justificativa, após investigações numéricas, indicando uma das principais características da função quadrática pela aluna A23, representando seu grupo.

PP: *Por que você chegou a essa conclusão?*

A30: *Porque a função afim tem variação constante.*

PP: *Continue investigando na tentativa de encontrar alguma nova característica para esta nova função.*

A07: *Professor, na tabela a primeira variação é uma função afim que é constante.*

PP: *Isso mesmo, uma das características dessa nova função que está sendo apresentada, agora, é que ela tem a primeira diferença uma função afim e a segunda diferença constante.*

A12: *Como é chamada essa função representada na tabela?*

PP: *Função quadrática ou função polinomial do segundo grau. Agora, eu quero que vocês construam o gráfico dessa função a partir dos valores da tabela que acabamos de montar.* (Pausa): Demos um tempo para que eles pudessem realizar o trabalho de construção gráfica.

A13: *Vamos poder unir os seus pontos?*

A27: *Sim, A13. As grandezas envolvidas na atividade são medidas de comprimento e área. Elas são contínuas.*

Circulamos na sala de aula, observando o trabalho em grupo, paramos na equipe do aluno A18 e na ocasião chamamos a atenção para o desenho gráfico dele que estava representado por um V deitado. O desenho não é reto, o gráfico da função quadrática é uma curva, tipo um U deitado. Essa curva em Matemática recebe um nome especial, é uma parábola.

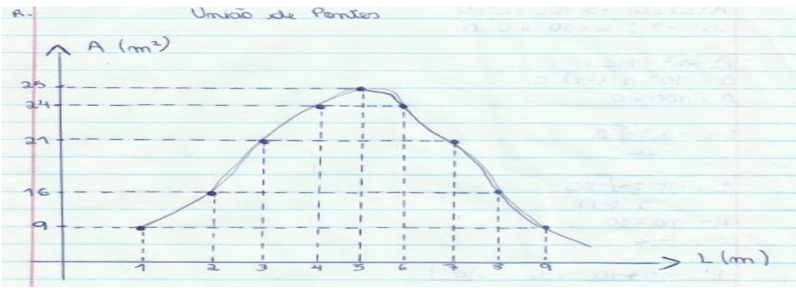


Figura 45: Representação gráfica com certa deformidade relativa à atividade 3.1 pela aluna A23, representando seu grupo.

Comentário: Durante as apresentações das representações gráficas que na sua grande maioria, os gráficos não foram construídos adequadamente, procuramos enfatizar a necessidade dos alunos observarem os valores das abscissas e ordenadas de modo que houvesse um respeito em relação às distâncias nas escalas por eles adotadas para evitar assim grandes deformidades. Muito embora reconhecêssemos que em um trabalho à mão livre, usando lápis e papel, o máximo que conseguimos fazer foi representar apenas um esboço de uma parábola. Porém, foi necessário chamar a atenção dos alunos para corrigir deformidades grosseiras das curvas construídas por eles.

O aluno A06 nos pergunta: *Afinal de contas, o que é uma parábola?* Enquanto o aluno A32 responde: *É uma curva da função quadrática*. Depois desse questionamento e de uma resposta de um aluno, ainda pouco consistente, apresentamos a definição de parábola como um conjunto de pontos que estão a uma mesma distância de um ponto fixo (o seu foco) e de uma reta (a sua diretriz). Apresentamos também um esboço dela na lousa, mostrando sua construção com régua e compasso e pedimos para que os alunos construíssem o mesmo esboço da parábola no caderno. Porém, concluímos que a sua definição com essa precisão só será compreendida com mais profundidade no terceiro ano do Ensino Médio em Geometria Analítica, muito embora a sua exploração já seja feita desde esses primeiros contatos dos alunos com a parábola no estudo da função quadrática numa tentativa de podermos conectar álgebra das funções à geometria analítica.

Neste encontro, demos continuidade ao trabalho da exploração do problema da aula anterior, a dificuldade dos alunos resolverem o problema para uma área circular foi mais pelo fato deles terem sentido dificuldade de trabalhar com o problema inverso de achar o raio da circunferência dado o valor do perímetro ao passo que as fórmulas para o cálculo do comprimento da circunferência e a área do círculo eram conhecidas por eles, nos parece que os alunos estão acostumados a resolver problemas na ordem direta para encontrar comprimento de circunferência e área do círculo, nos sinalizando para trabalharmos mais em Matemática problemas nos dois sentidos porque o trabalho apenas em um sentido não capacitam os alunos automaticamente para um trabalho em um sentido oposto.

Optamos a partir dessa observação pela mediação por meio de uma exposição dialogada na resolução do problema para uma área circular com a participação ativa dos alunos que mesmo após a apresentação da resolução do problema, continuamos a fazer provocações na tentativa de avaliarmos o grau de compreensão dos conceitos de retângulo e quadrado que eles tinham para checar os seus níveis de abstração desses conceitos pelos alunos.

Podemos observar uma boa interação dos alunos entre si e sob a mediação do professor, é notório o crescimento da participação ativa dos alunos através dos seus comentários a cerca do conhecimento que está sendo construído de maneira coletiva como diz Vygotsky (2008), o desenvolvimento de conceitos se dá na relação entre conceitos e na interação social entre os indivíduos envolvidos nesse trabalho.

À medida que os alunos foram construindo retângulos passo a passo, podemos observar um trabalho de verificação para validar resultados já encontrados, como foi o caso da maior área possível formada a partir de um perímetro fixo, eles puderam validar um conhecimento que estava em construção, mas que necessitavam de mais evidências. Logo, em seguida a partir da provocação feita por nós, os alunos representaram essa variação entre as grandezas através de uma tabela e realizaram explorações matemáticas importantes na tabela, puderam analisar a tabela verificando que ela não representava uma função afim, pois a primeira diferença não era constante, no entanto constataram que a segunda diferença é constante, característica essa que representa umas das principais compreensões essenciais de funções quadráticas segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) e que é pouco explorada nos livros didáticos brasileiros que tivemos acesso ao longo do desenvolvimento desta pesquisa.

A dificuldade de representação gráfica é comum no trabalho com valores altos, os alunos se confundem na adoção de escala com uma boa aproximação e acabam construindo o gráfico com certa deformidade, esses fatores influenciam os alunos de modo a considerarmos a representação gráfica para os alunos, uma das mais difíceis para eles, embora os autores e pesquisadores também apontem a representação gráfica como de boa visualização para a análise de conceitos, características e propriedades importantes, facilmente observáveis, por causa do seu apelo visual e de fácil leitura e interpretação segundo Friedlander e Tabach (2001).

Finalizamos a aula, sistematizando o conceito de parábola, apresentando a turma a sua definição e construção com régua e compasso em uma tentativa de fazer com que os alunos pudessem compreender melhor essa curva que eles facilmente acabam identificando e chamando de parábola. Porém, sentimos que a sua compreensão efetiva só se dará no estudo analítico da parábola em estudos posteriores. Depois que percebemos, dentro do contexto didático da resolução e exploração de problemas, garantias mínimas de que os alunos na sua equipe de trabalho foram responsáveis por sua aprendizagem, acabamos a aula com a formalização dos conhecimentos matemáticos importantes para um aprendizado mais sólido e efetivo de função quadrática.

5.4.3. Descrição e análise do encontro 18

Aula 24 (Data 02/08/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 3.1**:** Exploração de área máxima na tentativa de chegar a uma das características principais de função quadrática, destacando a exploração de problemas no sentido de questionar mais o problema, não devendo encerrar com uma única resolução para uma dada pergunta, explorando mais a questão e fazendo mais perguntas até que se esgote o interesse da turma pelo problema.

Neste encontro, continuamos com a atividade 3.1, trabalhando as questões F, G e H:

Atividade 3.1 (Continuação):

F) Qual a equação dessa relação entre a largura do retângulo e sua área? (Oralmente)

G) Determinem os zeros (raízes) da relação entre a largura do retângulo e sua área. (Oralmente)

H) Quais as coordenadas do vértice dessa função quadrática? (Oralmente)

Nesse encontro, continuamos explorando o problema solicitando aos alunos que escrevessem a equação algébrica da relação entre a largura do retângulo e sua área.

PP: *Para responder a essa questão temos que dar uma solução algébrica. Qual a finalidade da Álgebra na Escola?*

A35: *Dizer as coisas de forma geral.*

A41: *É uma linguagem complicada*. (risos).

A30: *Tem alguma vantagem, eu posso dizer que o retângulo tem comprimento C e a largura L, vai servir para qualquer retângulo.*

A07: *Então C e L são as variáveis do problema.*

PP: *Ok. Agora, eu quero que vocês determinem o perímetro e a área desse retângulo, usando essas duas variáveis*.

A18: *É fácil, o perímetro é a soma de todos os lados e a área é base vezes a altura.*

PP: *Poderia ser também comprimento vezes largura que dá no mesmo.*

A22: *O perímetro é* $P = 2C + 2L$ *e a área é* $A = C.L$.

A32: *Como o arame tem 20 m, esse valor é seu perímetro fixo, o que muda é a área.*

A26: *Logo,* $2C + 2L = 20$ *dividindo tudo por 2. Encontramos* $C + L = 10$.

PP: *Que corresponde justamente ao semi-perímetro do retângulo, ou seja, a metade do perímetro.*

A25: *Mas, professor. A gente não tem o valor da área.*

PP: *Porque a área varia em função do comprimento ou da largura desse retângulo. Como nós poderíamos escrever C em função de L?*

A25: *Acho que fazendo* $C = 10 - L$.

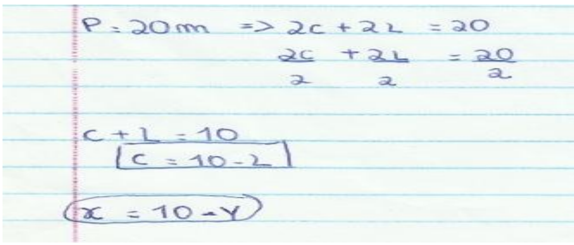


Figura 46: Procedimentos algébricos na tentativa de encontrar a representação algébrica da função quadrática relativa à atividade 3.1 pela aluna A23, representando seu grupo.

PP: *E agora, dá para substituir essa expressão na fórmula da área?*

A13: *Fica* $A = (10 - L) \cdot L$, *que é a mesma coisa de* $A = 10L - L^2$.

PP: *Por favor, A13. Escreva esse resultado na lousa. Nós poderíamos dizer também que* $A(L) = 10L - L^2$. *Vamos fazer a verificação para L=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 metros.*

Escrevemos na lousa $A(1) =, A(2) =, A(3) =, \ldots, A(9) =$ e pedimos para que os alunos A04, A08, A11, A15, A19, A22, A28, A31 e A33 fossem determinar respectivamente os valores, substituindo na equação algébrica da função que foi uma forma de fazê-los avaliar os processos de aprendizagem por meio de suas resoluções apresentadas.

Depois pedimos para os alunos compararem esses resultados com os da tabela que já haviam montado e perguntamos, novamente: *Quais as características que podemos observar nesses valores encontrados?*

A35: *A função cresce e decresce ao mesmo tempo. Ela não tem variação constante, mas a variação da variação é constante. Acho que ela é chamada de função quadrática por conta dos retângulos e quadrado que a gente tá calculando.*

PP: *Porque o maior expoente da variável é dois (2), ou seja, elevado ao quadrado. E quando estivermos trabalhando com a variável real podemos chamá-la de função polinomial do*

> *segundo grau. Vejam que o gráfico que construímos foi uma curva denominada parábola. A parábola pode está com a concavidade (abertura) voltada para cima ou para baixo. Essa curva lembra um U certo ou invertido. E alguns de vocês desenharam algo parecido com um V invertido que não é o gráfico da função quadrática que nós estamos estudando, agora.*

Dando continuidade à exploração do problema da área em função da sua largura. Solicitamos que os alunos determinassem os zeros ou raízes da função área na lousa. E a dupla de alunos A01 e A34 se prontificaram espontaneamente para resolver a equação $10L - L^2 = 0$, usaram a fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau (a popular fórmula de Bháskara) na lousa e encontraram $L = 0m$ e $L = 10m$. Em seguida, apresentamos uma segunda opção de resolução da equação recorrendo à fatoração por fator comum, encontrando os mesmos resultados. A aluna A25 comentou: *Essa maneira só resolve as equações do segundo grau desse tipo que tem fator comum. Vou continuar resolvendo do primeiro jeito.*

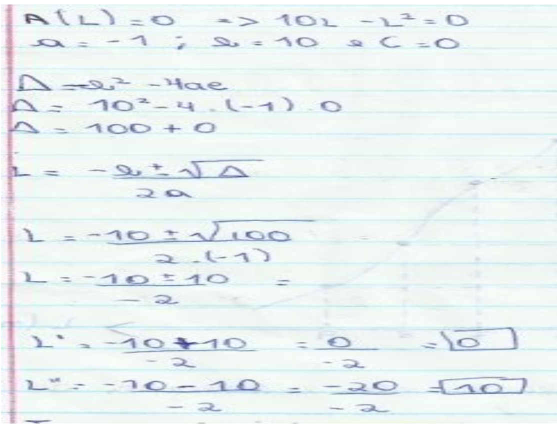


Figura 47: Resolução de uma equação do segundo grau para obter as raízes ou zeros de uma função quadrática pela aluna A23, representando seu grupo.

Continuamos chamando a atenção dos alunos para o significado desses valores no gráfico, desenhamos o esboço novamente do gráfico na lousa para mostrar as raízes no gráfico correspondentes aos pontos $(0,0)$ e $(0,10)$. Exploramos mais essa questão, mostrando a abscissa no vértice $x_v = 5$, exatamente entre zero (0) e 10 que é a média aritmética das raízes e que ela é eixo de simetria da função quadrática. Perguntamos, na ocasião, aos alunos: *Como faríamos para calcular a abscissa sem conhecer as raízes?* Eles disseram: *Tem uma de maneira mais direta para encontrá-la*. Fizemos uma demonstração para os alunos, mostrando como encontrar a fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$, a partir da relação entre os seus coeficientes e raízes: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Pois, a abscissa do vértice é justamente a média aritmética dessa expressão. E perguntamos-lhes, em seguida:

Como poderíamos chegar ao valor da ordenada do vértice da parábola? E eles responderam: *Substituindo o valor de* x_v *na expressão da função* $f(x_v)$. E logo, puderam encontrar 25. Em seguida, demonstramos também em como chegar à fórmula para obter $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, sendo mais uma opção para determinar a ordenada do vértice de uma parábola. Apesar de termos apresentado esta última fórmula aos alunos, eles continuaram preferindo trabalhar com o primeiro modo, fazendo a substituição na equação algébrica da função.

Neste encontro, foi realizado o trabalho de generalização da lei de formação para a função quadrática que estava sendo explorada, já de aulas anteriores, ela é a representação algébrica da função quadrática em estudo, considerada a mais difícil para os alunos. Pois, exige por parte deles um grau maior de generalização e abstração que geralmente pede a ajuda do professor na qualidade de mediador desse processo de aquisição e compreensão dessa linguagem. Podemos observar uma crescente participação dos alunos nesse processo, porém ainda foi necessário o professor trabalhar na zona de desenvolvimento proximal segundo Vygotsky (2007) para que os alunos pudessem sair do nível potencial para o nível real.

Para encontrar as raízes ou zeros da função quadrática, os alunos recorreram à fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau, não perceberam de imediato, que essa equação poderia ser resolvida de forma mais simples através da fatoração de fator comum em evidência, isso nos pareceu que eles não estavam acostumados a trabalhar a transformação de expressão algébrica em produtos, mostrando que as transformações algébricas e suas representações se constituem em uma das mais difíceis aquisição e apreensão de seus significados e conceitos por parte dos alunos.

Outro fato interessante é que na questão G pedimos para os alunos, encontrar os zeros ou raízes dessa função. Em outras palavras, para determinar os elementos do conjunto domínio (pré-imagens) a partir da imagem nula que seria considerada mais difícil em relação aos casos de obtenção de imagens diretamente por substituições numéricas de seus valores dadas as pré-imagens.

A finalização da aula se deu com o professor, trabalhando a formalização dos conceitos, características e propriedades da função quadrática que foram exploradas, neste encontro. Enfatizamos as compreensões essenciais de função quadrática que de acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), raciocinando sobre a forma do vértice de uma função quadrática nos permitirá deduzir um valor máximo ou mínimo e os zeros ou raízes da função quadrática e que eles são simétricos sobre a abscissa do ponto máximo ou mínimo. Embora, não tenhamos ainda convencido os alunos a trabalhar com a fórmula do trinômio quadrado por meio de fatoração.

Neste trabalho mobilizamos a representação gráfica da função quadrática, pois ela nos fornece de forma visual e sintética todas as informações necessárias à compreensão essencial mais efetiva da função quadrática. Recorremos às deduções de fórmulas para o cálculo da abscissa e da ordenada do vértice da parábola sob a orientação do professor. No entanto, podemos observar que os alunos para a determinação da ordenada preferem o cálculo por substituição na forma geral da função quadrática. Existe um movimento de idas e vindas, ora os alunos trabalham com representações algébricas e em outros momentos eles optam pelas representações numéricas, mesmo já tendo alcançado formas mais avançadas de pensamento.

A finalização da exploração de um problema se deu com o fechamento das ideias investigadas, embora saibamos que o trabalho de exploração de problemas apenas se dá por encerrado para aquele contexto do aluno, do professor, da Matemática e da escola. Pois, segundo Andrade (1998), nele há sempre um prazer e uma alegria em se ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso. O problema não acaba com a sua resposta, ele é trabalhado num ir e vir que acaba quando encerra a exploração para aquele grupo ou sujeito e que em outra ocasião novos olhares poderão surgir na proposição do mesmo problema com novas explorações e problematizações que até então não foram percebidas nem exploradas.

5.4.4. Descrição e análise do encontro 19

Aula 25 (Data 03/08/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 3.2: famílias de funções (função linear e quadrática) e representações múltiplas.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 3.2:

Atividade 3.2: O padrão geométrico abaixo contém muitas sequências numéricas diferentes. Cada quadrado é composto de unidades quadradas.

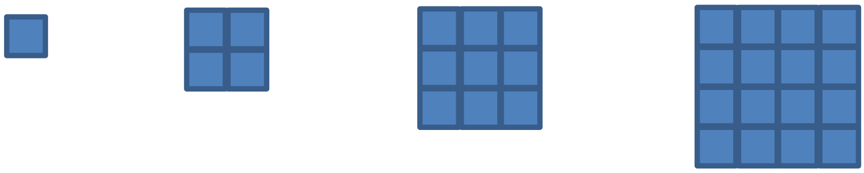


Figura 48: Sequências de padrões geométricos da atividade 3.2.

Considerem o padrão nos perímetros dos quadrados na sequência. Façam assim, criem uma tabela, um gráfico e uma equação para representar a relação entre perímetro e a posição na sequência. Usem essas representações juntas para descrever variações relativas ao perímetro do quadrado com o comprimento do seu lado.

Criem representações da relação área na sequência. Como a área do quadrado se relaciona com o comprimento do seu lado? Usem representações múltiplas para explorar essa questão?

A) Completem a tabela, a seguir:

Tabela 5: Tabela ilustrativa da atividade 3.2.

Comprimento do lado do quadrado (L)	1	2	3	4	5	6	...
Perímetro (P)							
Área (A)							

B) Escrevam as equações que relacionam o comprimento do lado de um quadrado ao seu perímetro e área.

C) Esbocem os seus respectivos gráficos juntos no mesmo plano cartesiano para mostrar a relação entre o comprimento do lado de um quadrado e seu perímetro e área (Adaptado do livro de COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010, p.89).

Iniciamos a aula com entrega do material impresso, leitura individual e formação de duplas para trabalhar juntos na resolução do problema proposto. Demos tempo para que os alunos pudessem desenvolver o problema por conta própria sem a nossa ajuda, de modo geral não houve dificuldade por parte dos alunos, na apresentação das resoluções dessa atividade de investigação de padrões geométricos, envolvendo o cálculo de perímetros e áreas e comparação de seus gráficos. Embora, os alunos tenham representados alguns gráficos problemáticos, eles apresentaram dificuldades de esboçar, à mão livre, um gráfico que projetasse o crescimento linear do perímetro e o quadrático da área. Outra dificuldade deles foi a de não reconhecer de imediato a curva construída como parte de uma parábola para valores positivos.

> Comentário: Podemos apontar duas dificuldades distintas, a primeira diz respeito à construção de gráficos pelo fato de termos que adotar escala e a segunda dificuldade de distinguir função linear de não linear, pois a função perímetro é representada por uma reta, enquanto a função área é representada por uma curva.

Inicialmente eles realizaram o cálculo para o perímetro somando lado a lado, sem perceber a relação P=4l, porém quando se pediu para achar uma equação que relacionasse o perímetro ao seu lado, informaram a expressão corretamente.

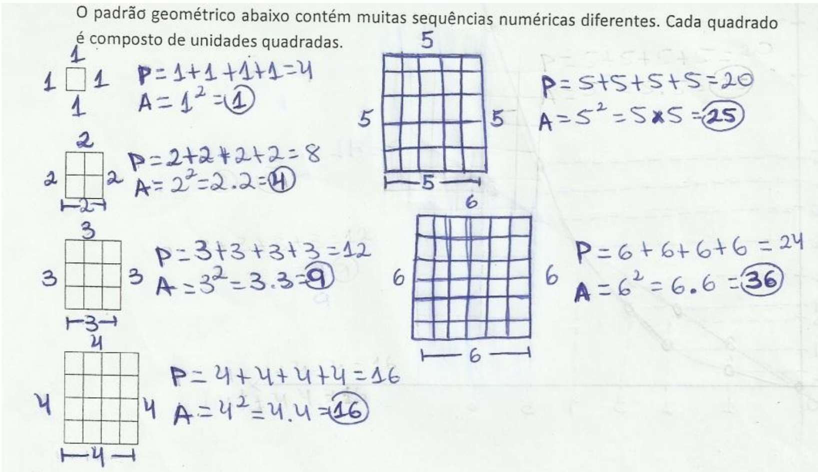


Figura 49: Investigações de padrões geométricos com resoluções de perímetros e áreas da sequência pela aluna A08, representando seu grupo.

Chamamos ao quadro para fazer investigações de padrões geométricos correspondentes a determinação de perímetros e áreas observando a sequência, a aluna A08 que ainda não tinha participado das aulas indo ao quadro, para completar a tabela solicitamos as alunas A37 e A02 para escrever as respectivas equações do perímetro e área em função da medida do seu lado. E pedimos também para a aluna A26, esboçar o gráfico das funções na lousa.

Comprimento do lado do quadrado (L)	1	2	3	4	5	6	...
Perímetro (P)	4	8	12	16	20	24	...
Área (A)	1	4	9	16	25	36	...

Figura 50: Representação tabular da aluna A37, representando o seu grupo.

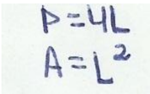


Figura 51: Representação algébrica das equações das funções perímetro e área em relação ao seu lado pela aluna A02.

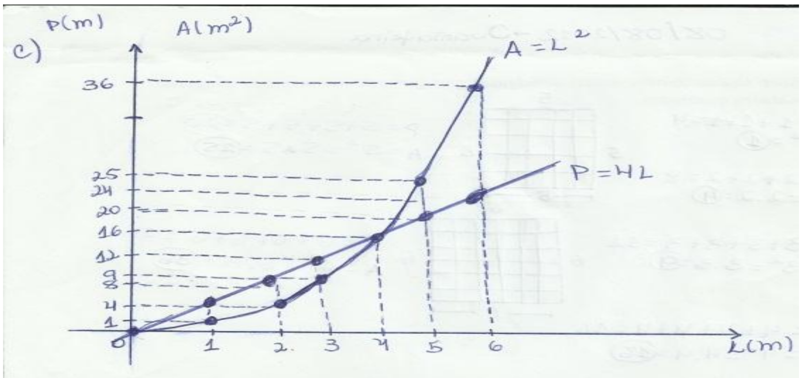


Figura 52: Representação gráfica do problema proposto pela aluna A26 representando seu grupo.

Antes de partirmos para a formalização dos conteúdos explorados no problema, interrogamos o grande grupo: *Em que ponto de coordenadas as funções se encontram?* O grande grupo respondeu: *As funções se encontram no ponto de coordenadas* $(4, 16)$. Insistimos ainda: *Mas, por que isso acontece?* O aluno A01: *Ah, professor. Quando o lado do quadrado mede 4, tanto o perímetro quanto a área do quadrado vale 16.*

Em uma exposição dialogada, enfatizamos a regularidade da função linear perímetro em função da medida do seu lado, ou seja, mostrando a taxa de variação constante, sempre igual a 4. Enquanto a função área que é quadrática, a primeira diferença não é constante, embora essa sequência seja respectivamente igual a $3, 5, 7, 9, 11$,... é uma função afim com taxa de variação constante igual a 2, exatamente a metade do coeficiente a para a função quadrática $A = l^2$ ou genericamente $f(x) = ax^2$ com $a \neq 0$. Mostramos também para os alunos a expansão dessa função para valores reais, em que o eixo das ordenadas equivale ao eixo de simetria da parábola, ou seja, tem a função de um espelho. Portanto, poderíamos projetar para esquerda essa mesma curva mantendo a mesma distância dos pontos que estão à direita à sua esquerda para uma função quadrática de variáveis reais. Ilustramos o gráfico da função de variável real $f(x) = x^2$, mostrando as características e colocando ela como função padrão para construção de funções quadráticas de variável real.

A partir deste último exemplo, exploramos mais construções gráficas, mostrando as transformações que ocorrem com funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2$, $f(x) = x^2 + c$ e $f(x) = x^2 - c$. Chamamos os alunos, A03, A10, A25, A27, A32, A36, A40 e A43 ao quadro, eles formam sorteados ao abrirmos o diário de classe, escolhidos aleatoriamente em ordem crescente, com a finalidade de construir gráficos de funções quadráticas. Assim podemos concluir que eles apresentaram indícios de compreensão essencial 4c, de acordo com Cooney, Beckmann, Lloyd (2010), para funções de variáveis reais, compondo uma função com variação ou escala na forma de mudanças nos coeficientes de funções, o seu gráfico é facilmente previsível. Os alunos evidenciaram que quanto maior for o coeficiente a, maior a compressão sobre a curva da função quadrática e quanto menor o coeficiente a, maior o alongamento sobre a curva da função quadrática, eles puderam também perceber que c indica quantas unidades a função desloca para cima quando positivo e para baixo quando negativo. Ainda compreenderam que $a > 0$ a concavidade é voltada para cima e quando $a < 0$ a concavidade da parábola é voltada para baixo, ou seja, é feito uma reflexão sobre a curva.

> Comentário: Os alunos não apresentaram dificuldade na resolução desta questão, no entanto ela sugere compreensões essenciais de funções 3b que indica a função afim caracterizada por uma taxa de variação constante e a compreensão essencial 3c que indica que a função quadrática é caracterizada por uma taxa de variação linear e no caso particular da função quadrática padrão o eixo das ordenadas é o eixo de simetria da parábola. Por último instigamos os alunos a apreenderem a compreensão essencial 4c mostrando as alterações nos coeficientes a e c da função quadrática gerando famílias de funções com gráficos previsíveis.

Neste encontro, tínhamos apenas uma aula para trabalharmos com a exploração de um problema, envolvendo o uso combinado de representações múltiplas, dentro do contexto de problemas do mundo real ou de situações de modelação. No problema específico que foi trabalhado e explorado na aula, o contexto fora o próprio padrão concreto de sequências de figuras geométricas, gerando sequências aritméticas e quadráticas com o uso de representações múltiplas.

O importante, aqui, foi privilegiarmos diferentes representações de funções para a mesma função a fim de conectar as diferentes ideias e representações. Segundo Kieran (2007), a visão de Álgebra Escolar e particularmente de ensino de funções tem sido amplamente considerada pelos pesquisadores, movendo de uma visão de representações e manipulações puramente algébricas para uma visão que contemple representações múltiplas, as pesquisas evidenciam que os alunos derivam significados de objetos algébricos para recursos múltiplos. Portanto, mais do que trabalhar com cada uma dessas representações de forma isolada, todas essas pesquisas sugerem o trabalho no sentido e direção da coordenação entre as representações múltiplas de funções.

Quanto à metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática se deu via resolução de problemas, aliada ao uso de representações múltiplas, após a leitura individual, formou-se duplas de alunos, como precisávamos gerir apenas uma aula para trabalharmos a resolução do problema, explorando as representações múltiplas de funções, solicitamos três alunos de grupos distintos para fazer a defesa das questões exploradas pelo problema. Pois, nosso objetivo fora encerrar as discussões e explorações das questões da situação-problema neste mesmo encontro.

Podemos perceber certa fluência por parte dos alunos nas representações numéricas de funções através das explorações de perímetros e áreas e na montagem da tabela proposta para a questão da letra A, segundo Vygotsky (2008) as representações numéricas se encontram dentro dos conceitos espontâneos dos alunos. Eles não sentiram dificuldade de representar algebricamente as funções perímetro e área porque remetem ao contexto da geometria, pois mesmo sendo estes conceitos científicos, eles já estavam fazendo parte do repertório do cotidiano escolar desses alunos que com certa facilidade apresentaram as equações algébricas dessas funções, sinalizando que as conexões entre as diversas áreas dentro da Matemática podem ajudá-los na compreensão do conceito de função dentro do contexto geométrico.

Neste encontro, no trabalho de formalização dos conteúdos trabalhados, enfatizamos a ideia de taxa de variação para função perímetro (função afim), mostrando que a taxa de variação é constante, umas das compreensões essenciais de função afim e para a função área (função quadrática), foi realçado a propriedade que a primeira taxa de variação da função não é constante e a segunda taxa de variação é constante, que é também uma das características da compreensão essencial de função quadrática.

Exploramos ainda a ideia de que o coeficiente da função quadrática a é a metade da segunda taxa de variação e isso é válido para todas as sequências quadráticas. Chamamos a atenção dos alunos para a ideia de simetria. Desse modo, podemos evidenciar através das produções coletivas que eles registraram e nos foram entregues ao final da aula, uma compreensão essencial de função quadrática e reconhecimento da importância de se trabalhar com representações múltiplas de funções. E na extensão do problema com questões instigadas sobre transformações de gráficos de funções, após discussões e chamadas ao quadro, podemos perceber certo avanço no sentido de uma compreensão essencial de que a partir das mudanças de coeficientes de funções quadráticas, em que alterando os coeficientes podemos mudar o gráfico da função, sendo este gráfico facilmente previsível.

5.4.5. Descrição e análise do encontro 20

Aulas 26 e 27 (Data 08/08/2012)

<u>*Conteúdos desenvolvidos na atividade 3.3*</u>: Família de função (função quadrática) e representações múltiplas de funções, destacando conexões múltiplas relacionadas a diversos temas fora da Matemática, tais como trabalho, economia e cidadania.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 3.3:

Atividade 3.3: Uma bola é lançada ao ar, a partir de uma altura h em metros expressa em função do tempo t em segundos, decorrido após o lançamento. Seja a equação da função $h = 6 + 5t - t^2$, considerando as condições acima:

A) Construam uma tabela que relacione a altura alcançada pela bola com o tempo após seu lançamento (sugestão: 0 a 6 segundos).

B) Esbocem um gráfico a partir da tabela do item A.

C) Qual é a imagem dessa função?

D) Quais são os zeros da função?

E) Em que instante a bola atinge a sua altura máxima?

F) Qual é a altura máxima atingida pela bola?

G) Qual o esporte mais popular no Brasil?

H) Vocês têm ideia de quanto é o salário do Neymar? Vocês consideram esse salário justo?

I) Qual é o valor do salário mínimo no Brasil? Como vocês veem a distribuição de renda no nosso país? (Adaptado do livro de MORAES et al, 2008, p.p.40-41).

Entrega de material impresso seguido de leitura individual e primeiras tentativas de compreensão e desenvolvimento, seguida de formação de grupos de quatro alunos. Demos certo tempo para que eles fossem trocando ideias nas suas equipes e ficamos observando avanços que eram muito significativos, eles construíram tabelas, determinaram as raízes da função, o instante máximo e altura máxima por conta própria. Porém, não estavam conseguindo responder a pergunta que pedia a imagem da função, chegando ao ponto da aluna A16 perguntar*: O que é mesmo uma imagem de uma função?* Explicamos para o GG: *A imagem é a variação da função na reta vertical, vejam no gráfico que vocês que foi construído, para quais valores a função varia?* (Demos um tempo para que os alunos analisassem o campo de variação da função quadrática).

PP: *Qual foi a altura máxima encontrada?*

GG: *12,25 metros* (coro).

PP: *Então o conjunto imagem é* $Im = \{h \in Q / h \leq 12{,}25\ m\}$. *Pois, a função só existe para a altura maior ou menor do que 12,25 metros. Agora, me respondam: Qual o domínio dessa função?*

A02: $\{\mathrm{t} \in \mathrm{Q}/\mathrm{t} \geq 0\ \mathrm{s}\}$. Porque não existe tempo negativo.

A13: *As últimas perguntas são fáceis. O esporte mais popular do Brasil é o futebol e o salário de Neymar é de 1,5 milhões de reais.*

A30: *É mais, acho que ele recebe dois milhões por mês.*

A35: *Atualmente, o contrato dele é de três milhões de reais por mês.*

A26: *Fora o que pagam a ele para comerciais e eventos.*

A01: *Eu acho muito injusto num país onde o salário mínimo é de R$ 622,00, fora os descontos. Acho um absurdo!* (Mostrando indignação)

A31: *Eu acho justo, ele tem talento.*

A35: *Mas, muitos jogadores de futebol não sabem como administrar essa nova vida de milionários.*

PP: *Arredondando o salário mínimo para R$ 600,00 só para nos ajudar a fazer as contas, um salário de três milhões de reais daria para pagar quantos salários mínimos?*

A20: *Cinco mil trabalhadores que ganham um salário mínimo.*

A37: *Meu pai é professor da rede pública estadual e recebe só R$ 1.200,00 por mês.*

A24: *Com o salário do Neymar pagaria 2.500 professores.*

A37: *E olha que meu pai tem pós, já o Neymar não terminou nem o terceiro ano do Ensino Médio.*

A35: *Está certo que o salário de professor de escola pública não é nada justo.*

PP: *Isto é verdade, acaba sobrecarregando o professor, trabalhando dois ou mais expedientes para poder receber um salário razoável.*

A42: *Acho a distribuição de renda no Brasil muito injusta. O Brasil é um país rico em economia comparado a outros países. Mas, essa riqueza fica nas mãos de um pequeno grupo de pessoas ricas.*

PP: *E o que vocês acham da parcela pobre da população que vive de programas do governo tais como bolsa família e bolsa escola que é uma forma de eliminar a fome em primeira instância. Porém, se tirarmos essas bolsas, o que será dessa gente toda que hoje depende desses auxílios?*

A45: *Eu sou a favor dessas bolsas porque ajuda muita gente e dá uma boa movimentação na economia.*

A06: *Seria melhor oferecer trabalho ou ainda ensinar um ofício que garantisse o mínimo de dignidade para essa gente no seu dia a dia.*

A22: *Eu acho justo ajudar as pessoas mais humildes, embora não esteja resolvendo o problema de fato. Mas já é alguma coisa.*

Depois dessa discussão calorosa, dividimos a lousa em três partes e selecionamos três pessoas de equipes distintas para responder as questões de exploração matemática, ficando essa distribuição do seguinte modo: A04 construiu a tabela e o gráfico da função, A29 encontrou os zeros da função e o instante máximo e A09 determinou a altura máxima da função.

Encerramos a aula falando das aplicações das funções quadráticas que as funções quadráticas podem ser usadas para tratar de um novo cenário do mundo físico, como por exemplo: o lançamento de uma bola no ar. E que elas também podem ser usadas para projetar microfones parabólicos, satélites parabólicos, pontes suspensas parabólicas, dentre outras aplicações e engenharias humanas.

Outro aspecto que exploramos, nesta sessão de aula, foi mostrar a forma vértice, fazendo transformações de tratamento algébrico a partir da forma geral:

$$h = -t^2 + 5t + 6 \to h = -(t^2 - 5t - 6) \to h = -\left[\left(t^2 - 5t + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6\right]$$

$$\to h = -\left(t^2 - 5t + \frac{25}{4}\right) + \frac{25}{4} + 6 \to h = -\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{4} \to h$$

$$= -(t - 2{,}5)^2 + 12{,}25.$$

Elucidamos aos alunos as vantagens e as desvantagens que cada uma delas apresenta nas informações fornecidas e na análise gráfica de cada uma dessas formas em particular. Fizemos os alunos perceberem que as equações algébricas $h = -t^2 + 5t + 6$ e $h = -(t - 2{,}5)^2 + 12{,}25$ representam a mesma parábola. Em relação à primeira representação evidenciamos que o coeficiente $a = -1 < 0$, isso denotou que a parábola tem concavidade para baixo e intersecta o eixo dos y no ponto de coordenada $(0{,}6)$. No entanto, a segunda representação dessa função apontou para o gráfico dessa parábola sendo obtido a partir do gráfico $y = t^2$, por meio de uma reflexão, deixando a parábola com a concavidade para baixo e duas translações: uma horizontal à direita de 2,5 e uma vertical de 12,25 para cima. Apresentamos a forma-vértice $y = a(x - h)^2 + k$, realizamos algumas demonstrações e fizemos ilustrações na lousa com mais exemplos de transformações de funções pelos quais os alunos puderam compreender que h deslocará o gráfico da função horizontalmente, e k o deslocará verticalmente.

> <u>Comentário</u>*:* Temos observado frequentemente em sala de aula, quando pedimos alguma justificativa ou quando explicamos algo diferente daquilo que eles já estão adotando como padrão aceito e já cristalizado como a fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau, a fórmula do vértice de uma parábola, geralmente, os alunos se sentem incomodados. Para os alunos, isto parece ser visto como um exagero do professor e não como um processo de validação mais seguro e mais explicativo para aquele fato buscar formas diferentes daquelas que eles já estão acostumados, mesmo que eles estejam trabalhando em um ambiente de resolução e exploração de problemas. Evidenciamos que ao mostrarmos ilustrações gráficas na lousa com deslocamento e transformação da parábola a partir de mudanças dos coeficientes da forma geral e parâmetros da forma-vértice, eles passaram a reconhecer a importância desse trabalho de tratamento algébrico para chegarmos a resultados mais compatíveis e de validações mais seguras em relação às formulações já consagradas e aceitas pelos grupos de alunos.

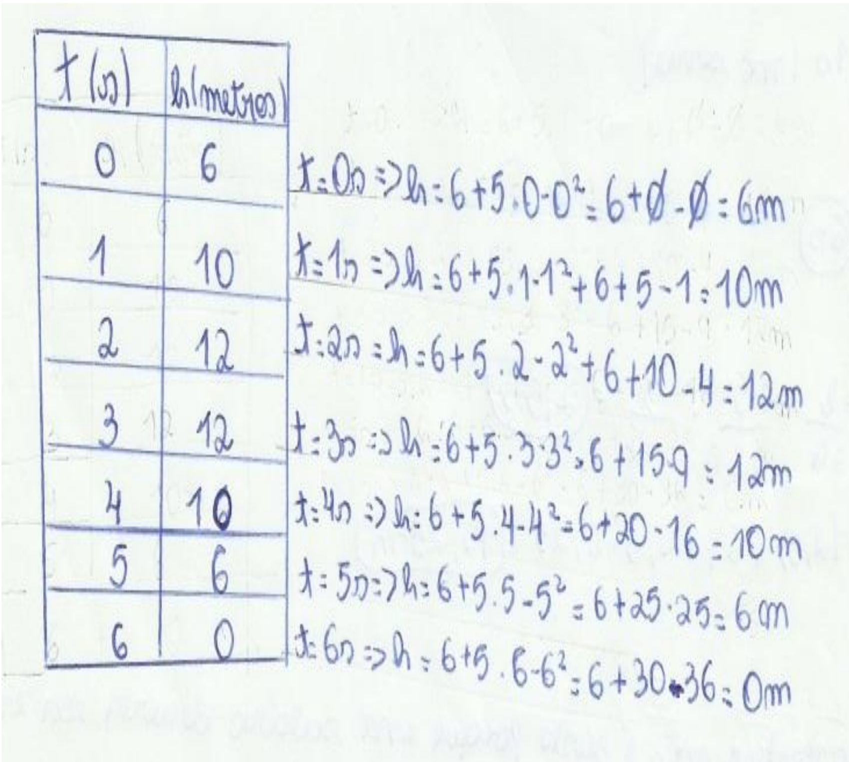
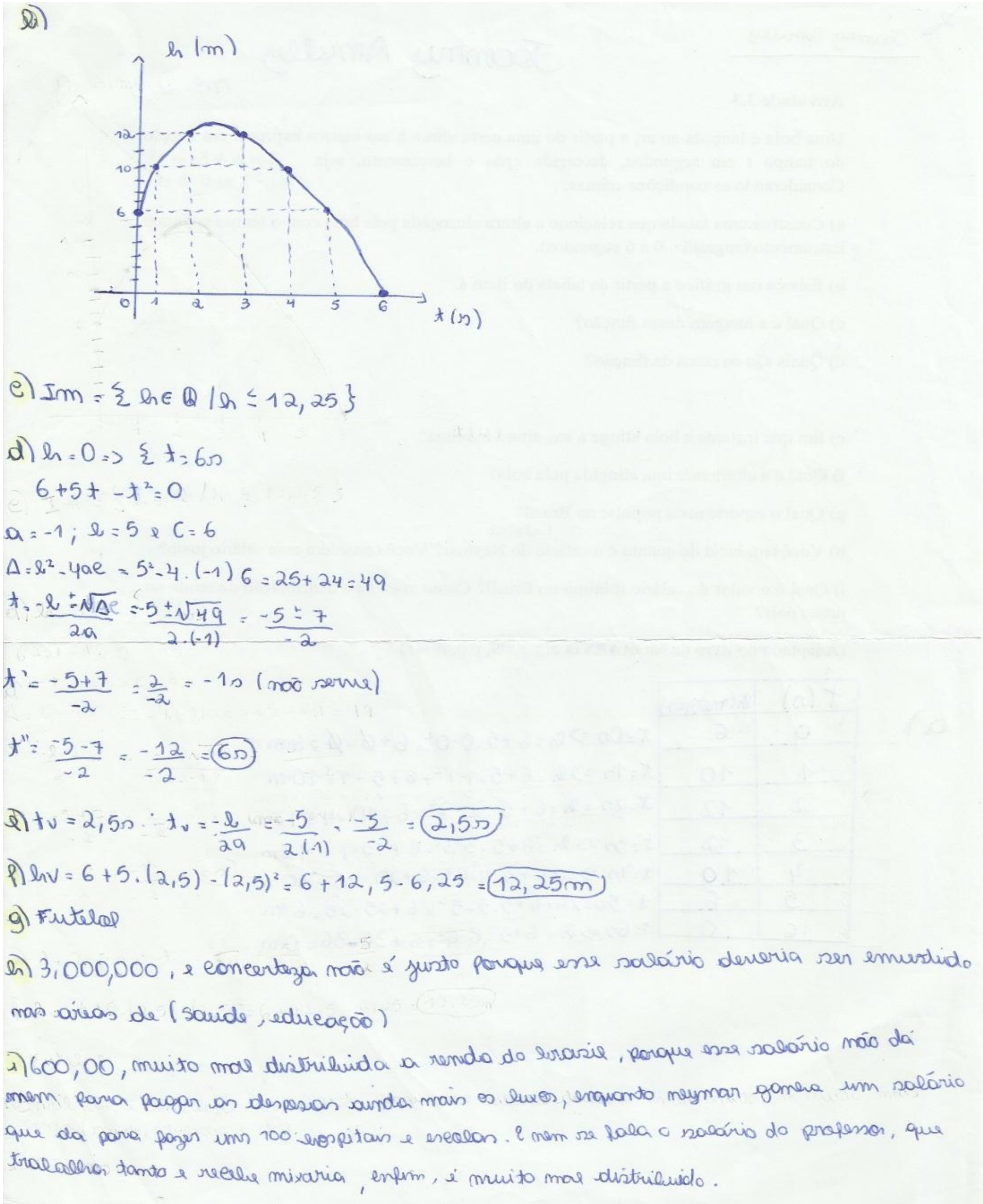


Figura 53: Representação tabular acompanhada de cálculos numéricos na obtenção de imagens a partir de elementos de pré-imagens pela aluna A42, representando seu grupo.



b)

c) Im = { $h \in \mathbb{R}$ / $h \leq 12,25$ }

d) $h = 0 \Rightarrow \{ t = 6s$

$6 + 5t - t^2 = 0$

$a = -1$; $b = 5$ e $C = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.(-1)\,6 = 25 + 24 = 49$

$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2.(-1)} = \frac{-5 \pm 7}{-2}$

$t' = \frac{-5+7}{-2} = \frac{2}{-2} = -1s$ (não serve)

$t'' = \frac{-5-7}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6s$

e) $t_v = 2,5s$ ∴ $t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2(-1)} = \frac{-5}{-2} = 2,5s$

f) $h_v = 6 + 5.(2,5) - (2,5)^2 = 6 + 12,5 - 6,25 = 12,25m$

g) Futebol

h) 3,000,000, e concerteza não é justo porque esse salário deveria ser envestido nas áreas de (saúde, educação)

i) 600,00, muito mal distribuida a renda do brasil, porque esse salário não dá nem para pagar as despesas ainda mais os luxos, enquanto neymar ganha um salário que da para fazer um 100 hospitais e escolas. E nem se fala o salário do professor, que trabalha tanto e recebe mixaria, enfim, é muito mal distribuido.

Figura 54: Resolução da atividade 3.3 pela aluna A42, representando seu grupo.

Transcrição textual das questões H e I da atividade 54: h) 3.000.000 de reais, e com certeza não é justo porque esse salário deveria ser investido nas áreas de (saúde, educação). i) 600 reais, muito mal distribuída à renda no Brasil, não dá para pagar as despesas ainda mais os luxos, enquanto Neymar ganha um salário que dá para fazer uns 100 hospitais e escolas. E nem se fala o salário do professor, que trabalha tanto e recebe mixaria, enfim, é mal distribuído.

Inicialmente, durante o desenvolvimento dos trabalhos em grupo os alunos mobilizaram representações múltiplas de função quadrática, construção de tabela e gráfico a partir da representação da equação algébrica da função quadrática dada no problema, calcularam os zeros da função quadrática sem apresentar dificuldades, compreenderam raciocinando sobre a forma-vértice de uma função quadrática que ela teria um valor máximo, a altura máxima atingida pela bola pela sua trajetória descrita no ar, e que a sua abscissa corresponderia ao instante máximo. Podemos indiciar que houve compreensão por parte dos alunos das ideias e compreensões essenciais de família de funções quadráticas e de representações múltiplas de funções quadráticas de acordo com as ideias e compreensões essenciais apresentadas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010).

A dificuldade que os alunos sentiram para encontrar o conjunto imagem desta função remete aos estudos de Markovits, Eylon e Buckheimer (1995), que evidenciaram uma grande complexidade no estudo do conceito de função. Pois, envolve muitos elementos tais como imagem, domínio, dentre outros. E a nossa experiência docente nos diz que estes elementos responsáveis por estas dificuldades podem ser explorados nos diversos contextos de estudos de funções matemáticas para que haja um aprendizado mais efetivo.

Este problema traz a lei de uma função quadrática que modelizando o fenômeno físico de um lançamento de uma bola no ar descreve naturalmente uma parábola, houve exploração de ideias matemáticas e logo em seguida, uma expansão para questões de natureza social. Pois, o problema está contextualizado dentro do mundo dos esportes, assunto este de grande interesse dos adolescentes e jovens, principalmente por nós brasileiros. Facilmente, eles identificaram na figura do jogador de futebol Neymar, um grande ídolo, para alguns alunos o seu salário é justo por conta do seu talento, outros foram mais críticos, demonstrando verdadeiro incômodo em um país como o Brasil uma pessoa ganhar milhões de reais por mês. Esta discussão sinalizou novos questionamentos quando foi perguntado se eles sabiam o valor do salário mínimo no Brasil. Ficamos surpresos, porque todos eles sabiam o valor do salário mínimo, eram todos conhecedores dessa realidade. Acreditamos que isto aconteceu porque a maioria deles convive com essa realidade, das suas famílias terem que sobreviver com um ou dois salários mínimos. Este é o perfil social dos alunos da turma do 1º ano que está sob a nossa investigação. Também mostraram discordar da divisão de renda no nosso país porque o Brasil produz uma riqueza que fica nas mãos de uma minoria da população enquanto a maioria passa por sérias dificuldades. Não podemos deixar de mencionar o fato de que alguns alunos não sabiam o significado de *divisão de renda de um país*, enquanto outros alunos recordavam o tema em questão das aulas de Geografia e História.

A metodologia de ensino-aprendizagem foi via resolução e exploração de problemas em múltiplos contextos, começamos com um problema de modelização de um fenômeno físico e estendemos para outras questões de natureza social porque acreditamos que a educação tem uma finalidade maior que é a formação para a cidadania. Nesta última discussão deixamos os alunos mais a vontade para debaterem entre si com pouca intervenção do professor. As explorações matemáticas não foram desprezadas, os alunos trabalharam em grupo, inicialmente de forma independente porque algumas perguntas estavam dentro do que Vygotsky (2007) denominou de desenvolvimento real, quando se fez necessário realizávamos mediações, trabalhando na zona de desenvolvimento proximal para que os alunos pudessem se desenvolver potencialmente.

Houve o momento de plenárias, análises e discussões das explorações matemáticas e finalizamos a aula com exemplos de aplicações das funções quadráticas no contexto do mundo real, sobretudo com exemplos que eles pudessem visualizar, seguidos de uma exposição dialogada que mostrava a relação entre a forma geral de uma função quadrática e a forma-vértice, cada uma apresentando vantagens e desvantagens, a primeira fornecendo o intercepto do eixo y e a segunda com base na aplicação de transformações como reflexão e translações em gráficos de funções. Esse processo tornou o gráfico da função quadrática facilmente previsível, correspondendo à compreensão essencial de funções 4c relativa à ideia fundamental de transformações e combinações de funções segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010).

Por outro lado, os alunos dessa turma não estavam acostumados a completar quadrados para descobrir a forma-vértice, muitos julgavam entediante completar o quadrado na forma geral para encontrar o vértice, pois eles viam na fórmula geral da função quadrática uma maneira mais fácil de usar e de encontrar interceptos e de deduzir a fórmula para encontrar o vértice de uma parábola que segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) raciocínios dessa natureza sobre esses objetos matemáticos dão a compreensão essencial de uma função quadrática.

5.4.6. Descrição e análise do encontro 21

Aulas 28 e 29 (Data 10/08/2012)

<u>Conteúdos desenvolvidos na atividade 3.3</u>: Família de função (função quadrática); combinação e transformação de funções a partir da multiplicação de funções e representações múltiplas de funções.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 3.4:

Atividade 3.4: I - Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a $R\$ \, 1{,}50$ cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi $R\$ \, 1{,}48$, foram vendidos 10.200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro e V o valor, em $R\$$, arrecadado por dia com a venda de álcool, então a expressão que relaciona V e x é:

A) $V = 10.000 + 50x + x^2$

B) $V = 10.000 + 50x - x^2$

C) $V = 15.000 - 50x - x^2$

D) $V = 15.000 + 50x - x^2$

E) $V = 15.000 - 50x + x^2$

(ENEM – 2009)

II – Dê a lei da função quadrática cujo gráfico é a parábola:

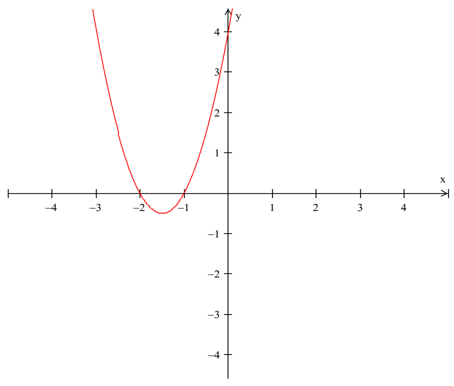


Figura 55: Gráfico ilustrativo da atividade 3.4 questão II.

Entrega de material impresso com duas atividades, a primeira dentro de um contexto e a segunda descontextualizada, pois, precisamos também trabalhar com situações que estejam dentro da própria Matemática, nesta última questão em particular desejamos que os alunos pudessem realizar a conversão da representação gráfica para a representação algébrica, esse movimento não é assim tão natural para nossos alunos porque exige um pouco mais de compreensão das características da função quadrática neste caso específico. Entretanto, a compreensão efetiva de função quadrática só se dará mediante confluências dessas ideias, características e representações. É necessário que o aluno compreenda esse movimento de representações das funções.

Dividimos a turma em grupos de cinco alunos porque havia duas questões para a equipe pensar sobre elas e a turma estava bem cheia, formou-se oito grupos. Circulamos na sala de aula para verificar o andamento do desenvolvimento dos alunos sobre as questões propostas observamos que houve certa predominância de representações numéricas a representações algébricas em relação à questão do ENEM (I) onde um grupo de alunos partiu do exemplo numérico particular $x = 2$ e substituiu na expressão $V = 15000 - 50x + x^2 = 15000 - 50 \cdot 2 + 2^2 = 15000 - 100 + 4 = 14904$, partindo de uma das alternativas do enunciado da questão, de onde podemos deduzir que as questões abertas deixam margem para uma interpretação mais adequada, mais original e mais consciente de uma resolução apresentada. Enquanto as questões de múltipla escolha induzem tanto ao acerto quanto ao erro de interpretação a partir de uma alternativa que já sugere uma resposta a uma determinada questão, mesmo que o aluno acerte a questão proposta, ele não tem domínio sobre as ideias que estão envolvidas, e, acabam não raciocinando adequadamente sobre a questão. Alguns alunos gostam que o professor apresentem dicas para achar as respostas, chutar as respostas certas. Tais práticas não levam a compreensão do problema. Outro grupo respondeu a letra E, nisso instigamos aos alunos sobre como eles obtiveram essa resposta, mas não houve justificativa convincente por parte dos alunos nesse primeiro momento.

O aluno A01 apresentou iniciativa na resolução para os problemas propostos. Ele recordou a fórmula da forma fatorada do trinômio do segundo grau $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ e conseguiu chegar à lei de formação da parábola expressa pela equação $y = 2x^2 + 6x + 4$. O aluno A01 para o seu grupo foi o mediador explicando para os demais colegas do seu grupo o seu processo de desenvolvimento para encontrar a resposta da questão II.

Chamamos a atenção do grande grupo na busca de significados para os pontos destacados no gráfico (-2,0), (-1,0) e (0,4).

> A21: *-2 e -1 são as raízes da função.*
>
> A18: *A curva toca no eixo horizontal em -2 e -1.*
>
> A43: *A curva toca o eixo vertical em 4.*
>
> A05: *Eu sei que o 4 é o coeficiente c.*

Observamos que houve grupos que substituíram os pontos conhecidos na forma geral $y = ax^2 + bx + c$, eles montaram um sistema de equações lineares com três equações e três incógnitas, encontrando respectivamente $c = 4, b = 6$ e $a = 2$ de onde deduziram que a função quadrática procurada é $y = 2x^2 + 6x + 4$.

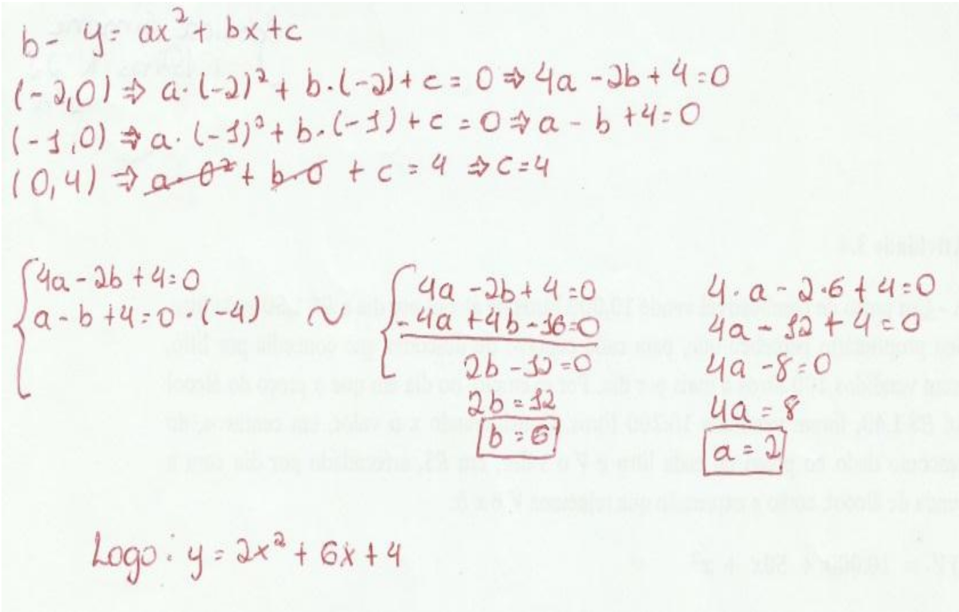


Figura 56: Resolução da questão II relativa à atividade 3.4 pela aluna A19, representando o seu grupo.

Selecionamos os alunos de quatro grupos distintos para irem à lousa levar as questões em plenária para o grande grupo. A aluna A31 defendeu de maneira simples e sucinta a resolução da questão I, mostrou que $V(x) = P \cdot Q$, chamou P o preço unitário do combustível correspondente a $1{,}50 - 0{,}01x$ e Q de quantidade de álcool vendida por dia correspondente a $10.000 + 100x$ e em seguida fez a multiplicação de binômio por binômio, encontrando o trinômio $15000 + 50x - x^2$, representando a equação algébrica correspondente ao valor arrecadado V(x) (alternativa D).

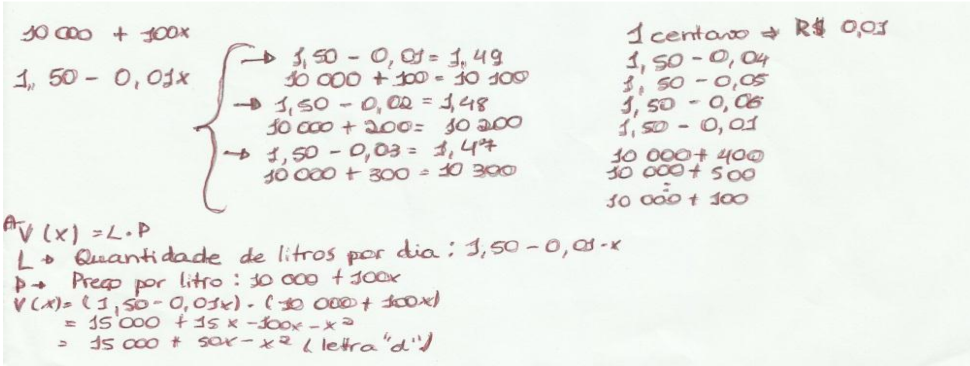


Figura 57: Resolução da questão I relativa à atividade 3.4 pela aluna A22, representando seu grupo.

Comentário: A aluna A31 resolveu na lousa a atividade, houve unanimidade por parte do grande grupo, ela explicou o procedimento executado, mostrou-se segura e convincente na sua apresentação.

A aluna A38 resolveu a próxima questão (II) por meio de um sistema de equações lineares. A aluna A02 resolveu essa mesma questão (II) usando a fórmula do trinômio quadrado do segundo grau. E o aluno A01 já havia desenvolvido um terceiro modo trabalhando as relações entre coeficientes e raízes de uma equação do segundo grau.

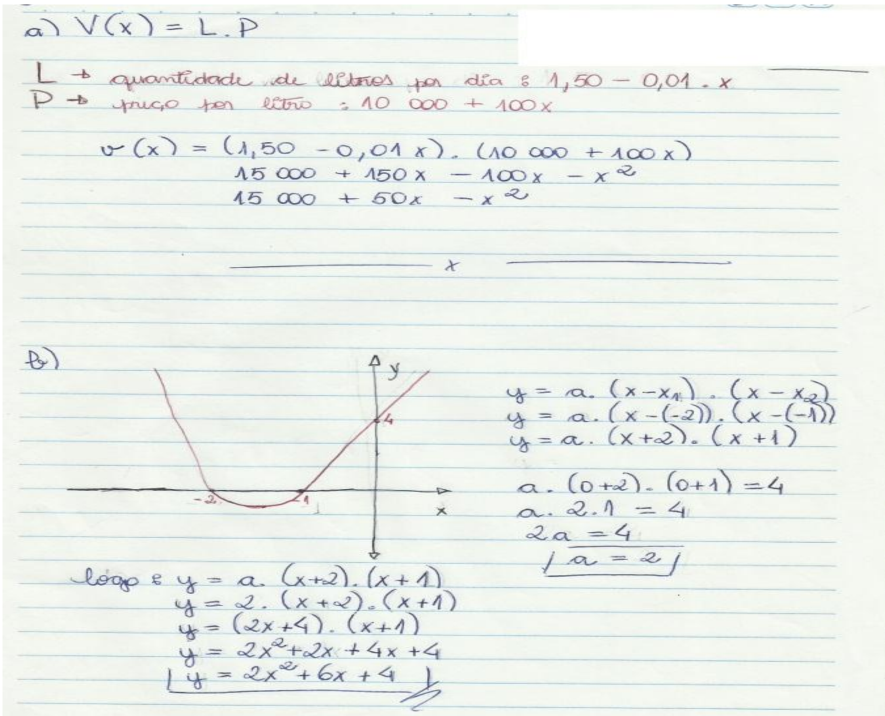


Figura 58: Resolução da atividade 3.4 pela aluna A31, representando seu grupo.

Analisamos juntos com os alunos cada questão apresentada e houve um consenso de que todas as questões estavam corretas. Embora, tenha havido divergência entre eles em relação à questão (II) no sentido de qual seria a melhor maneira de resolvê-la. O aluno A01 achou a sua última versão mais simples. Ele costumava ajudar muito os colegas de sala, inclusive, fora do horário de aulas. A aluna A41 assim como os demais alunos da turma compreenderam bem as questões após as discussões e as análises dos resultados na sua equipe de trabalho, e, pelo grande grupo junto com o professor, depois da formalização dos conteúdos na apresentação final das questões. Estas foram observações feitas, depois de alguns comentários finais desses alunos no final da aula.

A questão II do ENEM (2009) é um exemplo de questão em que a sua resolução apresentou como exigência conceitual o conhecimento algébrico de relações entre variáveis e de funções afim e quadrática. A resolução dessa questão pela turma consistiu na apresentação de duas resoluções, uma primeira na qual as equipes recorreram às representações numéricas e uma segunda resolução na qual as equipes organizaram as informações que estavam no enunciado de modo a reescrever os dados apresentados por meio de uma equação algébrica que relacionava as duas grandezas $V(x)$ e x. O valor $V(x)$ arrecadado por dia com a venda de álcool, correspondeu ao produto do preço unitário do litro de combustível pela quantidade de litros vendidos.

A conversão entre representações é uma habilidade importante em Matemática, pois está relacionada à capacidade de realizarmos confluências entre as representações múltiplas e o sentido em que essa conversão é efetuada. A exigência cognitiva requerida em um sentido não é a mesma que no sentido contrário, fato que faz com que os alunos muitas vezes não reconheçam uma mesma função em duas de suas representações diferentes. Os livros didáticos, geralmente, privilegiam apenas um sentido, deduzindo com isso que o trabalho em um sentido capacitará automaticamente os alunos para a conversão no sentido contrário.

Com relação ao estudo das funções, optamos em trabalhar com todas as passagens de conversão tanto no sentido algébrico para o gráfico quanto à passagem inversa que é considerada problemática, o que gerou nos alunos inicialmente dificuldade na leitura e interpretação do gráfico da função quadrática na questão II. Nesse tipo de conversão, se fez necessário identificarmos no problema as unidades significativas, os três pontos de coordenadas que foram destacados, para se escrever a equação algébrica que correspondeu, neste caso, à equação de uma função quadrática na sua forma geral.

Para explorarmos representações múltiplas, optamos por mostrar a questão II, ilustrando bem a passagem da representação gráfica para algébrica. Observarmos que muitos grupos realizaram conversão, recorrendo ao reconhecimento no gráfico dos três pontos de coordenadas cartesianas (-2,0), (-1,0) e (0,4) e os associou corretamente a fórmula geral da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, montando um sistema de equações lineares com três incógnitas e três equações, que foi possível e determinado. Após simplificações, as equipes obtiveram os valores de a, b e c. Chegando a função quadrática $y = 2x^2 + 6x + 4$.

No entanto, foi possível observarmos também que outras equipes se depararam com a mesma dificuldade apontada pelos pesquisadores Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995), muitos alunos não conseguiram fazer a conexão entre os componentes da definição verbal da função e os componentes da representação gráfica visual, na qual houve também uma dificuldade secundária inerente à forma gráfica, envolvendo o papel duplo dos pontos situados nos eixos, respectivamente no nosso caso específico da questão II, as coordenadas $(-2{,}0), (-1{,}0)$ e $(0{,}4)$. E como tais podiam representar pares (pré-imagem, imagem), correspondentes às intersecções do gráfico com um dos eixos; mas foram também pontos dos eixos. Em nenhuma outra representação temos esse problema senão na representação gráfica. Muitos alunos que interpretou incorretamente o gráfico da função, não percebeu que na representação gráfica o eixo x representa o domínio e o eixo y representa o contradomínio, ao passo que os pontos representam os pares (pré-imagem, imagem).

O aluno A01 recordou a forma fatorada $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ do trinômio do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$ e, a partir das raízes da função quadrática -2 e -1, representadas e identificadas no gráfico pelas intersecções com o eixo dos x, ele pôde substituir na forma fatorada e escreveu $y = a(x + 2)(x + 1)$. Em seguida, substituiu o ponto de coordenada $(0{,}4)$, encontrando o valor de $a = 2$. De onde ele pôde deduzir que a fórmula geral da função quadrática correspondeu a $y = 2x^2 + 6x + 4$. O aluno A01 trabalhou na zona de desenvolvimento proximal junto com o seu grupo, favorecendo um aumento do nível de compreensão da questão proposta, provavelmente sem a sua contribuição, eles não teriam chegado a esse nível de compreensão.

O aluno A01 apresentou outra possibilidade de encontrar a equação algébrica da função quadrática recordando as relações entre os coeficientes e raízes de uma equação do 2º grau (relações de Girard), percebeu inicialmente que o ponto de coordenada $(0,4)$ era correspondente à intersecção da função quadrática com o eixo y, ou seja, o valor do coeficiente c da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$. Outra compreensão importante que foi decisiva na resolução dessa questão, por meio das relações de Girard, foi o fato de o aluno A01 ter identificado as abscissas -4 e -1 como raízes da função quadrática, que estavam representadas no gráfico da questão. No entanto, do ponto de vista do desenvolvimento e aprendizado da turma, o mais importante foi a sua contribuição dada durante o trabalho em equipe e na socialização desse conhecimento para o grande grupo, apresentando mais uma forma possível de resolver a mesma questão.

Reconhecer as funções por meio de suas representações múltiplas é condição para que os alunos possam, por si só e juntos nas suas equipes por meio de um trabalho cooperativo e colaborativo, transferir ou modificar formulações durante a resolução de um problema. As produções dos alunos sinalizavam um aumento e diversificação de representações múltiplas de funções, com articulação dessas representações dentro de uma mesma relação funcional. Eles puderam aumentar a possibilidade de transferência de aprendizagem para novas situações de aprendizagem.

No entanto, o mesmo não pode acontecer quando se trabalha privilegiando apenas um sentido, geralmente a passagem da representação algébrica para a gráfica, e criar expectativa de que os alunos serão capazes de deduzir automaticamente a conversão no sentido contrário por meio de um trabalho em um único sentido. Isso não é possível como indicam as pesquisas na perspectiva do trabalho com representações múltiplas, sugerindo um caminho de articulação, coordenação e conexão entre elas.

Houve, nesta sessão de encontro, defesas e análises das resoluções das questões propostas por parte dos alunos representados pelos quatro alunos que foram convocados para plenárias de modo que eles pudessem servir de ponte para os demais colegas, trabalhando na zona de desenvolvimento proximal do grande grupo. Desse modo turma pôde atingir níveis mais elevados de abstração porque as duas questões tanto a I quanto a II exigiram dos alunos um alto grau de generalidade nas deduções das equações algébricas de funções afins e operação de multiplicação de funções para chegar à função quadrática (questão I). E a passagem da representação gráfica à representação algébrica (questão II) que exigiu também um nível alto de compreensão e interpretação gráfica e realização de muitos raciocínios algébricos que pediam a realização de confluências entre muitas características e propriedades da função quadrática.

Um aspecto muito importante que podemos observar, neste encontro, foi o aumento dos níveis de metacognição dos alunos dessa turma. Houve um grupo que respondeu alternativa E para a primeira questão quando abordado pelo professor e não souberam justificar o porquê de terem respondido dessa forma. Por outro lado, a aluna A31 explicou para a turma o procedimento por ela percorrido durante a resolução da questão I, usando habilidades de comunicação sobre o seu entendimento a respeito de um conhecimento que ela tinha adquirido. O aluno A01, explicou as diversas estratégias de resolução para a questão II tanto para o seu grupo de trabalho como também para o grande grupo. Assim podemos evidenciar um amadurecimento por parte dos alunos dessa turma na apresentação de justificativas e resoluções para os colegas de turma. Além da descoberta de uma resolução plausível para uma dada questão, os alunos A01 e A31 foram capazes de refletir sobre os processos de forma consciente dos passos tomados na resolução das questões I e II.

A formalização dos conteúdos mediante a intervenção do professor foi necessária no arremate final da aula quando tivemos oportunidades de tirar dúvidas e prestarmos também esclarecimentos gerais ao grande grupo de pontos que ainda estavam meio confusos. Pois, esse trabalho final foi extremamente necessário para garantir a compreensão e a aquisição, por parte dos alunos, dos conteúdos científicos trabalhados, nas muitas formulações e validações, realizadas através do trabalho em equipe. Mas que, ainda, precisavam de uma organização e sistematização de tais conteúdos por parte da nossa parte.

5.4.7. Descrição e análise do encontro 22

Aulas 30 e 31 (Data 15/08/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 3.4**:** Família de função (função quadrática) e representações múltiplas de funções, destacando a exploração de problemas nas extensões e desdobramento do enunciado.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 3.5:

Atividade 3.5: Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro $R\$ 20{,}00$ mais $R\$ 2{,}00$ por um lugar vago. Qual o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima? Qual o valor da rentabilidade máxima nessa viagem? (Adaptado do livro do DANTE, 2010, p.128)

A aula foi iniciada, entregamos uma ficha com duas atividades a serem trabalhadas neste encontro: a primeira um problema envolvendo valor máximo e a segunda uma questão envolvendo função por partes para revisar e integrar conteúdos estudados anteriormente. No entanto, o tempo pedagógico só foi suficiente para trabalhar com a primeira situação-problema.

O primeiro momento começou com uma leitura individual em que os alunos sentiram muita estranheza e desconforto. Houve tentativas soltas sem nexos nas primeiras interpretações até chegar a resoluções mais satisfatórias.

A aluna A21 nos pediu para explicar o problema. Neste momento, ela deveria pensar por conta própria e trocar ideias junto com a sua equipe porque quando lançamos um desafio esperamos que o aluno tome iniciativa de realizar as primeiras hipóteses, conjecturas, formulações, validações por conta própria e somente por último o professor deve entrar em cena para fazer a formalização dos conteúdos.

O grupo da aluna A38 nos solicitou para ver o que eles haviam desenvolvido, observamos que eles haviam avançado na tentativa de passar da representação numérica para a representação algébrica, embora ainda não tenham chegado a uma resolução satisfatória para o problema.

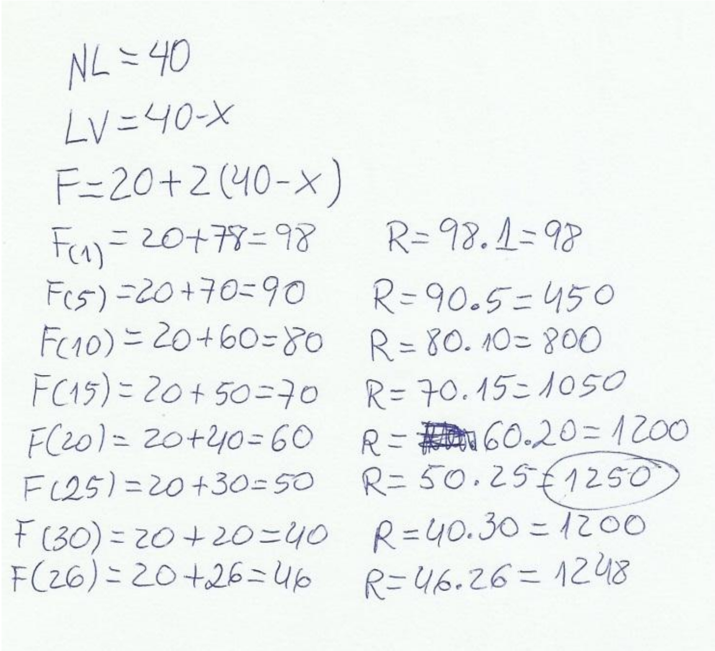
O grupo do aluno A39 também nos solicitou para vermos seu desenvolvimento e apresentaram uma boa resolução, usando o plano de representações numéricas por meio de uma tabela organizada e perceberam que a receita máxima para a empresa seria de 1250 reais para 25 passageiros.

Nº de passageiros	Nº de assentos vagos	Preço unitário	Receita
40	0	20+2.0=20+0=20	40.20=800
39	1	20+2.1=20+2=22	39.22=858
38	2	20+2.2=20+4=24	38.24=912
37	3	20+2.3=20+6=26	37.26=962
36	4	20+2.4=20+8=28	36.28=1008
35	5	20+2.5=20+10=30	35.30=1050
34	6	20+2.6=20+12=32	34.32=1088
33	7	20+2.7=20+14=39	33.34=1122
32	8	20+2.8=20+16=36	32.36=1122
31	9	20+2.9=20+18=38	31.38=1178
30	10	20+2.10=20+20=40	30.40=1200
29	11	20+2.11=20+22=42	29.42=1218
28	12	20+2.12=20+24=44	28.44=1232
27	13	20+2.13=20+26=46	27.46=1242
26	14	20+2.14=20+28=48	26.48=1248
25	15	20+2.15=20+30=50	25.50=1250
24	16	20+2.16=20+32=52	24.52=1248
23	17	20+2.17=20+34=54	23.54=1242
22	18	20+2.18=20+36=56	22.56=1232

Figura 59: Representação tabular da função quadrática na obtenção do valor máximo pelo aluno A39, representando seu grupo.

Agora, deixamos para eles o desafio de encontrarem uma resolução, recorrendo a uma representação algébrica que possa representar o modelo dessa situação, isto significa dizer: T*udo isso que está posto por vocês de uma maneira particular para uma geral. Vejam que é possível fazer isso, bom trabalho!*

O grupo da aluna A37 desenvolveu alguns cálculos chegando à generalização de um modelo para o problema, mas dispensou fórmulas de abscissa e ordenada de uma parábola para chegar à resolução do problema usando o método de tentativa e erro, pulando de cinco em cinco:



$NL = 40$
$LV = 40 - x$
$F = 20 + 2(40 - x)$
$F(1) = 20 + 78 = 98$ $\quad R = 98.1 = 98$
$F(5) = 20 + 70 = 90$ $\quad R = 90.5 = 450$
$F(10) = 20 + 60 = 80$ $\quad R = 80.10 = 800$
$F(15) = 20 + 50 = 70$ $\quad R = 70.15 = 1050$
$F(20) = 20 + 40 = 60$ $\quad R = 60.20 = 1200$
$F(25) = 20 + 30 = 50$ $\quad R = 50.25 = 1250$
$F(30) = 20 + 20 = 40$ $\quad R = 40.30 = 1200$
$F(26) = 20 + 26 = 46$ $\quad R = 46.26 = 1248$

Figura 60: Representação algébrica e procedimentos numéricos na obtenção do valor máximo pela aluna A37, representando seu grupo.

PP ao GG: *Este problema se refere a uma variação da receita arrecadada em função do número de ocupantes dos assentos no ônibus de excursão. Correto?*

GG: *Sim* (coro)

PP: *Vocês percebem que o preço unitário varia de acordo com o número de assentos vagos?*

A25: *Para cada assento vago, o preço unitário corresponde a 20 reais acrescidos de dois reais por quantidade de assentos vagos. Como são 40 assentos a gente faz 20 mais duas vezes 40 menos x para determinar o preço unitário.*

A28: *Mas, a gente precisa multiplicar por x a quantidade de pessoas que viajam nesse ônibus de excursão.*

PP: *Você pode escrever na lousa como você fez na folha, Jéssica?*

A22: *Então, a expressão é* $20 + 2 \cdot (40 - x)$ (Escreve na lousa)

A25: *Tudo isso multiplicado por* x.

PP: *Podemos organizar melhor essa expressão da seguinte forma:* $[20 + 2 \cdot (40 - x)] \cdot x$ (Escreve na lousa). *Podemos ainda chamar arrecadação de renda nessa viagem por R(x).*

A17: *Então,* $R(x) = [20 + 2(40 - x)]$ *que simplificando, encontramos* $R(x) = 100x - 2x^2$. (Mostrando o cálculo ao professor).

PP: *Isso mesmo. Agora, ficou fácil de determinar o número de passageiros* x *para obtermos rentabilidade máxima nessa viagem.*

A32: *A saída é pela abscissa do vértice da parábola.*

A09: *A fórmula do* $x_v = -\frac{b}{2a}$. *Então é só fazer* $-\frac{100}{2(-2)} = \frac{-100}{-4} = 25$ (Mostrando ao professor os seus cálculos).

A39: *Depois que a gente encontra a equação do problema, fica fácil achar a resolução, não* *precisou do passo a passo que o meu grupo fez para chegar nessa mesma resposta..*

PP: *E para acharmos o valor da rentabilidade máxima nessa viagem, qual seria o caminho?*

A39: *Eu posso substituir* $x = 25$ *na função receita* $R(25) = 100 \cdot 25 - 2 \cdot 25^2 = 2500 - 1250 = 1250$ *reais*. (Mostrou ao professor os cálculos).

Depois de algumas dicas e pequenas intervenções do professor, durante o desenvolvimento da aula, que se fez necessário para que os demais grupos pudessem avançar. Chamamos a atenção deles para informações importantes, finalmente praticamente todos os grupos da sua maneira conseguiram encontrar as resoluções para o problema proposto.

Nessa altura da aula, chamamos o aluno A39, representando o seu grupo para apresentar a resolução do problema na forma tabelar. A aluna A37 foi solicitada para apresentar os cálculos feitos a partir da generalização na lousa. Depois, chamamos a aluna A41 de outra equipe para mostrar a resolução por meio da fórmula da abscissa do vértice e substituição desse valor na função receita e ainda solicitamos a aluna A18 que fazia parte de outra equipe para fazer o cálculo da obtenção da rentabilidade máxima usando a fórmula da ordenada do vértice de uma parábola. Pois, assim julgamos essas estratégias diferenciadas que foram representativas de todos os trabalhos coletivos produzidos pelos alunos da turma, nessa sessão de aula. O grande grupo analisou as apresentações dos resultados, houve um consenso da turma no sentido de que conhecendo as fórmulas fica muito mais fácil. Embora, a maioria deles trabalhou com a primeira fórmula da abscissa do vértice e evitaram a fórmula da ordenada do vértice, preferindo fazer por substituição. Entretanto, na fala do aluno A34: *É importante pensar sobre o problema*. Alguns alunos tiraram algumas dúvidas mais de ordem de cálculos aritméticos porque, via geral, pareceu que a maioria deles compreendeu bem o problema proposta na aula.

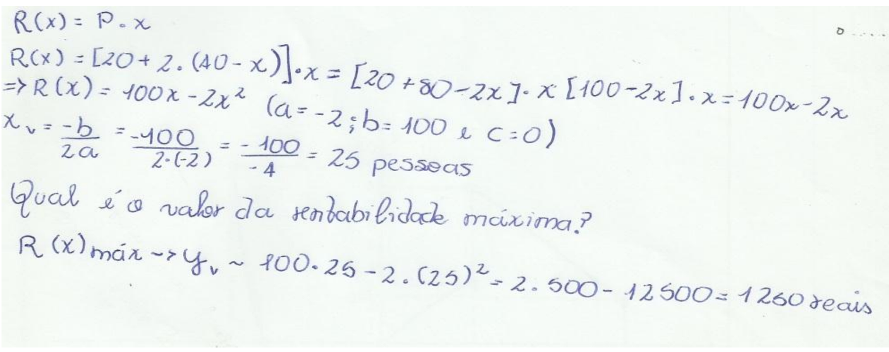


Figura 61: Resolução da atividade 3.5 pela aluna A09, representando seu grupo.

A metodologia de ensino-aprendizagem foi via resolução de problema, inicialmente com a leitura individual do problema seguida da formação livre de grupos de três alunos para que todos participassem ativamente do trabalho proposto em sala de aula. A dificuldade inicial de leitura e interpretação do enunciado do problema sentida pelos alunos da turma é muito comum porque não é fácil para eles traduzir a linguagem corrente para a linguagem matemática. De acordo com os autores Friedlander e Tabach (2001), a representação verbal é geralmente usada para apresentar um problema e na interpretação final dos seus resultados na resolução de um problema. Mas, o uso da linguagem verbal pode gerar dificuldades próprias da língua materna tais como as interpretações ambíguas e as associações irrelevantes ou errôneas.

A aluna A21 nos solicitou para explicar como resolver o problema. Isso apontou a necessidade de insistirmos no trabalho com esta metodologia porque a incorporação não é imediata, exige um processo gradativo. Pois, querendo ou não os alunos vêm de um ensino em que o professor chega explicando tudo, definindo tudo, mostrando como fazer. E na resolução de problemas esperamos que os alunos aprendam a tomar decisões por conta própria, que vá aos poucos ganhando autonomia intelectual.

Vimos que as primeiras apresentações de resoluções do problema com os alunos ocorreram com os mesmos recorrendo às representações numéricas pelo método das tentativas a partir de casos numéricos particulares e acabaram chegando a uma resolução do problema. Segundo Friedlander e Tabach (2011), a representação numérica precede qualquer outra representação, o uso dos números é importante na aquisição de uma primeira compreensão de um problema e na investigação de casos particulares. Entretanto, a sua falta de generalidade pode ser uma desvantagem porque os alunos demoram muito a chegar a uma resolução do problema, já que eles têm que verificar passo a passo. Por outro lado, os alunos que mostraram uma estratégia numérica para resolver o problema mostraram haver compreendido bem o problema proposto.

Analisando as resoluções apresentadas pelo grupo da aluna A37, eles chegaram numa generalização $F = 20 + 2(40 - x)$ e $R = F \cdot x$. Porém, para chegar à resolução final usaram o método de substituição de valores de cinco em cinco como estratégia para encontrar a resolução que viesse a responder a pergunta do problema. Para Vygotsky e seus colaboradores, esse é o momento de passar do geral para o particular, mediante um processo de dedução. Entretanto, podemos observar que esse movimento não é linear. Pois, a equipe de trabalho recorreu novamente ao processo de indução, pulando de cinco em cinco para ganhar agilidade no processo de resolução do problema.

O trabalho de intervenção pedagógica foi fundamental. Num trabalho de mediação do PP junto aos seus alunos, foi possível eles chegarem à fórmula geral $R(x) = [20 + 2(40 - x)] = 100x - 2x^2$. Houve uma atuação na zona de desenvolvimento proximal ora levamos aos alunos uma compreensão mais ampla, ora os alunos entre si levaram seus parceiros a dar um salto de qualidade na generalização dos conceitos envolvidos no problema proposto.

O aluno A32 e a aluna A09 recorreram à fórmula da abscissa do vértice de uma parábola de uma função quadrática para encontrar 25 passageiros, dispensando o tratamento numérico passo a passo a uma aplicação de uma fórmula conhecida por eles. Muito embora analisemos que o fato deles terem apenas aplicado uma fórmula não tenha exigido um grande esforço cognitivo senão o de memorização de uma fórmula que eles já haviam se apropriado dela anteriormente. A vantagem deste processo está na agilidade na obtenção da resolução desde que haja uma compreensão do problema e não simplesmente a aplicação de uma fórmula mecanicamente.

Já para descobrir a rentabilidade máxima a equipe do aluno A39, dispensou a fórmula da ordenada do vértice de uma parábola e substituiu na fórmula geral representada pela equação algébrica da função quadrática que modelava o problema proposto. Esta estratégia se mostrou eficiente porque evitou um acúmulo de fórmulas a serem memorizadas tendo em vista que o trio de alunos compreendeu o sentido de buscar o valor da ordenada conhecendo a sua abscissa.

Realizamos durante o processo de desenvolvimento da aula mediações através de dicas, levantamento de questionamentos de modo que os demais grupos pudessem avançar, ou seja, trabalhamos na ZDP para garantir a todos um verdadeiro e significativo aprendizado. Este trabalho se fez necessário para que os alunos pudessem avançar e atingir níveis cada vez mais elevados.

Em relação às representações múltiplas, os grupos produziram estratégias de resoluções do problema por meio de representações numéricas (tabulares), algébricas nas generalizações da lei de formação que traduziu a enunciação verbal do problema para a forma algébrica. Muito embora, houvesse a possibilidade dos grupos terem produzido uma estratégia de resolução gráfica para o problema, observamos neste encontro que nem um grupo enveredou por este caminho. Acreditamos que para este problema específico a visualização gráfica para o aluno foi prejudicada porque os valores trabalhados eram altos, o que dificultou uma apresentação de uma resolução gráfica pelos grupos.

Quanto à compreensão da família de função quadrática foi possível observar que ela não tem taxa de variação constante como mostravam as tabelas produzidas pelos alunos. No entanto, neste encontro não foi enfatizado a variação linear da função quadrática produzida pelas tabelas. Houve uma concentração maior na descoberta do valor máximo que estava respondendo a pergunta do problema. Característica importante da função quadrática que pode ter valor máximo e valor mínimo dependendo da equação algébrica que esteja representada a função na observância do seu coeficiente a. Porém, a falta da representação gráfica impediu de visualizarmos e explorarmos junto com os alunos, o eixo de simetria, as raízes da função, a sua imagem, dentre outros aspectos e características que são também essenciais à compreensão da família da função quadrática. Apesar dessas mesmas características já terem sido exploradas em aulas anteriores quando mobilizamos a representação gráfica na resolução e exploração de problemas sobre função quadrática.

5.4.8. Descrição e análise do encontro 23

Aulas 32 e 33 (Data 17/08/2012)

<u>*Conteúdos desenvolvidos na atividade 3.5*</u>**:** *Componente do conceito de função (imagem); famílias de funções (funções por partes) e representações múltiplas de funções.*

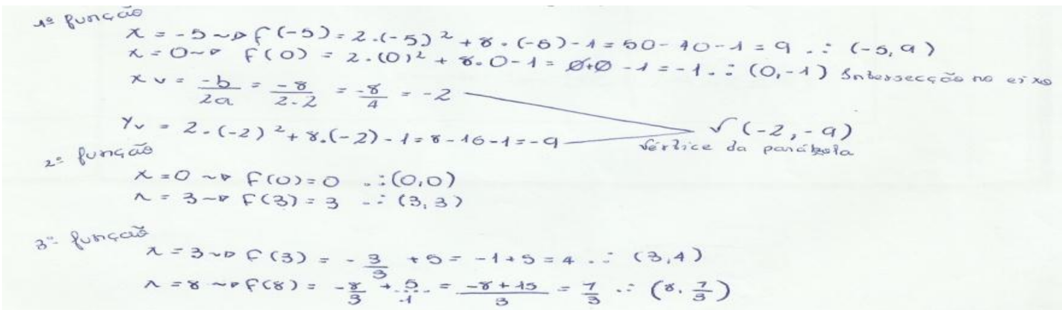
Neste encontro, trabalhamos com a atividade 3.6:

Atividade 3.6: Observe a função por partes, a seguir, e crie o seu gráfico para determinar a sua imagem: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 8x - 1, & -5 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 3 \\ -\frac{x}{3} + 5, & 3 < x \leq 8 \end{cases}$ (Extraído do livro de PILONE; PILONE, 2010, p.414).

Na aula anterior não foi possível trabalharmos com a questão proposta envolvendo uma função por partes. Demos continuidade ao planejamento da aula, agora, falando da função definida por várias sentenças.

> PP: *Vamos dar continuidade às atividades propostas. Se concentrem na construção dessa função por partes, vejam que estamos diante de um conjunto de três funções e três intervalos distintos. Vocês saberiam me dizer como se chama a primeira função?*
>
> GG: *Função quadrática.*
>
> PP: *E a segunda função?*
>
> GG: *Função afim.*
>
> PP: *É um caso particular que pode ser chamada de função identidade, com o coeficiente a=1 e b=0. Quais são as características principais desse tipo especial de função?*
>
> A30: A *função passa pela origem e é uma reta bissetriz que corta os quadrantes ímpares, primeiro e terceiro quadrantes.*
>
> A31: *Acontece que a reta está num intervalo de 0 a 3.*
>
> PP: *Ok. E a terceira função?*
>
> GG: *Função afim.*
>
> PP: *Qual a forma do gráfico da função quadrática?*
>
> GG: *Uma parábola.*
>
> PP: *Qual a forma do gráfico das funções afins?*
>
> GG: *São retas.*

Demos por satisfeito e deixamos os alunos trabalhando em dupla para realizar a construção da função por partes. Circulamos na sala de aula, observamos o trabalho da equipe composta pela aluna A25 e pelo aluno A20 construindo a função por partes usando uma tabela de valores numéricos que iam de -3 a 8. Mas, estavam se atrapalhando na hora de localizar os pontos e traçar o gráfico. Enquanto, a dupla de alunos A11 e A33 atentavam para cada intervalo da função por partes e acharam as coordenadas do vértice da parábola para esboçar a curva, marcando os intervalos corretamente para cada uma das partes da função.



1º função

$x = -5 \rightarrow f(-5) = 2.(-5)^2 + 8.(-5) - 1 = 50 - 40 - 1 = 9 \therefore (-5, 9)$

$x = 0 \rightarrow f(0) = 2.(0)^2 + 8.0 - 1 = \cancel{0} + \cancel{0} - 1 = -1 \therefore (0, -1)$ Intersecção no eixo

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2.2} = \frac{-8}{4} = -2$

$y_v = 2.(-2)^2 + 8.(-2) - 1 = 8 - 16 - 1 = -9$

$\surd (-2, -9)$ Vértice da parábola

2º função

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \therefore (0,0)$

$x = 3 \rightarrow f(3) = 3 \therefore (3,3)$

3º função

$x = 3 \rightarrow f(3) = -\frac{3}{3} + 5 = -1 + 5 = 4 \therefore (3,4)$

$x = 8 \rightarrow f(8) = -\frac{8}{3} + \frac{5}{1} = \frac{-8+15}{3} = \frac{7}{3} \therefore (8, \frac{7}{3})$

Figura 62: Primeira parte da resolução da atividade 3.6 pela aluna A28, representando seu grupo.

A dupla A25 e A20 não conseguiram esboçar o gráfico da função por partes, usando o método de construção de tabelas ponto a ponto, se confundiram e não chegaram a um resultado satisfatório. As demais duplas tentaram realizar uma montagem de uma tabela. Mas, não conseguiram também construir o gráfico da função por parte coerentemente.

Por isso, resolvemos solicitar um aluno que já tivesse construído o gráfico, a vir à lousa mostrar o seu desenvolvimento para a turma. O aluno A11 se prontificou a desenhar o esboço gráfico do trabalho feito em dupla. Depois de pronto, tiramos algumas dúvidas da turma. Acontece que o aluno A11 não lembrava mais da pergunta do enunciado da questão que pedia para determinar a imagem da função mediante a construção do gráfico.

Chamamos a atenção para a imagem da função que alguns autores chamam de extensão, mas para nós, aqui no Brasil, é mais comum o termo imagem ou conjunto imagem de uma função.

O aluno A12 respondeu entre -9 e 9. E acrescentamos, inclusive entre -9 e 9 porque as extremidades são fechadas. Em seguida perguntamos ao grande grupo como é que escrevemos isso, em linguagem matemática. E em seguida sugerimos que um aluno fosse à lousa registrar essas conclusões. O aluno A32 foi à lousa e escreveu: $\{y \in R/-9 \leq y \leq 9\}$ ou $[-9,9]$.

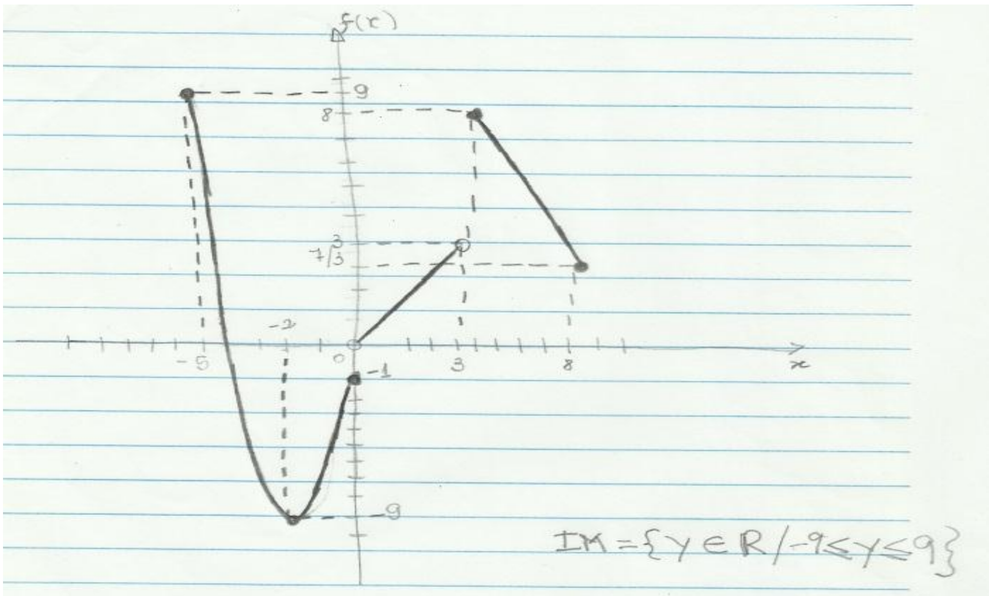


Figura 63: Representação gráfica da atividade 3.6 pelo aluno A32, representando seu grupo.

Esclarecemos para o grande grupo que esta função por partes está definida dos números reais para os números reais, é uma situação fora do contexto do mundo real, diferente de algumas situações estudadas em aulas anteriores que partiram de uma situação mais realística e, depois, passaram por um tratamento de modelação, sendo representadas por meio de uma função por partes. Essa, agora, era uma situação do contexto da própria Matemática, que embora vá se distanciando da realidade, é muito importante para avançarmos nos processos de abstração, porque a Matemática é uma ciência aplicada a diversos campos, porém em essência é uma ciência abstrata.

A questão trabalhada, neste encontro, foi um problema? Um problema para Lester (1980) deve ser uma situação que o indivíduo ou grupo de indivíduos não saibam ainda a sua resolução e que estejam envolvidos emocionalmente neste processo. Por essa razão, podemos afirmar que a situação proposta se constituiu num problema matemático para a turma de alunos que estavam engajados em buscar uma resolução para a questão da construção de um gráfico de uma função por partes e na determinação de seu conjunto imagem. Na literatura sobre a linha de pesquisa Resolução de Problemas, podemos encontrar discussões preocupadas em categorizar as situações propostas em exercício e problema. Não vemos a necessidade de enveredarmos por essa seara porque toda situação que não é rotineira, pode ser considerada um problema. No encontro desta sessão de aula, a situação proposta foi uma situação que tem uma aparência de um exercício, no entanto para os alunos, ela foi um problema matemático.

Precisamos trabalhar nas aulas de Matemática também situações descontextualizadas. Já havíamos trabalhado com uma situação do dia a dia que foi modelada por uma função por partes no encontro 14. Então, poderíamos, agora, abordar uma situação que estivesse dentro da linguagem da própria Matemática. Pois, essa compreensão e aquisição são necessárias, principalmente, para aqueles alunos que vão continuar os seus estudos, dentro da área das exatas.

A metodologia de ensino-aprendizagem decorreu via resolução de problemas. Inicialmente, problematizamos a questão, para fazer os alunos entrarem em ação. Em seguida, houve a formação de duplas de alunos que se debruçaram no problema, na busca conjunta de uma resolução, que envolveu a construção do gráfico e descrição do conjunto imagem para o gráfico construído. A construção do gráfico não precisava ser ponto a ponto, embora tenhamos observado que a dupla de alunos A20 e A25 tentavam resolver por esse caminho, a dupla não havia enxergado as características e propriedades de cada família de função em particular que a diferenciava das demais famílias. A esse conjunto de características e propriedades comuns, os autores Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) denotam de compreensão essencial de funções que podem ser reunidas em uma grande ideia de função.

Na questão que foi proposta por meio de um conjunto de famílias de funções distintas em intervalos intermitentes, função por partes, com distintas equações para diferentes partes do domínio da função. Muito embora possa nos parecer estranha, as encontramos na vida cotidiana e segundo os autores Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), as funções podem ser ampliadas para um vasto campo de situações, elas não precisam ser descritas por uma expressão específica ou um padrão de regularidade.

Podemos observar que a dupla de alunos fez confusão na construção do gráfico, pois apresentaram dificuldades evidenciadas pelos pesquisadores Markovits, Eylon e Buckheimer (1995) de que são mais fáceis aos alunos lidarem com a representação gráfica da função do que a forma algébrica, o problema proposto envolveu a conversão da representação algébrica para a gráfica. Na nossa experiência docente, vemos que ambos os processos que envolvem conversão é problemático, ler e analisar um gráfico tem um forte apelo visual, porém convertê-lo para sua forma algébrica, não é considerada uma tarefa fácil para os alunos. Muito embora os livros didáticos explorem mais a conversão da forma algébrica para gráfica, este processo por si só, já se constitui numa tarefa muito complexa pelo fato de exigir dos alunos enxergar na representação algébrica a visualização gráfica correspondente. Esta agilidade é garantida somente quando eles forem capazes de compreender as compreensões essenciais de cada família de função em particular.

O aluno A11 compreendeu bem o que caracterizava cada uma das funções componente da função por partes e obedeceu aos intervalos indicados pela questão proposta. No entanto, como o conceito de função é complexo envolve muitos componentes como o domínio e a imagem. O aluno A11 não descreveu o conjunto imagem da função por partes, o que nos levou a explicar de maneira dialogada esclarecendo esta situação para o grande grupo. De modo que os alunos A12 e A32 chegaram com a resposta escrita do conjunto imagem da função por partes da questão proposta.

Dentro da metodologia de ensino-aprendizagem via resolução de problemas, o professor faz a sistematização dos conteúdos somente no final da aula. Mas, o professor pode problematizar a questão durante o processo da aula, foi o que aconteceu com este encontro de sessão de aula, de maneira que os alunos continuassem a ter interesse em resolver a questão proposta. Pois, se o professor abandonar os alunos a própria sorte, provavelmente, o trabalho não será produtivo. Sobretudo porque neste encontro estávamos diante de um problema fora da vida cotidiana e precisávamos mantê-los interessados e envolvidos na resolução da questão.

Podemos perceber certo avanço por parte dos alunos na construção e compreensão da função por partes com gráficos desconexos, ampliando cada vez mais a visão do conceito de função. Evidenciamos que eles conseguiram construir o gráfico da função por partes, observando as características de compreensão essencial de função afim e quadrática quando dispensaram a construção do gráfico ponto a ponto, construíram os gráficos dos intervalos de funções afins a partir de dois pontos extremos e o intervalo da função quadrática usando os dois pontos de extremidades e as coordenadas do vértice da parábola que indicou o ponto mínimo.

5.5.Unidade didática IV: Função Exponencial

Nessa unidade didática, totalizamos *8 horas-aula*, constituintes de 4 encontros com descrições e análises de cada aula. Exploramos o raciocínio exponencial, a partir do contexto concreto das dobraduras sobre papéis e um desafio, envolvendo o crescimento de uma planta aquática em um lago. O problema do crescimento de bactérias nos permitiu ampliar o problema matemático para as questões de saúde pública e cidadania. A teoria de Malthus sobre o crescimento populacional e de alimentos, além das explorações de compreensão essencial da família de funções exponenciais favoreceram as discussões sociais e políticas da fome, da subnutrição e dos moradores de rua. Na proposição de problemas, surgiram os textos matemáticos elaborados e resolvidos por alunos em sala de aula.

5.5.1. Descrição e análise do encontro 24

Aulas 34 e 35 (Data 22/08/2012)

<u>*Conteúdos desenvolvidos na atividade 4.1*</u>: *Raciocínio exponencial; famílias de funções (função exponencial) e representações múltiplas de funções.*

Neste encontro, trabalhamos a atividade 4.1:

Atividade 4.1:

I – (Ação) A partir de uma folha de papel ofício em branco, respondam:

A) Em quantas partes ela fica dividida ao dobrá-la ao meio e numa segunda dobradura? (Sem executar as dobraduras). Confiram os resultados realizando as dobraduras. (Oralmente)

B) Em quantas partes ela fica dividida depois da terceira e quarta dobradura? (Sem executar as dobraduras). Confiram os resultados realizando as dobraduras. (Oralmente)

C) Em quantas partes ela fica dividida depois da quinta, sexta, sétima, oitava, nona e décima dobradura? (Mesmo não podendo mais executar dobraduras no concreto dá para imaginar os resultados possíveis). (Oralmente)

D) Qual a equação da função N para n dobraduras? (Sendo N: número de partes formadas pelas dobraduras executadas e n: número de dobraduras executadas). (Oralmente)

E) Montem uma tabela para essa função e construam seu respectivo gráfico. (Oralmente)

II – (Desafio) Um fazendeiro colocou numa lagoa uma vitória-régia que dobra de tamanho a cada dia e, ao final de 30 dias, ela ocupou a lagoa inteira. Em quantos dias duas vitórias-régias ocupariam toda a lagoa? (Extraído da revista CÁLCULO: Matemática para todos. Ed. 17, Ano 2, jun. 2012, p.29)

Distribuímos folhas de papel ofício em branco, pedimos para os alunos dobrarem ao meio. Em seguida, perguntamos-lhes: *Quantas partes iguais tinham* *formado?* Depois, perguntamos: *Se eles dobrassem pela segunda vez, sem executar ainda a segunda dobra, quantas partes iguais eles formariam?* Em seguida, pedimos para eles executassem a tarefa de dobrar pela segunda vez a fim de confirmar as respostas apresentadas. E assim, continuamos até a quarta dobradura: perguntava sempre antes aos alunos quantas partes formariam sem que eles ainda tivessem dobrado o papel e depois de ouvir as respostas dos alunos, pedíamos-lhes que executassem as dobraduras para confirmar as suas respectivas respostas. Depois, continuamos perguntando sem mais executar dobraduras até a décima dobradura, finalmente, perguntamos: *Qual a equação da função N para n dobraduras?* E demos a sugestão: *Montem uma tabela para essa função e construam seu gráfico.*

> *PP: Vamos fazer uma pequena experiência, se dobrarmos ao meio esta folha, em quantas partes iguais ela ficará dividida? E se dobrarmos de novamente?*
>
> *GG: Dois, quatro, ...*
>
> *PP: Agora, podem conferir esses resultados. Novamente, sem dobrar, basta imaginar mais uma dobradura ao meio, pela terceira vez, quantas partes iguais nós formamos?*
>
> *GG: Seis, oito, oito!!!* (Algumas vozes)
>
> *PP: Vamos conferir.*
>
> *GG: Oito partes iguais.*
>
> *PP: E pela quarta vez, sem dobrar?*
>
> *GG: 12, 12, 16, 16, 16!!!* (Algumas vozes). *Confiram os resultados*.
>
> *PP: Trabalhando com o concreto chegamos em um limite que fica difícil de executar muitas dobraduras, mas dá para deduzirmos o que vai acontecer. Respondam-me sem que para isso tenham que realizar dobraduras. Numa quinta vez? Sexta? Sétima? Oitava? ...Décima?*
>
> *GG: 32, 64, 128, 256, ..., 1024*
>
> *PP: E para n dobraduras?* (Silêncio). *Formem duplas para continuar explorando esta atividade, montando uma tabela com n: quantidade de dobraduras e N: quantidade de partes iguais formadas. Pensem em uma fórmula geral para n termo e desenhem o gráfico dessa função.*
>
> *A aluna A46 conversando com o aluno A01: Como sempre a gente está dobrando o valor que começou a partir de dois, todos os resultados foram multiplicados por dois. Então, a fórmula geral é uma potência de base dois porque a gente vai dobrando a quantidades de partes formadas* 2^n.
>
> *PP: Esbocem o gráfico*. (Deu mais um tempo) *Vejo que vocês localizaram os pontos do gráfico. Uma pergunta: Nós podemos unir esses pontos?*
>
> *A37: Não, professor. Porque o problema é de contagem, está no domínio dos números naturais.*

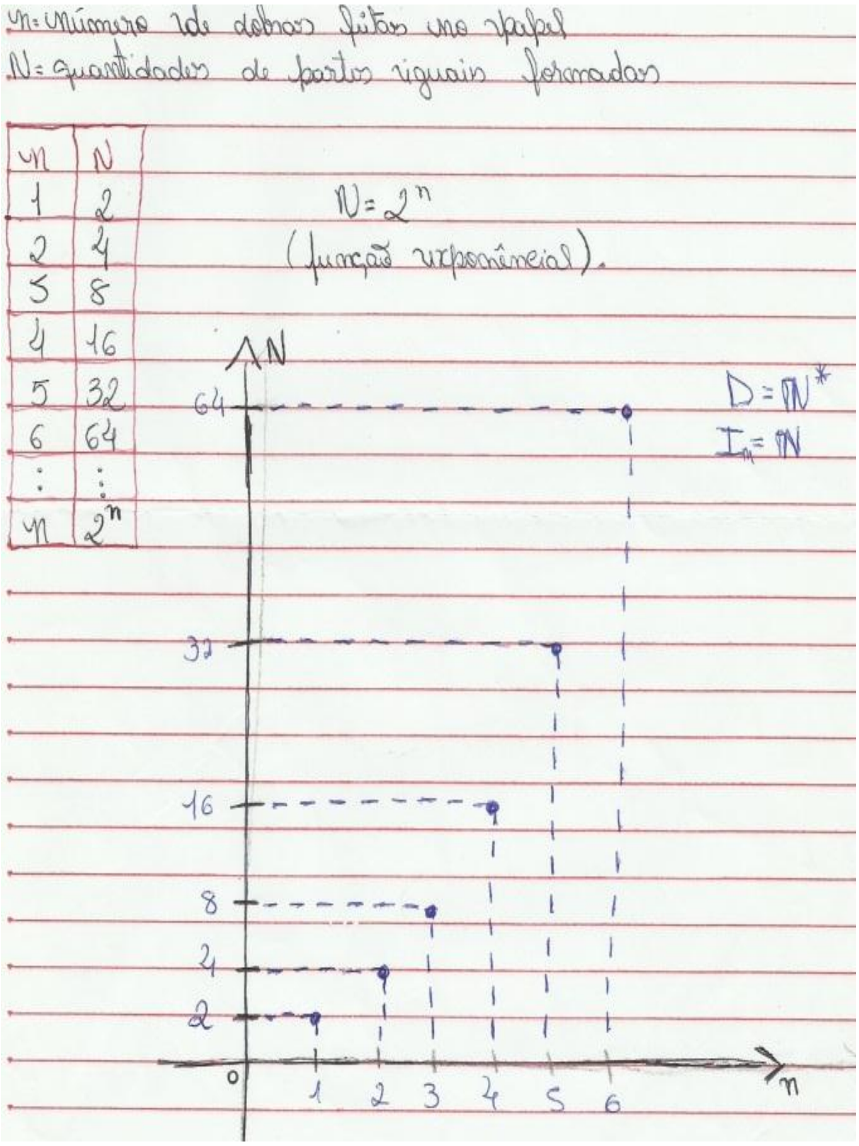


Figura 64: Resolução da questão I relativa à atividade 4.1 pela aluna A46, representando seu grupo.

Circulamos na sala de aula, observando o desenvolvimento dos alunos nas duplas de trabalho, ajudamos àqueles que estavam precisando de pequenas intervenções, dando algumas dicas, às vezes, dizendo apenas que eles deveriam pensar um pouco mais. A fim de lhes dá mais autonomia e independência intelectual aos alunos de modo que eles possam adquirir mais confiança em seu trabalho. Assim, pudemos observar que a maioria deles já havia acabado a atividade proposta, entregamos um desafio impresso sobre o crescimento de uma planta aquática numa lagoa para eles se ocuparem com uma nova atividade que fossem deixá-los desequilibrados a priori mais que lentamente eles fossem concatenando as ideias e formulando resoluções possíveis e plausíveis para o desafio em questão.

A aluna A22 estava muito interessada na aula, participou ativamente em todos os momentos e estava em dupla com a aluna A38. Ela imaginou primeiro 15 dias, depois de ter começado com duas vitórias régias, mas logo refez o seu pensamento e deu a solução para o 29º dia.

Comentário: No primeiro momento, a tendência dos alunos é pensar no 15º dia com duas vitórias régias completando a lagoa. Porém, fizemos nenhuma intervenção, deixamos que o parceiro de cada dupla confrontasse as suas ideias, no sentido de refutar ou concordar com o seu parceiro.

O aluno A07 chamou o professor para lhe explicar o problema da vitória-régia na lagoa que vai duplicando a cada dia de tamanho. Mas, que ele não estava entendendo. A aluna A35 sua parceira de dupla explicou-lhes que uma vitória-régia dentro de um mês, ou seja, no trigésimo dia a lagoa vai estar toda ocupada pela planta, então no dia anterior, vigésimo nono dia, a planta ocupará apenas a metade da lagoa. Assim, com duas vitórias-régias, no vigésimo nono dia ocupará toda a lagoa e o vigésimo oitavo apenas a metade. Portanto, com duas vitórias-régias duplicando a cada dia, no vigésimo nono dia ocupará toda a lagoa. É um problema de lógica.

> Comentário: De fato, existem problemas de Matemática que não apresentam números, bastando usar o nosso raciocínio lógico para encontrar a sua resolução.

No início do trabalho, neste encontro, sugerimos um trabalho de ação, em que o aluno foi levado a levantar hipóteses, formulá-las e validá-las mediante o trabalho com o concreto para ir passo a passo abstraindo, fazendo generalizações. Como o Vygotsky se referiu que a formação de conceitos não se dá por meio de interações de associações de estímulo e resposta, precisamos de elementos mediadores que possam levar ao pensamento superior complexo, mais elaborado. Os alunos não sentiram dificuldade de responder as perguntas que estavam sendo feitas imaginando ou conferindo as partes iguais formadas a partir de dobraduras no papel ofício. Mesmo para casos particulares de números de dobraduras maiores que foram solicitadas, nesse momento, percebemos que já havia uma observância de uma certa regularidade, mas nem todos haviam compreendido a generalização dessa ideia, porque as perguntas estavam sendo sequenciadas e muitos perceberam que bastava ir multiplicando por 2. Porém, quando perguntamos para n dobraduras? Faz-se um silêncio na sala de aula, decorrido algum tempo depois, somente a aluna A46 responde 2^n, justificando a sua compreensão. A aluna A46 compreendeu que por trás de cada caso particular há sempre a possibilidade de se chegar a uma generalização.

Começamos a aula propondo uma atividade de ação, em que fazemos perguntas até os alunos chegarem a uma resposta satisfatória. Depois desta técnica, retomamos a metodologia da resolução de problemas, sugerindo formação de grupos, para encontrar a equação algébrica da função, a construção de uma tabela e o gráfico desta função. Para encontrar a equação da função, a aluna A46 faz o papel de mediadora para o seu colega A01, explicando com suas próprias palavras a generalização da sua ideia de função. Esse momento é muito importante porque podemos perceber que houve uma verdadeira aprendizagem, além do desenvolvimento de processos metacognitivos. Para muitos alunos da turma, demos dicas, para outros bastou pedir para pensar mais um pouco, na hora de generalizar a equação da função. Porém, depois desse trabalho na zona de desenvolvimento proximal que foi desenvolvido, os demais alunos puderam concluir o seu trabalho de maneira mais autônoma. Já na construção da tabela e gráfico já estavam independentes e resolveram sozinhos sem a nossa ajuda, provavelmente muitos tiveram o seu parceiro de dupla trabalhando na zona de desenvolvimento proximal.

Não julgamos necessária a realização de plenárias, análises e discussões dessa primeira situação de aprendizagem, porque, ao circular na sala de aula, depois de uma certa altura, todos haviam atingindo um resultado satisfatório no seu trabalho em grupo e também, nesse momento, não desejamos realizar a formalização, definindo função exponencial, para não antecipar ideias que os alunos poderiam desenvolver por conta própria.

Findo o trabalho com a primeira atividade, lançamos um desafio, que, no primeiro momento, constituiu-se em um problema para os alunos, porque eles não sabiam a sua resolução. Nesse desafio, apresentamos o raciocínio exponencial, assim como esse pensamento estava presente na primeira atividade. Pois julgamos muito importante o seu desenvolvimento para a compreensão da família de funções exponenciais que são caracterizadas por uma variação que é sempre proporcional ao valor da função (3f).

Enquanto circulamos na sala de aula, prestamos atenção ao diálogo das alunas A22 e A38, assim como a maioria dos alunos, a aluna A22, pensou no décimo quinto dia com duas vitórias-régias na lagoa, completando o lago com esta planta aquática.

Porém, ela refez seu raciocínio e encontrou a resolução para o vigésimo nono dia. Entretanto, achou o diálogo da dupla de alunos A07 e A35 ainda mais interessante, quando o aluno A07 nos chama para explicar o problema que ele ainda não estava entendendo e ao se aproximar da dupla ver a sua parceira A35 verbalizando uma explicação muito convincente, em que ele finalmente conseguiu entender sem necessidade da intervenção do professor. Esse episódio evidencia a necessidade de trabalharmos com pequenos grupos de modo que os parceiros das suas respectivas equipes possam fazer a ponte de desenvolvimento proximal para o desenvolvimento de estágios mais avançados, o desenvolvimento potencial dos nossos alunos cresce significativamente no trabalho em grupo. Ainda podemos evidenciar o uso da metacognição que a aluna A35 realizou na sua explicação do problema para o aluno A07.

Não finalizamos a aula com uma formalização dos conteúdos porque ainda estávamos trabalhando em um nível mais intuitivo com as primeiras ideias sobre o raciocínio exponencial e observamos que para as atividades propostas a maioria dos alunos acabou chegando a resoluções satisfatórias que não careciam de maiores complementos.

5.5.2. Descrição e análise do encontro 25

Aulas 36 e 37 (Data 24/08/2012)

Conteúdos desenvolvidos na atividade 4.2: Famílias de funções (função exponencial); representações múltiplas e conexões múltiplas aos contextos de saúde pública, orientação sexual e cidadania.

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 4.2:

Atividade 4.2: I – Em uma experiência sobre deterioração de alimento, constatou-se que a população de certo tipo de bactéria dobrava a cada hora. No instante em que começaram as observações havia 50 bactérias na amostra.

A) Qual é a população de bactérias após 2 horas do início da experiência? E após 4 horas?

B) Obtenha a lei que relaciona o número de bactérias (N) em função do tempo (t).

C) Dê uma estimativa do número de bactérias após 1 dia de observação, use a aproximação: $2^{10} \sim 10^{3}$ (Extraído do livro de IEZZI et al, 2004, p.32, v.1).

II - *Treponema Pallidum* é a bactéria que causa a sífilis. Ela se reproduz de forma extremamente rápida. Num espaço de uma hora cada uma se transforma em 8 iguais. Se uma delas penetra no organismo de uma pessoa, quantas elas serão 2 horas depois, supondo que nenhuma delas tenha morrido? E depois de 4 horas, nas mesmas condições? Expresse a equação da função N em relação ao tempo x horas. Esboce o gráfico dessa função.

A) Na história da humanidade muitas doenças, durante muito tempo, não tinham cura nem tratamento, como por exemplo, a sífilis. Atualmente, existe tratamento e cura para essa doença, embora a melhor opção seja a prevenção. Em relação às DSTs (Doenças Sexualmente Transmissíveis) vocês sabem como se prevenir?

B) Qual o seu posicionamento em relação às medidas de prevenção tanto para evitar gravidez indesejada e doenças sexualmente transmissíveis?

C) O HIV/AIDS surgiu há 30 anos, embora hoje seja considerada uma doença crônica, ainda não existe cura para ela. Vocês poderiam apontar avanços na luta para o combate a doença? Vocês sabem qual a diferença entre ser portador do vírus HIV e ter AIDS?

D) Quando o HIV surgiu, acreditava-se na época que ele estava associado aos chamados grupos de riscos tais como os homossexuais masculinos e usuários de drogas injetáveis e isso ocasionou o aumento de contaminação pelo vírus em mulheres heterossexuais. Hoje, com todas as informações que temos, qual o seu posicionamento em relação à criação desses estigmas sociais? (Adaptado do livro de WILMER et al, 2008, p.269, v.1).

A metodologia de trabalho continuou a mesma, leitura individual dos problemas, seguida de formação de grupos. Como o trabalho desta aula foi mais extenso, optamos pela formação de grupos de cinco alunos para tornar mais ágil o processo de resolução, discussão dos problemas e questionamentos da problemática de cunho social e de políticas públicas para a questão de saúde. Também, deixamos que os alunos manifestassem preconceitos, mitos e outras formas de pensamento e permitimos que entre eles problematizassem e buscassem um consenso dentro das políticas convenientes de se viver em sociedade, com responsabilidade e respeito às diferenças.

Como em todo o trabalho tínhamos o hábito de nos movimentarmos em sala de aula, observando o trabalho dos alunos nos seus respectivos grupos, na ocasião tivemos a oportunidade de ouvir um diálogo entre dois alunos de um grupo que nos estavam próximos, a aluna A46 confrontava a sua resolução do problema I com o aluno A01, pois ele havia encontrado após 2 horas o correspondente a 200 bactérias e para 4 horas, 400 bactérias. Ela imediatamente refutou a ideia do aluno A01, mostrando que na sua resolução encontrou 800 bactérias, argumentando o seguinte: *Para 2 horas, dobramos o valor inicial 200 bactérias, para 3 horas seriam 400 bactérias e finalmente para 4 horas, 800 bactérias.* Convencendo o aluno A01. Entretanto, o aluno A01 ainda não havia entendido bem a pergunta que pedia a lei de formação, os seus parceiros de grupo também não sabiam como explicar. Nesse ínterim, resolvemos intervir não somente para o pequeno grupo que nos estavam próximos. Mas, também para o grande grupo, chamando a atenção deles dizendo que para formar a equação algébrica da função exponencial, eles deveriam perceber a regularidade da regra geral seguinte: valor de saída igual ao valor inicial vezes o fator constante elevado ao valor de entrada (Anotando esta observação na lousa).

Observamos que a aluna A41 fazia parte de uma equipe que nos estava próxima e, de imediato, chegou à equação algébrica $N(t) = 50.2^t$. Entretanto, na hora de substituir $2^{10} \sim 10^3$, foi necessário fazer intervenções perguntando-lhes: *Já que um dia corresponde a 24 horas, como decompor a potência de base 2 elevado a 24?* Observando que essa era uma dúvida geral da turma e que precisava fazer algumas considerações para que o grande grupo avançasse no seu trabalho, mostrou explicando através de uma exposição dialogada, como eles haviam chegado à conclusão que $N(24) = 50.2^{24}$. Fez os alunos recordarem que 2^{24} pode ser decomposto em $2^{10}.2^{10}.2^4$, que é uma característica importante do pensamento exponencial, transformar soma em produto. Sendo assim, foi possível às equipes, trabalhando juntas, chegarem a 800.000.000 bactérias ou ainda a 8.10^8 bactérias, sendo esta última solução apresentada somente por uma equipe da turma (a anotação científica ou base dez é muito comum em linguagem científica na Biologia, Química, Física, dentre outras Ciências).

O aluno 07 observou o quão rápido a função exponencial cresce, ele disse: *No final de um dia já são 800 milhões de bactérias*. Logo, respondemos: *Sim. Justamente, esta é uma característica fundamental da função exponencial crescer ou decair rapidamente, pois, diferente da função afim que apresenta uma sequência aritmética. A função exponencial apresenta uma sequência geométrica. Vejam que ao invés de somar, na função exponencial estamos sempre multiplicando pelo mesmo fator*.

Solicitamos que um dos alunos do grupo composto pelas alunas A19, A21, A22, A27 e A41, fosse até o quadro para expor a resolução do problema. Entre elas, elegeram a aluna A22 para fazer a defesa, todos os alunos da turma pareceram concordar com a apresentação exposta, tiramos algumas dúvidas mais de natureza das operações a serem efetuadas e menos de compreensão do problema, pois, nos pareceu que houve uma compreensão efetiva do problema pelo grande grupo. Não convidamos mais alunos para confrontar porque as resoluções haviam se aproximado e tínhamos ainda mais um problema para ser desenvolvido, seguido de questionamentos de problemática social e de políticas de saúde pública.

Em seguida, passamos para a próxima atividade, dando início as explorações matemáticas propriamente ditas.

O aluno A43 percebeu que o aumento é sempre oito vezes maior do que o anterior. Houve uma polêmica no seu grupo de que o valor inicial de uma bactéria seria hipotético porque a aluna A05 explicava para o seu grupo que num indivíduo contaminado na hora em que isso acontecer, entraria no seu organismo uma carga de bactéria. Por isso, esclarecemos para a turma que resolvessem o problema do ponto de vista da Matemática de acordo com as informações apresentadas no problema. De fato, quando temos a necessidade de trabalhar com problemas do mundo real nem sempre teremos uma representação fiel da realidade, muitas vezes apenas um modelo matemático dentro de um contexto de interesse social, como é a questão das DSTs que é de políticas públicas para a saúde.

O grupo formado pelos alunos A43, A35, A05, A03 e A07 desenvolveu o problema sem dificuldades e fizeram assim: Para $x = 1$ hora, $N(1) = 8$ bactérias; para

$x = 2$ horas, $N(2) = 64$ bactérias; para $x = 3$ horas, $N(3) = 512$ bactérias e para $x = 4$ horas, $N(4) = 2048$ bactérias

Perguntamos a equipe de trabalho formada pelos alunos A03, A05, A07, A35 e A43: *E para x horas, qual a fórmula geral?* A aluna A35 respondeu: *Seria* $N(x) = 8^x$, *já que o valor inicial seria 1, que é neutro para multiplicar*. Novamente, interrogamos a equipe: *Como ficaria o gráfico dessa função, teríamos que unir os pontos ou deixá-los discretos?* O aluno A07 respondeu: *Podemos unir os pontos porque estamos trabalhando com a grandeza tempo e ele pode ser quebrado em 2 horas e meia, 2 horas e 25 minutos.*

Prosseguindo na ampliação do problema para questões sociais, problematizamos a situação trazendo uma discussão a respeito de doenças que, no passado, não tinham cura nem tratamento. Enfatizamos o uso de preservativo em todas as relações sexuais, discutimos um pouco sobre HIV/AIDS mostrando os avanços da medicina e a distinção entre ser portador do vírus HIV e ter AIDS, enfatizamos a não existência de grupos de riscos. E finalizamos a discussão falando de estigma social, preconceito e discriminação no sentido mais amplo do termo. Os alunos se alvoroçaram com o assunto, todos queriam falar ao mesmo tempo. Foi preciso organizar as falas de cada um para que houvesse respeito às falas do outro colega. Isso mostra que, apesar de polêmico, o assunto era de interesse de todos os alunos.

O aluno A12 comentou no seu grupo: *As perguntas são coisas de gays*. Nisso, perguntamos ao aluno A12: *Você acha mesmo isso? Que esses questionamentos e preocupações, somente os homossexuais precisam ter? Converse com os seus colegas de equipe, analisem bem tudo isso e cheguem a um consenso.* Outro comentário que intervemos foi da aluna A19 quando ela se referiu à pílula como preventivo de doenças e gravidez. *Você acha que a pílula consegue evitar doenças?* A aluna A19: *Não, professor. A pílula evita somente a gravidez.*

A aluna A16 falou: *Vamos continuar debatendo o assunto*. Isso, quando sinalizamos: *Agora, vamos encerrar o debate para as defesas das questões de explorações matemáticas.* Daí, conduzimos o debate ouvindo os alunos, sem moralizá-los. Não tivemos a pretensão de falar da biologia das bactérias e vírus que transmitem doenças, apenas nos preocupamos com a educação preventiva e o desenvolvimento de atitudes de solidariedade.

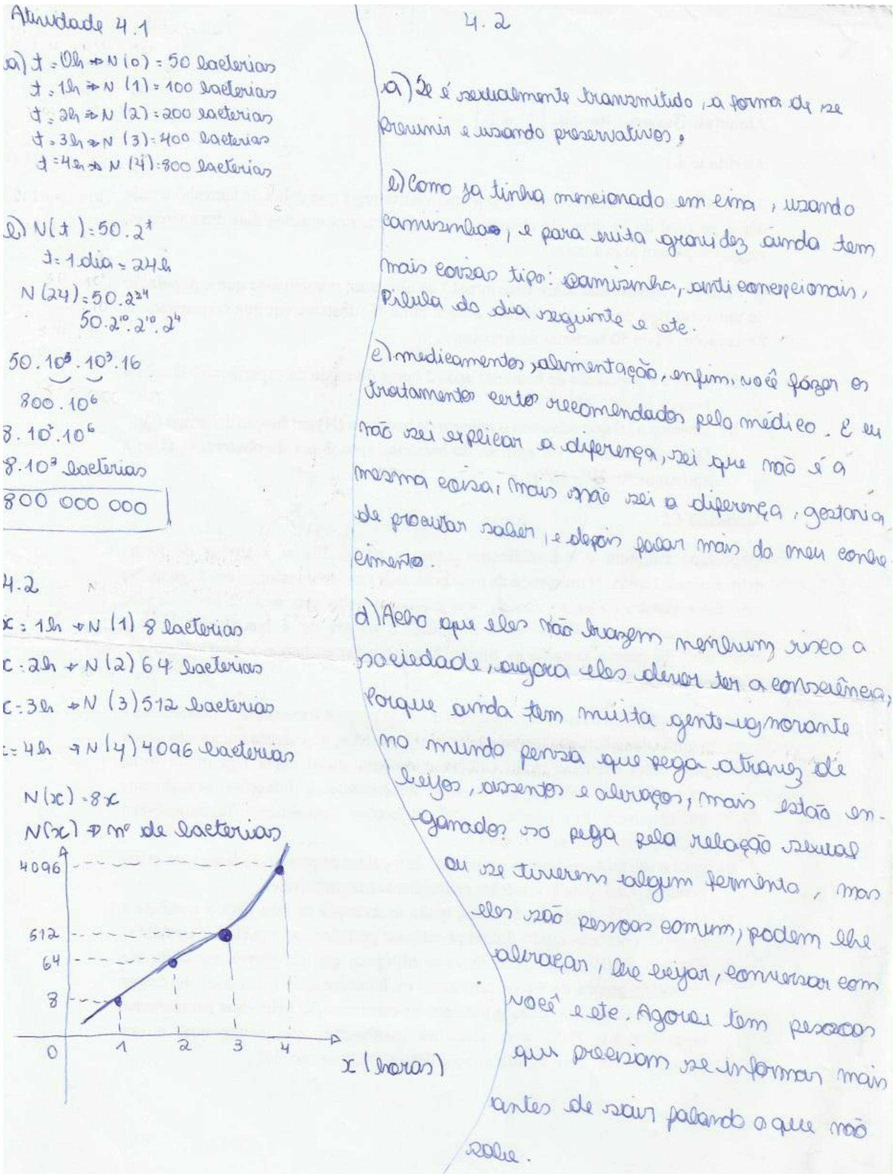


Figura 65: Resolução das questões I e II relativas à atividade 4.2 pela aluna A42, representando seu grupo.

<u>Transcrição do texto da atividade 4.2 relativo a problematização não matemática da situação-problema II</u>: a) Se é sexualmente transmitido, a forma de se prevenir é usando preservativos. b) Como já tinha mencionado acima, usando camisinhas, e para evitar gravidez ainda têm muitas coisas tipo: camisinha, anticoncepcionais, pílula do dia seguinte e etc. c) Medicamentos, alimentação, enfim, você fazer os tratamentos certos recomendados pelo médico. E eu não sei explicar a diferença, sei que há diferença, gostaria de procurar saber, e depois falar mais do meu conhecimento. d) Acho que eles não trazem risco a sociedade, agora eles devem ter a consciência porque ainda tem muita gente ignorante no mundo, pensando que pega através de beijos, assentos e abraços, mas estão enganados. Só pega pela relação sexual ou se tiverem algum ferimento, mas eles são pessoas comuns, podem lhe abraçar, lhe beijar, conversar com você e etc. Agora têm pessoas que precisam se informar mais antes de sair falando o que não sabe.

Os dois problemas propostos falam de bactérias, não é que o professor de Matemática vá explicar a biologia das bactérias e vírus. Porém, julgamos importante o professor tratar da questão de prevenção e solidariedade, todo educador comprometido com a formação de responsabilidades sociais e combate ao preconceito e discriminação quer seja de gênero ou de outra espécie pode abrir um leque de possibilidades de exploração de problemas para questões que vão além dos conteúdos específicos.

Dentro da exploração das grandes ideias de funções: a família de função exponencial e as representações múltiplas de função exponencial, esta situação-problema foi bem representada por meio das discussões das explorações matemáticas durante a aula, das resoluções apresentadas na lousa e nos registros das questões que foram entregues ao final da aula.

A aluna A46 explicou verbalmente o seu raciocínio exponencial para o colega A01, demonstrando certo domínio dos processos metacognitivos, possibilitando ao aluno A01 a compreensão de um processo resolutivo para questão I ainda no nível das representações numéricas, conceitos espontâneos. A lei de formação está no nível mais abstrato das generalizações e tivemos que trabalhar na Zona de Desenvolvimento Proximal de modo que os alunos pudessem chegar a um nível mais elevado, a equação algébrica da função exponencial.

Apresentamos a ideia de que muitas vezes descrevemos a variação em uma quantidade em termos de fatores que são as funções exponenciais. Em outras palavras, uma função descrita por uma quantidade que aumenta ou diminui segundo um fator constante é uma função exponencial (y é uma função exponencial de x se ela pode ser escrita na forma $y = f(x) = a \cdot b^x$ com a e b constantes e $b > 0$). Entretanto, usamos inicialmente uma linguagem mais próxima, falando em função exponencial na forma geral de saída igual ao valor inicial vezes o fator constante elevado ao valor de entrada, chamando a atenção do grande grupo para esse fato.

Realizamos intervenções durante o processo de resolução de problemas, trabalhando na Zona de Desenvolvimento Proximal dos alunos, visando um avanço da turma para formas de pensamentos psicológicos superiores por meio da propriedade de que a função exponencial transforma produto em soma, exploramos a propriedade exponencial numa explicação dialogada sobre as transformações de uma potência num produto, permitindo que a turma não desistisse da resolução do problema e se mantivesse envolvidos no processo. Esta propriedade, além da taxa de variação proporcional, é uma das características principais da função exponencial dentro do que

Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) denotam de compreensão essencial para a família de funções exponenciais.

A notação científica só foi apresentada por um grupo de trabalho, embora seja trabalhada em outras disciplinas tais como Física, Química e Biologia. Por se tratar de uma linguagem científica, a sua aquisição envolve um processo mais demorado e é importante explorarmos essa ideia de um número poder ser expresso de muitas maneiras diferentes. Por exemplo: 800 milhões de bactérias e $8 \cdot 10^8$ de bactérias são duas maneiras de representar o mesmo número. Analogamente, podemos ter mais de uma representação para uma mesma função.

Com a observação do crescimento rápido de uma função exponencial pelo aluno A07, exploramos a compreensão de que uma progressão geométrica pode ser pensada como uma função exponencial de variação discreta que ao invés de somar, estaremos sempre multiplicando o termo anterior por um valor constante como uma dentre as diversas compreensões essenciais de famílias de funções segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010).

Os problemas I e II foram resolvidos por alunos que foram eleitos em suas equipes de trabalho, defendendo as suas resoluções para o grande grupo e fazendo as anotações na lousa, praticando os processos de metacognição por meio de uma reflexão consciente sobre o desenvolvimento do trabalho da sua equipe, verificando acertos e erros, apontando falhas, justificando a sua resposta e na resolução apresentada ao grande grupo.

A metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução e exploração de problemas foi trabalhada neste encontro, explorando as grandes ideias e compreensões essenciais da família de funções exponenciais e as questões sociais e de políticas públicas de saúde, julgo importante esse trabalho para uma turma de alunos composta de adolescentes, momento esse da vida de transição, dúvidas e descobertas.

Isto mostra a emergência de abrirmos o espaço da sala de aula de aula para reflexões sobre temas fora da Matemática que sejam motivados a partir da resolução de um problema matemático. O ideal é que isso ocorra em todas as disciplinas escolares. Pois, os temas políticos e sociais são considerados universais, competindo a todos os educadores e em todos os níveis de ensino trabalhar: a conscientização, a interação e o respeito às diferenças. Abriu-se espaço para que eles expusessem sua opinião, embora muitas vezes preconceituosas, porém permitindo que, a partir de tais preconceitos, a discussão, o debate e a reflexão acontecessem em sala de aula.

Ter aberto esse espaço de diálogos nas aulas de Matemática não alterou o andamento dos conteúdos específicos da Matemática, ajudou-nos no exercício e prática de cidadania. Pois, os alunos na resolução de problemas já estavam acostumados a defenderem seus pontos de vista, argumentavam, concordavam e discordavam nos momentos de debates e plenárias promovidos em sala de aula.

5.5.3. Descrição e análise do encontro 26

Aulas 38 e 39 (Data 29/08/2012)

<u>Conteúdos desenvolvidos na atividade 4.3</u>: *Família de função exponencial e representações múltiplas de funções exponenciais; ressaltando conexões mais abrangentes com outros temas fora da matemática como a questão da fome e dos moradores de rua.*

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 4.3:

Atividade 4.3: O economista inglês *Thomas Malthus* elaborou uma teoria onde ele previa um aumento da produção de alimentos em progressão aritmética, ou seja, o gráfico da produção de alimentos versus tempo seria representado por uma reta (função afim). Enquanto, o crescimento da população aumentaria em progressão geométrica, ou seja, o gráfico da população mundial versus tempo seria representado por uma curva da função exponencial, um crescimento muito rápido que não acompanharia a produção de alimentos. Este fenômeno acarretaria um problema muito sério para a humanidade, a *fome*.

A) Diante desta problemática apresentada pelo economista *Malthus*, façam um esboço gráfico das duas situações, usando o mesmo sistema cartesiano, ilustrando este fenômeno.

B) Na época do *Malthus*, ele sugeriu o controle da natalidade como solução para o problema da fome. Atualmente, o problema da fome mundial, sobretudo, na Ásia e na África ocorre por conta da desigualdade social resultante da má distribuição de renda. Portanto, o problema da fome tem solução. Apresentem sugestões de como combater a fome mundial.

C) No Brasil, embora o problema da fome tenha suas próprias peculiaridades, também o enfrentamos. Hoje, muitos brasileiros estão dentro de programas do governo que são paliativos para combater a fome e a miséria no Brasil. Como vocês veem a situação do morador de rua que não pode ser contemplado com nenhum destes programas de governo?

D) Uma mercadoria do gênero alimentício que custava R$ 10,00 teve aumento de 10% ao ano de maneira cumulativa. Levando-se em consideração que este item é muito importante para a nutrição humana e que dentro de oito anos o trabalhador assalariado não teve nenhum aumento, ele teve que retirar este item da sua feira acarretando um problema de subnutrição na sua família. Montem uma tabela do primeiro ao oitavo ano versus os novos valores desta mercadoria. Qual a equação algébrica da função preço de mercadoria decorrido n anos? Esbocem o gráfico dessa função. (Podem usar calculadora).

Inicialmente, entregamos o texto impresso com a situação-problema para os alunos sozinhos realizarem uma leitura individual. Após, a leitura surgiram algumas dúvidas dos alunos relacionadas às progressões aritméticas e geométricas, embora tenham percebido que estavam associadas às funções afins e exponenciais. Por esse motivo, após leitura do problema, resolvemos esclarecer os termos para o grande grupo.

> *PP*: *As progressões aritméticas e geométricas são sequências que a partir do primeiro termo é somado uma mesma razão quando aritmética e é sempre multiplicada a uma mesma razão quando geométrica para formar os termos subsequentes. Por isso, podemos associar às progressões aritméticas as funções afins e às progressões geométricas as funções exponenciais. Por exemplo: A sequência 1, 3, 6, 9, 12, 15, ... é uma progressão aritmética de razão 3 e podem ser pensadas como uma função afim cuja taxa de variação é 3. Enquanto, a sequência 1, 3, 9, 27, 81, 243, ... é uma progressão geométrica de razão 3 e podem ser pensada como uma função exponencial que possui valor sempre proporcional a 3. É importante perceber que a função exponencial não tem taxa de variação constante e sim, valor proporcional constante.*
>
> *A15*: *Professor, eu já vi alguma coisa sobre a teoria de Malthus nas aulas de Geografia. Hoje em dia ela não é mais aceita. Essa comparação do crescimento populacional com a produção de alimentos. Porque mesmo com a alta taxa de crescimento da população, não existe uma desproporção tão grande de alimentos produzidos no planeta.*
>
> *PP: Na época que Malthus enunciou a sua Teoria, para ele se não ocorressem guerras, epidemias, desastres naturais, dentre outras catástrofes mundiais a população tenderia a duplicar a cada 25 anos. Ela cresceria, portanto, em PG (2, 4, 8, 16, 32, ...) com fator de aumento 2 que cresceria sem parar, exponencialmente. Enquanto o crescimento de alimentos ocorreria apenas em PA (2, 4, 6, 8, 10, ...) com taxa de variação constante 2, função afim. Esta*

última com um agravante: o limite de extensão territorial cultiváveis no planeta Terra. A consequência disso tudo seria a fome. Entretanto, atualmente, a produção agropecuária mundial produz alimentos em larga escala suficiente para alimentar bilhões de pessoas.

A22: Os números mostram que a teoria do Malthus não cabe mais na nossa realidade. Mas, por que a gente estuda isso, então?

A43: Porque o problema com a fome ainda existe. Não é porque no Brasil, os supermercados estão cheios de comida que não terá mais gente passando fome.

A08: E outra, hoje o Brasil ocupa a sexta economia no mundo e se destaca pelo grande volume de alimentos exportados para muitos países, mas o que fica para nosso consumo nem é tão bom assim.

PP: E muitos trabalhadores e suas famílias se alimentam muito mal porque não tem dinheiro para comprar os alimentos necessários a manutenção de uma vida mais saudável. Ok. Agora, vou consultar o diário de classe e sortear a formação das duplas para concluírem o trabalho tanto de exploração matemática quanto das questões de ordem social e política. Bom trabalho!

Começamos a chamar as duplas e dar um tempo apenas observando do desenvolvimento das duplas. Continuamos circulando na sala de aula, analisando o trabalho das duplas sem intervir mais no desenvolvimento das questões que eles estavam apresentando na sua equipe de trabalho, muitos gráficos não estavam traduzindo o fenômeno da teoria de Malthus, alguns alunos estavam tentando atribuir valores numéricos para facilitar a construção do modelo gráfico que viesse a representar a teoria. A dupla formada pelos alunos A24 e A40 representou o eixo horizontal com valores naturais de 1 a 5 e, no eixo vertical, localizaram valores de x e $16x$. Partindo do ponto de equilíbrio de coordenadas $(1, x)$, traçaram a reta representando a produção de alimentos e a curva exponencial representando o crescimento populacional.

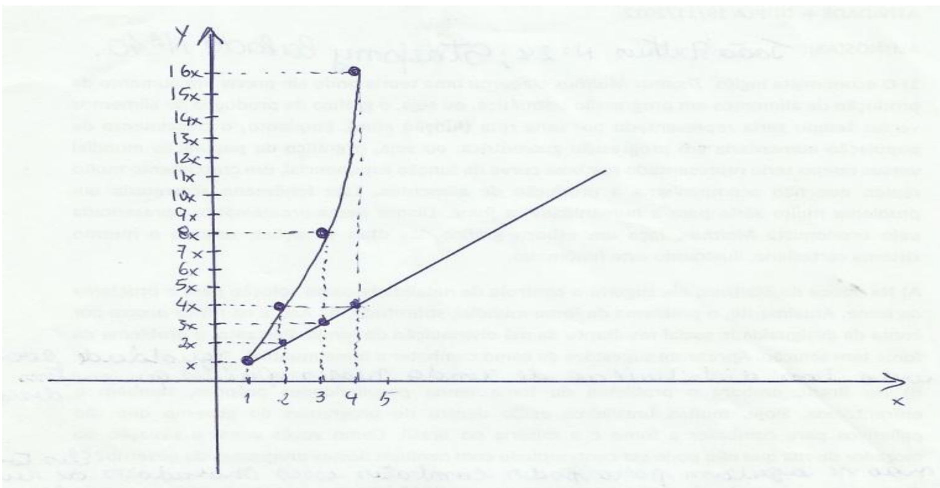


Figura 66: Representação gráfica da questão A relativa à atividade 4.3 pelo aluno A33, representando seu grupo.

Outra dupla chegou a um resultado satisfatório para a representação do modelo gráfico da teoria de Malthus. Foi a dupla de alunas A09 e A31 que admitiu, inicialmente, a população inicial (P_0) menor que a produção de alimentos inicial (A_0) partindo do eixo vertical para $n = 0$ e projetaram respectivamente uma curva exponencial para o crescimento populacional e uma reta para a produção de alimentos que se cruzariam num ponto e a partir dele a produção de alimentos passaria a ser menor do que o crescimento populacional.

Em relação à última questão de exploração matemática, a maioria dos grupos elaborou uma tabela da seguinte forma:

10	11
11	12,1
12,1	13,31
13,31	14,641
14,641	16,1051
16,1051	17,71561
17,71561	19,487171
19,487171	21,435888

Figura 67: Tabela referente à questão D da atividade 4.3 apresentada pela aluna A43, representando seu grupo.

Antes da formalização dos conteúdos trabalhados, apenas uma dupla (A16 e A42) havia chegado à representação da equação algébrica da função: $y = 10 \cdot (1{,}1)^n$ e conseguiram também esboçar o gráfico desta função exponencial a partir do ponto inicial (10,0), já que o problema é do mundo real e não existe tempo negativo. Esta dupla não recorreu aos valores da tabela para representar a curva. Enquanto, as demais equipes não chegaram a uma representação algébrica da função e representaram o gráfico da função exponencial recorrendo aos valores da tabela. No entanto, acabaram esboçando uma reta ao invés de uma curva exponencial.

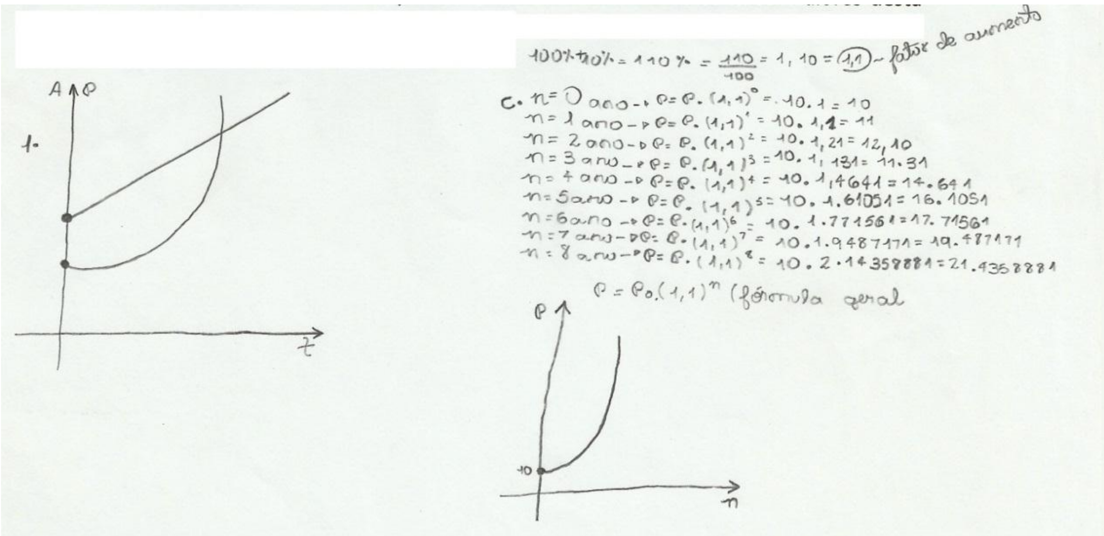


Figura 68: Resolução da atividade 4.3 pela aluna A29, representando seu grupo.

Em relação à problemática social da fome as duplas deram algumas sugestões de combate à fome no mundo. Algumas duplas deram uma solução um tanto quanto ingênua sugerindo que as pessoas ricas doassem cestas básicas para os pobres, quando sabemos que na realidade esse problema é de todos nós, não podemos deixar para as classes abastadas a solução deste problema. Até mesmo porque as classes hegemônicas defenderão os seus interesses e certamente acabar com a pobreza e a miséria não estão nas suas pautas de reivindicação.

Outras duplas colocaram a responsabilidade no governo. Se ele quiser pode acabar com a fome promovendo igualdade social, oferecendo mais trabalho para o povo e se juntando com outros governos de outras nações para buscar apoio. Alguns poucos grupos falaram em solidariedade, no trabalho voluntário das pessoas saírem pedindo alimentos para doar cestas básicas para famílias carentes e criação de instituições não governamentais de modo que as pessoas possam doar alimentos para serem distribuídos para os pobres.

Quanto ao morador de rua, julgamos as respostas, de modo geral, pouco reflexivas, ficando mais na lamentação do fato. Nas palavras da dupla A15 e A45: *É triste porque os moradores de rua não têm os direitos que merecem*.

> A dupla de alunas A37 e A44 responderam do seguinte modo: *Injusto, pois é até mesmo irônico o combate à fome dessa forma, pois pessoas que tem uma renda estável tem a ajuda do governo, enquanto que as pessoas que realmente necessitam do auxílio não tem esse benefício. Porque temos que ajudar as pessoas em situações mais precárias.*

A dupla A09 e A31: *Nós achamos isso uma injustiça, porque o governo deveria ajudar e levar esses moradores de rua para um abrigo ou até mesmo procurar suas famílias e eles deveriam ter acesso a uma bolsa família, uma cesta básica. O governo deveria pensar e começar a colocar em prática para as pessoas terem uma vida melhor*.

Nosso foco se voltou para as plenárias de exploração matemática sendo convocadas a dupla A24 e A40 para representação gráfica para o modelo da teoria de Malthus, onde eles escolheram o aluno A24 para desenhar o esboço e explicar para o grande grupo como eles haviam interpretado o fenômeno. A escolha foi boa porque o aluno A24 é muito calado, porém ele estava confiante e seguro na sua exposição. Em seguida, solicitamos a dupla A09 e A31 para esboçar e traduzir o modo que eles haviam interpretado o modelo matemático para a teoria de Malthus, entre elas foi escolhida a aluna A09 que desenhou o esboço na lousa e explicou que admitiu inicialmente uma produção de alimentos maior que a população mundial e fez uma ressalva: A*inda hoje a situação continua sendo essa, só que hoje apenas uma minoria tem acesso aos produtos necessários a uma nutrição saudável e muitos passam fome de verdade.*

Convocamos a dupla de alunas A03 e A47 para montar a tabela mostrando o crescimento do valor da mercadoria que custava inicialmente R$10,00 e foi aumentando cumulativamente decorridos oito anos. Entre elas foi eleita a aluna A47 para ir à lousa desenhar o quadro e explicar para a turma como elas haviam construído a tabela e completou falando que elas não usaram a calculadora porque não julgaram necessário na realização do cálculo. E chamou atenção da turma que a mercadoria mais do que duplicou o preço com o passar dos anos enquanto o salário do trabalhador permaneceu o mesmo.

Reescrevemos o quadro mostrando uma forma mais organizada de montar a tabela, chamando a primeira coluna de n $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ e a segunda coluna de y $(10; 11; 12{,}10; 13{,}31; 14{,}64; 16{,}10; 17{,}71; 19{,}48; 21{,}43)$, enfatizando a necessidade de se fazer os devidos arredondamentos para o problema dentro do contexto do sistema monetário brasileiro que usa apenas duas casas decimais, os centavos de reais.

Logo em seguida solicitamos a dupla composta pelos alunos A16 e A42 para escrever a equação algébrica da função e desenhar o esboço gráfico da função na lousa, onde foi eleito o aluno A16 para explicar a interpretação da dupla para as suas representações algébricas e gráficas. O aluno A16 falou que: *foi fácil porque o valor* *inicial era de 10 reais vezes o fator de aumento (100%+10%=110%=1,10=1,1) elevado ao tempo n. Portanto,* $y = 10 \cdot (1{,}1)^n$. *E como a equação é de uma função exponencial resultante de um problema do mundo real, o gráfico partiu de 10 na reta vertical de maneira crescente por meio de uma curva.*

Chamamos a atenção das duplas que utilizaram as coordenadas a partir da tabela, mas que não tiveram o cuidado de prestar atenção na escala adotada e acabaram construindo o gráfico errôneo de uma reta quando a função exponencial é representada graficamente por uma curva. E findamos a aula, fazendo um esboço na lousa das coordenadas que foram encontradas na tabela de modo a poder traçar uma curva esclarecendo para o grande grupo o equívoco cometido pela maioria das duplas. Esclarecendo também que a função exponencial $y = a \cdot b^x$ será crescente quando $b > 0$ e decrescente quando $0 < b < 1$. Mostramos, graficamente na lousa, as representações destas conclusões finais.

Nosso trabalho começou com explicações tendo em vista à compreensão dos alunos de conhecimentos prévios sobre as progressões aritméticas e geométricas de modo que essa linguagem e vocabulário apresentado no problema não viesse dificultar a compreensão e interpretação da situação por parte dos alunos. De modo que eles puderam desenvolver o problema de forma mais produtivo na resolução e exploração do problema, superando os problemas secundários de uma possível dificuldade de leitura do texto com a ajuda do professor por meio dessas explicações que foram feitas aos alunos. Por exemplo, no texto do problema sobre a Teoria de Malthus, as palavras progressões aritméticas e geométricas não estavam claras para os alunos. Por isso, buscamos uma forma de poder esclarecer as dúvidas, eliminando um possível problema secundário para os alunos. Agora, a partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos buscaram em seus grupos resolvê-lo, explorando tanto o contexto matemático quanto fora dela dentro de um ambiente de resolução e exploração de problemas.

As duplas formadas pelos A24 e A40 quanto A09 e A31 chegaram a um modelo de representação gráfica do fenômeno social proposto por Malthus mais adequado e não precisaram da nossa intervenção nas construções de seus gráficos. Enquanto os demais grupos precisaram do professor em um trabalho na Zona de Desenvolvimento Potencial para que eles pudessem avançar de nível.

Todas as duplas conseguiram construir uma tabela para a última pergunta do problema que explorou o crescimento cumulativo de uma mercadoria de R$ 10,00 decorridos oito anos a uma taxa de 10% ao ano. Porém, a tabela não foi convencional, colocando-se na primeira coluna n (anos) e y (montante) como havíamos esperado. No entanto, os cálculos estavam corretos e muitas duplas haviam dispensado o uso de calculadora como sugerido no enunciado da questão. A representação numérica ou tabelar é a mais simples, entretanto as formas mais convencionais surgem após um aprendizado interacionista e social determinado por um contexto escolar ou formal que requer a organização e coleta de dados dispostos de uma maneira que possa ser compreendida por uma dada comunidade, a científica.

Entretanto, a escrita da equação algébrica e o gráfico da função só foram representados pela dupla formada pelos alunos A16 e A42. Encontrar a equação algébrica da função que modela a situação-problema não é uma tarefa fácil porque exigiu dos alunos um nível maior de abstração e generalização. Sair dos níveis particulares, notadamente numéricos para um nível geral, abstrato, algébrico segundo Vygotsky (2008) requer desenvolvimento do pensamento para níveis superiores. Por isso, na maioria das vezes precisamos levar os alunos para níveis mais elevados por meio de mediações, garantindo a todos a compreensão deste processo de desenvolvimento de modo que todos possam ir mais além do que seriam capazes em um trabalho individual e solitário.

Segundo Friedlander e Tabach (2011), a representação gráfica é eficaz em proporcionar uma imagem clara de uma função de variável real. Mas, as representações gráficas podem não ter a precisão necessária dependendo da escala adotada. Por isso, a maioria das duplas localizaram os pontos da tabela no gráfico e representaram o gráfico da função exponencial referente ao contexto da última pergunta traçando equivocadamente uma reta. Enquanto, outros estavam conscientes de ter que representar uma curva exponencial, mas à mão livre, não conseguiam representar adequadamente o gráfico dessa função matemática, tornando-se necessário o trabalho de intervenção por parte do professor, tirando as dúvidas no tocante à escala a ser adotada, fazendo desse modo que os alunos possam, finalmente, traçar a curvatura exponencial proposta no problema.

Em relação à problemática social da fome registramos tanto sugestões ingênuas atribuindo-se a responsabilidade aos ricos a doação de cestas básicas quanto outras mais conscientes atribuindo o problema a falta de vontade política, a promoção de igualdade social com uma distribuição de renda mais justa e alguns poucos sugeriram a criação de organizações não governamentais e trabalho solidário do cidadão comum distribuindo cestas básicas em comunidades carentes. Em relação ao morador de rua também julgamos que a maioria dos alunos não foi muito crítico. Pois, apenas lamentaram o fato da existência de pessoas como os moradores de rua que estão alijados de todas as formas de benefícios e direitos de programas sociais do governo federal.

As plenárias seguiram-se no sentido de trazer os avanços do coletivo representativo da turma em relação à situação-problema apresentada nesta sessão de encontro, convocamos as equipes que já haviam desenvolvido um trabalho que pudessem mediante as suas defesas trabalhar a Zona de Desenvolvimento Proximal do grande grupo ao que chegaram após as análises das questões a um consenso em que foi possível levar a todos uma compreensão do que foi proposto na situação-problema.

A formalização dos conteúdos ficou para o final da aula com o professor, trabalhando a partir do erro de construção gráfica da maioria das duplas na representação gráfica de uma função exponencial equivocadamente por meio de uma reta. Trabalhamos na ZDP de modo a levar uma compreensão de escala a ser adotada para não haver engano na construção de gráficos de funções exponenciais que serão sempre representados por uma curva crescente ou decrescente dependente do valor da base que corresponde ao fator de aumento ou diminuição da equação algébrica da função.

5.5.4. Descrição e análise do encontro 27

Aulas 40 e 41 (Data 31/08/2012)

<u>Conteúdos desenvolvidos na atividade 4.4</u>: *família de função exponencial, ressaltando o conteúdo de porcentagem para a exploração de problemas que possam envolver taxas percentuais e o raciocínio exponencial.*

Neste encontro, trabalhamos com a atividade 4.4:

Atividade 4.4: Proposição de problemas

1) Criem e resolvam um problema envolvendo o raciocínio exponencial.

2) Formulem e resolvam um problema com porcentagem.

Entramos na sala de aula e cumprimentamos a turma, em seguida solicitamos a formação de duplas de alunos e colocamos na lousa as questões um (1) e dois (2), pedimos para os alunos que formulassem problemas com enunciados dentro de uma situação-problema.

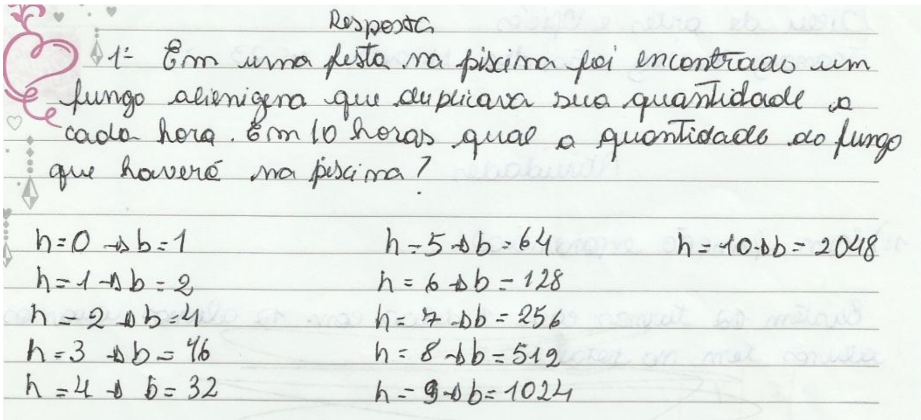
> A35: *Eu tenho que escrever uma historinha, professor.*
>
> PP: *Pode usar da sua criatividade, fique à vontade para criar os problemas dentro de diversos contextos tanto da realidade diária quanto da sua imaginação. Desde que tenha uma coerência de raciocínio matemático que faça sentido.*
>
> A41: *Eu posso elaborar uma equação para ser resolvida.*
>
> PP: *Eu prefiro que você elabore um problema com um enunciado que possa ser traduzido por uma equação modelando esta situação, ou seja, antes de você criar a equação, escreva o enunciado descrito por essa equação.*
>
> A41: *Assim, é mais difícil, professor.*
>
> PP: *Dessa maneira, vocês vão poder exercitar melhor a criatividade. Quero que vocês criem os seus próprios problemas, eles precisam estar organizados, bem estruturados e que façam sentido. Bom trabalho!*

Depois de termos dado as informações sobre o trabalho de elaboração dos problemas, circulamos na sala de aula, observando o trabalho das duplas.

Um dado novo que foi explorado nesta atividade surgiu no aspecto de tentarmos desenvolver a criatividade dos alunos não somente na busca de estratégias de resoluções diferentes para o mesmo problema e extensões matemáticas e fora dela. Mas, a exploração da criatividade na elaboração dos seus próprios enunciados como propositores de problemas. No nosso trabalho até então desenvolvido havíamos nos preocupado com os problemas sociais e políticos que nos atingem diretamente enquanto cidadãos.

No entanto, outros contextos da vida dos adolescentes devem ser levados em consideração como, a ida ao cinema para assistir filmes de ação, terror, comédias, ficção científica e histórias de amor, as festas nas piscinas, os esportes, jogos, músicas prediletas, a criação de um animal de estimação, dentre outros que estejam diretamente relacionados ao contexto de vida desses alunos que emergem, com naturalidade por parte deles, nas suas enunciações de problemas criados em sala de aula. Demos um tempo para que todos os alunos da sala de aula nas suas respectivas duplas tivessem elaborado e resolvido os dois problemas propostos.

Pedimos, após o término do trabalho de elaboração e resolução dos problemas, que eles nos entregassem os problemas que eles próprios haviam formulados para que pudéssemos selecionar alguns trabalhos das duplas para participar de plenárias, fazendo as defesas dos problemas por meio da enunciação do problema para o grande grupo e exposição das resoluções na lousa, tendo cada dupla selecionada o direito de escolher um aluno da sua equipe para representá-los diante da turma.


Resposta

1ª Em uma festa na piscina foi encontrado um fungo alienígena que duplicava sua quantidade a cada hora. Em 10 horas qual a quantidade do fungo que haverá na piscina?

$h=0 \to b=1$
$h=1 \to b=2$
$h=2 \to b=4$
$h=3 \to b=16$
$h=4 \to b=32$
$h=5 \to b=64$
$h=6 \to b=128$
$h=7 \to b=256$
$h=8 \to b=512$
$h=9 \to b=1024$
$h=10 \to b=2048$

Figura 69: Texto e resolução de problema pela dupla de alunas A41 e A46.

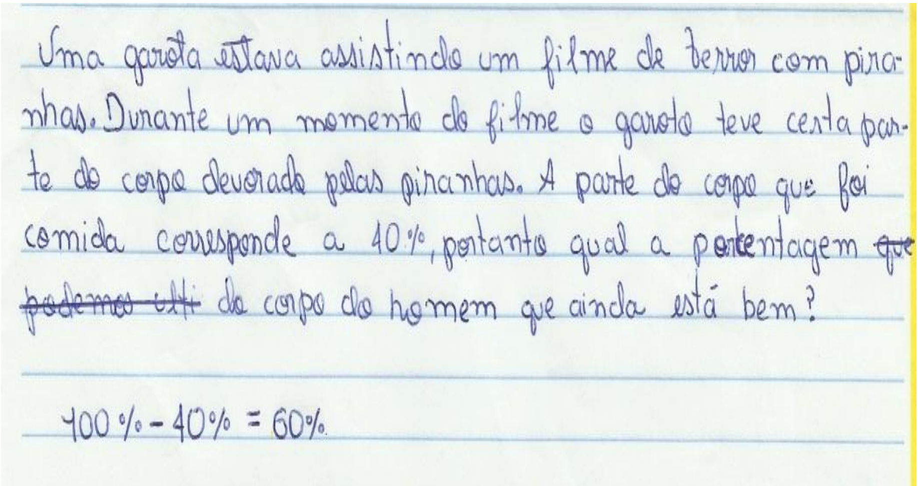
Transcrição do problema da figura 69: Em uma piscina foi encontrado um fungo alienígena que duplicava sua quantidade a cada hora. Em 10 horas, qual a quantidade do fungo que haverá na piscina?

Comentário: Este erro na passagem da segunda para terceira hora foi cometida pela aluna A41 na sua exposição à lousa, que foi observado pelo aluno A39, e, imediatamente ela pôde fazer as devidas correções, encontrando a solução 1024 fungos alienígenas para este problema que foi enunciado por ela e outro colega da dupla.

Fizemos intervenções chamando a atenção dos alunos para descobrir a fórmula geral do problema enunciado acima, pois o valor inicial é igual a um fungo alienígena e o fator de aumento corresponde a dois, representando a base de aumento da função exponencial e o tempo é a variável exponencial n. O problema consistiu em encontrar a saída, $f(10)$, de uma entrada ($n = 10$), ou seja, calcular a função a partir da imagem de um domínio dado correspondente.

A aluna A47 diz: *A equação da função exponencial é* $f(n) = 2^n$. Enquanto, o aluno A24 comenta: *Então, é só substituir* n *por dez, fazendo dois elevado à 10 igual a 1024.*

No exemplo mostrado, a aluna A41 além de ter construído um cenário de fantasia e ficção científica, sua descrição chamou muita atenção porque retratou um bom exemplo de problema de raciocínio exponencial, tendo ela feito articulação do texto aos dados que apareceram no problema, desse modo o trabalho via proposição de problemas foi encarado como algo desafiador e motivador que estimulou a capacidade criativa e questionadora dos alunos.



Uma garota estava assistindo um filme de terror com piranhas. Durante um momento do filme o garoto teve certa parte do corpo devorado pelas piranhas. A parte do corpo que foi comida corresponde a 40%, portanto qual a porcentagem ~~que podemos uti~~ do corpo do homem que ainda está bem?

100% - 40% = 60%

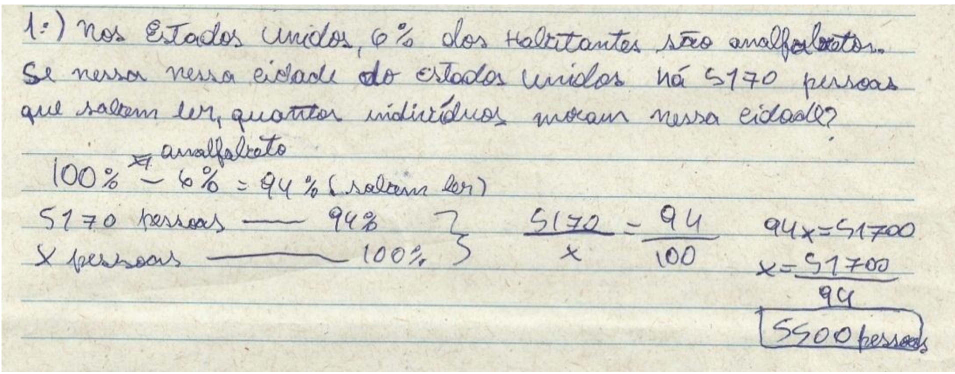
Figura 70: Texto e resolução de problema elaborado pela dupla de alunas A41 e A46.

Transcrição do problema da figura 70: Uma garota estava assistindo um filme de terror com piranhas. Durante um momento do filme o garoto teve certa parte do corpo devorado pelas piranhas. A parte do corpo que foi comida corresponde a 40%. Portanto, qual a porcentagem do corpo do homem que ainda está bem?

Comentário: Do ponto de vista matemático para um aluno de Ensino Médio o problema elaborado fora muito simples. Logo, no início julgamos o problema meio mórbido. Porém, conversando com a aluna A41, ela nos confessou que adora filmes de terror. Por outro lado, o texto apresenta muita criatividade e imaginação dessa aluna na sua produção pela dupla, no entanto faltou coerência porque inicialmente o problema menciona um garoto, depois se refere a um homem, chamamos a atenção da dupla para que elas mantivessem a coesão e coerência textual.

Convidamos a aluna A46 para expor a enunciação do problema elaborado pela sua equipe, depois da sua apresentação, perguntamos: *Você acha que é possível esse homem ter sobrevivido ao ataque dessas piranhas tendo quase a metade do seu corpo devorado? A aluna* A41: *Eu acho que não. Dependendo da parte do corpo com muito menos uma pessoa morre.*

Para as próximas duplas, selecionamos apenas um dentre os dois problemas elaborados.



1:) nos Estados unidos, 6% dos Habitantes são analfabetos. Se nessa nessa cidade do estados unidos há 5170 pessoas que sabem ler, quantos indivíduos moram nessa cidade?

analfabeto

$100\% - 6\% = 94\%$ (sabem ler)

5170 pessoas —— 94%
x pessoas —— 100%

$\frac{5170}{x} = \frac{94}{100}$

$94x = 51700$

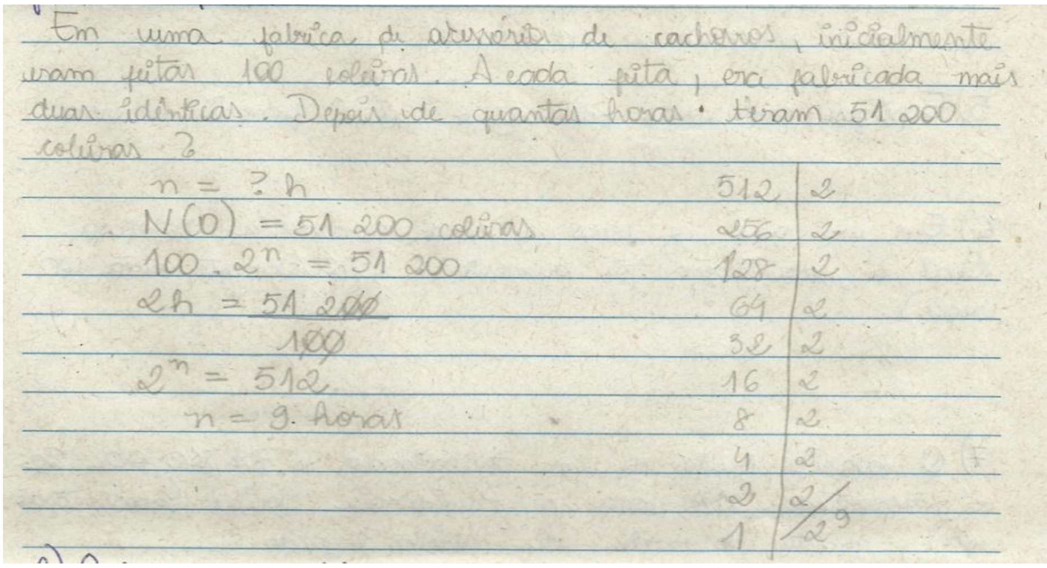
$x = \frac{51700}{94}$

$\boxed{5500 \text{ pessoas}}$

Figura 71: Texto e resolução de problema elaborado pela dupla de alunos A06 e A45.

Comentário: Ao ler o texto, chamamos a atenção para o fato de que desde o início do problema, a dupla deveria ter se referido a uma cidade dos Estados Unidos para poder manter coerência na enunciação do problema. Sugerimos a reescrita do problema desse modo: Em uma cidade nos Estados Unidos, 6% dos habitantes são analfabetos. Se nessa cidade dos Estados Unidos há 5.170 pessoas que sabem ler, quantos indivíduos moram nessa cidade?

Em todas as propostas de intervenções feitas, tivemos bastante atenção para com os erros textuais ou de cálculos não fossem vistos como falhas inadmissíveis, mostradas para intimidar ou desmotivar os alunos. Muito pelo contrário, desejávamos que eles tivessem oportunidade de refletir sobre esses erros, dando a sua opinião, debatendo e criando a necessidade de confrontar e melhorar suas produções de textos e de cálculos matemáticos. De qualquer maneira verificamos sempre se os problemas estavam adequados, se estavam bem escrito, se haveria necessidade de rever os dados numéricos bem como a melhoria da escrita da produção do problema matemático que eles próprios haviam elaborados.



Em uma fabrica de acessórios de cachorros, inicialmente eram feitas 100 coleiras. A cada hora, era fabricada mais duas idênticas. Depois de quantas horas terão 51 200 coleiras?

$n = ?\,h$

$N(0) = 51\,200$ coleiras

$100 \cdot 2^n = 51\,200$

$2n = \frac{51\,200}{100}$

$2^n = 512$

$n = 9$ horas

512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	2^9

Figura 72: Texto e resolução de problema elaborado pela dupla de alunas A02 e A09.

Transcrição do problema da figura 72: Em uma fábrica de acessórios de cachorros, inicialmente eram feitas 100 coleiras. A cada feita, eram fabricadas mais duas idênticas. Depois de quantas horas terão 51.200 coleiras?

Comentário: Embora a solução apresentada estivesse correta, foi necessário esclarecermos o cuidado que os alunos deveriam ter nas representações simbólicas adotadas durante o processo de resolução do problema, como por exemplo, o de denotar o valor inicial de $\mathrm{N}(0) = 100$, o valor final $\mathrm{N}(\mathrm{n}) = 51.200$, e a variável exponencial de n, mantendo sempre a coerência tanto textual quanto na linguagem matemática das representações algébricas feitas durante todo o processo de tratamentos algébricos de resolução do problema que eles haviam produzido ($100 \cdot 2^{\mathrm{n}} = 51.200 \rightarrow 2^{\mathrm{n}} = \frac{51.200}{100} \rightarrow 2^{\mathrm{n}} = 512 \rightarrow 2^{\mathrm{n}} = 2^{9} \rightarrow \mathrm{n} = 9$ horas).

Este problema diferentemente do problema anterior elaborado, explorando o raciocínio exponencial, recai numa equação exponencial, o problema informou o valor da imagem e pediu o domínio correspondente nessa função. Em outras palavras, o problema pede para encontrar a entrada a partir de uma saída que corresponde a resolver uma equação. Não houve confusão entre os componentes do conceito de função domínio e imagem, entrada e saída. Simplesmente, houve confusão na hora de representar cada um desses elementos de maneira adequada, no entanto, acreditamos que estes conceitos estavam bem compreendidos.

Assim, registramos nesse momento uma superação de um problema que em outros encontros eram muito comum, para uma dada função na sua representação algébrica, os alunos consideravam mais difícil encontrar o elemento do domínio correspondente, dadas a imagem, do que no sentido contrário. E a explicação para esse fenômeno nos parece simples, para achar os elementos do domínio, o aluno tem de resolver uma equação, ao passo que as imagens se acham diretamente através de cálculos numéricos por substituição.

Do ponto de vista das representações múltiplas os alunos na proposição de problemas mobilizaram três maneiras de representações: verbal, numérica e algébrica. A representação gráfica não apareceu em nenhum dos problemas formulados por eles, indicando que a representação gráfica pelos alunos como propositores de problemas exigirá deles um domínio de um sistema de representação muito complexo. Vemos na produção dos alunos que inicialmente eles foram capazes de elaborar problemas com inventividade e criatividade, a resolução mais empregada passa pelas representações numéricas como uma das primeiras tentativas de interpretação e resolução dos problemas que Vygotsky (2008) coloca dentro da esfera dos conceitos cotidianos e a representação algébrica dentro dos conceitos científicos, no primeiro problema analisado foi necessário realizarmos intervenções para se chegar à generalização da equação da função exponencial. Enquanto, no último problema analisado os alunos já atingiram esse nível de abstração com independência, mesmo o professor tendo que fazer algumas observações quanto às anotações que estavam inadequadas. Porém, do ponto de vista das deduções feitas pelos os alunos na dupla de trabalho, mostram que eles atingiram os níveis superiores de pensamento.

> Comentário: Não seria possível trazermos todas as duplas para fazerem sua defesa na enunciação e resolução de problemas em que eles foram seus próprios propositores de problemas. Certamente, o trabalho com a proposição de problemas exigirá mais devolutivas e ao mesmo tempo traz informações preciosas para o professor. Pois, nem todos os problemas elaborados para a questão de número um (1), os alunos usaram o raciocínio exponencial, houve alguns problemas que a dupla usou o raciocínio multiplicativo elementar e não o raciocínio multiplicativo exponencial, os problemas de porcentagem (2) ficaram todos no campo do cálculo de porcentagem simples (proporcionalidade direta), nenhum problema foi elaborado com função exponencial envolvendo taxas de aumento ou diminuição percentuais. Sem sombra de dúvida, para exercitar a inventividade e a criatividade o trabalho sob a perspectiva da proposição de problemas se mostrou uma ferramenta muito eficaz de trabalho em sala de aula, indicando os conteúdos matemáticos que os alunos já tinham domínio sobre seus objetos e seus conceitos e outros que melhor deverão ser trabalhados dentro da perspectiva da resolução e exploração de problemas.

Acabamos deixando as propostas de proposição de problemas por último porque desde o início nos sentíamos receosos e desejávamos planejar com muito cuidado, uma vez que os alunos demonstraram inicialmente muita resistência ao trabalho na perspectiva da resolução e exploração de problemas e no trabalho em equipe e aos poucos foi sendo superado e depois que eles estavam acostumados a resolver problemas antes de começarmos com o trabalho de pesquisa, desejávamos que eles tivessem muito contato com diferentes problemas para resolver antes de pedirmos que eles elaborassem seus próprios problemas.

A título de fechamento do que foi nossa experiência em sala de aula, faremos uma reflexão em torno do movimento de nossas práticas, das descrições e análises das aulas, dando uma ideia de continuidade e melhoramento dessa vivência no trabalho docente e do pesquisador sobre as ações/interações acerca do conteúdo matemático das funções.

5.6. Fechamento: Síntese da experiência didática em sala de aula

Sentimos que a elaboração de seus próprios problemas por parte dos alunos em sala de aula necessita de uma criação e de uma vivência anterior de um conhecimento e um desenvolvimento mínimo de modelos que serviram de inspiração para a proposição de problemas. Por essa razão colocaríamos a proposição de problemas entre a resolução e exploração de problemas, porém ela está dentro das atividades centrais do pensar matemático. Atualmente, não podemos conceber o ensino de Matemática contemplando somente um desses vieses, fazendo com que os alunos possam ao longo do desenvolvimento das aulas de Matemática resolver, propor e explorar problemas matemáticos em sala de aula. No último encontro, trouxemos um dado novo, o desafio da estratégia de ensino para a tarefa do aluno ser capaz de produzir textos matemáticos por meio de problemas, em que foi permitido aos alunos que estabelecessem novas relações com a Matemática, refletindo sobre suas práticas do fazer matemático e no desenvolvimento de sua criatividade através da proposição de problemas.

Continuamos trabalhando com essa turma de alunos até o final do ano letivo mesmo depois de termos encerrado o processo de registro por escrito dos acontecimentos das aulas através de descrições e análises, trabalhando com a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, na quarta unidade letiva tivemos que retomar ao estudo das funções exponenciais, pois, as atividades trabalhadas na unidade passada ainda não haviam dado conta dos conteúdos essenciais a serem trabalhados dentro desta temática, mais tabelas de funções exponenciais foram exploradas, conversão de representação gráfica para algébrica e mais problemas de aplicações envolvendo o crescimento ou decrescimento exponencial através de taxas percentuais, problemas de montante e descontos a juros compostos (Matemática financeira) e o estudo das funções logarítmicas a partir da modelização de problemas envolvendo o raciocínio exponencial que pedem e justificam a aplicação dos logaritmos como função inversa da exponencial.

No entanto, todos esses encontros, neste capítulo, descritos e analisados representam uma boa amostra de um trabalho empregando a metodologia de ensino-aprendizagem via resolução, proposição e exploração de problemas no estudo sobre o conceito de função, funções afins, quadráticas e exponenciais, tendo como ferramenta mediadora as representações múltiplas e os diversos contextos político, social e cultural. Estas atividades representam um recorte de uma experiência didático-pedagógica em uma sala de aula de uma turma de 1º ano do Ensino Médio que nos exigiu muita atenção devido ao próprio processo de compreensão e aquisição de conhecimentos serem demorados, ao mesmo tempo enxergávamos avanços e resistências, cabendo-nos orientar os alunos sem atropelar o processo da metodologia de trabalho adotada. Nesse processo, as ações/interações realizadas, fizeram com que os alunos avançassem na compreensão das ideias essenciais de funções que foram exploradas nas atividades propostas e na criação de atividades formuladas pelos próprios alunos, sendo para isso necessário desmistificarmos a ideia de trabalharmos com grandes quantidades de problemas em favor da qualidade de ensino.

Apesar de todo o esforço de apresentarmos o contínuo de uma sala de aula de Matemática no desenvolvimento de ideias e compreensões essenciais de funções em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio apresentamos aqui recortes das atividades que foram realizadas e tentamos organizá-las de forma que elas viessem responder a(s) pergunta(s) da pesquisa. No entanto, dada sua grande complexidade, as descrições e análises demandariam mais discussões em torno dessas aulas que foram ministradas, mas certamente muitas coisas nos escaparam, diante de como elas foram construídas a partir desses encontros em sala de aula, levando-se em consideração uma turma cheia de alunos que não tínhamos como interagir com todos os grupos de alunos. Por outro lado, esses encontros nos possibilitou refletir sobre como a experiência vivenciada pelos alunos onde atuamos como professor-pesquisador da nossa própria prática em sala de aula representou algum avanço no desenvolvimento de uma compreensão essencial de funções via resolução, proposição e exploração de problemas.

Na experiência que consta neste relatório de pesquisa, pudemos observar transformações durante as ações/interações dos alunos e nossa também ao longo das sessões que foram se tornando cada vez mais importantes e significativas. Observamos avanços no desenvolvimento do trabalho no sentido da direção do diálogo professor-aluno que foi se transformando no sentido da direção do diálogo aluno-aluno. Os alunos passaram a considerar que deveriam explicar e justificar seu raciocínio, participando livremente das plenárias nas defesas de seus grupos, respeitavam as falas do seu colega, formulavam perguntas e manifestavam suas discordâncias, faziam refutações e entravam em consenso, ampliando desse modo a sua compreensão de funções matemáticas com mais intensidade.

Apresentavam e discutiam resoluções diversas para o mesmo problema fazendo uso de representações múltiplas de funções e justificando seus procedimentos e atitudes matemáticas, em um trabalho de metacognição, o que levou muitos dos alunos a possibilidade de ampliar suas compreensões de ideias essenciais de funções. Pudemos observar avanços significativos no trabalho por parte da maioria dos alunos. No entanto, as formas de participação, os conceitos, procedimentos e atitudes práticas colocados em ação/interação durante o desenvolvimento de compreensões de ideias essenciais de funções exploradas nas situações propostas e por eles formuladas se manifestavam em níveis de apropriação diferenciados dado a heterogeneidade da turma.

Uma das nossas dificuldades sentidas durante o desenvolvimento desta pesquisa se deu pelo fato de trabalharmos com uma sala de 44 alunos. Por isso, trago resultados do sujeito coletivo desta pesquisa que foi a turma do 1º ano de ensino médio, não sendo possível falarmos de grupos específicos de alunos porque os grupos em cada sessão na sua maioria eram grupos de trabalho diferenciados. Trabalhamos na perspectiva de construções de ideias e compreensões essenciais de funções socialmente construídas e por julgarmos também mais importante trazer a sala de aula e as falas dos alunos por meio das muitas descrições e análises de aulas que tiveram o propósito de transformar as ações e interações em sala de aula em um ambiente coletivo de resolução, proposição e exploração de problemas no qual todos tiveram oportunidade de participar.

Após a realização de todas essas atividades, ficou-nos evidente que verbalizar uma definição de função não é garantia de haver compreensão dela. Na prática, os alunos participantes desta pesquisa demostraram compreender o essencial sobre o conceito de função, a ideia-chave de unicidade e de que ela pode ser representada de múltiplas maneiras: verbal, numérica, gráfica e algébrica. Por outro lado, o conceito de função não é fácil de ser compreendido por ser uma ideia abstrata, ampla e flexível que deverá ser desenvolvida ao longo da escolaridade até a universidade.

A dificuldade inicial dos alunos começou na leitura e interpretação dos problemas, quando eles não conseguiam compreender nem interpretar o problema que estava dentro de um contexto ou padrão concreto e eles precisavam traduzir essa linguagem natural para uma linguagem matemática por meio de suas representações diversas: numérica, gráfica ou algébrica. Em alguns momentos fizemos o trabalho de mediadores dessa linguagem mais formal e rigoroso para que essa dificuldade não viesse a se transformar em um empecilho intransponível ao desenvolvimento da resolução e exploração de problemas para os alunos.

Em relação a cada tipo de representações de funções que foram acionadas por alunos nesta pesquisa. As representações numéricas surgiam mais espontaneamente nas resoluções de problemas, principalmente por meio de resoluções por tentativa, seguindo o modelo de resolução passo a passo até chegar a um resultado do problema. Enquanto as representações algébricas de funções, nem sempre, os alunos mobilizavam por conta própria esse tipo de representação, na maioria das vezes, foi necessário nossa intervenção para eles chegar aos níveis de generalização e abstração desejados para o nível de alunos de Ensino Médio. De fato, nos aproximamos com as pesquisas da área que afirmam que a representação algébrica é a mais complexa de ser realizada por alunos. Por último, nossa pesquisa evidenciou que a representação gráfica é também uma das mais difíceis de ser mobilizada espontaneamente por alunos, apesar de seu apelo e facilidade de interpretação visual. Optamos trabalhar as atividades desenvolvidas nesta pesquisa, na Zona de Desenvolvimento Proximal dos alunos, de modo que elas não estivessem dentro das capacidades por eles já desenvolvidas e muito menos que elas estivessem aquém das capacidades potenciais dos alunos. Com essa sugestão, por meio do uso combinado de representações múltiplas de funções os alunos demonstraram haver compreendido as ideias essenciais que foram exploradas em cada atividade proposta.

Tendo em vista o desenvolvimento de valores, atitudes e personalidades além dos aspectos conceituais, favorecendo outras discussões fora da Matemática, dentro das explorações dos problemas no estudo de funções, dando oportunidades aos alunos na exploração dos problemas que foram além das explorações internas da própria matemática e fizeram conexões com múltiplos contextos que estão diretamente relacionados com a formação para a cidadania dos nossos alunos.

Dessa experiência de ensino em sala de aula pudemos destacar que o nosso grande aprendizado foi poder enxergar que o processo de ensino-aprendizagem de Matemática perpassa pelos caminhos da resolução, proposição e exploração de problemas de modo que possamos formar alunos que além de resolver problemas possam também ser propositores e exploradores de problemas matemáticos, no nosso caso específico, dentro do contexto do estudo de funções matemáticas.

Os resultados desta pesquisa através das descrições e análises que foram tecidas ao longo desta pesquisa indicam a consideração do trabalho em sala de aula sob a perspectiva das ideias e compreensões essenciais de funções, analisando as ações/interações que foram feitas nos níveis de representações múltiplas. As análises da própria prática docente que foram voltadas ao desenvolvimento do raciocínio matemático funcional sugerem e podem orientar o trabalho do professor em outras realidades e outros contextos do trabalho cotidiano escolar. Também sugerem que o trabalho coletivo em um ambiente de resolução, proposição e exploração de problemas com o objetivo de desenvolver o raciocínio matemático funcional dos alunos, abarca as compreensões de ideias essenciais de funções que perpassam todo o trabalho da Matemática e de outras Ciências além de poder ser instrumento de extensões que possa ajudar os alunos na formação para a cidadania.

A seguir, apresentamos os principais resultados da pesquisa, limites e implicações educacionais e para o pesquisador por meio de uma discussão e debate acerca das reflexões realizadas no contínuo de uma sala de aula, trabalhando com a temática das funções.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levando-se em consideração a fundamentação teórica, a pesquisa de campo com a aplicação das atividades, cabe novamente fazer uma reflexão sobre o problema que delimitou esta pesquisa: *Que compreensões de ideias essenciais de funções apresentam os alunos? Quais as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, aliadas ao uso de representações múltiplas, para o estudo de funções?*

Podemos apontar, a partir da finalização do trabalho de campo, que as maiores dificuldades na compreensão do conceito de função, pelos alunos, continuam sendo os seus elementos componentes tais como, domínio, imagem, regra de associação e devido às diferentes representações de funções, aproximando-se das ideias defendidas pelos pesquisadores, Markovits, Eylon e Buckheimer (1995), e Cooney et al (2002 apud Cooney, Backmann e Lloyd, 2010) que apontam essas mesmas dificuldades de alunos em desenvolver mobilização entre diferentes representações de funções.

Outras dificuldades apresentadas pelos alunos durante a realização desta pesquisa foram distinguir gráficos de funções discretas e contínuas; lidar com gráficos de funções por parte, sobretudo os desconexos; interpretar, construir e analisar gráficos de funções e conversões de representações gráficas. Essa última, no sentido da direção gráfica para algébrica principalmente, foram sendo superadas à medida que eles avançavam nas compreensões essenciais de cada família de funções trabalhadas no contexto didático da resolução, proposição e exploração de problemas.

Apontamos também dificuldades na compreensão da linguagem matemática formal e suas notações convencionais. Foi difícil para eles, num primeiro momento, fazer a transferência do contexto das situações-problemas que eram propostas para as múltiplas representações de funções, propriamente ditas. Com isso, tendo em vista a superação dessas dificuldades, fizemos muitas vezes o papel de mediadores daquela linguagem, atuando em que Vygotsky (2007) chamou de Zona de Desenvolvimento Proximal, de modo que eles conseguissem transformar aquelas representações de funções em uma linguagem que fosse o mais natural para eles. Por outro lado, pudemos evidenciar um grande domínio das representações verbais por alunos na elaboração de seus próprios problemas matemáticos sobre função.

Percebemos que as representações numéricas foram mobilizações mais espontâneas por parte dos alunos durante a resolução, proposição e exploração de problemas matemáticos. Para Vygotsky (2008), elas estão em um nível de conceitos cotidianos em que os alunos podem mobilizá-las por conta própria, nível real de desenvolvimento dos alunos. A representação numérica tabular com dados organizados auxiliam os alunos a passar do concreto envolvendo números propriamente ditos para o abstrato em que as quantidades são variáveis. Os alunos investigando e explorando tabelas foram capazes de perceber como as variáveis variavam juntas (covariação) e consequentemente as taxas de variação que representam a medida dessa covariação. Podemos afirmar que a representação numérica tabular atuou como Zona de Desenvolvimento Proximal entre a Aritmética e a Álgebra das Funções, onde as variáveis não foram números específicos e foram representadas por equações algébricas.

A representação algébrica de uma função por meio de uma regra geral, equação algébrica da função, para os alunos era motivo de dificuldade quando precisavam fazer a generalização da lei de formação de uma função. De acordo com Vygotsky (2008), o nível algébrico é mais abstrato e na maioria das vezes, os alunos precisavam da nossa mediação, atuando na Zona de Desenvolvimento Proximal para que eles pudessem chegar aos níveis de pensamento superior, o raciocínio algébrico funcional. Podemos concluir que a representação algébrica foi a mais complicada para os alunos porque envolveu um grau maior de generalização e abstração.

Evidenciamos, no cotidiano da sala de aula, onde foi realizada esta pesquisa, que uma das maiores dificuldades dos alunos no estudo de funções foi em relação à sua representação gráfica, apesar dessa representação fornecer uma imagem clara e de forte apelo visual para as funções. A conversão da representação gráfica para outras formas de representações se apresentou também de forma problemática. Fato esse superado por meio das explorações de problemas, envolvendo transição de uma representação para outra, pois o estudo de funções em um só sentido não automatiza a conversão para realizações de conversões em outras modalidades de representações.

Notamos, durante as aplicações das atividades, que os alunos mobilizaram combinação e transformação de funções, compreendendo que a função inversa desfaz as operações feitas por outra função e que a função composta consiste no processo de calcular o valor de uma função em que ao invés de substituir um número por uma variável independente, a variável é representada por outra função. Por outro lado, não podemos afirmar que eles tenham compreendido que funções compostas só podem ser obtidas, a partir de condições adequadas. Enfatizamos a compreensão essencial de que somente as funções bijetoras podem ser invertíveis, podemos perceber certo indício dessa compreensão essencial por parte dos alunos. Já em relação à compreensão essencial da função composta (fog), para ser definida, a imagem da função de dentro (g) deve estar contida ou ser igual ao domínio da função de fora (f). Dada a grande complexidade de tais condições de exigências, não tivemos como evidenciar que houve essa compreensão por parte dos alunos que participaram desta pesquisa. Salientamos que os alunos compreenderam que alterando os coeficientes e os parâmetros de cada família de funções em particular, há mudanças e deslocamentos de funções, em que fórmulas e gráficos podem ser facilmente previsíveis, dentre outros aspectos que envolvem a compreensão das ideias de transformação e combinação de funções.

Pudemos evidenciar por meio das aulas ministradas e produções dos alunos que eles apontaram características importantes para cada família de funções exploradas nesta pesquisa. A compreensão essencial da função afim possui a taxa de variação constante, a função quadrática tem taxa de variação linear e a forma-vértice indica as coordenadas do ponto de máximo e de mínimo, a função exponencial tem variação proporcional à função e dentre outras compreensões que abarcam a ideia essencial de famílias de funções.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, percebemos compreensão por parte dos alunos de que as funções podem ser representadas de várias maneiras (contextos reais, verbais, tabelas, equações e gráficos) e mudando o modo que a função é representada, a ideia continua sendo a mesma. Embora cada representação diferente dê uma visão distinta da função, compreenderam que algumas representações de função são mais úteis que outras, dependendo do contexto. Finalmente, compreenderam que o mais importante é realizar conexões entre representações múltiplas no estudo de funções.

Na nossa investigação, pudemos apontar, por meio das atividades que foram realizadas e nas ações e interações em sala de aula, que os alunos evidenciaram compreensão das ideias essenciais de funções. Eles desenvolveram habilidades e estratégias fluindo entre e em meio a essas ideias, representações e características de funções, como afirmam os idealizadores das cinco grandes ideias de funções Cooney, Beckmann e Lloyd (2010). Dentre elas, pudemos destacar as representações múltiplas de funções como ferramenta poderosa por excelência que perpassam por todas as formas de se fazer matemática via resolução, proposição e exploração de problemas. Portanto, no trabalho de resolver, elaborar e explorar problemas os alunos, durante o desenvolvimento desta pesquisa, mobilizaram representações múltiplas de funções, garantindo assim um aprendizado mais significativo e enriquecedor.

Ao trabalharmos no cotidiano escolar de uma turma de 1º ano do Ensino Médio, sentimos a necessidade de abranger extensões mais amplas, como as discussões que foram bastante enriquecedoras para todos os participantes desta pesquisa. Debates estes que surgiram nas explorações dos problemas, como evitar o desperdício de água, obesidade, extinção de animais que habitam o mar, salário, imposto de renda, doenças sexualmente transmissíveis, fome, dentre outros temas que atravessam os muros das nossas escolas, fazendo parte dos problemas do cotidiano enfrentados pela população direta ou indiretamente. Se não desejarmos formar cidadãos e sim meros reprodutores de informações desvinculadas da realidade, não precisamos nos preocupar com nada disso. Entretanto, se o objetivo maior da educação é formar cidadãos críticos e conscientes, é possível repensar o que deve ser abordado e como fazê-lo. Aqui, não trouxemos nenhuma receita, apenas reflexão de um trabalho que teve a pretensão de ir além da simples transmissão de conhecimentos.

Podemos dizer que nosso estudo permitiu trazer contribuições e avanços na busca de uma melhor compreensão em como desenvolver a temática das funções em sala de aula. Apresentamos as cinco grandes ideias de funções e suas compreensões essenciais ao ensino-aprendizagem de funções, endereçadas ao Ensino Médio, que precisam ser mais investigadas. A saber, o conceito de função, a covariação e taxa de variação, combinação e transformação de funções, famílias de funções e representações múltiplas de funções. E no contexto da educação? Como o essencial é formar cidadãos, as extensões de problemas matemáticos para questões fora da Matemática. Mas sem a Matemática não poderiam ser levados avante, pois o problema matemático foi o protagonista que incitou o surgimento dos temas políticos, sociais e culturais que foram levantados na sala de aula por meio da metodologia adotada.

O conteúdo apresentado nas análises e descrições das aulas oferecem subsídios possíveis para considerações em torno da metodologia de ensino-aprendizagem via resolução, proposição e exploração de problemas para o estudo de funções. Essas ideias poderão ser retomadas posteriormente, porque se fosse outro pesquisador, descrevendo e analisando as mesmas aulas, certamente seriam outras descrições e análises. Ou, ainda, se realizássemos outra leitura e aplicação dessas mesmas atividades, faríamos outras análises que poderiam vir mais amadurecidas e mais críticas.

Diríamos que apresentamos aqui, apenas frutos prematuramente amadurecidos e antecipatórios de um levantamento/coleta de dados analisados sobre uma sala de aula. Trabalho que nos foi fascinante bem como promissor, devido ao entusiasmo dos alunos durante as aulas e o consequente melhoramento de seus desempenhos nas avaliações realizadas durante o processo de desenvolvimento deste trabalho e na continuação dele em sala de aula. Findo o trabalho de campo, continuamos refletindo sobre a própria prática em sala de aula, deixando apenas de registrar esses encontros por escrito, visto que o trabalho descritivo é exaustivo e não é sempre viável ao professor realizar.

Neste mergulho que demos, aprendemos muito. Da Álgebra Escolar, ao ensino-aprendizagem do conceito de função, a revisão da literatura, a fundamentação teórica das representações múltiplas no ensino-aprendizagem de funções, da compreensão de ideias essenciais de funções. Especialmente, quando mergulhamos dentro do processo de mediação com os alunos e das interações entre eles, pois, foi justamente no trabalho prático de sala de aula que possibilitamos evidenciar a importância da utilização de metodologias alternativas tais como a resolução, proposição e exploração de problemas, tendo em vista a compreensão e aquisição de ideias essenciais de funções.

Todo o trabalho em sala de aula foi desenvolvido pelos alunos em grupo, dando-se preferência à formação de pequenos grupos, favorecendo assim as interações entre os pares de cada grupo, motivando a troca de informações, ideias e compreensões essenciais de funções que foram exploradas nas atividades propostas. Os alunos fazendo e testando conjecturas, desenvolvendo suas habilidades de raciocínio no trabalho de resolução, proposição e exploração de problemas, possibilitando assim o desenvolvimento da aprendizagem. Cada aluno, junto com os colegas nos seus respectivos grupos, entrou em ação, formulou hipóteses, validou suas conjecturas, explicando e justificando suas ideias, elaborando estratégias para chegar a uma resolução mais adequada para cada situação-problema proposta por meio de representações múltiplas de funções (verbal, numérica, gráfica e algébrica) e também com os problemas que foram propostos pelos próprios alunos. Durante todo o processo, fomos um mediador no desenvolvimento de uma compreensão de ideias essenciais de funções e nos propusemos em deixar de ser um simples transmissor de informações com respostas prontas e acabadas.

Num primeiro momento desta pesquisa foram encontradas muitas adversidades e obstáculos, superados ao longo das ações e interações em sala de aula. Os alunos apresentavam certa resistência às novas propostas metodológicas, porém após as primeiras atividades, eles começaram a compreender melhor o significado desse trabalho, tomando parte dessa experiência de ensino que estava voltada à compreensão e à aquisição de ideias essenciais de funções matemáticas mais efetivas e duradouras.

Ao longo da prática de sala de aula, na experiência didática que estávamos desenvolvendo, os alunos começaram a raciocinar matematicamente, pois criavam as primeiras hipóteses, mobilizavam representações múltiplas de funções por meio das defesas em plenárias, mostrando as resoluções do seu grupo de trabalho, argumentando sobre as conjecturas, as formulações e as validações realizadas coletivamente. Numa tomada de consciência sobre as ideias essenciais de funções trabalhadas nas atividades, a partir dessa observação, pudemos apontar indícios de autorregulação e monitoramento do conhecimento gerado por meio do desenvolvimento das compreensões de ideias essenciais de funções.

Um dos grandes avanços, ao trabalhar com as ideias e compreensões essenciais de funções, foi podermos explorar uma vasta gama de compreensão sobre determinado conteúdo. Mais facilmente os alunos conseguiram se apropriar das compreensões essenciais de funções. Nesse sentido, no decorrer desta pesquisa, os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar os conteúdos de funções com situação-problema envolvendo diversos contextos matemáticos e fora dele. Esta forma de trabalhar contribuiu para que os alunos tivessem um melhor aprendizado, e que esta não ficasse restrita a uma aprendizagem de regras e procedimentos mecânicos.

Ao solicitarmos aos alunos o registro das atividades por escrito, fez com que eles apresentassem as resoluções com mais originalidade. Pudemos observar alguns erros e também acertos nas atividades ilustradas dos problemas que foram trabalhados em sala de aula. A partir dos erros dos alunos, foi possível o estabelecimento de novos diálogos até chegarmos a um consenso pelo grande grupo com mediações coletivas e formalizarmos os conteúdos trabalhados em cada sessão de aulas.

Nessa proposta de trabalho, tínhamos em vista desenvolver uma metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática mais prazerosa. Foi gratificante participar desta pesquisa, apesar das muitas dificuldades. Abraçamos, com entusiasmo, a grande complexidade de uma sala de aula que se apresenta em múltiplas dimensões a serem analisadas e estudadas e a cada momento, poderíamos nos deparar com um elemento surpresa que até então não tínhamos pensado em ser levado em consideração e apreço.

Foi muito satisfatório o trabalho, pois os alunos no transcorrer das aulas se sentiram respeitados por suas ideias, sentiram-se confortáveis em correr riscos, em saber que não seriam ridicularizados ao cometerem erros e que tudo isso fazia parte do processo de aprendizagem. O trabalho na perspectiva da resolução, exploração e proposição de problemas passou a ser previsível ao final de cada encontro de aulas. É tanto que os alunos já perguntavam pelas fichas de atividades no início de cada encontro e tomavam iniciativa na realização das atividades propostas em sala de aula.

As plenárias proporcionaram trabalharmos a metacognição, tornando o aluno capaz de apresentar explicações e avaliar o seu trabalho de resolução de problema, tendo consciência da sua aprendizagem. A quem participava, respeitava e escutava as ideias dos colegas, podendo desafiá-los sem depreciá-los nos consensos que eram estabelecidos quando os alunos defendiam os seus pontos de vista e justificavam suas resoluções. Enfim, foi um processo enriquecedor para todos, inclusive para nós que participamos durante a execução deste trabalho, tirando dúvidas, formalizando os conteúdos matemáticos e avaliando os resultados tendo em vista a melhoria do ensino-aprendizagem de funções.

Foi possível perceber, durante as aulas, que os alunos se tornaram bem mais ativos, motivados a resolver, elaborar e explorar problemas, contribuindo muito para o processo de compreensão e aquisição de ideias essenciais de funções exploradas em cada atividade proposta. Possivelmente, a maioria dos alunos, envolvido nas atividades conseguiu se apropriar dos conceitos propostos e explorados.

Quatro aulas semanais é uma carga horária pequena para esse tipo de abordagem, ou seja, com a participação ativa dos alunos em trabalhos em grupos, construindo ideias e compreensões essenciais de funções. Percebendo os equívocos e trabalhando a partir deles, tendo que interagir com o professor e seus colegas numa abordagem mais interacionista, no processo de compreensão e aquisição de conceitos. Tudo isso, demanda um tempo maior, mas proporciona ao aluno a condição de ser mais independente e autônomo na sua aprendizagem.

Só foi possível a realização deste trabalho porque atuamos em uma escola, no desenvolvimento desta pesquisa, na qual nos foi dada total liberdade de inovar, sem cobranças para desenvolver conteúdos sequenciais de livros didáticos, pois sabemos que em muitas escolas o trabalho do professor é submetido a tais exigências. Assim, foi possível refletirmos sobre nossa própria prática, registrando os fatos relevantes dos encontros, no final de cada aula, pois não estávamos submetidos a uma carga de trabalho exaustiva como a maioria dos professores brasileiros enfrentam no seu dia a dia.

Este trabalho levanta a possibilidade de se criar, no contexto das pesquisas em Educação Matemática no Ensino Médio, ambientes em que os alunos possam ser não somente um resolvedor de problemas, mas também um propositor e explorador de problemas. Pois, na realidade prática de uma sala de aula de Matemática com alunos acostumados a outra tradição de ensino não é fácil desenvolvermos essas propostas de uma hora para outra de maneira impositiva. Precisamos sim, paulatinamente, trabalhar a resistência para chegarmos a resultados mais satisfatórios e produtivos.

Durante o processo de desenvolvimento desta pesquisa para o trabalho em sala de aula no cotidiano de uma turma de Ensino Médio, sentimos necessidade de atender o compromisso social de formarmos para a cidadania. Por isso, nos orientamos teórico-metodologicamente na perspectiva das ideias de Vygotsky (2007; 2008). Na preocupação de elaborar atividades que estivessem na Zona de Desenvolvimento Proximal dos alunos da turma do 1º ano do Ensino Médio, juntamente com problemas e situações que favorecessem a resolução, a proposição e a exploração de problemas, aliados ao uso de representações múltiplas, e, quando possível, em múltiplos contextos trazendo a problemática político-social na expansão de alguns problemas matemáticos que foram explorados nesta pesquisa.

Podemos afirmar, mediante as produções dos alunos e a participação ativa deles, que a metodologia de Ensino-Aprendizagem via Resolução, Proposição e Exploração de Problemas vêm respondendo a nossa pergunta de pesquisa no sentido de trazer contribuições para o desenvolvimento de ideias e compreensões essenciais ao ensino-aprendizagem de funções, habilitando os alunos dessa turma de Ensino Médio a enfrentar desafios da Matemática Escolar. No entanto, ao entrar em campo, sentimos a necessidade de trabalhar com temáticas em que os alunos possam enfrentar também os desafios da vida cotidiana. Portanto, além de realizarmos confluências de ideias e compreensões essenciais de funções, essa visão pode ser ampliada no sentido de termos levado aos alunos conexões múltiplas mais abrangentes.

Nos primeiros encontros, tínhamos em mente a resolução de problemas por alunos propostos por nós. No entanto, houve um crescente direcionamento no sentido da exploração de problemas via questionamentos que foram se somando, gradativamente, na medida em que íamos aprofundando-nos nas ações/interações em sala de aula, tanto por meio das problematizações matemáticas quanto de natureza extra-matemática, que estava atrelada ao problema. Até chegarmos ao último encontro em que propomos aos alunos que eles elaborassem os seus próprios problemas matemáticos. Sentimos um crescimento de ambas as partes, os alunos puderam mostrar a sua criatividade e autonomia intelectual na criação de textos matemáticos e de estratégias de resolução dos problemas por eles formulados, e, nossa também, de termos realizado experiências, no contexto didático da resolução, proposição e exploração de problemas em um movimento de descoberta e de desafios ao aplicar essas ideias em sala de aula. Podemos concluir, ao final dessa experiência em sala de aula, que a resolução, a proposição e a exploração de problemas favorecem possibilidades de desenvolver compreensões essenciais de funções bem como extensões contextuais mais abrangentes na promoção da cidadania.

Trazemos as ideias essenciais de funções, através de um olhar mais amplo para o conceito de função, em que ele pôde ser pensado de maneira integrada numa rede de ideias e compreensão relacional. As cinco grandes ideias de funções podem favorecer a transição entre e em meio a cada uma delas, auxiliando os alunos a desenvolver novos conceitos. Pudemos examinar as grandes ideias de funções envolvidas nos problemas propostos por meio de compreensões essenciais relacionadas, apresentando-as em conexões com outras ideias matemáticas e não matemáticas também, incluindo questões para reflexão dos alunos sobre temas políticos, sociais e culturais.

Nosso trabalho focou o aluno. No entanto, como consequência, terá grande utilidade para o professor e o pesquisador. A pesquisa, por ter sido feita em sala de aula com turma de alunos reais e não imaginados, diminui a distância entre pesquisa e sala de aula. Vale destacar, a importância da pesquisa pedagógica na nossa investigação, na qual atuamos como pesquisador da nossa própria prática, possibilitando reunir nela teoria/prática/reflexão, trazendo assim um olhar mais detalhado sobre o que é a sala de aula.

Para nós que desenvolvemos esta metodologia, este foi um trabalho minucioso que exigiu muita dedicação. Podemos afirmar que é possível o professor ser pesquisador de sua própria pratica docente no seu dia a dia escolar, evidenciamos neste trabalho, a importância da pesquisa pedagógica. No entanto, o registro desse trabalho demanda tempo e disponibilidade de planejamento que nem sempre o professor encontra, durante o exercício de seu ofício. Porém, isso não impedirá o professor de refletir sobre o seu trabalho, fundamentado teoricamente, através da aquisição desses conhecimentos e de discussões acadêmicas, desde que lhe seja oferecido um trabalho de formação continuada.

Desenvolver esta pesquisa significou a oportunidade de voltarmos à sala de aula, em um trabalho de reflexão sobre a nossa própria prática docente. A proposta de trabalho foi realizada em uma sala de aula do 1º ano do Ensino Médio em certo tempo pedagógico. Trabalhamos as cinco grandes ideias de funções, visando uma efetiva compreensão delas por parte dos alunos. Certamente que este trabalho traz limitações, pois enfatizamos nele uma compreensão geral dessas cinco ideias no trabalho de campo, e não foi possível explorarmos todas as compreensões essenciais que as abarcam, porque o seu aprofundamento é ao longo do currículo do Ensino Médio, podendo se estender até a Universidade.

Além do mais, vislumbramos a continuidade das investigações para a formação de professores e de currículos, com a devida apropriação e desenvolvimento de uma compreensão de ideias essenciais de funções. Também podemos contribuir na elaboração de propostas curriculares de Matemática e na formação de professores que possam, além de se orientar pelas ideias essenciais de funções, sugerir um trabalho metodológico na perspectiva da resolução, proposição e exploração de problemas.

Finalizamos nosso discurso de considerações, refletindo sobre o que queremos levantar por meio desta dissertação, apresentamos possibilidades e reflexões ao ensino de funções na sala de aula, bem como para as pesquisas. Ao invés de trazermos respostas prontas e definitivas, estamos evocando discussões e debates tanto do ponto de vista da prática de ensino de funções, como de pesquisas futuras sobre o desenvolvimento de compreensão de ideias essenciais de funções, tendo em vista a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas com alunos para um maior aprofundamento, na formação de professores e na elaboração de propostas curriculares. Assim, acreditamos que é importante repensar o ensino de funções, levando-se em consideração as ideias essenciais de funções e as metodologias alternativas que foram empregadas neste trabalho.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodicação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. Rio Claro: IGCE, UNESP, 1998. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). p. 16-36.

______.; ALMEIDA, J. J .P. Matemática na educação infantil II. In: BRENNAND, E.G.G.; BEZERRA, L. T. S. (Orgs.). **Trilhas do aprendente**. João Pessoa: Ed. Universitária/ UFPB, 2009, p. 9-48. v.5

BARROSO, J. M. (Ed.). **Conexões com a matemática**: ensino médio. São Paulo: Editora moderna, 2010. v.1.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A matemática através dos tempos**: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução: Elza F. Gomide e Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BODGAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Editora Porto, 1994. v.12. (Coleção Ciências da Educação).

BONETTO, G. A. **Uma constituição histórica (1955-1995) de práticas escolares mobilizadoras do objeto cultural função na cidade de Campinas (SP).** Tese (doutorado) – Universidade de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, SP: [s.n], 2008. 382p.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). **As ideias da algebra**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1995. p. 23-37.

BOTTA, E. S. **O ensino do conceito de função e conceitos relacionados** a partir da resolução de problemas. Rio Claro: IGCE/ UNESP, 2010. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). 427p.

BOYER, C. B. **História da matemática.** São Paulo: Universidade de São Paulo, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ ensino médio**: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006. v.2.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** 1. ed. Lisboa: Editora Livraria Sá da Costa, 1984.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 151-173.

COONEY, T. J.; BECKMANN, S.; LLOYD, G. M. **Developing essencial understanding of functions**: for teaching mathematics in grades 9-12. Reston, NCTM, 2010.

COULOMBE, W. N.; BERENSON, Sarah B. Representations of patterns and functions. Tool for learning. In: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (Eds.). **The roles of representation in school mathematics.** Reston, NCTM, 2001 (Yearbook 2001). p. 166-172.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações (ensino médio). 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2004. v.1.

______. **Matemática**: contexto & aplicações (ensino médio). 4. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010. v.1.

DOORMAN, M.; DRIJVERS, P. Algebra in function. In: DRIJVERS, P. (Ed.). **Secondary algebra education**: revisiting topics and themes and exploring the unknown, Rotterdam, The Netherlands. Sense Publishers, 2011. p. 119-135

DOMINI, N. R. F. **Utilização de diferentes registros de representação**: um estudo envolvendo funções exponenciais. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2005. 122p.

ENGLISH, L.; SRIRAMANN, B. Problem solving for the 21st century. In: SRIRAMANN, B.; ENGLISH, L. (Ed.). **Theories of mathematics education:** seeking new frontiers. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010. p. 263-290.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 2. ed. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 1997.

FERREIRA, A. B. H. **Miniaurélio século xxi escolar**: o minidicionário da língua portuguesa. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2001. p.279; 371.

FONSECA, M. C. F. R. (Org.) **Letramento no Brasil**: habilidades matemáticas. São Paulo: Global: Ação Educativa da UNICAMP, 1997.

FONSECA, V. G. **O uso de tecnologia no ensino médio**: a integração de mathlets no ensino da função afim, Rio de Janeiro: UFRJ, 2011. (Dissertação de mestrado em ensino de matemática). 141 p.

FREUDENTAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures.** Mathematical education Library. The Netherlands, Dordrecht: Reidel, 1883.

FRIEDLANDER, A.; TABACH, M. Promoting multiple representations in algebra. In: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (Ed.). **The roles of representation in school mathematics.** Reston, NCTM, 2001 (Yearbook 2001). p. 173-185.

GOLDIN, G.; SHTEINGOLD, N. Systems of representations and the development of mathematical. In: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (Eds.). **The roles of representation in school mathematics.** Reston, NCTM, 2001.(Yearbook 2001). p. 1-23.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática**: uma nova abordagem (versão trigonometria). São Paulo: FTD, 2005. v.1.

HUETTENMUELLER, R. **Pré-cálculo**: sem mistério. Tradução: Leila Kommer's. Rio de Janeiro: Alta Books, 2011.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações (ensino médio). 6. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010. v.1.

KIERAN, C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. **Second handbook of research on mathematics teaching and learning.** A project of the national council of teachers of mathematics. Reston, NCTM, 2007. p. 707-762.

KILPATRICK, J.; IZSÁK, A. A history of álgebra in the school curriculum. In: **Algebra and algebraic thinking in school mathematics**, seventieth yearbook. Reston, NCTM, 2008. p. 3-18.

KLINE, M. **Mathematics for the nonmathematician.** New York: Dover publications, 1985.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica**: do projeto à implementação. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1987.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra.** Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1995. p. 49-69.

MCCALLUM, W. G. et al. **Álgebra**: forma e função. Tradução: Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

MORAES, M. S. S. et al. **Educação matemática e temas político-sociais.** Campinas/SP: Autores Associados, 2008. (Coleção formação de professores).

MOSES, B.; BJORK, E.; GOLDENBERG, E. P. Beyond problem solving: problem posing. In: COONEY, T. J. (Ed.). **Teaching and learning mathematics in the 1990s.** NCTM, Year Book. Reston, VA, 1990. p.83-91.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar.** Tradução: Magda Melo. 2. ed. Lisboa: APM, 2008.

NETTO, S. P. et al. **Quanta**: matemática – ensino médio 1ª série. 3. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2005.

ONUCHIC, L. R. O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

______. ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V; BORBA, M. C. (Org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

______. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática. v.25, n.41, Rio Claro (SP): UNESP-IGCE, dez. 2011, p. 73-98.

ROMANATTO, M. C. Didática: Será que o sol vai nascer amanhã? O problema da vitória-régia. In: **CÁLCULO**: Matemática para todos. Ed.17, ano 2, São Paulo: Editora Segmento, jun. 2012, p. 26-29.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema função**: uma investigação das praxeologias. Tese (doutorado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2006. 382p.

SCHUBRING, G. **O primeiro movimento internacional de reforma curricular e o papel da Alemanha**. In: Zetetiké. v.7, n.11. Campinas: CEMPEM-UNICAMP, 1999, p.29-50.

SESSA, C. **Iniciação ao estudo didático da álgebra**: origens e perspectivas. Tradução: Damian Kraus. São Paulo: Edições SM, 2009.

SHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New directions for elementar school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-32.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. S. **Matemática**: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010. v.1

SMOOTHEY, M. **Atividades e jogos com**: gráficos. Tradução: Sergio Quadros. São Paulo: Editora Scipione, 1997.

STANIC, G. M. A.; KILPATRIK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. Reston, NCTM, 1989. p.1-22.

PAIVA, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2009. v.1.

PELHO, E. B. B. **Introdução ao conceito de função**: a importância da compreensão das variáveis. São Paulo: PUC, 2003. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). 146 p.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco**: matemática. Recife: SE, 2008.

PILONE, T. M. (Ed.); PILONE, D. **Use a cabeça!** álgebra. Tradução: El Hadji Cheikh Ndour. Rio de Janeiro: Alta Books Editora, 2010.

VAN DE WALLE, J. A.; LOVIN, LouAnn H. **Teaching Student** – Centered mathematics grades 5-8. Boston: Pearson, 2006. v.3.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Tradução: Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN DER VEER, R.; VALSINER, J. **Vygotsky**: uma síntese. 6. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2009.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Organizadores Michel Cole et al.; Tradução: José Cippolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

______. Pensamento e linguagem. Tradução: Jefferson Luiz Camargo; Revisão técnica José Cippolla Neto. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2008.

WILMER, C. **Telecurso**: matemática. Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2008. v.1. (Ensino médio).