



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA
CICERO DA SILVA PEREIRA

APRENDIZAGEM EM TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO
CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

CAMPINA GRANDE
2011

CICERO DA SILVA PEREIRA

**APRENDIZAGEM EM TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO
CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Rômulo Marinho do Rego.

CAMPINA GRANDE

2011

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na sua forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

P436a Pereira, Cícero da Silva.
Aprendizagem em trigonometria no ensino médio -
contribuições da teoria da aprendizagem significativa
[manuscrito] / Cícero da Silva Pereira. – 2011.
89 f. ; il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências
e Matemática), Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade
Estadual da Paraíba, 2011.

“Orientação: Prof. Dr. Rômulo Marinho do Rêgo,
Departamento de Matemática”.

1. Ensino de trigonometria. 2. Educação matemática. 3.
Aprendizagem. I. Título.

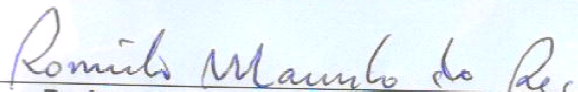
21. ed. CDD 510

CICERO DA SILVA PEREIRA

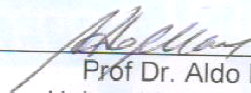
ENSINO DE TRIGONOMETRIA
CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Esta dissertação foi julgada adequada à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática e aprovada em sua forma final pelo Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba

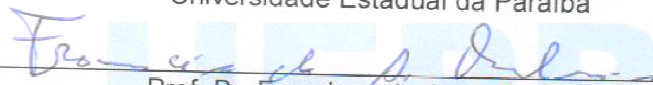
Campina Grande, 11 de novembro de 2011.



Professor orientador, Dr. Rômulo Maranhão do Rêgo
Universidade Estadual da Paraíba



Prof Dr. Aldo Bezerra Maciel
Universidade Estadual da Paraíba



Prof. Dr. Francisco de Assis Bandeira
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Campina Grande
Novembro 2011

Dedico este trabalho a minha esposa Iris e aos meus filhos Calebe e Levi, bênçãos em minha vida e razões de extrema felicidade. Amo vocês.

AGRADECIMENTOS

A Deus doador de toda boa dádiva.

A minha esposa Iris, que reflete a cada dia, em seus gestos, o verdadeiro sentido das palavras amor e companheirismo. Te amo meu amor.

Aos meus filhos Calebe e Levi, que me ensinam quando acham que estão só aprendendo. Grandes presentes de Deus em minha vida e que me farão ver que fui bem sucedido, pois eles serão muito melhores que eu. Amo vocês.

A meus pais, pelo incentivo constante e esforço em me manter sempre no caminho da educação. Aqui tem muito do suor de vocês.

A meus irmãos Joel e Rejane pelo apoio constante. Valeu mesmo.

Aos professores do mestrado, que muito contribuíram com este trabalho.

Aos colegas de curso. Companheiros nesta jornada.

A professora Dr^a Iranete, da UFPE. Ao participar da banca do exame de qualificação, apresentou sugestões imprescindíveis para o êxito do trabalho.

Aos professores Doutores Aldo Maciel e Assis Bandeira, pela disposição em ler e contribuir para o aperfeiçoamento deste trabalho.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Rômulo, pelo carinho, dedicação e paciência com que acolheu ao trabalho e nos orientou.

A toda equipe da Escola Estadual Álvaro Gaudêncio, pela compreensão, apoio e incentivo para a realização deste trabalho.

Aos grandes Nahum, José Luiz e Carlos. Amizades sinceras, verdadeiras e que já ultrapassaram qualquer limite de tempo e espaço.

Ele (Deus) é o que está assentado sobre a REDONDEZA da Terra.

(Isaías, capítulo 40, versículo 22)

RESUMO

PEREIRA; C. S. **Aprendizagem Em Trigonometria No Ensino Médio – Contribuições Da Teoria Da Aprendizagem Significativa**. 2011. 89f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, CAMPINA GRANDE, 2011.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa sobre ensino de trigonometria, que constou da elaboração, aplicação e análise de uma abordagem didática para o ensino noturno baseada na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e desenvolvida numa turma de 2º ano do ensino médio de ensino noturno de uma escola pública, da zona urbana de Campina Grande. O processo metodológico constou da construção de um módulo de atividades que enfatizavam as relações entre os conceitos, que é um foco da teoria Ausubeliana . A proposta foi desenvolvida com seções realizadas em grupo e individualmente. Estas nos permitiram levantar dados baseados na observação e registro do desenvolvimento dos alunos nas atividades e através de um questionário para auto-avaliação, tivemos a condição de observar a reflexão dos alunos sobre a própria aprendizagem. Os resultados obtidos permitem-nos confirmar a necessidade e importância de trabalhar os conhecimentos prévios antecipadamente e a possibilidade de abordagens que não envolvam apenas fórmulas e algebrismos excessivos que tornam o aprendizado mecânico e sem significado para o aluno.

Palavras-chave: Trigonometria. Ensino de trigonometria. Educação matemática. Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

PEREIRA, C. S. **Learning in Secondary Schools Trigonometry - Contributions of the Theory of Meaningful Learning**. 2011. 89f. Dissertation (MSc) – State University of Paraíba -UEPB, Campina Grande, 2011.

This paper shows the results of a research on the teaching of Trigonometry, which consisted of formulating, applying and analyzing a didactic approach for evening study based on David Ausubel's theory of meaningful learning, and developed in a group of the 2nd year of Ensino Médio (High School) of an evening study public school, in the urban zone of Campina Grande. The methodological process included the elaboration of an activity module which emphasized the relations of concepts, which is one of Ausubel's focus. The proposal was developed with sections applied in groups or individually. These allowed us to collect data through the observations and registers of the students' development in the activities and a self-evaluating questionnaire, thus, we were able to analyze the students' reflections about their own learning. The results obtained led us to confirm the need and importance of using background knowledge and the possibility of approaches that do not involve only formulae and excessive algebra, which make knowledge mechanical and/or meaningless for the students.

Keywords: Trigonometry; Teaching of Trigonometry; Mathematical education; Meaningful learning

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – A aprendizagem significativa na visão cognitiva clássica de Ausubel.....	24
Figura 2 - Figura 2. Diagrama da visão humanística.....	25
Figura 3. Diagrama da visão interacionista social.....	26
Figura 4. Mapa conceitual proposto por BRIGUENTHI	31
Figura 5 – Determinação da meia corda hindu.....	34
Figura 6 - Exemplo de homotetia com triângulos.....	61
Figura 7. Diagrama de relação entre conceitos feito por aluno.....	62
Figura 8. Aspecto da folha de papel quadriculado.....	63
Figura 9 Triângulo retângulo construído por aluno.....	63
Figura 10. Gráfico feito por aluno.....	76

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Questionário aplicado no 1º encontro.....	44
Quadro 2. Atividade aplicada no 3º encontro.....	49
Quadro 3. Atividade aplicada no 6º encontro.....	54
Quadro 4 . Atividade sobre semelhança.....	59
Quadro 5. I parte da atividade sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo.....	66
Quadro 6. II parte da atividade sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo.....	67
Quadro 7. III parte da atividade sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo.....	69
Quadro 8. Atividade sobre Arcos e ângulos.....	72
Quadro 9. Seno e cosseno no ciclo trigonométrico.....	74
Quadro 10. Atividade sobre função seno e função cosseno.....	75
Quadro 11. Questionário de auto-avaliação.....	78

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	14
1.1 OBJETIVO GERAL.....	19
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	19
1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	20
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	21
2.1 APRESENTANDO.....	21
2.2 O ENSINO DE TRIGONOMETRIA E A TEORIA DE AUSUBEL.....	21
2.2.1 A VISÃO HUMANÍSTICA.....	25
2.2.2 A VISÃO INTERACIONISTA SOCIAL.....	26
2.2.3 A VISÃO COGNITIVA CONTEMPORÂNEA.....	26
2.2.4 A VISÃO CRÍTICA (SUBVERSIVA, ANTROPOLÓGICA).....	27
2.3 MAPAS CONCEITUAIS.....	30
2.4 BREVE HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA.....	32
2.4.1 HIPARCO DE NICÉIA.....	32
2.4.2 O ALMAGESTO DE PTOLOMEU.....	33
2.4.3 OS HINDUS E O SEU SIDHANTA.....	33
2.4.4 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA TRIGONOMETRIA.....	34
2.4.5 LEONHARD EULER.....	35
2.5 DIALOGANDO COM A PESQUISA.....	40
3 METODOLÓGIA.....	40
3.1 A PESQUISA.....	40
3.2 A ESCOLA.....	40
3.3 A TURMA.....	41
3.4 A METODOLOGIA EM SALA DE AULA - DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS ENCONTROS.....	41
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	80
REFERÊNCIAS.....	86

1. INTRODUÇÃO

Nos dias atuais, a educação não pode ser tratada apenas como algo meramente formal na vida do cidadão. Esta é parte fundamental e a mais importante no desenvolvimento do ser humano. E neste contexto situa-se a aprendizagem matemática. A matemática, sem dúvida, pode ser uma importante ferramenta de transformação da sociedade. Mesmo com a sua potencialidade de ser uma grande contribuição, a matemática ainda é uma das disciplinas mais rejeitadas, menos aprendida e também ensinada de forma inadequada nas nossas escolas.

Para responder as demandas da sociedade contemporânea é preciso despertar no aluno uma visão de mundo na qual a matemática esteja inserida como uma das engrenagens que o movimentam. E uma das engrenagens presentes na nossa educação é o ensino noturno. Tão abandonado e desvalorizado, em todos os aspectos. Um dos conteúdos da engrenagem matemática é a trigonometria. E ao juntarmos essas idéias, temos o corpo deste trabalho, que é uma pesquisa de cunho qualitativo sobre o ensino de trigonometria no ensino noturno.

A motivação para esta pesquisa surgiu da minha vivência de mais de dez anos como professor do ensino básico e depois como formador de professores de matemática, observando a dificuldade dos alunos em compreenderem a importância da trigonometria bem como dos seus conceitos, procedimentos e resultados relativos a este tema e também no trabalho por nós desenvolvido no curso de especialização em Ensino de Matemática Básica, na Universidade Estadual da Paraíba, findo em 2006. Neste elaboramos um trabalho monográfico durante o qual tivemos contato com a teoria da aprendizagem significativa, de Paul David Ausubel que fundamentou a elaboração de uma proposta de curso aplicada e avaliada em nível de ensino secundário.

O tema do ensino noturno surge na perspectiva de ampliarmos o trabalho original, com atualizações da teoria de Ausubel, bem como lançando sobre o mesmo um novo olhar, agora direcionado para a sala de aula de jovens e adultos dentro de uma realidade bem diferente da anterior. A partir das inadequações por nós verificadas em sala de aula levantamos a hipótese de que o processo de ensino e aprendizagem

de matemática no ensino noturno pode atingir os objetivos educacionais geralmente previstos para este nível quanto à aprendizagem de conhecimentos matemáticos (conceituais, atitudinais e procedimentais), bem como desenvolver hábitos de estudo, de reflexão crítica e hábitos afetivos de trabalhar de forma mais cooperativa e participativa, por meio de uma abordagem de ensino adequada. Esta hipótese parte do princípio de que o ensino tradicional, geralmente praticado nas nossas escolas, baseado na transmissão de conhecimento por parte do professor não é adequada para responder as demandas educacionais contemporâneas e, que esta realidade torna-se mais acentuada no caso do ensino noturno. Sobre esta concepção, (BRIGHENTI, 2003), afirma que

esta concepção, que traz subjacente o homem como um ser passivo, no qual a aprendizagem ocorre por meio da 'impressão' dos conceitos estudados no seu cérebro, estabelece que o professor é o dono do saber, e portanto, o responsável para apresentar as definições, regras e teoremas já sistematizados e organizados (p.31).

Entendemos ainda que a maneira citada acima de conceber o processo de ensino e aprendizagem:

a) não leva em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e que são necessários para uma boa compreensão dos conceitos relativos à trigonometria, como circunferência, semelhança de triângulos, simetria e função;

b) o ensino é feito de forma descontextualizada, não levando em conta a história e as aplicações relevantes atuais deste conteúdo nos mais diversos campos da atividade humana;

c) não considera a realidade vivenciada pelo aluno do ensino noturno, quais sejam: falta de tempo para estudos extra-escolar, utilização de livros textos e de metodologias inadequados, dificuldade de acesso aos colegas de estudo fora da escola, baixa motivação e estima, entre outros.

Os cursos noturnos das escolas públicas do Estado da Paraíba apresentam uma situação de baixa aprendizagem e de alto índice de abandono, conforme dados do INEP¹, pois mesmo tendo ocorrido um grande acréscimo no número de matrículas no ensino médio noturno, uma grande quantidade de alunos abandonam o curso. Na escola na qual desenvolvemos a pesquisa, segundo dados da secretaria da escola, devidamente autorizada a repassar-nos pela gestão escolar, as turmas regulares de ensino médio iniciam com média de 40 alunos e concluem, quando muito, 50% deste número.

Entre as causas deste abandono destaca-se a falta de motivação, sendo folclórica a afirmação de que o maior interesse dos alunos é receberem uma carteira de estudante que lhes garanta o abatimento no transporte; o crescente interesse pela EJA (Educação de Jovens e Adultos), pois sendo um curso ofertado de forma acelerada, apresenta a possibilidade, na visão dos alunos, de concluir o ensino médio na metade do tempo do curso regular de três anos. Existe uma crença generalizada entre os alunos, de que a modalidade EJA requer menos esforço e de que apresenta um maior índice de aprovação. Na realidade, esta modalidade de ensino apresenta uma carga horária reduzida com relação ao ensino noturno tradicional, reduzido a 04 (quatro) horas semanais de 40 minutos, bem que o conteúdo de trigonometria se resume ao ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo, conforme dados coletados em diálogos com professores deste nível de ensino. Os mesmos entendem que a maioria dos alunos não estão preocupados em aprender e sim apenas em conseguir um certificado, assumindo os professores a posição de conviver com o problema, afirmando que e “*não são eles que vão atrapalhar*”.

Esta ideia decorre do fato de, eles mesmos, professores, acharem que o conteúdo ensinado não servirá para o aluno. E dessa forma nem se trabalha devidamente os aspectos puramente matemáticos do conteúdo, nem busca levar o aluno a trabalhar informações e realizar atividades que o leve a refletir de maneira crítica, se o que está estudando tem utilidade ou não.

¹ INEP – Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (www.inep.gov.br)

O ensino noturno apresenta alunos das mais variadas faixas etárias, que apresentam dificuldades de conciliar o ensino com as demais atividades - trabalho, família, entre outras dificuldades.

O grande número de reprovações e abandono pode ocorrer por uma série de fatores, entre as quais destacamos as condições físicas, cognitivas e motivacionais do aluno; bem como da adequação da abordagem metodológica a sua realidade; a disponibilidade de recursos didáticos, entre outros. Nesta direção, observa-se, por exemplo, que na maioria dos casos o livro didático disponibilizado no ensino noturno é o mesmo para as crianças dos outros turnos e que estão dentro da faixa etária de escolaridade; que a mesma aula dada pelo professor nos turnos da manhã e tarde é repetida durante o turno noturno; que não se considera que o aluno da noite em sua maioria não dispõe de tempo para realizar estudos extra-escolares sendo necessário realizar mais atividades em sala de aula. CAPORALINI(1991), confirma que

o aluno do curso noturno é ainda bastante desconhecido e pouco valorizado no processo educacional brasileiro. Proveniente, na maioria das vezes, das camadas sociais mais carentes, ele quase sempre chega à escola cansado, em virtude de um dia de trabalho, além das tensões cotidianas provindas dos transportes, das agitações dos ambientes urbanos, de problemas familiares de toda ordem e...(p.77).

Como o professor, na maioria das vezes, também inicia a terceira parte de sua jornada de trabalho, muitas vezes não se sente motivado, nem sensibilizado com a condição do alunado. E com pouco tempo para planejar aulas vai repetindo o que já ensinou nas turmas diurnas e da mesma maneira. Neste sentido, CAPORALINI (1991,p.96), pesquisando a transmissão de conhecimento e o ensino noturno, após ver planejamentos de professores, conclui que “não parece existir, em nível formal, uma preocupação maior ou um questionamento sério sobre os assuntos a serem abordados, sobre os aspectos sócio-políticos do processo ensino-aprendizagem a quem se destinam.”

Gonçalves & Passos (2005) afirmam que:

De um modo geral, o cotidiano do ensino noturno apresenta uma característica singular, pois recebe um alunado esgotado, que na sua grande maioria, chega à escola após uma jornada de trabalho. Um alunado que já chega reprovado pelo cansaço, que se evade e desiste da escola, porque o que aprende na sala de aula pouco tem a ver com o mundo do trabalho (p. 346).

Em outro trecho aponta fato, causa e consequências dos problemas vivenciados pelos alunos do ensino noturno:

Uma vez mais chamamos a atenção para a realidade social do ensino noturno: 1) Fato – são muito altos os índices de evasão (desistência) e de repetência dos jovens que estudam à noite. 2) Causa – esses jovens são oriundos de classes populares, só se escolarizam se puderem estudar à noite e trabalhar de dia, portanto, eles não têm tempo, nem o hábito de estudar. Chegam ao ensino médio sem o conteúdo básico, onde o sistema de dependência maquiou o problema, não o solucionou. 3) Consequência: elitizar cada vez mais o ensino, deixando como única oportunidade escolar para esses jovens o Curso Supletivo e afins (p. 354).

Diante do exposto acima, achamos pertinente propor um instrumento didático, no caso uma proposta didática para o ensino de funções trigonométricas e investigar o seu alcance e suas limitações na aplicação em uma turma de 2º ano do ensino médio do curso noturno. Não se trata de uma fórmula milagrosa e única, pois entendemos que não há um caminho, mas vários caminhos que podem ser propostos. Estamos apresentando o nosso para ser testado e analisado e dele serem feitas observações a fim de contribuirmos para a melhoria do ensino de matemática.

Os vários percursos para concretizar a nossa proposta (os temas acima são muitos e são complexos) trabalhos como o de SIMIONATO E PACHECO(2007), MENDES(1997), BRIGUENTI(2001), OLIVEIRA(2006), HUANCA(2006), KLEIN(2009) e FONSECA(2010) tem mostrado que o caminho de propostas metodológicas que levam o aluno a participar ativamente de seu aprendizado, considerando seu espaço, suas

experiências de vida, bem com a importância de seu conhecimento prévio mostram resultados positivos e apontam caminhos possíveis para um aprendizado significativo.

As relações entre estes fatores e a qualidade do ensino, como indicam os trabalhos acima, sugerem a necessidade de uma abordagem do ensino de trigonometria que melhor se adeque a realidade vivenciada pelo ensino noturno. Nesta direção, pesquisamos o alcance e as limitações de uma intervenção didática, efetuada a partir de uma metodologia de ensino que leve em consideração os conhecimentos adquiridos pelos alunos, a realidade por ele vivenciada e os objetivos expressos pelo currículo escolar e as orientações oficiais (PCNEM, LDBEN e DCNEM).

As participações em eventos científicos também nos forneceram subsídios importantes, pois na apresentação do trabalho nos mesmos, as intervenções foram enriquecedoras. Destaco o XIII e o XIV EBRAPEM (Encontro Brasileiro de Pós-Graduandos em Educação Matemática), em Goiânia (GO) e Campo Grande (MS), respectivamente. Nos mesmos, as contribuições dos comentadores, doutores Cristiano Muniz(UNB) e José Luiz Magalhães(UFMS), bem como da Doutora Nilza Bertoni(UNB), que participou da sessão em Campo Grande, nos propiciaram ver outras perspectivas para o trabalho. Já em 2011, estivemos na XIII CIAEM (Conferência Interamericana de Educação Matemática) em Recife (PE), já com o trabalho em fase final.

O trabalho desenvolveu-se numa escola da rede pública estadual na cidade de Campina Grande, Paraíba, onde assumimos duas aulas semanais de uma turma de Ensino Médio Regular. Desenvolvemos e aplicamos as atividades a partir do mês de abril de 2010 e fomos até o mês de novembro do mesmo ano.

1.1 OBJETIVO GERAL

- ✚ Apresentar uma abordagem pedagógica ao ensino de Trigonometria para um curso noturno, que seja adequada às demandas educacionais atuais.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✚ Levantar os objetivos para o ensino de trigonometria em nível do ensino médio, expressos nos PCNEM, na Proposta Curricular para o Ensino Médio e a partir da análise dos objetivos expostos nos de livros didáticos.
- ✚ Elaborar uma proposta de ensino com um módulo que contenha a metodologia a ser aplicada, a teoria da aprendizagem a ser seguida e um texto contendo atividades a serem desenvolvidas pelos alunos e uma proposta de avaliação.
- ✚ Aplicar em sala de aula a proposta elaborada.
- ✚ Verificar o impacto da aplicação da abordagem na aprendizagem dos alunos e analisar os resultados obtidos, elaborando com base nestas análises o módulo didático.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No primeiro capítulo, apresentamos um pouco de nossa trajetória profissional, levantamos a importância do conhecimento matemático para o desenvolvimento da humanidade, com suas aplicações em diversas áreas, justificamos a escolha do tema, além de expor também uma breve revisão bibliográfica e os objetivos geral e específico do trabalho. O segundo capítulo é dedicado aos pressupostos teóricos dessa dissertação: a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel, subsidiada pela leitura da Aprendizagem Significativa Crítica de Moreira e colaboradores e a possibilidade de relacioná-las na prática da sala de aula. O terceiro capítulo descreve a metodologia de trabalho, bem como sua aplicação numa turma de ensino médio noturno, as situações de aprendizagem construídas, realizando, concomitantemente, uma análise dos dados obtidos com base nos pressupostos teóricos. O quarto capítulo, destinado às considerações finais, apresenta as nossas reflexões, oriundas dos resultados encontrados nas análises feitas dos dados colhidos na intervenção didática, apontando suas contribuições para o ensino de matemática, suas limitações e perspectivas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Apresentando

Neste capítulo abordaremos a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel que servirá de referencial teórico para o nosso trabalho. Utilizaremos os seus pressupostos de como o aluno aprende e, a partir destes elaboramos uma sequência de atividades que formam o módulo de ensino, a metodologia a ser utilizada na intervenção didática, o processo de levantar e analisar os dados obtidos a partir da intervenção realizada em sala de aula. Nesta perspectiva, procuramos explicitar os pressupostos desta teoria a fim de estabelecer um diálogo entre os mesmos e as diversas etapas da pesquisa, a serem apresentadas no capítulo III e elaborar uma proposta de ensino de trigonometria que torne possível a aprendizagem de forma significativa.

2.2 O Ensino de Trigonometria e a Teoria de Ausubel

Na etapa exploratória do nosso trabalho, entre as quais destacamos uma releitura crítica da monografia que desenvolvemos (PEREIRA, 2006) as leituras que efetuamos, e as reflexões sobre a nossa experiência em sala de aula, detectamos como principais dificuldades do ensino de trigonometria três tipos de fatores:

1. os relacionados ao currículo, merecendo destaque uma excessiva extensão dos conteúdos programáticos, bem como um fosso existente entre a abordagem dos conteúdos no ensino médio e os do ensino fundamental – este até recentemente antes das mudanças previstas pelo ENEM, voltado para um processo de seleção ao ensino superior constituído de questões voltadas para a aplicação algorítmicas de regras e de fórmulas;
2. aquelas relacionadas a formação dos alunos que em sua maioria apresentam pouco ou quase nenhum domínio dos conhecimentos prévios importantes para o estudo de trigonometria como o estudo da circunferência e de seus elementos, entre estes o de comprimento de arco; de semelhança de

triângulos; de simetria e, principalmente de um domínio de funções como uma relação entre grandezas e de suas representações;

3. e finalmente, a pouca afinidade dos professores com o conteúdo, seu desenvolvimento histórico e as suas aplicações contemporâneas em diversas áreas do conhecimento humano, fator este proveniente tanto do estudo de trigonometria da educação básica, como da formação inicial, onde determinados conteúdos ou não são abordados ou o são de forma não adequada para futuros professores – sem fazer pontes com as demandas formativas dos futuros docentes, pois os temas são vistos como algo a ser aprendido, mas nunca como algo a ser ensinado.

Estes fatores levam a que se desenvolva um ensino de trigonometria descontextualizado e sem significado para a maioria dos alunos, recorrendo à memorização de exercícios padrões, muitos dos quais inadequados para responder as demandas contemporâneas. Esta situação torna-se ainda mais aguda nos cursos noturnos, onde as dificuldades enfrentadas por alunos e docentes são aquelas acima citadas, acrescida das dificuldades inerentes a este turno, incluindo a falta de uma bibliografia adequada para o seu público. Esta preocupação ocorre pelo fato de as escolhas dos livros didáticos se dão de maneira uniforme por escola, adotando-se um livro didático único para todos os turnos.

Assim, a bibliografia disponibilizada aos alunos do curso noturno apresenta inadequações de linguagem, de atividades, de contextualização e recomendações metodológicas tendo em conta a realidade e as necessidades dos alunos de um curso noturno. Não queremos aqui, minimizar a importância e nem desconhecer os avanços do PNLD² na melhoria dos livros didáticos nacionais. Mas, considerando a sua centralidade e importância, na maioria das vezes constituindo-se o único instrumento didático disponível para o aluno e para o professor, torna-se necessário que este seja adequado à realidade do ensino noturno.

Considerando estes aspectos e a necessidade de sugerir caminhos capazes de ajudar a superar estas dificuldades, bem como buscando levar o aluno a desenvolver conhecimentos na direção de atingir proficiência nos três principais campos de

² Programa Nacional do Livro Didático

competências de base matemática no ensino médio, propostos pelos PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) que são: “representação e comunicação; investigação e compreensão, e percepção sociocultural e histórica da Matemática” (BRASIL,1999, p.259) elaboramos, aplicamos e analisamos uma proposta de ensino, contendo um módulo de ensino.

Nesta direção selecionamos como referencial a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, enfatizando as palavras do autor: “o fator mais importante que influi na aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe. Isto deve ser averiguado e o ensino deve depender desses dados” (Ausubel, Novak e Hanesian, 1983).

Ausubel (op. cit.) se preocupa como ocorre a aprendizagem, enfocando a relevância do aprendizado significativo e a ordem dos conceitos a serem estudados. Este autor define aprendizagem como uma integração entre o novo conhecimento e os conhecimentos já existentes na organização cognitiva de quem aprende. Isto é, o conhecimento novo para ser apreendido, ocorrendo assim, um efetivo aprendizado, precisa estar ancorado em conceitos prévios do aluno. A esses conceitos denomina de *subsunçores* e classifica esse tipo de aprendizagem como sendo uma *aprendizagem significativa*. Para BRIGHENTI (2003),

os subsunçores não devem ser vistos apenas como conceito suporte de nova informação e sim como um conceito claro e com estabilidade que proporciona a integração entre o novo e o antigo conhecimento, facilitando a aprendizagem (p. 17).

Para Ausubel, o conteúdo deve ser significativo para quem aprende, gerando assim predisposição e curiosidade por parte do aluno. Caso não tenha sido estabelecida uma conexão entre o novo assunto e o que o aluno já sabe (subsunçor), não há aprendizagem.

São observadas também as diferenças entre um novo conteúdo e o conteúdo já conhecido pelo aluno. Ausubel denomina esses dois conceitos de reconciliação integrativa e diferenciação progressiva, ocorrendo em todos os instantes da aprendizagem. BRIGHENTI (2003), afirma que

esses dois conceitos relevantes – reconciliação integrativa e diferenciação progressiva são fortalecidos e facilitados se, antes

de abordar um assunto, o professor utilizar a estratégia de estabelecer a conexão entre o que o aluno já sabe e o novo conhecimento, utilizando conceitos organizadores da estrutura cognitiva.(p. 24)

Como visto, para Ausubel, o conhecimento prévio, chamado de subsunçor, é fundamental, pois é a partir dele que o novo conhecimento se sustenta e se desenvolve. Neste aspecto, elencamos como subsunçores para o aprendizado de funções trigonométricas os seguintes tópicos: ângulo, circunferência e seus elementos, relações no triângulo, simetria e funções. A partir deles, desenvolveremos o trabalho com funções trigonométricas.

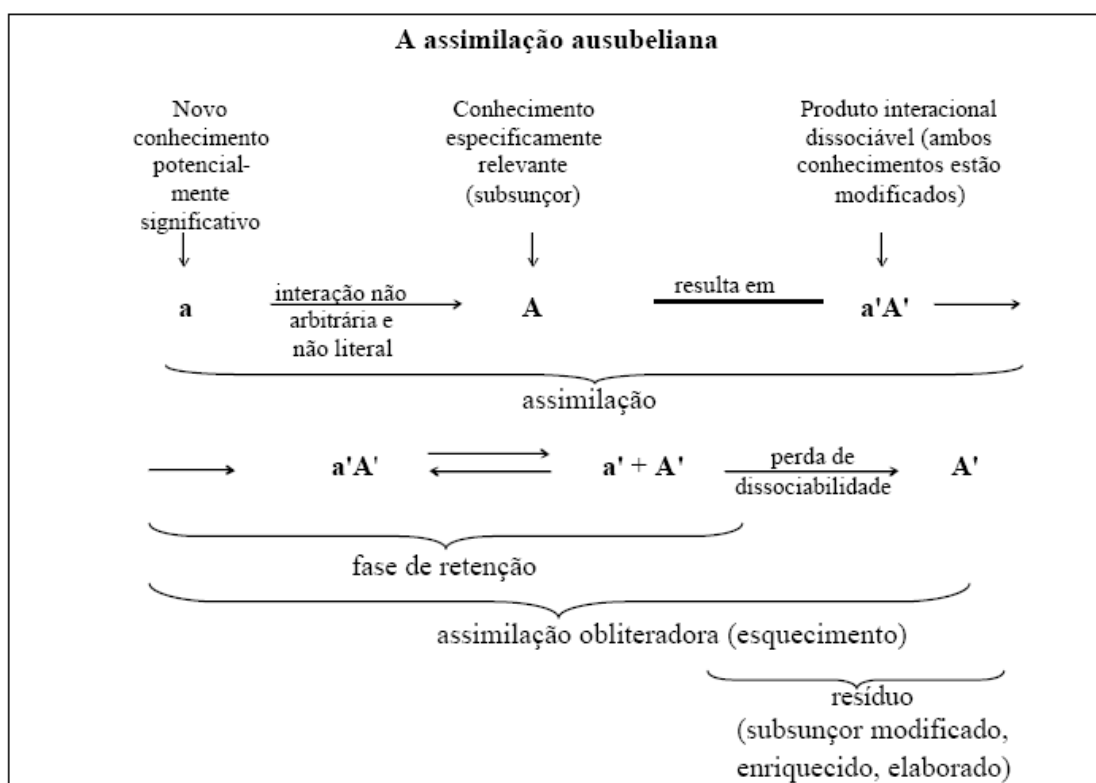


Figura 1. A aprendizagem significativa na visão cognitiva clássica de Ausubel.

Para Ausubel, os fatores essenciais para o aprendizado são:

- 1) Disposição do aprendiz para aprender;
- 2) Material potencialmente significativo;

3) Existência dos subsunçores na estrutura cognitiva do aprendiz.

A teoria de Ausubel foi proposta nos anos de 1960 e têm sofrido alterações na maneira de ser enxergada, mas tem suas similaridades em várias outras teorias da cognição, pois a maioria delas enxerga o conhecimento prévio (no caso de Ausubel, os subsunçores) como o mais importante fator influente na aprendizagem. Nestas novas visões destacamos:

2.2.1 A visão humanística

Proposta por Joseph Novak(1981; Novak e Gowin,1996), que colaborou com Ausubel e foi co-autor da 2ª edição do trabalho de Ausubel sobre Aprendizagem significativa, entende que a aprendizagem significativa subjaz à integração construtivista e positiva entre pensamentos, sentimentos e ações que conduz ao engrandecimento humano.

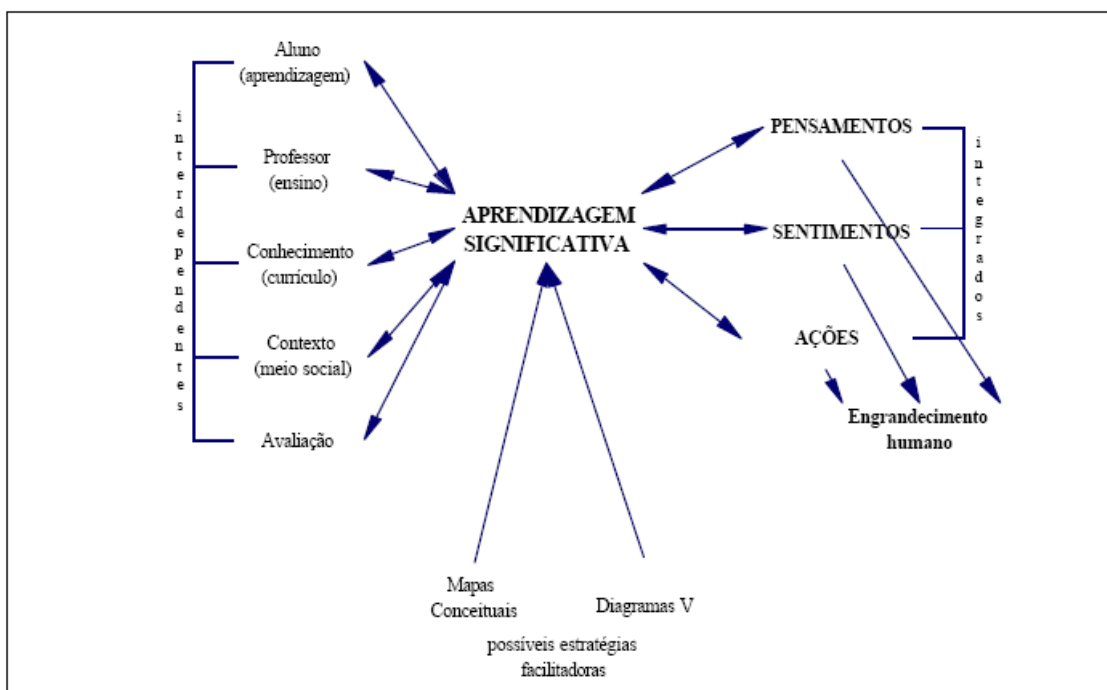


Figura 2. Diagrama da visão humanística

2.2.2 A visão interacionista social

A visão interacionista social da aprendizagem significativa tem uma abordagem Vigotsyana, onde onde aprendizagem é uma negociação de significados e foi proposta por D. B. Gowin (1981; Novak e Gowin,1996). A figura seguinte, extraída de MOREIRA(2006, p.2), exemplifica esta visão:

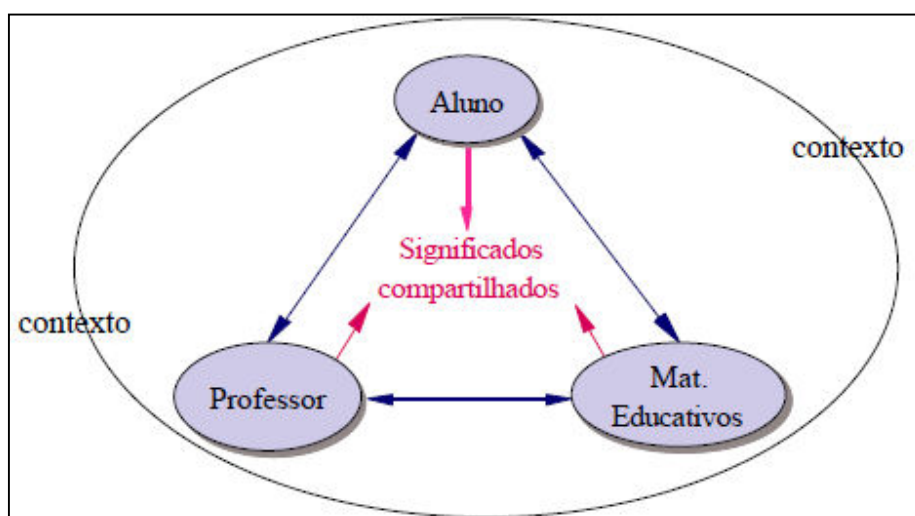


Figura 3. Diagrama da visão interacionista social

2.2.3 A visão cognitiva contemporânea

Esta visão parte do pressuposto de que a teoria de Ausubel pouco fala sobre como ocorre a interação entre novos conhecimentos e conhecimento prévio. Partindo deste princípio Jonhson-Laird (1983) propõe a teoria dos modelos mentais, defendendo que é este instrumento a primeira representação construída pelo sujeito em sua memória de trabalho. A relação com a teoria de Ausubel é de que a construção de um modelo mental é o primeiro passo para uma aprendizagem significativa. “Um modelo mental é uma representação interna de informações que corresponde analogamente com aquilo que está sendo representado. (MOREIRA, 1996, p. 6)”

2.2.4 A visão crítica (subversiva, antropológica)

Aqui nos deteremos um pouco mais, pois das visões atuais será sobre esta que nos debruçaremos com ênfase na elaboração do trabalho. Segundo esta visão proposta por MOREIRA (2000) “na sociedade contemporânea não basta adquirir novos conhecimentos de maneira significativa, é preciso adquiri-los criticamente”. Isto é, não basta ao aluno aprender. É preciso que ele saiba se aquilo serve para ele ou não. E se serve, como ou o quanto serve. Esta, no nosso entender, é a maior contribuição que se dá à aprendizagem significativa, pois se na visão clássica Ausubel se preocupa com a aprendizagem, na visão crítica a pergunta é: o que o aprendiz faz com o que ele aprende? Outro aspecto importante é o relativo ao trabalho do professor que precisa, efetivamente, observar criticamente seu objeto de estudo, o conteúdo matemático e definir, dentro de um determinado conceito, o que é fundamental, o que é secundário e o que é opcional. Isto só se faz com uma visão crítica e significativa do processo ensino-aprendizagem. MOREIRA(2000) elenca seis princípios facilitadores da aprendizagem significativa crítica:

a) Princípio da não centralidade do livro texto.

Aprender a partir de diversos materiais.

É verdade que o trabalho feito em cima do livro didático tem avançado nos últimos anos, com o PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), a qualidade dos livros tem melhorado, e principalmente, o sistema de escolhas destes por meio dos professores da Educação Básica. Mas isto não basta. É necessário desvencilhar-se do livro didático como objeto instrucional prioritário e que tudo (ou a maioria dos conteúdos) devem partir dele. Isto leva o aprendiz a ter contato com outros materiais, que devem ser potencialmente significativos, e compará-los a fim de assimilar o que é importante para o seu aprendizado. Uma proposta didática, um software, um jogo, uma produção textual, artística, podem, muito bem, se tornar meios do processo de ensino e aprendizagem.

b) Princípio do aprendiz como perceptor/representador.

Todos somos assim. Percebemos e representamos aquilo por nós percebido.

Este princípio tem como ponto central a idéia de que o aprendiz não é apenas um receptor, mas principalmente um perceptor. Ainda segundo Moreira(2000), “*A questão é que o aprendiz é um perceptor/representador, i.e., ele percebe o mundo e o representa. Quer dizer, tudo que o aluno recebe ele percebe.*” Isto nos deve fazer atentar para o fato da necessidade de questionarmos de que maneira o aprendiz percebe aquilo que ensinamos e os meios pelos quais buscamos ensinar. No caso da matemática, esta representação é central, pois os objetos matemáticos são abstratos, e mesmo que eles possam ser “representados”, trata-se apenas de idéias associadas, algo que lembre o modelo do objeto.

c) Princípio do conhecimento como linguagem.

A linguagem é o meio pelo qual percebemos e representamos a realidade.

A idéia principal aqui é a de que aprender algo novo é aprender a linguagem deste algo novo. Quando aprendemos de maneira crítica, aprendemos como esta linguagem apreendida no confere uma nova visão de mundo e como a mesma se confronta com o que já sabemos, de maneira não arbitrária, isto é, o aprendiz deve estar cômicos de como estas relações são produzidas e compreendidas. Estes são os princípios da Aprendizagem Significativa (subsunçores, reconciliação integrativa e diferenciação progressiva) e que devem ser vistos criticamente pelo estudante.

d) Princípio da consciência semântica.

O significado está nas pessoas, não nas palavras.

Como diz Gowin (1981), “um episódio de ensino se consuma quando aluno e professor compartilham significados sobre os materiais educativos do currículo”. Estes significados são sobre os materiais, mas não estão nas matérias. Eles ocorrem nas pessoas, nos agentes do processo de ensino e aprendizagem. Isto é aprender significativamente. Entender estes significados e compartilhá-los reflete a criticidade de quem age e reage a estas significâncias. MOREIRA (2000) afirma que

No ensino, o que se busca, ou o que se consegue, é compartilhar significados denotativos a respeito da matéria de ensino, mas a aprendizagem significativa tem como condição a atribuição de significados conotativos, idiossincráticos (é isso que significa

incorporação não- literal do novo conhecimento à estrutura cognitiva).(2000)

e) Princípio da aprendizagem pelo erro.

Aprendemos corrigindo erros.

Historicamente, o erro vem sendo visto como objeto testemunhal contra um réu condenado, a partir do qual, será imputada a pena ao infrator. O erro, porém, é um mecanismo humano, que muitas vezes, constrói o conhecimento. Sendo assim, não podemos desprezar o tratamento do erro, principalmente quando tratamos de aprendizagem significativa crítica, pois o primeiro elemento que o indivíduo deve criticar tem que ser a si próprio. E, partindo do reconhecimento do erro, por meio de um compartilhamento de significados, conduzirmos o estudante ao significado daquele conceito tratado de maneira diferente. FREIRE (2003), afirma que

ao ser produzido, o conhecimento novo supera outro que antes foi novo e se fez velho e "se dispõe" a ser ultrapassado por outro amanhã. Daí que seja tão fundamental conhecer o conhecimento existente quanto saber que estamos abertos e aptos à produção do conhecimento ainda não existente (p. 28).

f) Princípio da desaprendizagem.

Selecionar e desaprender o não relevante.

O significado dado ao termo “desaprendizagem” não é o de não aprender algo, mas, dentro da sua estrutura cognitiva , o estudante selecionar aqueles conceitos que serão relevantes para o aprendizado de um novo conceito. De acordo com Postman e Weingartner (1969, p. 208) “Desaprender conceitos e estratégias irrelevantes passa a ser condição prévia para a aprendizagem”. Isto é aprender significativa e criticamente. MOREIRA (2000), afirma que “sua facilitação deveria ser missão da escola na sociedade tecnológica contemporânea.”

g) Princípio da incerteza do conhecimento.

Perguntas são instrumentos de percepção, enquanto definições e metáforas são instrumentos para pensar.

Postman (1996, p. 175) afirma que “Definições, perguntas e metáforas são três dos mais potentes elementos com os quais a linguagem humana constrói uma visão de mundo”. Perceber isto, por parte do aprendiz, significa que o mesmo está compreendendo o conhecimento como uma construção humana. Todo o conhecimento acumulado pela humanidade não surge por acaso. Ele é construído, desconstruído e reconstruído seguidamente. Perguntas precedem respostas, que por sua vez precedem inúmeras interpretações e outras novas perguntas. A incerteza do conhecimento não é a rejeição do conhecimento, mas o conceito de que o aprendido hoje pode ser contestado amanhã e essa contestação também pode ser objeto de análise e assim por diante.

h) Princípio da participação ativa do aluno.

O aluno como responsável e protagonista de seu aprendizado.

Um dos problemas percebidos no ensino é a concentração do saber no professor e este deve apenas repassá-lo ao aluno. Este, por sua vez, não deve fazer nada, a não ser prestar atenção para então aprender o objeto ensinado. Este pensamento sobre o ato educativo mostra o aluno como um simples receptor e sujeito passivo, pois tudo o que ele vai aprender, como vai aprender e para que vai aprender já foi definido pelo professor, que por sua vez, já teve seu trabalho norteado pelo livro didático. Sendo assim, podemos perceber passividade em ambos. Devemos, então, buscar objetos instrucionais que permitam ao aluno desenvolver seu conhecimento e a perceber que sua participação (ação participativa) é fundamental para o seu aprendizado. Se este princípio não for encaminhado, praticamente todos os demais citados anteriormente perdem o sentido.

2.3 Mapas Conceituais

Outro conceito importante agregado à teoria da Ausubel é o Mapa Conceitual. Mapeamento conceitual é uma técnica de análise que pode ser usada para ilustrar a estrutura conceitual de uma fonte de conhecimentos (Moreira e Buchweitz ,1987). Mapas conceituais podem ser traçados para toda uma disciplina, para um artigo, um

experimento ou um tópico específico de uma disciplina. O elo que une a técnica de mapeamento conceitual à teoria de Ausubel é o fato de, ao construir um mapa conceitual, o aprendiz vai mostrando como ele compreende a(s) relação(ões) entre os conceitos estudados.

Trata-se, no entanto, de uma técnica desenvolvida em meados da década de setenta por Joseph Novak e seus colaboradores na Universidade de Cornell, nos Estados Unidos. Ausubel nunca falou de mapas conceituais em sua teoria. Vale ressaltar que não existe um mapa conceitual correto, mas sim um esquema que vai sendo aprimorado à medida que o aprendiz vai absorvendo significativamente os conceitos estudados e entende efetivamente quais idéias já conhecidas (subsunoçores) ele ativou em sua estrutura cognitiva para aprender um novo conceito. Neste sentido, Moreira e Buchewitz (1987) afirmam que “o ponto importante é que um mapa conceitual deve ser sempre visto como um mapa conceitual e não o mapa conceitual de um conjunto de conceitos”. A seguir o exemplo de um mapa conceitual proposto por BRIGUENTI (2003, p.37) para o ensino de trigonometria:

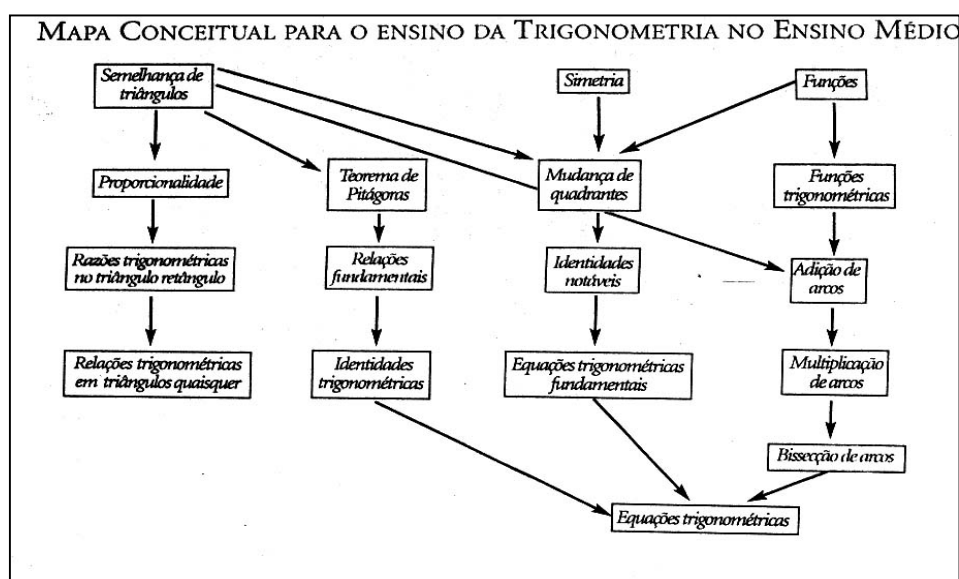


Figura 4. Mapa conceitual proposto por BRIGUENTI (2003, p.37)

Especial atenção foi dada à importância histórica da trigonometria, pois o conhecimento deste campo do conhecimento matemático é fonte de uma série de atividades, de procedimentos, de aplicações e de representações que muito podem

enriquecer a proposta didática, inclusive contribuindo para a o aluno desenvolver atitudes de ver a matemática como um conhecimento desenvolvido socialmente; como os problemas estudados mudam de acordo com as aplicações e demandas dos contextos; perceber como evoluíram os conceitos e procedimentos, bem como as representações.

2.3 BREVE HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

A trigonometria, bem como a maioria dos conteúdos da matemática que são estudados na educação básica, surge em um primeiro momento a partir de necessidades práticas. Por meio de desenvolvimentos realizados em grupos, não como obra de um homem só em apenas um momento da história.

Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. Segundo BOYER (1975),

dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado 'trilaterometria', ou medida de polígono de três lados (triláteros) do que 'trigonometria', a medida das partes de um triângulo.(p. 116)

2.4.1. HIPARCO DE NICÉIA

É na Grécia, que vamos situar o nascimento deste campo da matemática, principalmente com os trabalhos de Hiparco de Nicéia (190-120 a.C.) que, ao estabelecer uma ponte entre a astronomia e a geometria, deu início à Trigonometria. Com a construção de suas tabelas trigonométricas, organizou as observações do céu feitas pelos babilônios, elaborando um catálogo de estrelas. Para construir as tabelas trigonométricas, utilizadas para medir triângulos na terra relacionados com ocorrências no céu, Hiparco precisou usar o triângulo retângulo para calcular suas cordas, com o objetivo de determinar as posições das estrelas e dos planetas usando uma unidade de

medida para arcos e ângulos e um sistema de coordenadas para localizar um corpo na esfera celestrial.

2.4.2 O ALMAGESTO DE PTOLOMEU

Cláudio Ptolomeu (100-178 d.C.) escreveu, no Museu de Alexandria, a mais influente obra sobre trigonometria da antiguidade, uma coleção de treze livros chamada Síntese Matemática. A coleção contém uma descrição matemática do modelo grego do universo analisando o movimento do Sol, da Lua e dos planetas.

Para realizar os cálculos necessários de acordo com o calendário, Ptolomeu construiu uma tabela de cordas de todos os arcos de $0,5^\circ$ a 180° , em intervalos de $0,5^\circ$. Por interpolação, ele obtinha outros valores, o que fazia da tabela de Ptolomeu um instrumento bem mais completo que a do próprio Hiparco, sem querer negar a importância do trabalho deste, pois, de acordo com BOYER (1975), “o Almagesto de Ptolomeu, ao que se supõe, deve muito quanto a seus métodos às cordas num círculo de Hiparco.”

Mais tarde, os árabes passaram a chamar os livros de Ptolomeu de *Almajesto*, que significa “o maior”. O objetivo de Ptolomeu era, de acordo com o calendário, determinar as estações, prever eclipses e o estabelecimento do mês lunar. Os gregos, os hindus e os árabes usaram linhas trigonométricas. Essas tiveram a forma de cordas num círculo, e coube a este autor associar valores numéricos às cordas.

2.4.3 OS HINDUS E O SEU SIDDANTHA

Os matemáticos da Índia escolheram um caminho diferente para a Trigonometria. Apesar do amplo domínio do Almagesto, no final do século IV começou a ser largamente utilizado um conjunto de textos matemáticos surgidos na Índia, com o título de Siddantha, que significa “*Sistemas de Astronomia*”.

Escrito em versos poéticos e em sânscrito, em vez de seguir o caminho de Ptolomeu, o Siddantha usava uma trigonometria baseada na relação entre metade da corda e metade do ângulo central de uma circunferência. Os hindus tinham dado o nome de “jiva” à metade da corda, e os árabes a transformaram em “jiba”. Traduzindo do árabe para o latim, Robert de Chester interpretou *jb* (em árabe não se escreve as

vogais) como jaib, que significa baía ou enseada, e escreveu sinus, em latim. A partir daí, a meia-corda hindu passou a ser chamada de sinus, em português, seno. Por exemplo, no Siddantha, a corda de 30° era a meia-corda de 60°.

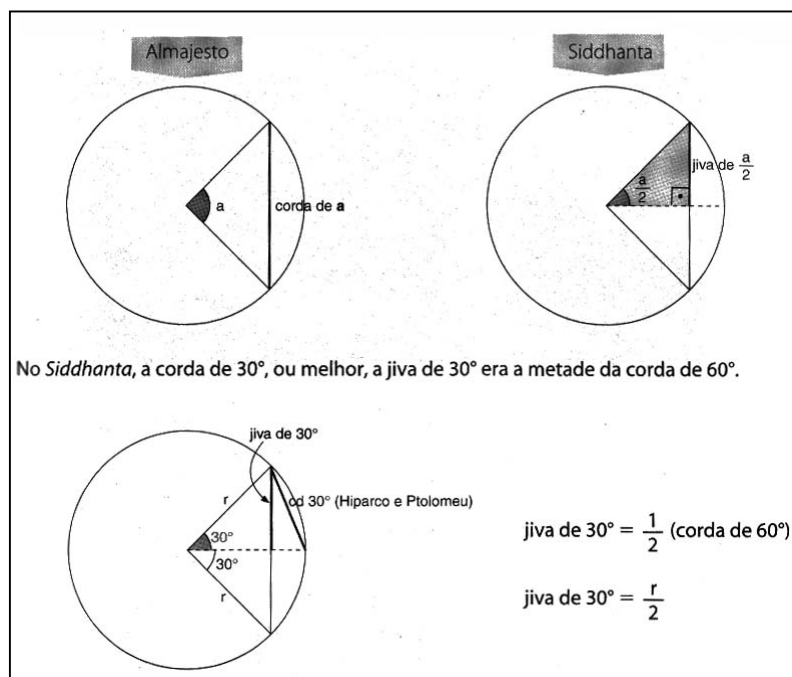


Figura 5 – Determinação da meia corda hindu.

2.4.4 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA TRIGONOMETRIA

O período histórico que vai dos trabalhos de Hiparco até o trabalho de Euler (1707-1783) durou mais de 1.500 anos, e a trigonometria neste intervalo de tempo estudava as relações entre os lados e os ângulos de triângulos, juntamente com suas aplicações para cálculos de distâncias, construções, navegação e astronomia, entre outros. É nesta perspectiva que a palavra trigonometria, que deriva dos termos gregos *trigonom*, que significa triângulo e de *metria*, que significa medida, teve seu significado etimológico original. Trigonometria, neste período, pode ser considerada como a área da matemática que trabalha com as relações entre as medidas dos triângulos, envolvendo comprimentos de lados e medidas de ângulos. Os principais desenvolvimentos ocorridos nesta fase são hoje trabalhados na matemática escolar no

Brasil, geralmente no 9º ano do ensino fundamental, enfatizando-se o estudo das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Os conceitos e as tabelas desenvolvidos neste período servem de base para os avanços ocorridos na matemática a partir da concepção de função – que vem concretizar os estudos abordando as relações entre diferentes grandezas por meio de variáveis, permitindo estudar os fenômenos contínuos que se repetem periodicamente como sendo funções. Este conceito, introduzido no início do século XVII, permite estudar os fenômenos de forma dinâmica, traduzindo a dependência entre grandezas e variáveis como funções. Este mesmo processo ocorre também no currículo de matemática do ensino médio, onde os conhecimentos desenvolvidos no nível fundamental servem de base para dar significado ao trabalho com as funções trigonométricas, permitindo estudar os fenômenos periódicos com maior profundidade e como processos dinâmicos.

A fase de passar da trigonometria como relações entre as medidas de elementos de triângulo para o estudo de funções, característica da ciência moderna, foi muito enriquecida com os trabalhos de Euler, que a desenvolveu em uma forma próxima da abordagem hoje seguida no ensino médio.

2.4.5 LEONHARD EULER

Euler escreveu mais de quinhentos livros e artigos sobre os mais diversos assuntos da Matemática. Segundo GUELLI (2003, p. 418), “Euler dizia ironicamente que seu lápis era muito mais inteligente que ele”.

Em 1748, passou a usar sistematicamente na trigonometria uma circunferência de raio unitário. Até essa época, os valores atribuídos aos senos de um mesmo ângulo eram dispostos em tabelas ou em alguns trabalhos apresentados como pertencentes a linhas retas, dependendo os seus valores numéricos do comprimento do raio da circunferência. Com a utilização da circunferência unitária onde o raio igual a 1, o seno de um determinado ângulo pode ser pensado como tendo um único valor, dentro de um determinado intervalo de variação. Euler ampliou a ideia de seno, interpretando-a como a função que representa a razão de dois números, e introduziu a notação que usamos atualmente representando o seno de um arco x por $\text{sen } x$.

Com a astronomia, agrimensura e geodesia, a trigonometria se amplia e passa ter uma maior gama de aplicações, passando também a se ampliar para o estudo de outros campos matemáticos e científicos. e hoje desempenha um papel importante em áreas como Cálculo e Matemática Aplicada.

Hoje a trigonometria pode ser pensada como o estudo das funções que apresentam gráficos com comportamentos periódicos, ou seja, que podem representar fenômenos que apresentam padrões repetitivos, como uma grande parte dos fenômenos presentes na natureza, na indústria e no sistema financeiro. A leitura de um cardiograma, por exemplo, é um destes fenômenos.

Este avanço da trigonometria como estudo das funções periódicas feito no ensino médio avança para o estudo de todos os fenômenos que apresentam natureza ondulatória, ou que podem ser aproximados por um comportamento ondulatório. Envolve assim, o estudo de vibrações, calor, fenômeno de transporte, corrente elétrica, campos eletromagnéticos, entre outros, que podem ser estudados por séries infinitas envolvendo senos e cossenos. Estas séries, denominadas de séries de Fourier, foram desenvolvidas por este cientista em 1807, embora Euler tenha sido o primeiro que expandiu algumas funções especiais em uma série infinita de senos e cossenos.

Foi o trabalho de Fourier que sugeriu que qualquer função periódica pode ser representada pelas séries que recebem o seu nome. O trabalho de Fourier foi gradualmente aceito pela comunidade matemática e representou no século XIX uma ferramenta importante para o desenvolvimento da matemática e de suas aplicações. Este fato permite considerar a trigonometria como sendo o estudo dos fenômenos que apresentam padrões periódicos.

Na contramão deste desenvolvimento está o ensino de trigonometria baseado em fórmulas e em regras, feito de forma estática se utilizando de um exagerado algebrismo, sem levar em conta a sua contextualização e o desenvolvimento histórico vivenciado por este campo, nem tendo a preocupação de associá-la na forma contemporânea aos fenômenos periódicos conforme a tendência atual. Deixa assim de considerar suas aplicações a saúde, clima, finanças, fenômenos ondulatórios, entre outros.

Há um excessivo abuso deste algebrismo, muita das vezes provocada pelas famosas questões dos vestibulares tradicionais, na perspectiva do aluno responder a duas ou três questões de trigonometria presentes na maioria destas provas de seleção. Segundo BRIGHENTI (2003),

sua origem foi marcada pelo uso de conceitos geométricos. Aos poucos, esses conceitos vão sendo substituídos pelo uso de procedimentos algébricos que privilegiam ações mecânicas e sem muito significado para o aluno (p. 35).

Pode se constatar a aplicação deste modelo tradicional aos cursos de formação de professores, levando a maioria dos professores de matemática que completam a graduação a não terem vivenciado a riqueza de conteúdos abordados pela trigonometria, sem terem oportunidade de explorar sua potencialidade tanto formativa como funcional. Torna-se necessário que o ensino de trigonometria, a partir da formação dos professores, passe a incorporar os avanços históricos desta área da matemática, e esperamos contribuir com esta proposta didática para este fim, possibilitando formas de tornar o seu aprendizado significativo e contemporâneo, respondendo as demandas atuais da sociedade.

2.3 DIALOGANDO COM A PESQUISA

O tema ensino de trigonometria tem sido alvo de pesquisas em educação matemática, o que destaca a importância do estudo deste conteúdo. Outros educadores tem investigado a aprendizagem desta área da Matemática. Destacaremos alguns, bem como relacionaremos os trabalhos apresentados com o nosso.

- 1) SIMIONATO E PACHECO (2007) relatam os resultados de um trabalho de investigação em ensino de trigonometria tendo como base a história da trigonometria. Segundo os autores a idéia do trabalho “surgiu após se verificar a pouca motivação dos aprendentes no ensino da matemática, especialmente no conteúdo referente à trigonometria (p.3).”
- 2) MENDES (1997) apresenta um trabalho sobre ensino de trigonometria através de atividades baseadas no desenvolvimento histórico desse tema. MENDES(2009,), enfatizando que

a utilização de atividades históricas no ensino de Matemática pressupõe que a participação efetiva do aluno na construção de seu conhecimento em sala de aula, constitui-se em um aspecto preponderante nesse procedimento de ensino e aprendizagem (p.115)

- 3) OLIVEIRA (2006), analisa as dificuldades que os professores do ensino médio enfrentam no processo de ensino de trigonometria através de atividades dentro de um enfoque construtivista. O mesmo conclui atestando as dificuldades de se trabalhar com atividades bem planejadas e bem direcionadas devido às condições de trabalho do professor. Mas deixa indicado na apresentação dos resultados de sua pesquisa ser o trabalho com atividades bastante positivo e que o professor não pode fechar os olhos para isso, encostando-se nas eternas dificuldades.
- 4) DIAS e CAMARGO (2007) apresentam uma metodologia diferenciada para o segundo ano do ensino médio, pela forma de desenvolver os conteúdos, trabalhando a introdução ao estudo da trigonometria com uma seqüência de atividades, para promover a aquisição de conceitos trigonométricos. O trabalho tem cunho eminentemente construtivista e mostra como o aluno desenvolvendo seu conhecimento pode se apropriar de maneira significativa do mesmo.
- 5) No campo das Tecnologias da Informação - TI, Sormani (SORMANI, 2006), desenvolveu um estudo exploratório sobre o uso da informática na resolução de problemas trigonométricos, onde alunos resolviam problemas trigonométricos através do software Cabri Geomètre II. O autor conclui que o Cabri-geometre pode conduzir a uma aprendizagem significativa, por se tratar de um material potencialmente significativo, condição para a aprendizagem no escopo da aprendizagem significativa.
- 6) Huanca (HUANCA, 2006) investiga o ensino-aprendizagem de trigonometria através da metodologia de resolução de problemas. Neste sentido, o autor constatou uma motivação tanto na professora como nos alunos da turma onde foi realizado o trabalho, bem como uma maior capacidade dos alunos em relacionar o tema trabalhado com conceitos vistos anteriormente.

Acima, vimos que a investigação do processo de ensino e aprendizagem de trigonometria tem seu lugar na educação matemática, e a pesquisa sobre o mesmo mostra-se relevante e tem dado suas contribuições. Neste sentido, propomos mais uma contribuição através de mais um instrumento, que é a proposta metodológica baseada na teoria da aprendizagem significativa.

O nosso trabalho relaciona-se com os acima citados, além da trigonometria, através do viés da investigação da aprendizagem destes conceitos. Logicamente, algumas delas se afinam mais com nosso trabalho, como a de Brighenti (BRIGHENTI, 2001), que trabalha com funções trigonométricas – e tem como base a teoria da cognição proposta por Ausubel, dando-nos base para enveredar por esses trilhos. Já a de Sormani (SORMANI, 2006), explora as representações gráficas utilizando o software Cabri. Neste caso, será importante verificar como os alunos tratam conceitos através da construção manual (com régua e compasso). Além destas duas, achamos importantes citar as demais, por entender que podemos assim mostrar a possibilidade da pesquisa em ensino de trigonometria, pois estas abarcam áreas da educação matemática como resolução de problemas e história da matemática, extremamente importantes quando tratamos de aprendizagem significativa crítica.

3 METODOLOGIA

3.1 Pesquisa

A fim de verificar o alcance da metodologia proposta para o ensino de funções trigonométricas no ensino noturno, optamos por um trabalho de intervenção didática. Optamos por observar o aspecto qualitativo da pesquisa, visto que a Teoria de Ausubel decididamente nos encaminha para tal, pois a ênfase no quão fortes são as relações entre os conceitos não podem e não devem ser medidas apenas numericamente, servindo estes dados como meios de subsídios para a análise qualitativa. DENZIN e LINCOLN afirmam que “a pesquisa é uma atividade situada que coloca o observador no mundo” (2006, p.17). Para os autores, este tipo de pesquisa parte de um específico (situação) para o geral (mundo).

Percebemos claramente o fato de a pesquisa qualitativa poder nos dar uma visão mais abrangente e complexa do fragmento de universo pesquisado dentro do universo maior. Em nosso caso, partimos da intervenção didática na sala de aula, para compreender fatos importantes acerca do ensino e da aprendizagem de trigonometria que, com certeza extrapolam os limites da sala de aula. Ainda segundo DENZIN e LINCOLN, “a competência da pesquisa qualitativa é, portanto, o mundo da experiência vivida” (2006, p. 22)

3.2 A Escola

Como já dito anteriormente, a Escola é da rede pública estadual da Paraíba e está localizada num bairro periférico de Campina Grande, funcionando nos três turnos. Tem cerca de 800 alunos, funcionando com turmas de ensino fundamental e ensino médio. No turno noturno, são apenas três turmas de ensino médio regular, e as demais são todas preenchidas pela modalidade EJA (Educação de Jovens e Adultos). A Escola funciona há mais de vinte anos e goza de bom conceito junto à comunidade. A estrutura física da mesma é precária, pois nunca houve reforma.

3.3 A Turma

A turma na qual aplicamos a intervenção era do segundo ano do ensino médio regular. Composta de 18 alunos, dos quais 14 freqüentavam regularmente, seu perfil foi levantado a partir de um questionário aplicado no primeiro encontro e que consta no primeiro ponto da próxima seção.

3.4 A Metodologia em Sala de Aula

Antes de iniciarmos o trabalho em sala de aula, tivemos uma conversa com o professor da turma para explicarmos a natureza do trabalho, a importância do mesmo e obtermos tanto a concessão do mesmo como algumas informações a respeito da turma na qual estávamos por adentrar. Feito isso, ficou determinado que, nas terças, ministrariamos as aulas referentes à pesquisa. Pode parecer muito, mas na verdade, são duas aulas de apenas quarenta minutos cada. E estas algumas vezes foram impossibilitadas em virtude de alguma palestra ou paralisação dos professores.

No trabalho, preparamos uma intervenção pedagógica, visto trabalharmos com todo o universo da turma contendo uma sequência de encontros com atividades e aulas baseados na Teoria da Aprendizagem Significativa. Esta sequência é que passamos agora a descrever, comentá-las e analisá-las também à luz da Teoria Ausubeliana. A ideia de uma sequência pedagógica coaduna-se com a visão Crítica proposta por MOEIRA (op cit), da qual um dos itens é a não centralidade do livro texto.

Os temas tratados na sequência são os seguintes:

I – *Atividades para compreensão ou reforço dos subsunçores.*

Estas atividades têm fundamental importância, pelo fato de que o domínio de subsunçores credencia o aluno a desenvolver novos aprendizados (funções trigonométricas) com base (âncora) nos mesmos. Nesta direção serão trabalhados:

Conceitos geométricos fundamentais

Para as atividades com circunferência e seus elementos (importantes para o entendimento do ciclo trigonométrico), priorizamos as construções com régua e compasso, a fim de que a aprendizagem seja participativa e o aluno venha a ter contato

com estas construções, importantes no estudo da trigonometria. Assim, o aluno por meio do uso destes artefatos assimila a estreita relação entre trigonometria e geometria, muita vezes relegada pelos livros didáticos e pelos professores. Assim, faremos também um resgate histórico, pois “a trigonometria mostra em seu interior o crescimento embrionário de três partes clássicas da matemática: álgebra, análise e geometria” (KENNEDY, 1992, p. 1).

Ângulos e Relações no triângulo

Ainda trabalhando com régua e compasso, trabalharemos as relações entre lados e ângulos de um triângulo, condição de existência e semelhança de triângulos. Também lançaremos mão da metodologia de resolução de problemas, na concepção do problema como ponto de partida para ensinar matemática, olhando o problema como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento matemático (MENDONÇA, 1993).

A necessidade da compreensão das relações do triângulo dá-se pelo fato de que a passagem da trigonometria no triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico aparentemente apresenta dificuldades para o aluno em estabelecer relações entre os ângulos de um triângulo e os arcos no ciclo trigonométrico. Estas dificuldades parecem estar relacionadas com os diferentes conceitos de ângulos (associado a um giro; a uma região entre semirretas com uma origem comum; a uma união de duas semirretas com origem comum e finalmente como o comprimento de um arco de circunferência conforme é abordado na trigonometria no nível do Ensino Médio e em várias disciplinas do Ensino Superior, a exemplo do Cálculo Diferencial e Integral. Outro fator importante a ser considerado é a importância da compreensão da trigonometria no triângulo retângulo e de semelhança de triângulos para o aluno compreender satisfatoriamente a sistematização do seno do cosseno e da tangente no ciclo trigonométrico.

Simetria

A simetria é um conceito que pouco a pouco vai ganhando espaço no ensino fundamental e segundo Rêgo&Rêgo (2006) “a transposição didática do conceito de simetria para os diversos níveis de ensino/aprendizagem permanece, mesmo no âmbito

internacional, um campo aberto para a investigação”. O seu domínio está associado à compreensão de vários temas do ensino médio, sendo central para conteúdos de trigonometria, no que tange as relações entre os arcos do primeiro quadrante e seus correspondentes nos demais quadrantes do ciclo trigonométrico. As simetrias existentes ajudam a justificar o porquê dos valores das funções para estes arcos são iguais ou opostos, fornecendo condições para uma compreensão mais significativa da variação do sinal das funções trigonométricas e também a visualização gráfica desse fenômeno.

Função

Trabalharemos o conceito de função por meio da resolução de problemas, leitura e construção de gráficos.

IV – Atividades de construções geométricas, para a determinação de extremidades de arcos no ciclo trigonométrico

Utilizando o que será feito nas atividades de circunferência, serão construídos em papel quadriculado, com régua compasso e transferidor, ciclos trigonométricos e marcados os pontos relativos aos arcos nos mesmos,

V – Atividade para a sistematização de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico

Após a construção dos ciclos trigonométricos, usaremos os conhecimentos de razões trigonométricas no triângulo retângulo e de semelhança de triângulos para sistematizarmos e definirmos seno, cosseno e tangente de um arco no ciclo trigonométrico.

VI – Construção dos gráficos das funções $f(x) = \text{sen } x$, $f(x) = \text{cos } x$ e $f(x) = \text{tg.}$,

Trabalhando inicialmente o conceito de função e os valores obtidos após a sistematização das razões trigonométricas na circunferência unitária, passaremos as definições de função seno, função cosseno e função tangente, e depois a construção dos gráficos das mesmas, onde, a partir destes, identificaremos todas as propriedades importantes das funções como domínio, imagem, período, crescimento, amplitude, bem como podemos observar o comportamento das translações dos seus gráficos a partir de mudanças nos seus argumentos.

Para fins de identificação, os alunos serão identificados por A1, A2, A3, e assim sucessivamente até A14.

ENCONTRO 1

No primeiro contato, fomos devidamente apresentados pelo professor da turma que em seguida saiu. Nosso primeiro passo foi apresentar mais pormenorizadamente a natureza do trabalho e aplicar um questionário a fim de traçarmos um perfil da turma em termos sociais (idade, sexo, quais fatores o levaram a optar pelo ensino noturno) e em relação ao seu envolvimento com a matemática (se acha importante estudar matemática, se acha a matemática útil e especificamente com a trigonometria).

Universidade Estadual da Paraíba – UEPB
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática – MECM

Questionário de Pesquisa

Os dados dessa pesquisa serão utilizados na elaboração de Dissertação de Mestrado Em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Não é necessária sua identificação

1. Data do preenchimento do questionário: ___/___/___ Horário: ___:___
Município: _____ PB

1.1. Sexo: Masc. () Fem. () 1.2. Idade: _____
1.3. Estado civil: Solteira/o () Casada/o () Companheira/o () Separada/o ou Divorciada/o ()
Viúva/o ()
1.4. Você se considera: indígena () Negra/o () Parda/o () Amarela/o () Mulata/o ()
Branca ()
1.5. Tem filhos/as: Sim () Não () Quantos? _____ Masculino () Feminino ()
1.6 Profissão: _____

2. O que fez você optar pelo ensino noturno?

3. Quais as suas perspectivas de futuro e como elas se relacionam com o estudo?

3. O que você pensa sobre o estudo da matemática? Para que serve? Ela lhe ajuda no dia a dia? No trabalho? Enfim, é importante estudar matemática?

4. Você já estudou trigonometria? Se sim, o que você aprendeu sobre a mesma?

Quadro 1. Questionário aplicado no 1º encontro

Análise das respostas do questionário

O objetivo aqui não é de apresentar dados estatísticos detalhados a respeito da turma, mas o de apresentar, com base no questionário, um perfil geral da turma, em

termos do que a maioria respondeu aos itens do questionário, bem como, a partir destes dados, encaminhar as abordagens nos demais encontros. Sendo assim, elencamos os dados a seguir:

- a) Apesar de ser uma turma noturna, era composta, na sua imensa maioria, de jovens. Apenas um dos estudantes possuía 50 anos, e para termos uma ideia mais equilibrada da idade da turma tomamos a mediana como medida, obtendo o valor de 17 anos.
- b) Quanto ao estado civil, apenas o estudante citado no item anterior era casado. Este fato contraria a crença bastante disseminada de que a maioria dos alunos do ensino noturno é casada e possuem filhos. Neste aspecto, o fenômeno repete-se. Apenas um entre os protagonistas da pesquisa possui filhos.
- c) Na relação com o trabalho, a maioria ou trabalhava ou estava procurando emprego. Afirmamos isto com base nas respostas dadas à pergunta sobre o que os fez optar pelo ensino noturno. Todos responderam nos termos em que ou estavam trabalhando ou procurando emprego.
- d) Ainda no sentido do item anterior, ao responderem qual a relação entre o estudo e as perspectivas de futuro, a maioria encaminhou resposta no sentido do ensino superior. Neste caso, o momento era uma ponte. Apenas dois enfatizaram o mercado de trabalho imediato.
- e) Quanto a relação com a matemática, a maioria enfatizou a importância desta área de conhecimento, mas em alguns casos destacou-se o desconhecimento da utilização da matemática no cotidiano.
- f) Enfim, quanto à trigonometria, a turma se dividiu entre os que tinham estudado e os que não tinham estudado.

Os dados acima nos permitem tecer algumas considerações. Primeiro, a realidade do alunado noturno é bem diferente da imaginada, pois a partir dos dados colhidos podemos afirmar que os jovens compõem a maioria do alunado. Isto pode ser um reflexo da tendência na sociedade, na qual os jovens de famílias de trabalhadores

são inseridos cedo no mercado de trabalho, seja na busca por independência ou para contribuir no sustento de suas famílias (ou ambos).

Outro fato a ser destacado na análise do questionário reside no ponto de os alunos relacionarem suas perspectivas de futuro com o estudo. Neste sentido, a situação estudada contraria a crença muito disseminada no meio dos professores da educação básica de que o aluno do curso noturno não quer nada com os estudos, pouco se comprometendo em aprender os conteúdos escolares neles desenvolvidos. O que concluímos das respostas é uma demanda dos jovens por uma maior escolaridade, havendo assim a necessidade de se promover uma orientação melhor destes alunos no sentido de valorizar a escola, não apenas com trampolim para algo na frente, mas como parte fundamental de seu desenvolvimento humano. Isto é uma das bases da Visão crítica da Aprendizagem Significativa. Segundo Moreira (2006),

na sociedade contemporânea não basta adquirir novos conhecimentos de maneira significativa, é preciso adquiri-los criticamente. Ao mesmo tempo que é preciso viver nessa sociedade, integrar-se a ela, é necessário também ser crítico dela, distanciar-se dela e de seus conhecimentos quando ela está perdendo rumo (p. 11)

A parte final do questionário tinha o objetivo de nos apresentar um panorama adequado da relação dos alunos com a matemática e com a trigonometria, a fim de delinear as abordagens a serem desenvolvidas nas atividades. Todas as respostas caminharam no sentido de apontar a importância da matemática, ainda que em alguns casos fossem citadas dificuldades em observar a aplicabilidade da matemática. Isto nos leva a concluir que existem dificuldades para apresentar aos nossos alunos a importância dos aspectos funcionais e formativos da matemática – funcionais dizem respeito a utilidade desta disciplina nas aplicações ao mercado de trabalho e no dia a dia, enquanto os formativos dizem respeito a utilização dos conhecimentos matemáticos como uma forma de pensar e de ver o mundo – havendo ainda muita preocupação em trabalhar o lado abstrato da matemática (não que para isso seja necessária uma ida ao rigor absoluto) sem se preocupar com as suas aplicações e que a mesma serve de ferramenta para modelar vários fenômenos e processos.

Alertando-nos quanto a isto, D'Ambrósio (1996), afirma: “interessa à criança, ao jovem, ao aprendiz em geral aquilo que tem apelo às suas percepções materiais e intelectuais mais imediatas. Por isso é que proponho um enfoque ligado a situações mais imediatas” (p. 31)

Fonseca (2010), comentando o exposto acima, completa:

Isto não excluirá o desafio intelectual, avançando no conteúdo. Mas poderá despertar no aprendente uma vontade de conhecer, envolver-se com o tema. O essencial era haver uma compensação entre os dois aspectos: o imediato e o intelectual, buscando um equilíbrio (p. 70-71)

Como já dito anteriormente, a pergunta sobre o fato de já ter estudado trigonometria foi polêmica, pois metade da turma afirmou que sim, enquanto a outra metade respondeu negativamente. A polêmica reside exatamente que antes deste encontro, em conversa com o professor da turma, fui informado de que ele iniciara o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Isto se deu ao fato de o estudo, quando houve não teve maior importância para os alunos. Mas isto nos serviu para a elaboração de um trabalho de base mesmo, considerando os dados que obtivemos em cada atividade.

ENCONTRO 2

Após a análise dos dados apresentados no questionário, resolvemos lançar mão de um organizador prévio. Na Teoria da Aprendizagem Significativa, um organizador prévio é um instrumento a ser usado antes de iniciar um tema, um curso ou conteúdo. Optamos por apresentar uma palestra oral sobre a importância da matemática na história da humanidade e no cotidiano nosso. Segundo BRIGHENTI (2003, p. 24) “os organizadores prévios devem ser materiais claros, estáveis, relevantes e inclusivos ao material que se vai ensinar”. Para MOREIRA (2006, p.136) “O uso de organizadores prévios é a principal estratégia advogada por Ausubel para, deliberadamente, manipular a estrutura cognitiva a fim de facilitar a aprendizagem significativa”. Apresentamos temas de nosso trabalho como ângulos, triângulos e funções, relacionando-os com a trigonometria, a fim de fazer o nosso organizador prévio ser realmente inclusivo.

ENCONTROS 3 E 4

Para Ausubel, o fator mais importante para ocorrer uma aprendizagem significativa é o que o aluno já sabe. Estes conhecimentos anteriores são chamados de subsunçores. Para o estudo de trigonometria, os conhecimentos básicos de geometria são extremamente importantes e foram por nós elencados como subsunçores. Mas resolvemos partir do mais básico ainda, como o uso de régua, compasso e transferidor. A partir deste encontro, cada aluno teve acesso a um kit contendo um transferidor, uma régua, um compasso e um caderno quadriculado. Este material era disponibilizado para o aluno no início de cada encontro e recolhido ao fim. Nossa primeira atividade encontra-se descrita no quadro seguinte, e esta foi programada para dois encontros.

Construções com régua, compasso e transferidor

1 – Construa um segmento de reta medindo:

- a) 7 cm b) 2,1 cm c) 0,15 m

2 - (OBMEP – 2005) Guilherme está medindo o comprimento de um selo com um pedaço de uma régua, graduada em centímetros, como mostra a figura. Qual é o comprimento do selo?



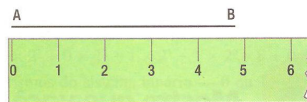
2 – Construa uma circunferência com:

- a) 3,6 cm de raio b) 12 cm de diâmetro

4 – Construa triângulos cujas medidas dos lados são: 3 cm, 3cm e 4 cm

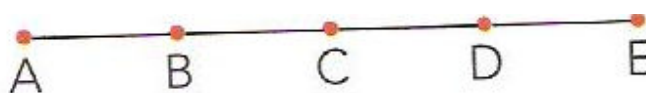
- a) 6 cm, 8 cm e 10 cm
b) 4,6 cm, 5,1 cm e 9 cm
c) 7 cm, 4 cm e 3 cm
d) 3 cm, 4 cm e 5 cm
e) 8 cm, 5cm e 2 cm

5¹ – Abaixo é dado um segmento \overline{AB} e uma régua graduada em centímetros.



- a) O comprimento de \overline{AB} está mais próximo de 4 cm ou de 5 cm?
b) Qual destes valores melhor representa a medida de \overline{AB} : 4,5 cm ou 4,9 cm? Por quê?
c) Você indicaria outro número para dar a medida de \overline{AB} ? Explique por quê.
d) Como você faria, sem utilizar outra régua, para confirmar sua estimativa ou dar um valor mais representativo para a medida de \overline{AB} ?

6 – Considere os segmentos \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{EF} , congruentes.



$AB=BC=CD=DE= u$

- a) Tomando u como unidade de medida, quanto mede o segmento AB ? E o segmento AC ?
b) Tomando a medida da AC como unidade de medida, quanto mede o segmento AC ? E o segmento AD ?
c) Tomando a medida de AE como unidade de medida, quanto mede o segmento AB ? E o segmento AC ? E o segmento BE ? E o segmento AE ?

Quadro 2. Atividade aplicada no 3º encontro

Análise das atividades realizadas dos encontros 3 e 4

O objetivo das atividades era abordar os conceitos básicos da geometria, sem os quais, a compreensão dos conceitos em trigonometria fica deveras prejudicada. Pensamos em trabalhar os conceitos à medida que a atividade se desenrolava. A turma foi dividida em grupos de trios e duplas de alunos. As dificuldades começaram a surgir quando alguns alunos mostraram não saber utilizar a régua. As duas primeiras atividades, que tinham como objetivo apresentar o conceito de segmento de reta, foram acompanhadas da seguinte pergunta: “*Professor, começa a medir do zero ou do um?*”. Isto nos levou a concluir o fato de que os alunos não apresentavam um domínio de grandezas e medidas que desse suporte ao trabalho com trigonometria que pretendíamos desenvolver.

Ao verificar tal fato, passamos a trabalhar com os alunos conteúdos envolvendo grandezas, medidas e unidades de medida, retomando depois a atividade até a sua conclusão. Na questão 3 houve menos dificuldade, pois ainda que não entendessem os conceitos relativos à circunferência, a partir das atividades 1 e 2 souberam determinar no compasso as medidas indicadas. As dificuldades residiram no fato de não identificarem ou saberem identificar o que seria o raio e o diâmetro de uma circunferência, bem como a relação entre eles. A partir da atividade, encaminhamos a apresentação dos elementos de uma circunferência. Passando a trabalhar com as questões 5 e 6, deixaremos para falar da questão 4 adiante.

Quanto a questão 5, aqui está um ponto citado no organizador prévio por nós usado (a palestra), onde enfocamos o tema da aproximação e da estimativa. Fizemos assim com que o organizador prévio tenha sido realmente inclusivo e não apenas algo de caráter meramente introdutório, conforme orienta BRIGHENTI (2003, p. 24), ao afirmar : “os organizadores prévios devem ser materiais claros, estáveis, relevantes e inclusivos ao material que se vai ensinar”.

As questões 5 e 6 tinham o objetivo de mostrar a importância da aproximação e estimativa. Como trabalharemos com cálculos envolvendo números reais para medir comprimento de arcos, torna-se de fundamental importância levar o aluno a trabalhar com aproximações e estimativas.

Como era uma atividade que envolvia a intuição, apenas os alunos que ainda apresentavam dificuldades quanto à noção de unidade de medida apresentaram dificuldades na realização da questão. Dificuldades estas, que foram dirimidas pela própria questão por apresentar a figura de uma régua graduada em centímetros. No que diz respeito a questão 4, foi a mais problemática, pois o uso do compasso já não foi tão fácil como nas circunferências. Muitos mostraram dificuldades em aceitar que em alguns casos, não era possível construir o triângulo, e afirmavam estarem errados. A partir dessa idéia, apresentamos a condição de existência de um triângulo. De acordo com Teoria da Aprendizagem Significativa, buscamos provocar os alunos para que eles mostrassem como os conceitos vistos na atividade se relacionavam. As duas respostas seguintes mostram o retrato do restante da turma:

A3: - *Cada lado do triângulo é um segmento de reta.*

A6: - *Professor, é difícil dizer a relação, mas tá na cara que tem.*

As duas respostas seguintes nos conduzem a análise de que o aluno A6 desenvolveu uma aprendizagem significativa num nível menor que o do A3, pois a relação estabelecida entre os conceitos não foi tão firme. Isto dá-se pela natural diferença de ritmo de aprendizagem entre os alunos. Enquanto a aluno A3 já caminhava para o processo de diferenciação progressiva (onde os dois conceitos relacionados conseguem ser vistos separadamente), A6 caminhava na reconciliação integrativa, na qual os dois conceitos são “misturados” por uma relação. Relação esta, ainda a ser descoberta, no caso. Ao fim, este processo deve mostrar os dois conceitos alterados quanto a sua posição na estrutura cognitiva do aluno em relação à situação inicial.

Desejamos concluir esta parte chamando a atenção para um processo extremamente importante e que mostra como a Teoria da Aprendizagem Significativa foi mobilizada para a construção, bem como na descrição e na análise das atividades. Os conceitos de geometria foram por nós citados como subsunçores para o aprendizado dos conceitos trigonométricos. Por isto aplicamos a atividade. Porém, a idéia da Teoria da Aprendizagem Significativa permeia também as próprias atividades

separadamente, pois tudo vai se transformando numa grande teia, que é o nosso mapa conceitual.

Algo extremamente importante aprendido por nós neste caso é o fato de não podermos desprezar a base geométrica no ensino de trigonometria, pois como afirma KENNEDY (op. cit.), “a história da trigonometria mostra em seu interior, o crescimento embrionário de três partes clássicas da matemática: álgebra, análise e geometria” (p. 1) Negar esta possibilidade aos alunos é privá-lo de poder ter um aprendizado significativo em geometria, em álgebra, em trigonometria e aritmética também.

ENCONTRO 5

No encontro 5, lançamos mão de uma aula expositiva dialogada na qual discutimos e apresentamos o conceito de ângulo. Inicialmente, perguntamos aos alunos qual a primeira idéia que lhes vinha á mente ao ouvirem a palavra ângulo. As respostas foram ligadas a futebol (a bola foi no ângulo) e opinião (vendo a coisa por este ângulo). A partir destes dados, trabalhamos as idéias de ângulo como giro e região entre semirretas. Como giro, trabalhamos a idéia de quarto de volta, meia volta e volta completa. Daí, partimos para a idéia de ângulo como região entre semirretas, medida (abertura entre as semirretas) e unidades de medida (graus, radianos e grados) de ângulo. Mais uma vez vemos aqui a idéia dos subsunçores facilitando o aprendizado de novos conhecimentos. Detalharemos esta parte adiante na análise dos encontros 5, 6 e 7.

ENCONTRO 6 e 7

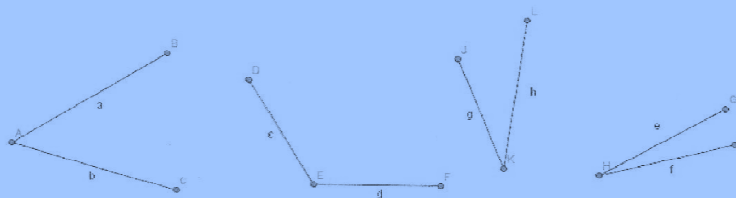
Após o encontro 5, cuja atividade propunha a construção e medição de ângulos, expomos o conceito de ângulos. Como citado anteriormente, o conceito de ângulo é fundamental para a compreensão dos conceitos trigonométricos, o que faz dele um conceito subsunçor fundamental visto que os valores das funções trigonométricas dizem respeito a arcos de circunferência.

Análise dos encontros 5, 6 e 7

No referente às duas primeiras questões, os alunos apresentaram dificuldades por nunca terem trabalhado com o transferidor. Sendo assim, não foi tão simples e

rápido a compreensão da unidade de medida e da maneira certa de medir um ângulo, bem como de construí-lo. Superada a fase da compreensão através do acompanhamento em cada grupo (os alunos mais uma vez foram separados)

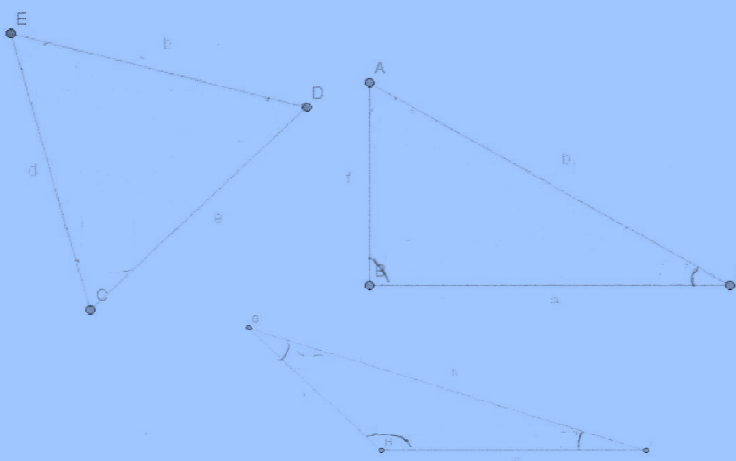
1 – Com o uso do transferidor, determine as medidas dos seguintes ângulos



2 – Com o auxílio do transferidor, construa ângulos com as seguintes medidas:

- a) 23° b) 102° c) 50° c) 3°

3 – Em cada um dos triângulos abaixo, determine a soma das medidas dos ângulos internos.



4 – O que você pôde concluir do exercício 3?

5 – Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual à 90° . Construa dois pares de ângulos complementares.

6 – Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual à 180° . Construa dois pares de ângulos suplementares.

7 – No seu dia-a-dia a noção de ângulo é importante? Em que ela se faz presente? Em quais áreas do conhecimento humano a noção de ângulo é importante?

Quadro 3. Atividade aplicada no 6º encontro

Para a realização desta atividade apresentamos aos alunos como se usa corretamente o transferidor como instrumento de medida de um ângulo. A partir da 1ª e da 2ª questões, apresentamos as classificações de um ângulo de acordo com as suas medidas:

- Ângulo agudo – mede menos de 90°
- Ângulo Obtuso – mede mais de 90° e menos de 180°
- Ângulo reto – mede 90°
- Ângulo raso – mede 180°

Como o tempo da aula era curto para a realização das atividades propostas, mais uma vez estas foram desmembradas em duas partes. Na segunda, aplicada no 7º encontro, trabalhamos a partir da questão 3, a relação estabelecendo a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Notemos aqui um importante ponto do caminhar metodológico de nosso trabalho. Partimos das idéias básicas da geometria, o conceito de triângulo, de ângulos e agora ângulos no triângulo. Começam a aparecer as relações no triângulo, idéia fundamental da trigonometria.

Análise dos encontros 5, 6 e 7

No referente às duas primeiras questões, os alunos apresentaram dificuldades por nunca terem trabalhado com o transferidor. Sendo assim, não foi tão simples e rápido a compreensão da unidade de medida e de procedimentos para medir um ângulo, bem como para construí-lo. Superada a fase da compreensão por meio do acompanhamento de cada grupo (os alunos mais uma vez foram separados em grupos), da dificuldade de manuseio do transferidor. Esta mesma dificuldade foi vista com o uso da régua e do compasso e nos leva a destacar a necessidade de trabalhar os instrumentos de desenho, que faz parte dos objetivos do ensino de geometria .

As questões 3 e 4 eram centrais nesta lista de atividades, pois a relação entre as medidas dos ângulos no triângulo, como citamos anteriormente, é ponto basilar da trigonometria. Optamos mais uma vez em mostrar o conceito a partir da atividade e permitindo ao aluno, ao ligar as idéias de ângulos e triângulos, estendessem essa

relação ao ponto de formular um resultado de formular um resultado como solicitado na questão 4.

O caminho foi o seguinte:

Medir os ângulos internos de vários triângulos → Somar as medidas dos ângulos de cada triângulo → Concluir que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° .

Como as medidas são sempre aproximações que dependem dos instrumentos e dos procedimentos utilizados pelos medidores, alguns valores diferenciavam dos outros, mas a maioria sempre se aproximava de 180° . Antes de trabalharmos a demonstração formal da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, apresentamos uma atividade com material manipulativo que consiste em:

- Traçar um triângulo qualquer e recortá-lo
- Dividi-lo (cortá-lo) em três partes, de modo que cada parte contenha um dos ângulos.
- Unir os vértices dos três ângulos
- Verificar que os três ângulos unidos pelos vértices formam um ângulo raso.

Por meio deste exercício de verificação, que pode ser considerado na teoria ausubeliana como um organizador prévio, os alunos constroem um poderoso arcabouço em sua estrutura cognitiva (subsunçor). Isto lhes dará condições de ter um parâmetro para estabelecimento de relações (conhecimento adquirido e novo conceito) e melhor compreender a relação da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. E ainda dará o salto do específico (verificação) ao geral (demonstração formal). As verificações por meio das medições com transferidor e dos recortes com o papel convenceram os alunos da validade da relação. Já a apresentação da demonstração apresentou dificuldades, visto o pouco contato que os alunos tinham com este aspecto matemático. Perguntados por nós se lembravam de ter visto alguma demonstração, unanimemente responderam negativamente. Daí as dificuldades encontradas. Alguns depoimentos que apontam para isto:

A5: Professor, eu sei que o resultado é este, que é verdade, mas não entendo o processo.

A8: É muito complicado. A gente não já sabe que é 180°.

Para analisar a última questão, trazemos uma das características propostas por Moreira (MOREIRA, 2006), quando faz a leitura da Aprendizagem Significativa pelo seu viés da criticidade:

na sociedade contemporânea não basta adquirir novos conhecimentos de maneira significativa, é preciso adquiri-los criticamente. Ao mesmo tempo que é preciso viver nessa sociedade, integrar-se a ela, é necessário também ser crítico dela, distanciar-se dela e de seus conhecimentos quando ela está perdendo rumo. (p. 11)

Ao levantar esta questão, os alunos enfrentaram problemas em responder, pois não tinham o costume de serem questionados em sala de aula. Isto mostra o problema criado de apenas ensinar matemática para os alunos corretamente as questões disponibilizadas em uma prova e não para pensarem criticamente sobre como este conhecimento interfere em seu mundo e como eles reagem a isto. As respostas caminharam no sentido de indicar aplicações da matemática em atividades humanas como engenharia, arquitetura, entre outras. Mas quero destacar aqui o diálogo que os questionamentos proporcionaram com a aluna A18. Ao ser indagada sobre possíveis aplicações ela disse:

A18: Professor, eu não vejo onde se aplica não.

Perguntamos então, qual a sua profissão. Ela respondeu que era embaladora em um supermercado. Questionamos então, se as dobras feitas no papel eram as mesmas para os produtos. Após pensar um pouco, a mesma respondeu:

A18: Então quer dizer que o ângulo que eu faço no papel depende do produto que eu vou embalar.

E passou a descrever como fazia para embalar determinados produtos, as dobras das embalagens e os seus ângulos. Este foi um dos momentos ricos de nosso trabalho, visto ter sido gerada aí uma tomada de consciência e uma avanço atitudinal em relação à compreensão do conceito.

ENCONTRO 8

O próximo ponto tratado foi o de semelhança entre figuras geométricas, que representa um passo importante no nosso processo de desenvolvimento dos conhecimentos prévios, visto que, a partir do conceito de semelhança de triângulos, caminhamos para compreender as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Já começamos a vislumbrar agora, de maneira mais forte, as relações entre os subsunçores por nós elencados e os conceitos trigonométricos. Antes de apresentar as atividades, solicitamos que, num papel quadriculado os alunos fizessem as seguintes atividades:

- Construir dois triângulos retângulos
- Determinar as medidas de seus lados e ângulos
- Calcular as razões entre os lados homólogos

Optamos por não aprofundar todos os casos de proporcionalidade, pois não era este o nosso objetivo. O importante era definir a semelhança entre figuras através da proporcionalidade entre os lados e a congruência dos ângulos. A partir daí, expomos a definição acima e propusemos a atividade seguinte:

- 1 – Verifique se são sempre semelhantes:
- Dois quadrados quaisquer
 - Dois retângulos quaisquer
 - Dois triângulos equiláteros quaisquer
 - Dois triângulos isósceles quaisquer
- 2 – Dois triângulos congruentes são sempre semelhantes?
- 3 – As dimensões de um retângulo são 21 cm e 28 cm. Um segundo retângulo tem 27 cm e 36 cm. São semelhantes?
- 4 – Um laboratório fotográfico ampliou uma foto de 8 cm de comprimento e 6 cm de largura. Se a ampliação tem 30 cm de comprimento, qual é a sua largura?
- 5 – Desde o início de nossos encontros, estudamos vários conceitos. Entre eles temos:
- Ponto, reta e plano
 - Semirreta e segmento de reta
 - Ângulo
 - Semelhança de triângulos
- Estabeleça uma relação entre esses conceitos. Isto é, mostre aonde e porque um conceito facilita a aprendizagem de outro.
 - Construa um diagrama, mostrando estas relações.

Quadro 4 . Atividade sobre semelhança

Análise do encontro 8

A noção de semelhança é bem intuitiva aos seres humanos parecendo ser um processo natural de procurarmos “coisas” parecidas quando observarmos algo. Assim, conseguimos estabelecer as características que fazem as coisas serem parecidas ou não, desenvolvendo a procura de padrões comuns. No âmbito matemático, o conceito de semelhança exige que as características sejam bem definidas. Nesta atividade, buscamos então fortalecer a propriedade de semelhança trabalhando com retângulos e triângulos, provocando os alunos no sentido de vislumbrar quando havia semelhança ou não.

No tocante a questão 1, a maioria dos alunos respondeu que dois quadrados quaisquer são sempre semelhantes, mas justificou apenas em relação às medidas dos lados, desconsiderando a questão dos ângulos. Já na questão dos retângulos, o fato deles terem a mesma forma dificultou a compreensão de os mesmos poderem não apresentar semelhança. Mais uma vez os ângulos foram descartados. Na correção das questões, atentamos para que os alunos se baseassem na definição de semelhança construída para determinar as respostas à pergunta.

Mais uma vez um princípio da Aprendizagem Significativa Crítica aparece aqui: o princípio da aprendizagem pelo erro. Este princípio afirma que “*o primeiro elemento que o indivíduo deve criticar tem que ser a si próprio. E, partindo do reconhecimento do erro, por meio de um compartilhamento de significados, conduzirmos o estudante ao significado daquele conceito tratado de maneira diferente*”. Quando colocado diante da definição construída de semelhança, os alunos foram levados a comparar a resposta dada com a definição e verificar se deveriam mantê-las, substituí-las ou completá-las.

Segundo POSTMAN (1996, p.19) *sabemos coisas, mas muito do que sabemos está errado, e o que o substituirá poderá também estar errado. Mesmo aquilo que é certo e parece não necessitar correção é limitado em escopo e aplicabilidade* (Postman, 1996, p. 69). Assim entendemos que a atividade contribuiu para esta compreensão.

A questão 2 foi conduzida no sentido de proporcionar a diferenciação progressiva entre congruência e semelhança. Esta questão foi considerada fácil pelos alunos pelo fato de afirmarem que o fato de os triângulos congruentes terem o mesmo tamanho (medidas iguais) facilitou entendimento da relação entre semelhança e congruência. Isto é reconciliação integrativa. Então perguntamos quando duas figuras eram semelhantes, mas não congruentes. Alguns não conseguiram relacionar a pergunta feita com a questão. Neste caso, isto ocorreu pelo fato do processo da diferenciação progressiva não estar num ritmo maior que de outros alunos que foram capazes de apresentar o fato de figuras semelhantes terem mesma forma e diferentes tamanhos (medidas distintas). Estes já conseguem vislumbrar os dois conceitos separadamente.

As questões 3 e 4 eram aplicações do conceito de semelhança e foram resolvidas sem maiores dificuldades pelos alunos. Destacamos aqui o fato de os alunos desconhecerem a aplicação de semelhança e de proporcionalidade na ampliação e redução de fotos. Uma das grandes críticas feitas ao modelo chamado tradicional de educação é a de o aluno ser considerado um mero receptor de informações (que na maioria das vezes, não transportam nenhum conhecimento).

Isto é reflexo de práticas de ensino descontextualizadas, fragmentadas e distantes da realidade do aluno. Algo aparentemente banal como um processo de ampliação e redução de fotos, que é o princípio da homotetia. Homotetia é a operação

gráfica que permite desenhar figuras semelhantes com uma particularidade: os lados semelhantes são paralelos. Por exemplo:

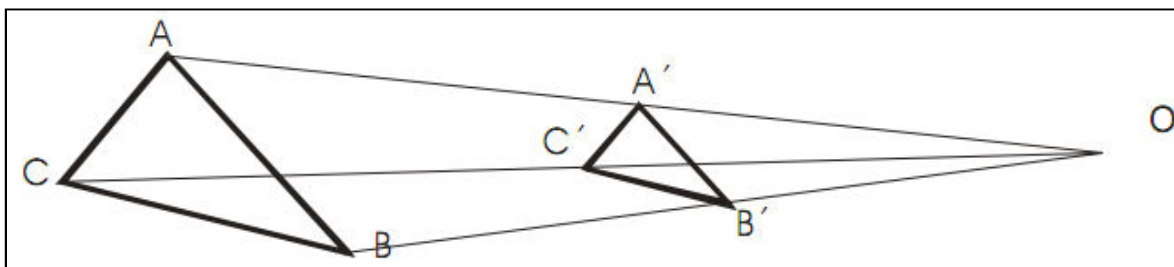


Figura 6 Exemplo de homotetia com triângulos.

O problema acima descrito ocorre por causa da apresentação da matemática como algo essencialmente técnico e tendo como fim a realização de um exame. Contextualização não tem sido o forte do ensino. Precisamos buscar apresentar a matemática como construção humana, como algo que, a partir de seus conceitos, como o de semelhança entre figuras geométricas, dá condições do aluno interagir (agir e reagir) criticamente na sociedade onde está inserido. Outro campo de competências a serem desenvolvidas no ensino de matemática preconizado pelos PCNEM (1999) é o campo da contextualização sócio-cultural, onde, entre as habilidades envolvidas, visam “desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e na intervenção do real” (p. 259).

Ainda sobre esta lista de atividades, queremos apontar algo sobre a importância da questão 5. Aqui passamos a avaliar, a partir do olhar da Teoria da Aprendizagem significativa Crítica, a concepção dos alunos no que diz respeito às relações entre os conceitos estudados. Relembramos, na questão, os conceitos estudados até o momento. Primeiramente, pedimos, para, de maneira escrita, eles fizessem a relação entre esses conceitos. Depois eles deveriam construir um diagrama que explicitasse o que escreveram. O destaque na análise dessas atividades foi o fato deles não apresentarem um bom desenvolvimento na escrita (fato de eles refletirem pouco ou quase nada sobre a própria aprendizagem), mas os diagramas foram bem mais claros e corretos nas relações entre os conceitos.

A figura abaixo mostra o diagrama feito pela aluna A18. Observamos que as linhas ligam conceitos que realmente se relacionam. É importante verificar a relação entre os subsunçores e os conceitos seguintes para concluir que é importante atentarmos para o valor do conhecimento prévio como importante instrumento para o processo de ensino e aprendizagem. Ressaltamos que, neste ponto, não falamos nada sobre mapa conceitual, instrumento usado para avaliação em muitos casos. O foco aqui, consistiu em uma representação diagramada de como eles observavam as relações entre os conceitos. Em outros casos, eles sequer apresentaram a escrita, fazendo apenas a representação pictórica.

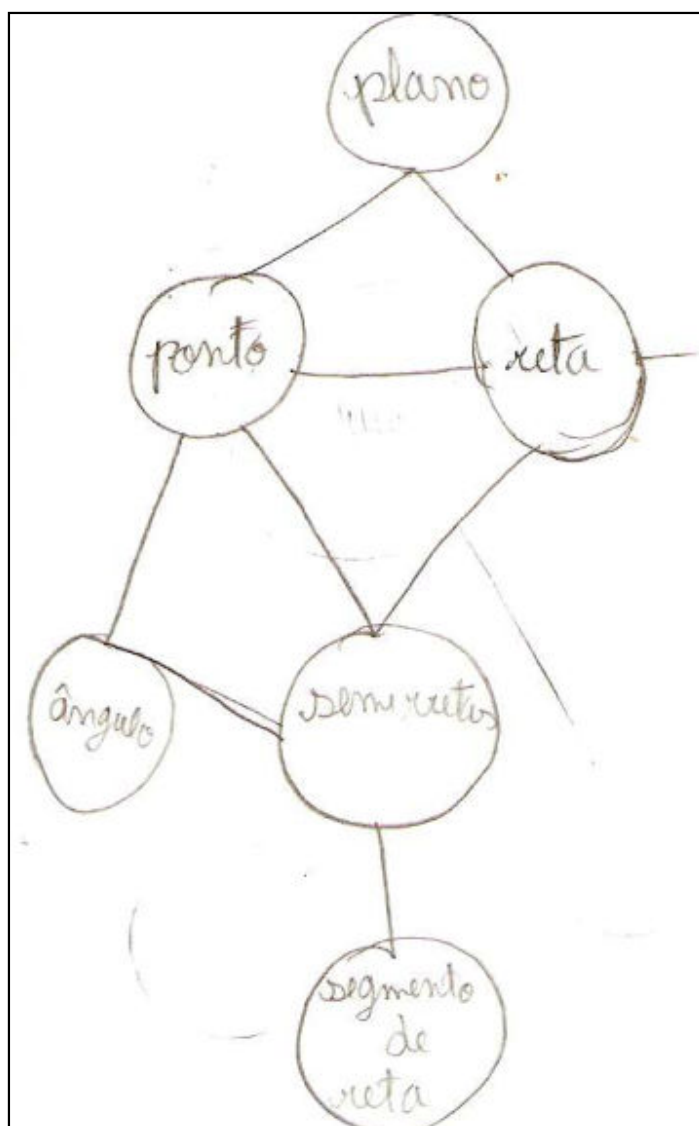


Figura 7. Diagrama de relação entre conceitos, desenvolvido por um aluno.

ENCONTRO 9

Iniciamos neste encontro o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Pedimos que, numa folha de papel quadriculado, eles construíssem um triângulo retângulo de lados 6, 8 e 10, tomando como unidade a medida do lado da quadrícula da folha. Um aspecto da folha está copiado abaixo:

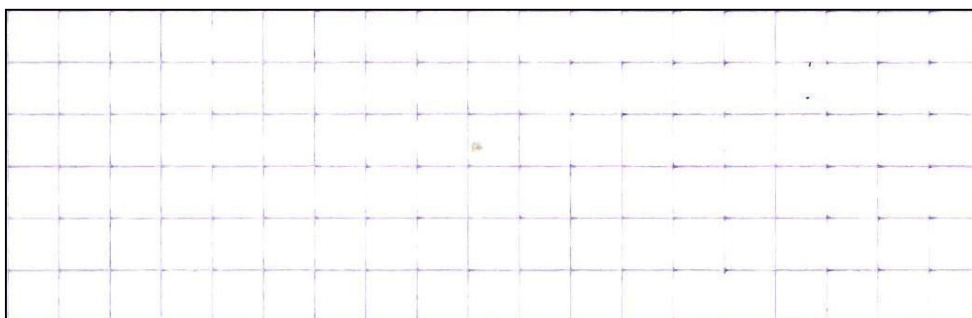


Figura 8. Aspecto da folha de papel quadriculado.

Em seguida, deveriam destacar, dentro do triângulo, um triângulo retângulo com medidas menores: 3, 4 e 5. Uma figura obtida foi a seguinte:

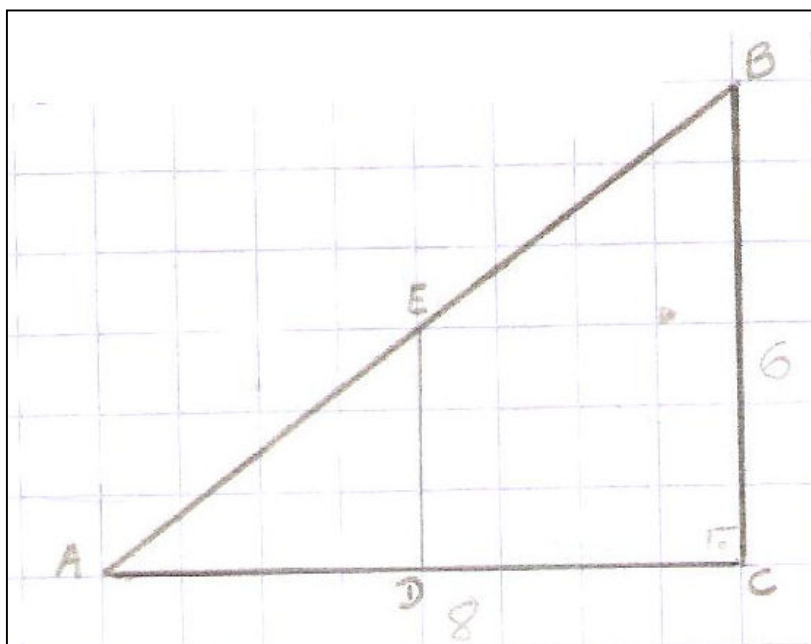


Figura 9. Triângulo retângulo construído por aluno

Em seguida a construção, foi verificada a semelhança entre os triângulos ABC e AED. Para apresentar as razões trigonométricas no triângulo retângulo, pedimos que os alunos calculassem as razões entre as medidas dos lados BC e AC. Depois a razão entre as medidas dos lados ED e AD. Apresentamos assim a tangente. De maneira semelhante apresentamos o seno e o cosseno. Para justificarmos esta atividade, recorreremos a Teoria da Aprendizagem Significativa. Os subsunçores aqui são: ângulos, medidas de um segmento de reta e semelhança de triângulos. O novo conceito a ser aprendido a partir da mobilização destes é o das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Passemos então a analisar este encontro.

Análise do encontro 9

Como este foi um encontro instrumentalizado pelas nossas orientações, na parte de desenho não apresentou dificuldades para os alunos. O fato a destacar foi quando um aluno perguntou como faria para traçar a hipotenusa de 10 unidades de comprimento. Pedimos então que traçassem os catetos de 6 e 8 unidades, e em seguida, traçassem a hipotenusa e, com o auxílio de um papel, marcassem o comprimento da hipotenusa e verificassem colocando sobre uma das linhas horizontais ou verticais da folha, confirmando a medida indicada.

Após estas atividades, indicamos aos alunos que calculassem as razões indicadas anteriormente. Calculando as razões entre BC e AC e entre ED e AD, encontraram valores iguais. Perguntados sobre motivos pelos quais isto acontecia, não conseguiram perceber. A partir desta condição, pedimos que verificassem a relação entre as medidas dos lados correspondentes dos triângulos. Observaram facilmente a proporcionalidade e concluíram a semelhança de triângulos. Sobre a relação entre o ângulo do vértice A e os dois triângulos a maioria respondeu que o ângulo pertence aos dois, sendo comum a ambos.

A partir daí, indicamos que as razões calculadas correspondiam à tangente do ângulo \hat{A} . De maneira semelhante, apresentamos o seno e o cosseno do ângulo \hat{A} e mostramos que estas relações também valem para o outro ângulo agudo do triângulo retângulo. O fator preponderante para a compreensão destas razões foi usar os conceitos antes estudados para ancorar estes novos temas, bem como o aspecto

gráfico do trabalho, pois a construção da figura faz com que as razões calculadas tenham sentido por fazer alusão a logo por eles construídos. Aqui o aluno passa de perceptor para perceptor/representador, isto é, ele passa não apenas a perceber o que está aprendendo, como tem capacidade de representá-lo. Mais uma aspecto da teoria da aprendizagem significativa crítica.

ENCONTROS 10, 11 E 12

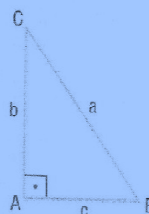
Nestes encontros apresentamos uma lista de exercícios sobre o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Separamos a lista em três partes:

Dado o triângulo ABC, retângulo em A, complete o quadro sobre as informações acerca do triângulo:

- a:
- b e c:
- \hat{A} :
- B e C:
- Relação entre os lados (relação de Pitágoras):
- Relação entre os ângulos:
- Relações entre lados e ângulos:

$$\text{sen } B = \quad \text{cos } B = \quad \text{tg } B =$$

$$\text{sen } C = \quad \text{cos } C = \quad \text{tg } C =$$



O que é possível afirmar acerca do seno e cosseno dos ângulos B e C?

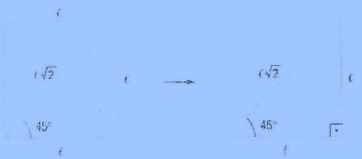
O que é possível afirmar acerca da tangente dos ângulos B e C?

Quadro 5. I Parte da atividade sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo


A primeira parte teve o objetivo de focar a compreensão das razões trigonométricas, bem como a relação entre as razões dos ângulos agudos do triângulo.

Você vai construir uma tabela de valores muito importantes; para isso:


a) Calcule $\text{sen } 45^\circ$, $\text{cos } 45^\circ$ e $\text{tg } 45^\circ$ utilizando o triângulo retângulo destacado do quadrado abaixo:



b) Calcule $\text{sen } 30^\circ$, $\text{cos } 30^\circ$ e $\text{tg } 30^\circ$ utilizando o triângulo retângulo destacado do triângulo equilátero abaixo:



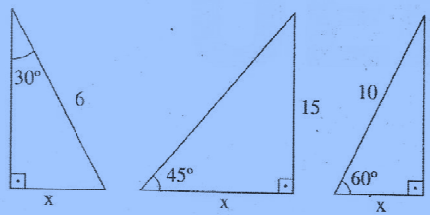
c) Calcule $\text{sen } 60^\circ$, $\text{cos } 60^\circ$ e $\text{tg } 60^\circ$ utilizando o triângulo retângulo destacado do triângulo equilátero abaixo:



	45°	30°	60°
sen			
cos			
tg			

Resolva os seguintes problemas:

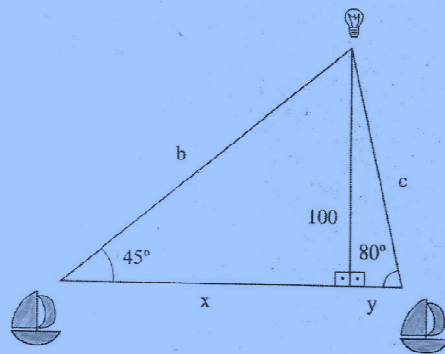
1) Calcule o valor de x nos triângulos seguintes:



Quadro 6. II Parte da atividade sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo

Esta segunda parte encaminha para o cálculo das razões trigonométricas referentes aos ângulos de 30° , 45° e 60° . Na imagem acima, já aparece a 1ª questão da 3ª parte, que vai constar das aplicações das raízes trigonométricas.

- 2) Uma escada está encostada numa parede formando um ângulo de 60° com o chão. Se a escada tem 20 m de comprimento, que altura ela atinge?
- 3) Para obter a altura de uma torre, um topógrafo coloca o teodolito a 200 m da base da mesma, vendo o topo da torre sob um ângulo de 30° .
- Pesquise e escreva sobre o que faz um topógrafo e o que é teodolito.
 - Sabendo-se que a luneta do teodolito está a 1,70 m do solo, qual é aproximadamente a altura da torre?
- 4) Um avião levanta vôo sob um ângulo constante de 30° . Quando atingir 200 m, qual o espaço que será percorrido?
- 5) Um observador, a bordo de um barco em movimento retilíneo, mede, num certo instante, o ângulo da trajetória do barco e uma linha imaginária que o liga a um farol. Algum tempo depois, faz uma nova medida. Sabendo que as medidas obtidas foram, respectivamente 45° e 80° e que entre os instantes de cada medida a menor distância que o barco esteve do farol foi de 100 m, calcule:
- A distância percorrida pelo barco entre os instantes das suas medidas;
 - A distância entre o barco e o farol nos instantes da primeira e da segunda medida.



Quadro 7. III Parte da atividade sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo

Análise dos encontros 10, 11 e 12

I Parte – a questão era bem teórica e cobrava do aluno a relação correta entre as medidas dos lados para compor a razão trigonométrica do ângulo pedido. O problema encontrado pelos alunos foi o de não compreender a parte simbólica e cobravam números, pois assim seria mais fácil. As relações entre o seno e o cosseno e as relações entre as tangentes dos ângulos agudos foram vistos facilmente, mas a relação desse fato com o fato dos ângulos serem complementares não foi percebida de maneira tão rápida. Para movimentar os conceitos já adquiridos (subsunçores), provocamos as seguintes perguntas:

- a) Qual a soma das medidas dos dois ângulos agudos? Por que?
- b) Quando dois ângulos tem medidas somando 90° como eles são chamados?

Estas duas perguntas em si podem ser considerada como organizadores prévios, pois elas fazem movimentar a estrutura cognitiva do aprendiz para mobilizar os subsunçores (ângulos complementares e soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo) e relacioná-los com o tópico estudado.

II Parte – Para determinar o seno, o cosseno e a tangente dos chamados ângulos notáveis (30° , 45° e 60°), os alunos não apresentaram problemas quanto à utilização correta dos lados do triângulo para calculá-las. O problema encontrado foi a dificuldade deles de trabalharem a divisão de frações e as operações com radicais, especialmente a racionalização de denominadores. Para isto, fomos acompanhando a turma de grupo em grupo, explicando como funcionava em cada caso, pois entendemos que neste caso, seria melhor do que uma exposição formal.

Esta preocupação decorre da necessidade de trabalhar os conhecimentos prévios que deveriam ser desenvolvidos pelos alunos em séries anteriores e não o foram, sobre temas do ensino fundamental e só vem justificar e confirmar os nossos direcionamentos seguindo a fundamentação teórica de apresentar todos os subsunçores necessários ao entendimento adequado de trigonometria, mesmo tendo a maioria deles sido trabalhados no ensino fundamental. Observamos nas nossas intervenções junto aos grupos, que muitos diziam estar entendendo e compreendendo, mas não percebíamos firmeza em suas palavras. Percebemos aqui a necessidade de levantarmos o conhecimento prévio dos alunos e o que ele já tem aprendido sobre o assunto

ministrado. Entendemos também a necessidade de tempo para os alunos refletirem e madurecerem sobre os conhecimentos trabalhados, e este processo para muitos alunos pode ter um ritmo mais demorado. É preciso tempo, investimento e paciência.

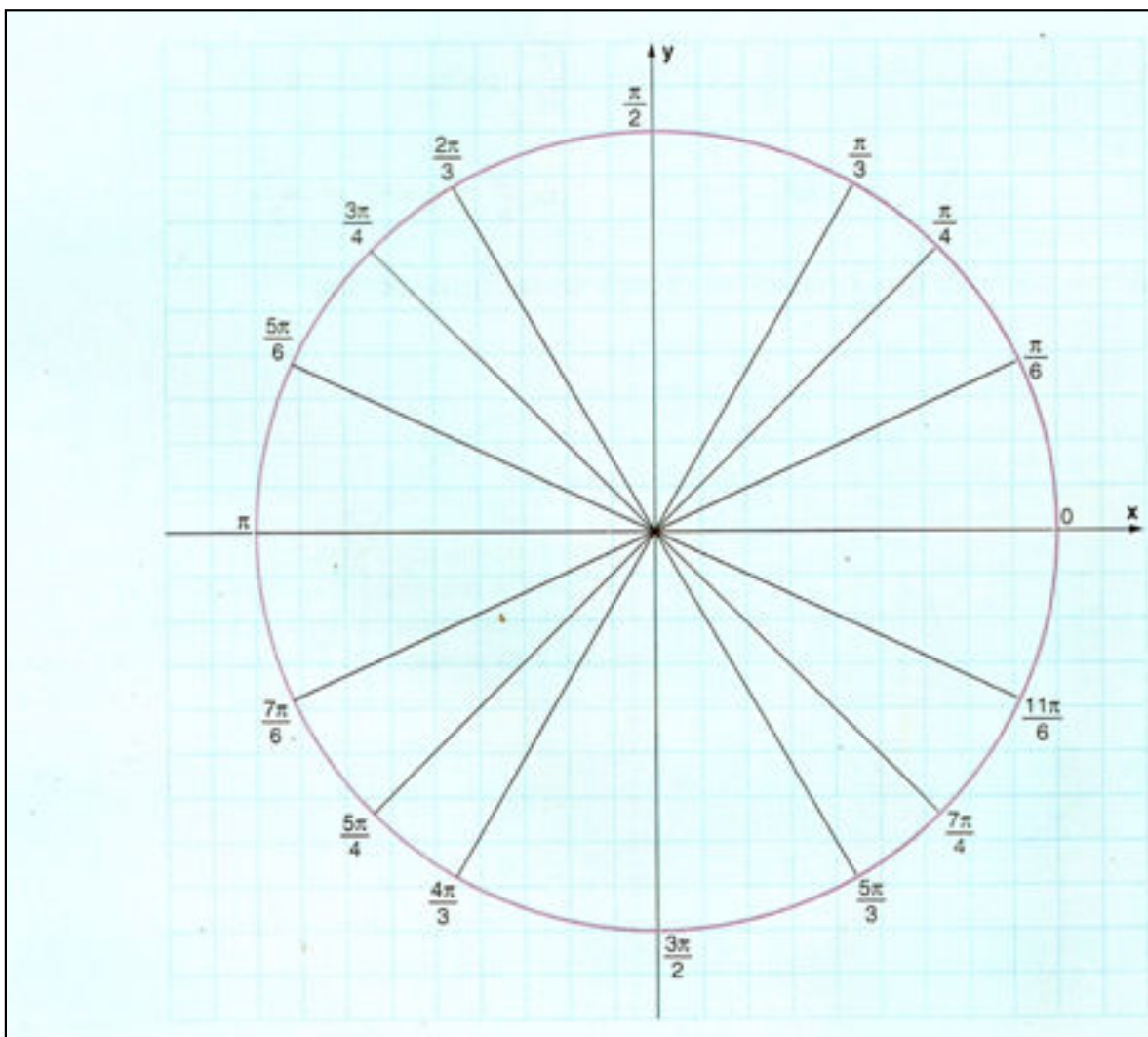
III Parte – Esta foi a parte mais complicada do trabalho, pois mesmo compreendendo sobre as razões trigonométricas e sabendo organizar os problemas, os alunos não sabiam desenvolver os cálculos apresentados. Registramos depoimentos indicando um certo desespero, dizendo que não sabiam fazer aquelas contas.

Aqui cabe uma nota de registro sobre o ensino de matemática centrado em algoritmos e procedimentos de cálculo. Prioriza-se isto, muitas vezes, em nome de um chamado rigor matemático. O que vemos, porém é, ao final, nem os conteúdos com suas intermináveis contas são aprendidos, nem a matemática é apresentada como algo contextual. E o prejuízo é somente do aluno. No sentido da aprendizagem significativa crítica, a atividade teve dois resultados extremamente positivos:

- a) A compreensão do conceito ficou clara para os alunos;
- b) A compreensão dos alunos acerca de suas próprias dificuldades foi algo que começou a ser despertado em alguns. Isto é um fator importante para aprendermos. Ter consciência do que não sabemos e buscarmos crescer. Este é o princípio da desaprendizagem levantado na Visão Crítica da Aprendizagem significativa.

ENCONTRO 13

Neste encontro apresentamos as noções de arcos e ângulos. Como a parte de ângulo já tinha sido bastante trabalhada, voltamos ao tema da circunferência, já a fim de caminha para o ciclo trigonométrico. Partimos, então, para apresentar o conceito de radiano, como outra unidade de medida de arcos e ângulos. Lançamos mão de uma aula expositiva dialogada. Apresentamos a relação entre graus e radianos e para aplicar, trabalhamos direto numa circunferência na qual eram apresentados os valores dos arcos em radianos e foi pedido para os alunos transformarem estas medidas para grau.



Quadro 8. Atividade sobre arcos e ângulos

Análise do encontro 13

Este se mostrou um dos encontros mais tranquilos, apesar de trabalhar um dos conteúdos considerado de grande dificuldade no ensino médio: a noção e a utilização do radiano como medida de ângulo. Só tivemos problemas ao apresentar a definição de radiano como sendo um arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência que o contém. São muitos elementos envolvidos nesta definição, mas o fato de termos trabalhado os mesmos antes facilitou a compreensão. Na atividade não houve dificuldades, pois tratava-se apenas de uma conversão de unidades. A partir daqui, seguimos para apresentar aos alunos o ciclo trigonométrico.

ENCONTRO 14

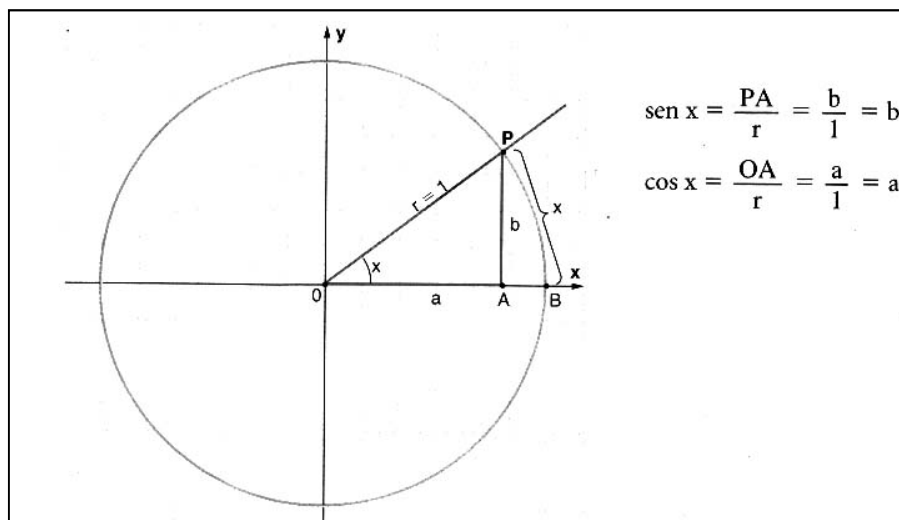
Neste encontro apresentamos a circunferência trigonométrica. Aqui, mais uma vez enfatizamos a necessidade e a importância dos conceitos subsunçores: circunferência e seus elementos, ângulos.

Análise do encontro 14

Ao mostrarmos o ciclo trigonométrico como uma circunferência orientada de raio unitário, o problema dos alunos foi em conceber uma circunferência orientada. Fizemos então a analogia com a reta orientada para prosseguirmos. Trouxemos a atividade do encontro anterior, onde, a partir da figura na qual eles trabalharam a questão de arcos e ângulos, trabalhamos a idéia dos quadrantes, da origem dos arcos e o sentido negativo da circunferência trigonométrica. Caminharemos agora para a parte das razões trigonométricas no ciclo.

ENCONTRO 15

Estudamos seno e o cosseno no ciclo trigonométrico. Por meio das razões no triângulo retângulo, verificamos como determinar, no ciclo, o seno e o cosseno de um arco. Subsunçores presentes nestas atividades são: teorema de Pitágoras, razões trigonométricas no triângulo retângulo, circunferência e seus elementos. Importante mostrar que essa dinâmica destes conceitos é importante e mostra a matemática como algo não estático.



Quadro 9. Seno e cosseno no ciclo trigonométrico

Análise do encontro 15

Formalização de conceitos não é algo com que os alunos estão acostumados. Para eles o processo para se formalizar um conceito é perda de tempo. Perguntam sempre por que não mostrar o resultado logo de uma vez. E não foi diferente neste caso. Mas, ao mostrar as relações com tudo o que já tínhamos estudado e a visualização gráfica do processo, eles foram convencidos da importância de tal processo. Chegamos então a última parte de nosso trabalho.

ENCONTRO 16

Chegamos enfim, na parte das funções trigonométricas. Para definir a função seno e a função cosseno, partimos de algumas perguntas:

- a) Todo arco tem seno e cosseno definidos?
- b) Algum arco tem mais de um valor para o seno ou o cosseno?

As perguntas acima levam a definição de função e por meio da relação de arcos com seus respectivos senos e cossenos, estabelecemos as funções $f(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = \text{cos } x$. Para estudarmos as características destas funções, usamos a seguinte atividade:

1 – Preencha a tabela abaixo com os valores do seno e do cosseno dos arcos indicados

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x					
cos x					

2 – Com os valores acima, construa o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$.

3 – Com os valores acima, construa o gráfico da função $f(x) = \text{cos } x$.

Em seguida, determine os seguintes elementos das funções:

Domínio; Imagem; Valor máximo; Valor mínimo

Período

Quadro 10. Atividade sobre função seno e função cosseno

A construção do gráfico de uma função nos permite perceber todas as informações acerca desta função. Isto é um instrumento de grande valia, pois os elementos da função podem ser vistos em sua dinâmica e não apenas presa a uma fórmula ou a um procedimento algorítmico.

Análise do encontro 16

A atividade descrita acima não é tão simples quanto parece. Especialmente por demandar tempo (algo exíguo em nosso caso) e levou mais de um encontro para ser completa. Mas vamos a algumas considerações. Mais uma vez fazendo ligação entre as atividades, partimos da sistematização de seno e cosseno no ciclo trigonométrico feita anteriormente para que os alunos respondessem a questão 1. As dificuldades por eles apresentadas foram a de não perceber facilmente, por exemplo, que o valor do

seno de $\frac{\pi}{2}$ é zero. Esta dificuldade resulta no fato dos alunos não compreenderem o plano cartesiano, especialmente quando marcar pontos onde uma das coordenada tem valor igual a zero.

A questão 2 apresentou a dificuldade apresentada na 1 e ainda mais pelo fato de, no eixo horizontal, aparecerem os valores dos arcos. Onde então, sem ferir a escala, marcar o ponto correspondente a π ? Neste caso, como, aritmeticamente, este valor corresponde ao comprimento de um arco de π rad. Dentro dos objetivos voltados para o ensino médio, convencionamos que tal comprimento corresponde a aproximadamente 3,14, mas após ter discutido sobre a questão da aproximação. Construído, então o eixo, passamos a marcar os pontos no plano cartesiano e traçar o gráfico.

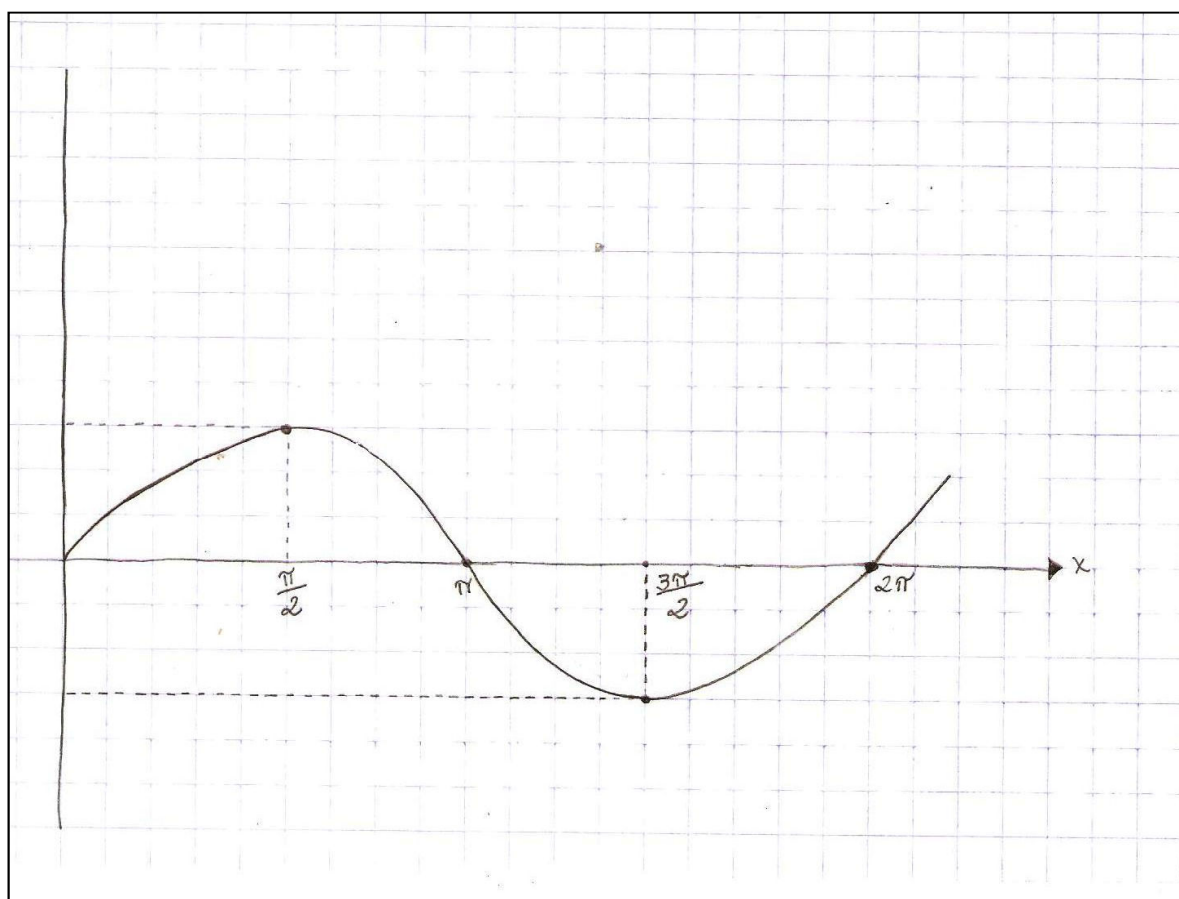


Figura 10. Gráfico feito por aluno

Observe que no gráfico acima, o aluno não apresentou uma escala para o eixo y, Mas aparentemente o gráfico não tem erros. O mesmo processo foi usado para a

construção do gráfico da função cosseno. De novo a idéia dos subsunçores aparecem aqui. Arcos e ângulos, seno e cosseno no ciclo trigonométrico são passos para a definição da função e da construção do gráfico.

Após a construção dos gráficos, pedimos aos alunos que apresentassem as informações acerca das funções. É impressionante como podemos observar praticamente todas as informações sobre a função partir do seu gráfico. A partir da informação sobre o que representava cada termo, os alunos apresentavam as respostas com base no gráfico. Os alunos apresentaram dificuldade em fazer a associação entre as extremidades dos arcos trigonométricos e os números reais a fim de determinar o domínio da função, mas a partir do gráfico, esta relação é facilitada. De maneira geral, os gráficos das funções trigonométricas são o último ponto trabalhado no estudo das mesmas. A investigação de propriedades das funções trigonométricas é facilitada ao partirmos do gráfico e há aí uma maravilhosa possibilidade de diálogo e interação entre aluno e professor no caminho do aprendizado.

Ao chegarmos neste ponto, por questão de calendário da escola, precisamos encerrar nossa intervenção, deixando assim, de trabalhar o aspecto gráfico da função tangente. Mas entendemos que o conteúdo trabalhado até então foi suficiente para analisarmos e tecermos algumas considerações. Assim, passamos para a aplicação de um questionário de auto-avaliação, no último encontro.

ENCONTRO 17

Neste último encontro, aplicamos um questionário de auto-avaliação, a fim de aferir, em alguma medida, o entendimento dos alunos acerca de seu próprio conhecimento. A aprendizagem significativa crítica aponta que o primeiro a receber críticas do aluno deve ser ele próprio.

QUESTIONÁRIO DE AUTO-AVALIAÇÃO

1 – Você consegue relacionar os conceitos estudados com fenômenos reais?

2 – Você consegue relacionar os conceitos de ângulos, triângulos, circunferência e funções à construção do conceito de funções trigonométricas? Como?

3 - Como você dirimiu a maioria de suas dúvidas? Com o professor, com os colegas ou estudando sozinho?

4 – O seu nível de compreensão sobre funções trigonométricas é bom, regular ou ruim? Justifique.

5 – Baseado nas suas respostas anteriores produza um texto, citando os principais pontos dos tópicos estudados, sua importância e sua aplicação nas mais diversas áreas. Cite ainda os pontos nos quais você teve facilidade de aprender, bem como os que se apresentaram mais complicados, justificando cada ponto.

Quadro 11. Questionário de auto-avaliação

Análise do questionário de auto-avaliação

A questão 1 tinha o objetivo de fazer o aluno pensar não somente em elencar alguns fenômenos, mas em verificar e questionar se o que ele estudou tem utilidade pra si. Algumas respostas foram do tipo: “sim (A3)”. O sujeito A8 afirmou que “pode ser visto na internet, antenas parabólicas, rádios”. Analisando esta resposta no campo da aprendizagem significativa crítica, é importante para o aluno pensar no que está estudando como algo aplicado ou não, e o nível de importância dessas aplicações em seu cotidiano.

Na questão 2, confirmamos o apontado nas etapas. Ainda que não exponham de forma eloquente, utilizando um bom vocabulário, todos sabem das relações entre os conceitos e conseguem, a seu modo, destrinchar o caminho adotado no processo. Apesar das atividades terem sido feitas em grupo, a maioria disse que dirimiu suas dúvidas com o professor. Neste caso, mostra-se clara a relação existente de transmissão de conhecimento e que a palavra do professor vem revestida de autoridade, pois em muitas ocasiões, um colega dizia a coisa certa, mas só satisfazia a

palavra do professor. Na questão 4, algumas respostas apontam para uma conclusão de que ainda há muito por fazer. Algumas respostas:

A8: “Regular, porque ainda tenho dificuldade em alguns pontos”.

A10: “Regular, por que não consegui compreender todo o assunto”

Alguns enfatizaram a importância das atividades:

A9: “Bom. Aprendi mais com as atividades feitas na sala”.

Como os alunos, de maneira geral, não são estimulados a refletir sobre seu aprendizado, o questionário mostrou-se uma atividade um tanto quanto conflituoso, pois muitos estavam pensando quais seriam as respostas corretas a escreverem. Colocamos a necessidade de responderem o questionário de acordo com a sua interpretação, que como não eram obrigados a se identificarem deveria ser o mais próximo possível do que achavam. Desta forma, pelas respostas dadas, chegamos à conclusão de que o trabalho foi positivo. Apresentou situações que permitiram ao aluno desenvolver processos visando superar as dificuldades, associar os conhecimentos novos presentes na trigonometria aos presentes na sua estrutura cognitiva e assim realizarem as aprendizagens pretendidas. Estes itens serão tratados no próximo capítulo, onde faremos as nossas considerações.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Objetivo deste trabalho foi elaborar, aplicar e verificar os alcances e as limitações de uma proposta pedagógica sobre o ensino de trigonometria para uma classe de ensino noturno baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa e que contribuísse para a aquisição significativa e crítica dos conceitos estudados. Este era o objetivo geral, que foi subsidiado pelos objetivos específicos no sentido de caminharmos metodologicamente ao proposto.

O trabalho deu-se em duas etapas visando a construção de um instrumento potencialmente significativo: a proposta metodológica elaborada a partir da Teoria da Aprendizagem Significativa e, em seguida a sua aplicação e o levantamento de dados para análise, a partir dos quais tecemos algumas considerações à guisa de conclusão e síntese, tendo em vista os resultados obtidos.

As leituras iniciais nos levaram a elencar alguns temas como conhecimentos prévios importantes para o aprendizado de trigonometria. A estes conhecimentos, Ausubel dá o nome de “subsunçores”. Estes conceitos foram:

- ✓ Entes fundamentais da geometria
- ✓ Circunferência e seus elementos
- ✓ Ângulos
- ✓ Triângulos
- ✓ Semelhança de Triângulos

Os temas acima foram desenvolvidos a partir de atividades por nós orientadas e privilegiaram a produção dos alunos no processo de resolução. A proposta que elaboramos se baseia na construção do conhecimento pelo aluno o que exige dele uma constante mobilização, tanto efetuando tarefas que mobilizem os seus conhecimentos prévios e demandem novos estabelecendo pontes entre eles. Esta pretensão vai de encontro à postura tradicional do professor “transmitir” o conhecimento pronto por meio da aula expositiva e, a implantação desta nova perspectiva exigir uma constante busca de motivar o aluno.

Assim, as atividades foram precedidas de motivadores que mobilizassem o aluno e na sua resolução, procurando-se sempre manter a motivação inicial de forma a levar o aluno ao seu término e a refletir sobre os conhecimentos desenvolvidos.

No quarto encontro, um dos alunos expressou a seguinte frase: “*Mais atividade pra gente fazer. De novo?*”. Um depoimento como este nos leva a concluir a necessidade de superar hábitos em que o aluno espera um trabalho de ensino centrado unicamente no professor e não desenvolvem uma prática voltada para a autonomia.

Outro aspecto observado foi o de que constantemente éramos perguntados se não haveria tarefa ou exercício para casa valendo ponto. Este era o costume: aula expositiva tradicional e tarefas de casa. Colocamos então a questão de eles serem alunos do ensino noturno que, de maneira geral, não têm tempo ou condições durante os outros turnos para dedicar aos estudos escolares. Assim, mobilizamos todos para se empenhar no trabalho de sala de aula, dando-lhe a prioridade e a importância que eles manifestaram sobre as aprendizagens escolares ao responderem o questionário inicial sobre o perfil da turma.

Desse modo, os procedimentos seguidos quando da aplicação da proposta incentivaram os alunos a pensarem criticamente, por meio de mecanismos simples, e assim levantarmos objetos potencialmente significativos e que, de maneira crítica, levem os alunos a refletirem sobre seu próprio aprendizado. AUSUBEL (1980), afirma:

O professor pode somente apresentar idéias de modo tão significativo quanto possível. A tarefa de organizar novas idéias num quadro de referência pessoal só pode ser realizada pelo aluno. Conclui-se, portanto, que idéias impostas aos alunos ou aceitas de modo passivo e não crítico não poderão ser significativas no verdadeiro sentido da palavra (p. 335).

As atividades iniciais relativas aos subsunçores mostraram-se de extrema importância, pois a maioria deles jamais tinham estudado os conceitos básicos de geometria nem trabalhado construções geométricas usando compasso e transferidor. O único instrumento que eles pensavam saber usar era a régua milimétrica. A questão aqui não era necessariamente os traçados, mas sim as medidas, visto que eles não desenvolveram anteriormente noções de grandezas e medidas.

Como pensar então, em funções trigonométricas, se o básico não era nem dominado, e por vezes, desconhecido deles? No nosso entender, a Teoria da Aprendizagem Significativa responde muito bem a esta questão, pelo fato da mesma priorizar a hierarquia e a relação entre conceitos. Sendo assim, é impensável ministrar trigonometria sem verificar quais os conhecimentos prévios possuídos pelos alunos. E caso não os possuam, eis aí (assim como foi em nosso trabalho) uma bela oportunidade para apresentar aos alunos novos conhecimentos.

Quanto a questão da viabilidade de implantar a proposta realizada em salas de aula de ensino noturno dois aspectos devem ser destacados: 1. O custo de implantar a proposta é acessível a maioria dos alunos e podem ser complementados pelas escolas. Os instrumentos empregados e o material a ser utilizado para a realização das atividades é de baixo custo; 2. A demanda de um maior tempo para realização de atividades em sala de aula. Esta crítica surge a partir da postura adotada nas nossas escolas de completar o programa seguindo rigorosamente um livro texto. Estas ideias deixam de fazer sentido se observarmos às características específicas dos alunos do ensino noturno, a carga horária em sala de aula, os livros textos disponibilizados pelas escolas, os conhecimentos trazidos por estes alunos e as suas aspirações, entre outros aspectos.

Na nossa proposta consideramos a necessidade de selecionar criteriosamente os conteúdos a serem abordados e a necessidade de conhecer profundamente os conhecimentos dominados pelos alunos e aqueles que eles necessitam desenvolver ou ampliar para tornar significativos os conhecimentos novos. Dessa forma possibilitamos momentos de aprendizado e de crescimento dos alunos, que em várias ocasiões deram indícios de estarem desenvolvendo aprendizagens, como também para o professor, agora não se limitando a ser um transmissor de conhecimentos copiados, mas definitivamente um facilitador e mediador de aprendizagem.

Após as atividades com os subsunçores, caminhamos para o trabalho com trigonometria propriamente dita. Como dissemos antes, era extremamente importante todo esse proceder a fim de examinarmos como, no desenvolver do trabalho, os alunos relacionam os conceitos estudados. Por exemplo, como eles relacionam ângulos e triângulos, semelhança de triângulos e razões trigonométricas.

Assim foram desenvolvidas as atividades sobre:

- Razões trigonométricas no triângulo retângulo
- Ciclo trigonométrico
- Funções trigonométricas

Decorrente da adequação dos subsunçores a realidade dos alunos e ao conhecimento novo a ser trabalhado, às atividades específicas sobre trigonometria foram levada a bom termo, pois as relações entre os conceitos eram bem melhor estabelecidas. Houve algum problema quando da abordagem do traçado de figuras no plano cartesiano que foi superado com uma rápida revisão. Isto foi observado pelo fato de avaliarmos o trabalho também à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa.

Diante do exposto acima, consideramos importante citar os seguintes pontos para continuidade de reflexão sobre este trabalho:

- 1) A identificação e o trabalho com os conhecimentos prévios (subsunçores) apontam para um caminho de reflexão e de mudança da atitude do aluno e do professor no processo de ensino e aprendizagem;
- 2) A proposta aplicada favoreceu e envolvimento do aluno na construção de seu conhecimento e no desenvolvimento de atitudes positivas como ação diante de problemas, compartilhamento de dúvidas e opiniões e vislumbre de percepções futuras; Segundo KLEIN (2009)

é possível, pela metodologia utilizada, contemplar tantos os aspectos conceituais, procedimentais e de atitude, o que só vem a enriquecer o ensino e fazer da aprendizagem, também, um momento de satisfação e prazer (p. 95).

- 3) A avaliação, neste método, é um processo contínuo de reflexão, no qual professor e alunos se vêem como agentes avaliadores e avaliados. Os alunos, refletindo sobre seu aprendizado, e o professor refletindo sobre sua prática.

Não poderia deixar de citar as limitações deste trabalho. O que nos deixa tranquilos para citar estes pontos é o fato de termos desenvolvido este trabalho em uma turma completa, característica da intervenção didática, em seus horários reais de aula e com todos os problemas reais. Entre eles destaco a questão tempo. Longe de querer apresentar escusas, mas é impossível tratarmos adequadamente qualquer aspecto metodológico sem tempo para desenvolvê-lo. Torna-se fundamental afirmar que muitos dos momentos de dificuldade dos alunos seriam melhor dirimidos caso houvesse mais tempo para serem trabalhadas. Isto nos leva a pensarmos numa continuação para qual o fator tempo seja melhor considerado. Entendemos também que nenhuma metodologia, por melhor que seja, seja capaz de resolver os problemas surgidos no multifacetado universo da ala de aula. Sendo assim, tivemos alunos que caminharam pouco em relação a outros. Isto leva necessariamente a um aprimoramento do trabalho a fim de abarcar a maioria dos alunos, considerando os diferentes ritmos de aprendizado.

Esta pesquisa, por natureza, encerra um ciclo neste momento, mas sua discussão não pode de maneira nenhuma findar-se aqui. Seus resultados apontam que é possível um direcionamento diferente para o ensino de matemática que promova um aprendizado que seja significativo e crítico para o aluno, sobre sua realidade e sobre a matemática. Nas palavras de KLEIN (2009):

Contribui para uma educação inovadora humana, que desperta, no estudante, o interesse em participar da aula, transforma a sala de aula num rico laboratório, provocando o seu crescimento pessoal e cognitivo, considerando o aluno como um ser ativo, durante todo o processo (p. 95)

Esperamos com isto, contribuir um pouco para o desenvolvimento da Educação Matemática e aprimoramento de professores. Entendemos, porém, que este trabalho pode e deve ser melhorado, adaptado e continuado a fim de que as reflexões por ele propostas alcancem um número cada vez maior de alunos e professores.

REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D., HANESIAN, H. *Psicologia Educacional*. 2. Ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.
- BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 2 ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher/Edusp, 1996.
- BRASIL, MEC/INEP. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Brasília. 1999.
- BRIGHENTI, Maria José Lourenção. *Concepções de professores sobre o ensino de Matemática: um estudo sobre a relação teoria/prática de aprendizagem*. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 3, p. 37-52, 2001.
- BRIGHENTI, Maria José Lourenção. *Representações Gráficas: atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos*. Bauru: EDUSC, 2003.
- CAPORALINI, Maria Bernadete S. C. *A Transmissão do Conhecimento e o Ensino Noturno*. Campinas: Papirus, 1991.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Ed Papirus, 1996.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática – contexto e aplicações*. Ensino médio. 3 ed. São Paulo: Ática, 2004. v. 2.
- _____. *Tudo é Matemática*. Ensino Fundamental – 5ª série. São Paulo: Ática, 2002.
- DIAS, Dorval Antônio; CAMARGO, Susan Nectoux. *A Construção de conceitos nos estudos trigonométricos*. *Ciência E Conhecimento – Revista Eletrônica da Ulbra São Jerônimo – Vol. 01, 2007, Matemática, A.1*
- FONSECA, Laerte. *Aprendizagem em trigonometria: obstáculos, sentidos e mobilizações*. Aracaju: Ed. UFS: 2010.
- GONÇALVES, Lia Rodrigues; PASSOS, Sara Rozinda Martins Moura Sá e PASSOS, Álvaro Mariano. *Novos rumos para o Ensino Médio Noturno – como e por que fazer?*, Ensaio: aval. pol. públ. Educ., Rio de Janeiro, v.13, n.48, p. 345-360, jul./set. 2005.

- GUELLI, Oscar. **Matemática – série Brasil**. São Paulo: Ática, 2003.
- HUAMAN HUANCA, Roger Ruben. **A resolução de problemas no processo ensinoaprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).Rio Claro: UNESP, 2006.
- LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P., orgs. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994.
- KENNEDY, Edward S. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Trigonometria**. NCTM, 1969. Tradução Hygino H. Domingues. Atual: São Paulo,1992.
- KLEIN, Marjúnia Édita Zimmer. **O ensino da trigonometria subsidiado pelas teorias da aprendizagem significativa e dos campos conceituais**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. PUC-RS. 2009
- MENDES, Iran Abreu. **Ensino de trigonometria através de atividades históricas**. Natal, RN, 1997. 165p. Dissertação (Mestrado em Educação – Educação Matemática). Programa de PósGraduação em Educação. Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 1997.
- MENDONÇA, M.C.D. **Problematização: um caminho a ser percorrido em Educação Matemática** Tese (Doutorado em Educação). Campinas: UNICAMP, 1993.
- MOREIRA, Marco Antônio; BUCHWEITZ, Bernardo. **Mapas Coceituais. Instrumentos didáticos de avaliação e de análise de currículo**. Moraes: São Paulo, 1987.
- MOREIRA, Marco Antônio; MASINI, Elcie F. Salzado. **Aprendizagem Significativa. A teoria de David Ausubel**. São Paulo, SP: Centauro, 2006. 2 ed.
- MOREIRA, M.A. **Aprendizagem significativa crítica**. Atas do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa, Lisboa (Peniche), 2000.
- MOREY, Bernadete. **Geometria e Trigonometria na Índia e nos Países Árabes. (Pre-print)** Coleção História da Matemática para Professores, Rio Claro, SP: SBHMat, 2003.
- MORIN, Edgar. **Os sete saberes necessários à educação do futuro**. 8 ed. São Paulo: Cortez; Brasília, DF: UNESCO, 2003.

NOVAK, J.D. (1981). ***Uma teoria de educação***. São Paulo, Pioneira. Tradução para o português, de M.A. Moreira, do original ***A theory of education***. Ithaca, N.Y., Cornell University, 1977. 252 p.

NOVAK, J.D. e GOWIN, D.B.. ***Aprender a aprender***. Lisboa. Plátano Edições Técnicas. Tradução ao português, de Carla Valadares, do original ***Learning how to learn***. 212p. 1996.

PEREIRA, C. S., ***Aprendizagem em trigonometria: um caminho possível***. Monografia de especilaização. Universidade Estadual da Paraíba. 2006

POSTMAN, Neil & WEINGARTNER, Charles. ***Teaching as a subversive activity***. New York: Dell Publishing Co. 219p. 1969.

POSTMAN, Neil (1996). ***The end of education: redefining the value of school***. New York: Vintage Books/Random House. 208p.

RÊGO, Rogéria Gaudêncio do et al. ***Padrões de Simetria: do cotidiano à sala de aula***. João Pessoa, PB: Ed. UFPB, 2006.

SALVADOR, Cesar Coll et al. ***Psicologia da Ensino***. Tradução Cristina Maria de Oliveira. Porto Alegre: Artmed, 2000

SORMANI Júnior, César. ***Um estudo exploratório do uso de informática na resolução de problemas matemáticos*** Dissertação (Mestrado em Educação). Bauru: UNESP, 2006.

