

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

KLÉBER MENDES VIEIRA

O ENSINO DO CONCEITO DE ÂNGULO: LIMITES E
POSSIBILIDADES

CAMPINA GRANDE – PB
2010

KLÉBER MENDES VIEIRA

O ENSINO DO CONCEITO DE ÂNGULO: LIMITES E POSSIBILIDADES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – Linha de pesquisa “Metodologia e Didática no Ensino das Ciências e na Educação Matemática” – para obtenção do título de mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rômulo Marinho do Rêgo

CAMPINA GRANDE – PB
2010

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na sua forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

V658e Vieira, Kléber Mendes.
O ensino do conceito de ângulo [manuscrito]: limites e possibilidades / Kléber Mendes Vieira. – 2010.
149 f. : il. color.

Digitado
Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática), Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, 2010.

“Orientação: Prof. Dr. Rômulo Marinho do Rêgo, Departamento de Matemática”.

1. Ensino de Matemática. 2. Ângulos. 3. Geometria. 4. Didática. 4. Aprendizagem. I. Título.

21. ed. CDD 372.7

KLÉBER MENDES VIEIRA

O ENSINO DO CONCEITO DE ÂNGULO: LIMITES E POSSIBILIDADES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – Linha de pesquisa “Metodologia e Didática no Ensino das Ciências e na Educação Matemática” – para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Aprovada em: ____ / ____ / 2010

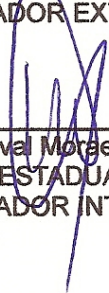
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Rômulo Marinho do Rêgo
UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
ORIENTADOR



Prof. Dr. Paulo César de Faria
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
EXAMINADOR EXTERNO



Prof. Dr. Cidival Moraes de Sousa
UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
EXAMINADOR INTERNO

Dedico este trabalho àqueles que partiram, mas que, indubitavelmente, perfazem meu coração e minhas lembranças transbordarem de felicidade – Meu pai e minhas tias Terezinha e Letícia. Orgulho-me por ter sedimentado minha personalidade e meu caráter nos princípios por eles proclamados.

AGRADECIMENTOS

Agradeço...

A Deus, pois, sem Ele, este trabalho não teria se concretizado;

Ao meu orientador Dr. Rômulo Marinho do Rêgo, pela oportunidade e pela inegável competência com a qual estabeleceu os caminhos e diretrizes para encaminhamento, realização e conclusão deste trabalho;

Aos professores doutores Paulo Cézar de Faria e Cidoval Moraes de Sousa, os quais contribuíram consideravelmente para a elaboração deste trabalho durante a qualificação, e por comporem a banca final, como examinador externo e interno, respectivamente;

À minha estimada esposa, Simone, que, com paciência e dedicação, me deu forças para galgar mais este degrau em nossa história;

À minha irmã Karlete, que, com sua competência e palavras sábias foi imprescindível para a conclusão deste trabalho;

À professora Dra. Maria de Fátima Ferreira de Araújo, que me auxiliou no projeto para seleção do mestrado;

À Mitchelmore, que, gentilmente, nos forneceu seus artigos, por e-mail, contribuindo consideravelmente para o desenvolvimento desta pesquisa;

À Danielly, minha colega de mestrado, que tanto me deu conselhos e esperança, compartilhando momentos difíceis no transcorrer dessa empreitada;

À Tatiana, minha colega de profissão, que colaborou com sua flexibilidade, compreensão e palavras de incentivo;

À minha prima Cristiane Vieira, que me auxiliou com um inglês fluente e preciso;

À minha amada mãe, que sempre está ao meu lado, servindo de inspiração e me dando todo suporte possível e imaginável;

A Ricardo, colega e secretário do mestrado, pessoa de índole irrefutável, que ajudou quando precisei;

À professora Dra. Ana Paula Bispo, coordenadora do mestrado, que sempre esteve disponível para resolver qualquer questão;

Ao corpo docente do mestrado, os quais, com suas incontestáveis

competências, me subsidiaram cognitivamente durante o transcorrer de suas disciplinas;

À Kênia, diretora adjunta da biblioteca da UEPB, por ter sido transigente em momentos decisivos, nos quais necessitei de compreensão;

A Charles Max, amigo e irmão, pessoa estimada, que me deu força por meio de suas palavras motivadoras e esperançosas;

À professora Ednalva, que cedeu sua turma numa escola municipal de Campina Grande, para viabilizar o desenvolvimento de parte do nosso trabalho;

À Iara Moraes, diretora da escola em que desenvolvi a abordagem didática, que, com toda prestimosidade, permitiu o fluxo normal de nossas atividades;

Aos professores da Rede Municipal de Ensino de Campina Grande, que foram receptivos e disponíveis para responderem ao questionário;

Aos alunos da escola na qual foi desenvolvida a abordagem didática;

Aos colegas de turma, que compartilharam angústia e alegrias;

Aos demais familiares e amigos, que me deram apoio, direta ou indiretamente.

“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.”

JACQUES BERNOULLI

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo desenvolver uma abordagem didática, sobre o desenvolvimento do conceito de ângulo, fundamentada na proposta teórica denominada de abstração progressiva desenvolvida por Micheltore e White (2000). Nesta direção, foi realizada uma investigação de caráter exploratório e experimental por meio de questionário e observações *in loco*, levantando como se processa o ensino deste conteúdo na Rede Municipal de Ensino de Campina Grande (RMECG), em turmas do 6º ano do ensino fundamental e a sua abordagem nos livros didáticos, tendo como referência os descritores da Prova Brasil. Constatou-se que a maioria dos professores não aborda o conceito de ângulo no ano recomendado pelos documentos oficiais, deixando de lado a ideia de ângulo como giro ou mudança de direção, enquanto a análise dos três livros didáticos mais utilizados na rede verificou que apenas um estava de acordo com os descritores da Prova Brasil. Levando em conta estes aspectos, foi elaborada uma abordagem didática inicial, aplicada em uma turma de 6º Ano da RMECG, cujo resultado foi avaliado por meio de um pré-teste e de um pós-teste, bem como foram efetuadas observações participantes, verificando-se a adequação da proposta didática no que se refere aos aspectos cognitivos e afetivos, mostrando que ela é viável, tanto no que se refere aos custos, quanto ao tempo e à sua aplicação nos espaços físicos disponibilizados em salas de aulas tradicionais. Após a aplicação em sala de aula, foram efetuados pequenos ajustes na abordagem didática inicial, sendo o seu resultado apresentado em anexo.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem; Conceito de Ângulo; Educação Matemática; Abstração Progressiva.

ABSTRACT

The aim of this research was to develop a pedagogical approach on angle concept development, based on the theoretical proposal called progressive abstraction developed by Micheltore and White (2000). An exploratory and experimental investigation was accomplished through a questionnaire and observations in loco, posing on how the teaching of this content is processed in Municipal Schools of Campina Grande (MSCG), in the sixth year of elementary schools and its approach in textbooks, having as reference the descriptors of Brazil Examination. We found out that most of the teachers do not approach angle concept in the year recommended by the official documents, not considering the idea of angle as a turn or changing direction. While the analysis of the three books most used in schools showed that only one was according to the descriptors of Brazil Examination. Taking those aspects for granted, we elaborated an initial pedagogical approach, applied in a 6th year class of MSCG, whose result was evaluated through a pre-test and a post-test, as well as participant observations were made, verifying the adequacy of the pedagogical proposal related to cognitive and affective aspects, showing that it is viable, both with regard to costs and to time and its application in the available physical spaces in traditional classrooms. After the application in the classroom, we made minor adjustments in the initial pedagogical approach. We presented the results attached.

Key words: Teaching-learning; angle concept, mathematics education, progressive abstraction.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelos de situações de ângulos. (MITCHELMORE; WHITE, 2000, p. 221).	65
Figura 2 – Representações do contexto de declive.....	66
Figura 3 – Representações do contexto de canto.....	66
Figura 4 – Representações do contexto de giros limitados.....	67
Figura 5 – Representações do contexto de giros ilimitados.	67
Figura 6 – Procedimentos para criação das representações de situações físicas de ângulo.....	68
Figura 7 – Mapa da sala.....	73
Figura 8 – Rosa-dos-ventos indicando os pontos cardeais e colaterais.....	75
Figura 9 – Transferidores graduais rígidos de 180° e 360°.....	78
Figura 10 – Círculo (360°) sendo dobrado ao meio e o respectivo semicírculo (180°).	78
Figura 11 – Três vincos dividindo o semicírculo em 4 ângulos de 45°.....	79
Figura 12 – Dois vincos dividindo o semicírculo em 3 ângulos de 60°.....	79
Figura 13 – Cinco vincos dividindo o semicírculo em 6 ângulos de 30°.....	80
Figura 14 – Onze vincos dividindo o semicírculo em 12 ângulos de 15°.....	80
Figura 15 – Ilustrações acerca da ideia de ângulo.	101
Figura 16 – Exemplos de situações do cotidiano que possuem ângulos no segundo livro analisado.....	102
Figura 17 – Perguntas introdutórias do terceiro livro didático analisado.	104
Figura 11 – Dois vincos dividindo o semicírculo em 3 ângulos de 60°.....	134
Figura 13 – Cinco vincos dividindo o semicírculo em 6 ângulos de 30°.....	135
Figura 14 – Onze vincos dividindo o semicírculo em 12 ângulos de 15°.....	135

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Comparativo do percentual de acerto relativo à primeira questão da 1ª etapa aplicada no pré-teste e pós-teste.....	83
Gráfico 2 – Comparativo do percentual de acerto relativo à segunda questão da 1ª etapa aplicada no pré-teste e pós-teste.....	84
Gráfico 3 – Comparativo do percentual de acerto relativo à terceira questão da 1ª etapa aplicada no pré-teste e pós-teste.....	84
Gráfico 4 – Comparativo do percentual de alunos que identificaram ângulos dentre várias figuras.	85
Gráfico 5 – Comparativo do percentual de alunos que identificaram ângulos em várias representações do cotidiano.	86
Gráfico 6 – Comparativo do percentual dos alunos que associaram a maior medida de um ângulo à sua abertura.....	87
Gráfico 7 – Comparativo do percentual dos alunos que reconheceram o grau como unidade padrão de ângulo.	88
Gráfico 8 – Comparativo do percentual dos alunos que reconheceram o transferidor como instrumento de medida de ângulo.....	88
Gráfico 9 – Comparativo do percentual dos alunos que reconheceram e mediram ângulos representados pela imagem de um transferidor.....	89
Gráfico 10 – Comparativo do percentual dos alunos que identificaram um ângulo reto.	90
Gráfico 11 – Comparativo do percentual dos alunos que relacionaram giros a ângulos.....	91
Gráfico 12 – Percentual de professores da RMECG que lecionam em cada um dos anos finais do ensino fundamental.	92
Gráfico 13 – Percentual dos professores da RMECG que ensinam ou já ensinaram Geometria.	93
Gráfico 14 – Percentual dos professores da RMECG que ensinam ângulo.....	94
Gráfico 15 – Percentual relativo à forma como os professores da RMECG introduzem o conteúdo de ângulo.....	95

Gráfico 16 – Percentual dos professores da RMECG que forneceram sugestões relativas ao ensino de ângulo.	96
Gráfico 17 – Percentual dos professores da RMECG que introduzem o ensino de ângulo de acordo com o ano do ensino fundamental.	96
Gráfico 18 – Percentual dos professores da RMECG que trabalham o conceito de ângulo como giro ou mudança de direção.	97
Gráfico 19 – Percentual dos professores da RMECG que utilizam tais definições de ângulo.	98
Gráfico 20 – Percentual dos professores da RMECG que utilizam livros didáticos nas aulas.	99
Gráfico 21 – Percentual de professores da RMECG que utilizam cada um dos livros didáticos elencados.	100

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Resumo de alguns conceitos associados ao ensino ângulo.	33
Quadro 2 – Resumo de alguns procedimentos relativos ao sistema sexagesimal de medida.	36
Quadro 3 – Resumo de algumas atitudes associadas ao ensino ângulo.	37

LISTA DE SIGLAS

MMM	Movimento da Matemática Moderna
PB	Paraíba
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação Comparada
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
RMECG	Rede Municipal de Ensino de Campina Grande
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	17
1.1.	OBJETIVO GERAL	29
1.2.	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	29
2.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	30
2.1.	CONCEITOS, PROCEDIMENTOS E ATITUDES	30
2.1.1.	Conceitos	30
2.1.2.	Procedimentos	30
2.1.3.	Atitudes	31
2.2.	CONCEITOS, PROCEDIMENTOS E ATITUDES RELATIVOS A ÂNGULO	31
2.2.1.	Conceitos associados ao ensino ângulo	32
2.2.2.	Procedimentos associados ao ensino ângulo	34
2.2.2.1.	Outros procedimentos associados a ângulo: sistema sexagesimal	35
2.2.3.	Atitudes associadas ao ensino de ângulo	36
2.2.4.	Conhecimentos prévios	37
2.3.	A GEOMETRIA E O ESTUDO DE ÂNGULO	38
2.3.1.	Definições de ângulo	39
2.3.1.1.	Definição 1	41
2.3.1.2.	Definição 2	41
2.3.1.3.	Definição 3	41
2.3.2.	Conceito de ângulo	43
2.4.	ABSTRAÇÃO PROGRESSIVA E GENERALIZAÇÃO	44
2.4.1.	Formação de conceito por abstração	45
2.4.1.1.	Conceitos Cotidianos	45
2.4.1.2.	Conceitos matemáticos elementares	47
2.4.1.3.	Conceitos matemáticos formais	47
2.4.2.	Aprendizagem de ângulo por abstração progressiva	47
2.4.2.1.	Fase 1 – Conceitos de ângulo situados	48
2.4.2.2.	Fase 2 – Conceitos de ângulo contextual	48
2.4.2.3.	Fase 3 – Conceitos de ângulo abstrato	49
2.5.	CONSIDERAÇÕES SOBRE OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA	50

2.5.1. Papel do livro didático.	51
2.5.2. Critérios de avaliação do livro didático de matemática.	53
2.5.2.1. Correção conceitual.....	53
2.5.2.2. Diversidade de representações	54
2.5.2.3. Aspectos linguísticos	54
2.5.2.4. Argumentação no livro didático	55
3. METODOLOGIA.....	57
4. ABORDAGEM DIDÁTICA.....	60
4.1. OBJETIVOS DA ABORDAGEM DIDÁTICA.....	61
4.2. RECURSOS	61
4.3. DESENVOLVIMENTO	62
4.3.1. 1ª Etapa – Sondagem	62
4.3.2. 2ª Etapa – Construção do material didático	64
4.3.3. 3ª Etapa – Desenvolvimento das 1ª e 2ª fases da abstração progressiva.	68
4.3.3.1. Desenvolvimento da 1ª fase da abstração progressiva	69
4.3.3.2. Desenvolvimento da 2ª fase da abstração progressiva	70
4.3.4. 4ª Etapa – Atividades para desenvolver o conceito de ângulo padrão em contextos de giro.....	71
4.3.4.1. 1ª atividade: Conhecendo os giros de uma volta, meia volta e $\frac{1}{4}$ de volta. ..	72
4.3.4.2. 2ª atividade: Aplicando os giros de uma volta, meia volta e $\frac{1}{4}$ de volta.....	73
4.3.4.3. 3ª atividade: Direção, sentido, localização e a rosa dos ventos.	74
4.3.5. 5ª Etapa – Desenvolvimento da 3ª fase da abstração progressiva	75
4.3.6. 6ª Etapa – Medição de ângulos	76
4.3.6.1. O auxílio da História da Matemática	77
4.3.6.2. Utilização de dobraduras	77
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO	82
5.1. COMPARATIVO ENTRE O PRÉ-TESTE E O PÓS-TESTE	82
5.2. QUESTIONÁRIO	91
5.3. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS	100
5.3.1. Matemática e Realidade	100
5.3.2. Matemática: fazendo a diferença.....	102
5.3.3. Projeto Araribá.....	103

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	106
REFERÊNCIAS.....	109
APÊNDICES	112
ANEXOS	142

1. INTRODUÇÃO

O campo da Matemática denominado de Geometria envolve, na Educação Básica, o ensino de conhecimentos, relacionando o reconhecimento e a representação de objetos geométricos (pontos, linhas, planos, figuras planas, o espaço e as figuras espaciais, tanto no plano como no espaço tridimensional); o estabelecimento de relações entre estes objetos; a organização, de forma metódica, das definições geométricas; a explanação e a especificação de transformações entre estes objetos; a utilização de habilidades visuais espaciais; a prova de proposições geométricas e as medidas envolvendo formas geométricas como comprimento, ângulo, área e volume.

A explicitação dos conhecimentos geométricos, nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN), é efetuada de forma correspondente aos atuais 6º ao 9º ano, que separam os conteúdos matemáticos dos anos finais do ensino fundamental, em quatro campos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento de Informação, separando da Geometria a parte de medidas relacionadas às grandezas geométricas.

Uma proposta curricular nacional para a área de ensino de Geometria na Educação Básica, recomendada por educadores matemáticos e bastante aproximada daquela contida nos PCN de Matemática, foi esboçada em meados da década de 1990, por pesquisadores da Educação Matemática. Basicamente, ela sugere:

- a) Anos Iniciais do Ensino Fundamental. De acordo com Lorenzato (1995), devido à grande aplicação dos conceitos geométricos a objetos do cotidiano, recomenda-se, nesta fase, a introdução do ensino de Geometria com o objetivo de desenvolver a capacidade de aplicar os conhecimentos geométricos na compreensão e representação do ambiente vivenciado pela criança (desenvolvimento do raciocínio espacial), sem uma maior preocupação em utilizar definições rigorosas.

b) Anos Finais do Ensino Fundamental. Lorenzato (1995) recomenda utilizar a Geometria como um instrumento para descrever o mundo físico por meio do vocabulário geométrico institucionalizado pela comunidade matemática. Desta forma, se favoreceria:

- O *raciocínio geométrico* com o “domínio das diversas definições e propriedades associadas a figuras e formas, a realização das primeiras explorações sistemáticas e a construção das primeiras deduções lógicas”, bem como das transformações geométricas (rotações, as translações, as simetrias e as deformações das figuras), destacando a semelhança e a congruência mantidas e na introdução de argumentos e de provas matemáticas; e o seu emprego em outras áreas da matemática (aritmética, álgebra e tratamento da informação), bem como na introdução de argumentos, de estudo de conjecturas e de provas matemáticas;
- O *raciocínio espacial* com o emprego da Geometria em outras áreas do conhecimento e de atividades (geografia, ciências, esportes, lazer, etc...).

c) Ensino Médio. De acordo com Fainguelernt (1995), neste nível de ensino, a Geometria deve fortalecer seu caráter formativo e demonstrar sua aplicabilidade prática na resolução de problemas junto às outras disciplinas escolares. Além disso, ela deve contribuir para a formação elementar dos conceitos de vetor e espaço vetorial e para o estudo da Geometria analítica plana e espacial.

Mesmo sendo consenso na área de ensino de matemática, existem dificuldades de levar esta proposta para a sala de aula. Há uma unanimidade nacional sobre a necessidade de melhorar o ensino de matemática levando os nossos alunos a aprenderem de conceitos matemáticos que respondam as demandas formativas e funcionais colocadas pela sociedade contemporânea. Entretanto, as avaliações efetuadas internamente pela Prova Brasil e as realizadas em conjunto com outros países, a exemplo do *Programme for International Student*

Assessment (PISA¹), mostram que o sistema de ensino brasileiro não consegue fazer com que a maioria dos nossos jovens desenvolva conhecimentos matemáticos compatíveis com uma sociedade de base tecnológica, baseada em uma cultura de constante inovação fundamentada em conhecimentos científicos.

Pesquisas como as de Pavanello (1989) e Lorenzato (1995) indicam que uma possível fonte dos problemas de ensino de Geometria pode estar associada à formação dos professores nos conteúdos específicos a serem lecionados. Estas pesquisas indicam que docentes de matemática manifestam o desejo de lecionar esta disciplina de forma eficiente por meio de metodologias, técnicas, materiais didáticos e atividades fundamentadas em sua própria educação e experiência. E ainda, a experiência vivenciada pela maioria dos docentes enquanto alunos e na sua formação inicial não possibilitam atividades que levem ao desenvolvimento de domínio de raciocínios espaciais e geométricos.

Com efeito, de acordo com Pavanello (1989), isto ocorre dentre outros fatores, devido à influência do Movimento da Matemática Moderna (MMM) que, no final da década de 1960, se instalou no Brasil, justamente quando ocorreu uma grande expansão dos cursos de formação de professores nas universidades públicas. Desta maneira, os docentes formados nesta área e os futuros formadores de formadores vivenciaram uma situação que não favoreceu o domínio de conteúdos, de métodos de ensino e de atitudes favoráveis ao domínio de raciocínios geométricos e espaciais, gerando, assim, uma crise no ensino de Geometria.

A Matemática Moderna foi implantada na tentativa de transpor, para o ensino, o sucesso obtido na pesquisa pelos matemáticos franceses participantes do Grupo Bourbaki². Estes tinham como modelo as grandes estruturas abstratas e utilizavam a

¹ O PISA é um programa internacional de avaliação comparada, cuja principal finalidade é produzir indicadores sobre a efetividade dos sistemas educacionais, avaliando o desempenho de alunos na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países.

² O grupo Bourbaki desenvolveu a visão da Matemática como constituída por grandes estruturas formais fundamentadas na teoria dos conjuntos. O grupo divulgou suas ideias por meio de vários livros, lutando por mais rigor e simplicidade, defendendo uma maior aproximação entre a matemática desenvolvida na pesquisa, criando uma nova terminologia e conceitos.

Teoria dos Conjuntos, adotando a filosofia formalista da matemática. O referido movimento tentou implantar estas estruturas para o Ensino de Matemática no nível básico. Nesta direção, elaboraram-se materiais didáticos e disponibilizaram-se cursos preparatórios para professores, a fim de que pudessem lecionar matemática por meio das grandes estruturas formais, o que ocorreu, segundo Kline (1985), na maioria dos países, sob a influência norte americana.

Nesta estrutura, o ensino da Geometria na Educação Básica foi prejudicado, uma vez que a axiomatização deste campo, feita via Geometria Euclidiana, se processou dentro de um grau de abstração muito alto, dificultando o seu ensino na Educação Básica. Em alguns cursos de formação de professores – a exemplo dos Cursos de Licenciatura em Matemática das universidades públicas da Paraíba, se restringiram ao ensino de Geometria Euclidiana. Isso levou muitos dos futuros professores a reduzirem os conteúdos geométricos em seus planejamentos; outros passaram a abordá-los no último bimestre do ano e, alguns, passaram a não mais ensiná-los.

Outra evidência do menoscabo sofrido pelo ensino da Geometria pode ser percebida na abordagem deste conteúdo, seguida pelos livros didáticos, até recentemente.

Sob a influência do Projeto Nacional do Livro Didático (PNLD), ocorreram avanços significativos nos livros didáticos quanto aos conhecimentos geométricos, tanto no que se refere aos conteúdos abordados, como na sua distribuição dentro de cada volume anual e nas coleções. Anteriormente os poucos conteúdos geométricos eram abordados em seus últimos capítulos, conforme Araújo (1994), de forma restrita e prestigiando os conteúdos aritméticos e algébricos.

No início da década de 80, como monitora de um projeto de capacitação de professores de Matemática, Pavanello (1989) observou que poucos dos participantes desses cursos incluíam Geometria entre os temas a serem abordados em suas aulas, alegando que não dominavam este conteúdo. Alguns confessaram que nunca estudaram Geometria ou que o fizeram de maneira insatisfatória. Opinião corroborada por Lorenzato (1995), segundo o qual grande maioria dos professores

não possui os conhecimentos geométricos básicos para a realização de suas práticas pedagógicas. Esse autor, no mesmo artigo, suscita a frágil posição da Geometria nos cursos de formação de professores (Licenciatura em Ciências, em Matemática, Pedagogia e Formação para o Magistério), e conclui: “Ora, como ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece, está aí mais uma razão para o atual esquecimento geométrico.” (LORENZATO, 1995, p. 3-4).

Além disso, as condições de trabalho da maioria dos docentes de matemática da rede pública brasileira geram barreiras que desmotivam e até impossibilitam vários destes profissionais a participarem de formações continuadas. Grande parte dos professores desta disciplina, na Educação Básica, além de uma baixa remuneração salarial, está submetida a uma situação de trabalho envolvendo um número excessivo de aulas, lecionadas para um número excedente de alunos e em diversas escolas.

Assim, no âmbito da Geometria, muitas das disciplinas voltadas para formação inicial de professores são lecionadas sob a influência de uma visão formalista, voltada para apresentações dedutivas e formais divorciadas das demandas educativas para os conhecimentos geométricos ensinados na Educação Básica. Assim, no ensino superior, implantou-se uma visão de Matemática mais preocupada com os problemas internos desta ciência, deixando alguns aspectos de sua aplicação, como as questões envolvendo o seu ensino, para um segundo plano.

Quando se ensina Matemática, tem-se a preocupação com o grau de abstração e de generalização utilizado em sala de aula, procurando sempre partir de conhecimentos acessíveis à compreensão do aluno e atingir os objetivos formativos e funcionais propostos para aquele nível de escolaridade. Como um campo da Matemática, a Geometria apresenta algumas especificidades, que podem ser clareadas com um pouco de história.

A Matemática, como uma área abstrata, foi criada pelos Gregos, no período clássico. Eles reconheceram que pontos, retas, triângulos, entre outros entes geométricos, eram conceitos abstratos distintos dos objetos físicos e desenvolveram o método axiomático, possibilitando modelos teóricos onde a coerência pode ser

verificada entre suas partes. Segundo Kline (1985), esta seria, a partir de então, considerada uma forma de conhecimento que serviria de modelo para as demais áreas, pois seria o mais próximo do conhecimento verdadeiro que o homem poderia obter, bem como forneceria um padrão para provar dedutivamente outros fatos sobre estes conceitos.

Os gregos evoluíram de uma matemática associada aos fatos geométricos desconexos, empíricos e limitados, desenvolvidos pelos egípcios e babilônios, tendo como fundamento as experiências sobre o mundo físico, para uma vasta, sistemática e aprofundada estrutura dedutiva, consolidada pela Geometria Euclidiana.

Euclides, segundo Eves (2004), no seu mais precioso trabalho, “Os elementos”, publicado no Séc. III a.C., ao sistematizar os conhecimentos matemáticos desenvolvidos pela cultura grega, efetuou a primeira axiomatização da Matemática, metodizando o conhecimento matemático grego por meio da Geometria. Esta obra influenciou profundamente na formação cultural do ocidente e, até o Séc. XIX, foi considerada, de acordo com Ponte *et al* (1997, p. 21), “o modelo da verdade, do rigor e da certeza, tendo se transformado durante vários séculos, no próprio paradigma da Ciência”. Com a queda do Mito de Euclides, ocorrido no Século XIX por meio do surgimento das Geometrias Não-Euclidianas, o caráter de conhecimento verdadeiro atribuído à Geometria como modelo do mundo físico, cede espaço para sistemas dedutivos abstratos, que agora servem de modelos a mundos possíveis, tendo como fundamento a existência de um modelo abstrato que serve de referencia e coerência.

Filósofos como Kant, Spinoza e Newton a consideravam como um modelo para a construção de toda teoria científica que se pretende rigorosa e a utilizavam na apresentação de suas teorias. Esta importância histórica permanece até o presente, quando alguns cursos de formação de professor trazem em seu currículo a disciplina Geometria Euclidiana.

O problema surge quando se restringe o ensino de Geometria aos aspectos formais, de interesse apenas para o ensino médio e para os cursos superiores,

quando se trabalha a validação dos objetos e resultados matemáticos, por meio de argumentos lógicos e dedutivos, sem um apelo à intuição. O grau de abstração adotado pode se mostrar inadequado para os conteúdos do ensino fundamental, incluindo o estudo de ângulos, um conceito geométrico voltado para representar as mudanças de direção.

Central em vários aspectos, o conceito de ângulo é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, pois contribui para o entendimento de outros saberes da Geometria, sendo basilar, tanto para o estudo das figuras planas, quanto espaciais; contribui para desenvolver o raciocínio espacial; auxilia na trigonometria – aqui entendida como o estudo de padrões envolvendo fenômenos periódicos – afora as inúmeras aplicações em outras Ciências, na tecnologia e no mercado de trabalho.

O trabalho sistemático com ângulos, bem como os conceitos e procedimentos a eles associados, geralmente têm início nos anos iniciais do ensino fundamental, com o objetivo de localização de objetos no espaço. Em seguida, é abordado como conhecimento específico no 6º ou no 7º ano do ensino fundamental quando se estudam os seus aspectos enquanto grandeza; unidades de medidas (ângulo de giro, grau e grado); o uso de instrumentos de medidas e cálculos mais usuais. Observa-se, neste nível de ensino, conteúdos da Geometria que possuem estreita ligação com o conceito de ângulo, suas propriedades e relações, a saber: o estudo dos triângulos, dos quadriláteros, dos polígonos, dos sólidos geométricos, das circunferências e arcos, das semelhanças, das congruências, das simetrias, entre outros.

No último ano do ensino fundamental (9º ano), o conceito de ângulo é aplicado à trigonometria explorada no triângulo retângulo, bem como no estudo de tratamento de informações (gráficos de pizza), voltando a ser trabalhado no 1º ou no 2º ano do ensino médio, quando do estudo de funções trigonométricas, ocasião em que se introduz o ângulo central e sua medida em radiano. Finalmente, na maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática, o ângulo volta a ser abordado de forma

axiomática na disciplina de Geometria Euclidiana ou, de forma *superficial*, em disciplinas que fazem revisão de conteúdos matemáticos da Educação Básica.

Nessa trajetória que se inicia quando o aluno tem cerca 10 (dez) anos de idade e se estende até o ensino superior, o estudo de ângulo envolve três diferentes ideias que podem ser expressas pelas seguintes definições:

- a) Quantidade de giro necessária para girar uma semirreta para a posição de outra com a mesma origem.
- b) Região no espaço limitada por duas semirretas de origem comum;
- c) A união de duas semirretas com a mesma origem;

A crise gerada, no que diz respeito ao ensino de Geometria, após o MMM, atingiu, conseqüentemente, o ensino do conceito de ângulo, restringindo o seu ensino aos aspectos formais. A referida abordagem não incentiva a utilização de materiais concretos, de instrumentos de desenho e de medidas, bem como a utilização de representações semiconcretas (visualização), para ajudar na efetiva construção de conceitos geométricos. Também não contribuem para desenvolver atividades voltadas para a aplicação da Geometria, notadamente de ângulos, a problemas de outras áreas como Geografia, Física, Engenharia etc.

As diferentes definições de ângulos, que apresentam distintos significados, levantam questionamentos sobre quando e como estas devem ser abordadas. Elas se tornam mais importantes para os defensores da concepção de que aprender consiste na atribuição de significado pelo aluno – à qual nos filiamos, e seguem o princípio de que esta atribuição ocorre quando o aluno associa os conhecimentos novos aos conhecimentos prévios por ele trazidos.

Dessa forma, antes de introduzir um novo conteúdo, o professor necessita conhecer quais os conhecimentos que o aluno possui e procurar estabelecer pontes com os conhecimentos a serem apreendidos – permitindo assim que este atribua um sentido.

Entre os aspectos a serem considerados na aprendizagem da matemática está o grau de abstração e de rigor com que se representa o conhecimento – os

conteúdos abordados e a sua forma de apresentação devem considerar o grau de abstração e de generalidade dominado pelo aluno. A ideia deste grupo – denominado de abstracionista – é a de que o ensino deveria partir de modelos intuitivos dominados pelo aluno e, pouco a pouco, ir se inserindo em atividades que envolvam um maior grau de abstração e de formalismo, se afastando assim dos modelos baseados em conhecimentos empíricos e sensíveis. Desta forma, se chegaria ao conhecimento matemático, que é de natureza abstrata.

Outros acreditam que os conhecimentos matemáticos podem ser apreendidos pelos alunos por meio de processos de transmissão, geralmente efetuados pela explanação do professor seguida por leitura das notas de aula ou do livro texto, complementada pela realização de exercícios semelhante aos efetuados pelo professor em sala de aula.

Dentro da citada concepção, se ensina ao aluno como responder corretamente as questões, não se atribuindo maior importância ao nível de abstração com que os conteúdos são ensinados. Nela, o importante é ensinar a resposta correta. Não se atribui uma maior importância se este aprende a responder as questões por memorização ou se este tipo de aprendizagem permite que ele transfira conhecimentos para outras situações.

O primeiro contato do aluno com a ideia de ângulo é direcionado para orientá-lo no espaço físico, nos anos iniciais do ensino fundamental. Nesta fase, os abstracionistas defendem a ideia de um ensino partindo nas séries iniciais de conhecimentos, baseados na nossa experiência, e de procedimentos mais imediatos, favorecendo segundo D'Amore (2007, p.83), “o surgimento de teorias implícitas que funcionarão no grupo como modelos *proto-matemáticos*³”. A partir desses modelos, se adotaria abordagens cada vez mais abstratas, tendo como objetivo chegar à construção de conhecimentos matemáticos, sem apelos a modelos baseados em conhecimentos de natureza empírica ou sensível.

³ Matemática baseada em modelos mentais fundamentados em conhecimentos de natureza empírica ou intuitiva.

Para Lorenzato (1995) é importante que os alunos, ao ingressarem nos anos finais do ensino fundamental, tragam consigo conceitos geométricos adquiridos de forma intuitiva e natural, promovendo, assim, a observação e a exploração das formas presentes no espaço físico. Esses conceitos, pelo seu caráter intuitivo e semiconcreto, servem como alicerces para as primeiras explorações sistemáticas que devem acontecer entre o 6º e o 9º ano do ensino fundamental.

A abordagem abstracionista enfrenta, entretanto, uma questão: como fazer com que o grau de abstração vivenciado pelo aluno, em certo momento, não se cristalice e que ele consiga passar para o nível de abstração seguinte, ou seja, como evitar que ele fique pensando sempre nos objetos geométricos por meio de modelos concretos – criando obstáculos didáticos que o impeçam de avançar no grau de abstração e de rigor para chegar a modelos abstratos requeridos por uma determinada situação.

Sabemos do problema criado por determinadas práticas de sala de aula que criam modelos cristalizados, prototípicos, que induzem o aluno a desenvolver definições equivocadas. Um exemplo clássico é o dos alunos que veem um quadrado sempre com um dos seus lados paralelo à linha horizontal do contexto que contém a figura e os losangos como sendo apoiado em um dos seus vértices. Deste modo, o aluno tem dificuldade de observar que todo quadrado é um losango, pois as representações figurativas dos dois objetos matemáticos são distintas.

O mesmo acontece quando se ensina diagonais de um polígono e se mostra apenas representações figurativas de diagonais em polígonos convexos: alguns alunos passam a considerar diagonais apenas os segmentos de reta com extremos em vértices contidos no interior do polígono.

A abordagem dos conceitos e procedimentos relacionados a ângulos efetuada em momentos isolados nos diversos níveis de ensino e associadas a diferentes ideias e a contextos distintos é outra possível fonte de problemas. Iniciada no 4º ou 5º ano do ensino fundamental, esta se estende até o ensino superior, requerendo meios para que o aluno sistematize os conhecimentos trabalhados. Assim, quando o

aprendiz trabalha com cada definição, é necessário que ele construa o significado expresso por ela e, ao mesmo tempo relacione este significado com os anteriores.

O único momento em que o tema é trabalhado como central ocorre no 6º ou no 7º ano do ensino fundamental; nos demais momentos, o foco se concentra nas aplicações; não ocorre investimento visando a sistematizar a evolução deste conceito, conectando a ideia nova às antigas.

Todo este processo é deixado para o aluno, na pressuposição de que ele o efetua por meio da representação figurativa, ou seja, a partir do processamento de modelos, tendo como base a representação da figura no plano ou por meio da atribuição de medidas. Há indícios de que o aluno não consegue efetuar esta sistematização, apresentando problemas quando passa a trabalhar, no Ensino Médio, com a ideia de ângulo associada à quantidade de giro, ao estudar as funções trigonométricas. Nesse contexto, se trabalha com a ideia de ângulo central, tendo como unidade de medida o radiano. Nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, muitos alunos não entendem o significado desta medida, o que pode ocorrer, seja pela dificuldade de compreender a relação entre o arco e a abertura do ângulo, seja pelos ângulos mais usuais envolverem medidas irracionais.

Foi observado, em turmas do 6º ano de uma escola do ensino fundamental da Prefeitura Municipal de Campina Grande que, ao ensinar ângulo por meio de materiais manipulativos – um relógio de madeira – associando ângulo à abertura entre os ponteiros do relógio, que muitos alunos passaram a raciocinar por meio de modelos associados a este material. Quando foram propostas algumas atividades visando a desenvolver outras representações, principalmente figurativas, que os liberassem do raciocínio utilizado no modelo derivado do relógio, alguns deles continuaram a pensar daquela forma.

As observações acima descritas foram por mim vivenciadas enquanto aluno de escolas da rede pública de ensino, bem como na graduação (Licenciatura Plena em Matemática). Exemplo, quando aluno da 6ª série, hoje 7º ano do ensino fundamental, seguia um livro texto, o conceito de ângulo era definido como a figura geométrica formada pela união de duas semirretas com a mesma origem. Em

seguida, o professor definia alguns ângulos, sua representação figurativa, representando-o como a região entre duas semirretas por meio de cores distintas; definia-se a adição e subtração de ângulos, o grau como unidade de medida e passava-se a trabalhar com a unidade e subunidades.

Quando estudei no ensino médio a ideia de ângulo central tive dificuldade de compreender o conceito de radiano, dificuldade esta que se estendeu até o curso de Cálculo Diferencial e Integral. Somente cursando uma disciplina na pós-graduação é que tive oportunidade de realizar sem um maior esforço reflexivo a diferenciação entre os diferentes conceitos e efetuar uma sistematização. Até então, enxergava ângulos por meio da figura – pensando sempre na região entre eles, mesmo quando definido de outra forma.

Diante do exposto, há indícios de que o processo de ensino e aprendizagem do conceito de ângulo apresenta deficiências, tornando-se necessário, principalmente para professores em exercícios e futuros professores de matemática, o desenvolvimento de uma abordagem de ensino deste conteúdo que permita ao aluno construir um significado do conceito de ângulo que abranja todas as suas diferentes definições. A partir desse significado, por meio de um processo de sistematização, se chegaria ao conceito de ângulo padrão, como a união de duas semirretas de mesma origem.

Com esta construção, espera-se que o professor, ao trabalhar um conceito em um determinado contexto, consiga relacionar com os demais e, assim, explorar didaticamente a riqueza de cada situação.

Por conseguinte, ao refletir sobre a minha experiência como aluno e como professor de matemática surgiram algumas questões de estudo, a saber: como é abordado o conceito de ângulo pelos professores dos anos finais do ensino fundamental da Rede Municipal de Ensino de Campina Grande (RMECG)? Será que esses educadores abordam tal conceito de forma consonante com os descritores da Prova Brasil? E os livros didáticos utilizados por esses professores, será que abordam o conceito de ângulo de forma adequada, levando em consideração os descritores supracitados?

Esta pesquisa busca responder a tais questionamentos, desenvolvendo uma abordagem didática, nesta direção, balizada pelos descritores da Prova Brasil, pela teoria da abstração progressiva de Mitchelmore e White (2000), bem como sugestões de atividades e fundamentos teóricos, encontrados na revisão da literatura.

1.1. OBJETIVO GERAL

Desenvolver uma abordagem didática sobre o conceito de ângulo que seja adequada ao contexto das escolas da Rede de Municipal de Ensino de Ensino de Campina Grande e às recomendações dos documentos oficiais sobre o ensino deste conceito no ensino fundamental.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) Verificar como os professores de Matemática da RMECG abordam o conceito de ângulo em turmas do 6º ano do ensino fundamental.
- b) Investigar se os professores que efetivaram tal conceito fizeram em consonância com os descritores da Prova Brasil;
- c) Realizar uma análise dos livros didáticos utilizados por estes professores e verificar se os mesmos abordam o conceito de ângulo de acordo com os descritores da Prova Brasil;
- d) Investigar os conhecimentos prévios dos alunos;
- e) Desenvolver, aplicar e analisar a adequação de uma abordagem didática sobre o conceito de ângulo às escolas da RMECG.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. CONCEITOS, PROCEDIMENTOS E ATITUDES.

Serão apresentados os entendimentos, nos quais esta pesquisa se sustentou, acerca de conceitos, procedimentos e atitudes, para que, em seguida, fossem destacados os conceitos, atitudes e procedimentos relacionados ao ensino de ângulo.

2.1.1. Conceitos

Com relação ao significado de “conceito”, COLL (2000) explicita que este designa um conjunto de objetos, fatos, acontecimentos ou símbolos que possuem certas características comuns.

Os conceitos não são estritamente crenças ou representações neutras, mas implicam uma seleção de quais ideias, entre todas as que se têm sobre o mundo, operam nesta situação, e, nesse sentido, compõem um certo grau de interpretação teórica ou explicativa da realidade. Os conceitos ajudam a descrever, interpretar e explicar o mundo, a manifestar a representação que temos e antecipam, orientam e fundamentam a conduta. (COLL *et al*, 2000, p 308)

2.1.2. Procedimentos

Os procedimentos estão ligados ao “saber fazer”, a seguir passos para atingir um determinado objetivo. COLL (2000) define um procedimento como sendo “um grupo de ações ordenadas e orientadas para atingir um determinado objetivo”.

De acordo com Coll *et al* (2000), os procedimentos são várias ações organizadas, servindo à realização de um propósito e que, uma vez apreendidos, serão aproveitados para fazer, atuar ou praticar e para resolver problemas de qualquer ordem (de natureza intelectual, social, pessoal, etc.).

2.1.3. Atitudes

Para Coll (2000), a atitude constitui uma tendência a agir de forma sólida e persistente diante de algumas situações, objetos, fatos, acontecimentos ou pessoas.

As atitudes são predisposições relativas para atuar em relação a um objeto, situação, fato, pessoa ou conjunto de pessoas ou ideias. Possuem um referente mais concreto (situações ou contextos particulares) e preparam-nos para atuar de uma determinada maneira, segundo as crenças, os valores e as pautas de conduta assumidas. (COLL *et al*, 2000, p. 323)

2.2. CONCEITOS, PROCEDIMENTOS E ATITUDES RELATIVOS A ÂNGULO.

Espera-se que, ao término do ensino fundamental, os educandos desenvolvam conceitos, atitudes e procedimentos relativos a ângulo. Alicerçados nos PCN, em livros didáticos, em livros específicos da área, na realidade dos alunos e em discussões no meio acadêmico, sobre ângulos, sugerem-se os conceitos, atitudes e procedimentos elencados nos quadros abaixo.

2.2.1. Conceitos associados ao ensino ângulo

O Quadro 1 elenca os conceitos que podem ser desenvolvidos com o estudo sobre ângulo no transcorrer dos anos finais do ensino fundamental. O quadro está dividido em dois campos, um contendo o que deve ser conceituado segundo alguns autores⁴, e o outro um breve comentário.

ALGUNS CONCEITOS ASSOCIADOS AO ENSINO ÂNGULO	
Conceito	Comentário
Região côncava e região convexa.	Conceitos obrigatórios para quem vai trabalhar o conceito de ângulo como região limitada por duas semirretas de mesma origem.
Plano, reta e semirreta.	Conhecimentos prévios obrigatórios para definir ângulo.
Retas concorrentes; Retas paralelas; Retas transversais.	Estes são conhecimentos prévios necessários para desenvolver os conceitos de “ângulos opostos pelo vértice” e outros.
Ângulo	Conceito basilar dentro da Geometria.
Elementos de um ângulo.	Por meio destes o aluno conhecerá o vértice e os lados de um ângulo.
Interior e exterior de um ângulo.	Ajuda a identificar o ângulo trabalhado, evitando-se dúvidas.
Transferidor, compasso, régua e esquadros.	Instrumentos de construção e medição de ângulos.
Medidas de ângulo a) Grau; – Minutos; – Segundos; b) Grado.	A diferença basilar entre o grado e o grau (unidade padrão). O primeiro equivale a um arco de $\frac{1}{400}$ de uma circunferência, enquanto o segundo equivale a um arco de $\frac{1}{360}$ da mesma circunferência.
Operações com ângulos: c) Adição de ângulos; a) Subtração de ângulos; b) Multiplicação de um ângulo por um número natural; c) Divisão de um ângulo por um número natural.	As operações com ângulo iniciam-se após o estudo das medidas, pois o educando deve saber operar com graus, minutos e segundos, e fazer as devidas mudanças de unidade.

⁴ Amaral (1997); Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006); Dante (2005); Diniz e Smole (1993); Giovanni e Parente (1999); Iezzi, Dolce e Machado (2005); Jarauta (2001) e Projeto Araribá (2006).

Classificação de ângulo: a) Ângulo nulo; b) Ângulo agudo; c) Ângulo reto; d) Ângulo obtuso; e) Ângulo Raso;	Esta é uma classificação que se faz quanto à abertura do ângulo.
Classificação de ângulo: a) Ângulo convexo; b) Ângulo côncavo.	Esta classificação só é justificada quando for trabalhado o conceito de ângulo como região limitada por duas semirretas de mesma origem.
Ângulos adjacentes; Ângulos consecutivos.	É importante saber que todos os ângulos adjacentes são consecutivos, mas nem todos os ângulos consecutivos são adjacentes.
Ângulos Congruentes.	Dois ângulos serão congruentes se tiverem a mesma medida.
Bissetriz de um ângulo.	A bissetriz é a semirreta que divide qualquer ângulo ao meio.
Ângulos complementares; Ângulos suplementares.	Estes são conceitos amplamente empregados em resoluções de problemas.
Ângulos opostos pelo vértice.	É importante que os alunos identifiquem a congruência existente nesses ângulos.
Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal.	Existem congruências entre os ângulos formados.
Ângulos no círculo: a) Ângulo central; b) Ângulos inscritos; c) Ângulo de meia volta, d) Ângulo de volta inteira.	As aplicações dos conceitos de ângulos no círculo são inúmeras.
Giro e mudança de direção	Conceito recomendado pelos PCN e na Prova Brasil.

Quadro 1 – Resumo de alguns conceitos associados ao ensino ângulo.

2.2.2. Procedimentos associados ao ensino ângulo

A seguir, estão elencados, de acordo com alguns autores⁵, procedimentos que podem ser realizados a partir dos conhecimentos adquiridos com o estudo de ângulo nos anos finais do ensino fundamental.

- a) Usar apropriadamente o transferidor, o compasso, a régua e os esquadros para construir e medir ângulos.
- b) Construir um ângulo a partir de sua medida.
- c) Manipular apropriadamente as unidades de medidas de ângulo.
- d) Converter unidades de medida de ângulo.
- e) Resolver desde problemas simples a operações com unidades diferentes de ângulo.
- f) Calcular medidas angulares.
- g) Realizar, numericamente, operações com ângulos.
- h) Realizar, graficamente, operações de ângulo.
- i) Reconhecer e classificar os ângulos de acordo com a abertura deles, identificando-os do nulo até o de meia volta.
- j) Reconhecer e classificar os ângulos em côncavos e convexos.
- k) Identificar e representar ângulos consecutivos e ângulos adjacentes.
- l) Reconhecer, representar e relacionar ângulos congruentes.
- m) Reconhecer e representar a bissetriz de um ângulo.
- n) Calcular a medida do complemento de um ângulo.
- o) Calcular a medida do suplemento de um ângulo.
- p) Reconhecer, representar e relacionar ângulos opostos pelo vértice.
- q) Aplicar as propriedades dos ângulos determinados por uma reta transversal e duas retas paralelas na resolução de problemas.
- r) Calcular medidas de ângulos centrais.
- s) Calcular medidas de ângulos inscritos numa circunferência.

⁵ Amaral (1997); Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006); Dante (2005); Diniz e Smole (1993); Giovanni e Parente (1999); Iezzi, Dolce e Machado (2005); Jarauta (2001) e Projeto Araribá (2006).

- t) Construir a noção de ângulo associada à ideia de mudança de direção a partir de situações concretas.

Os PCN de Matemática (BRASIL, 1998) sugerem que os alunos desenvolvam os seguintes procedimentos:

- a) Identificação de ângulo congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.
- b) Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulo notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.

2.2.2.1. Outros procedimentos associados a ângulo: sistema sexagesimal.

O trabalho com ângulo envolve o sistema sexagesimal, pois esta noção se apresenta correntemente associada a modelos referentes ao movimento de corpos celestes e a algumas medidas de tempo, fruto de desenvolvimento dos geômetras gregos procurando compreender o cosmo. A abordagem, no contexto do ensino fundamental, pode ser feita relacionando ângulos com os ponteiros do relógio analógico. Aqui, já se pode ter uma noção de ângulo como quantidade de giro, ou seja, ele passa a ter uma perspectiva dinâmica.

Para Jarauta (2001), os alunos devem ser capazes de realizar alguns procedimentos relativos a ângulo, os quais estão associados ao sistema sexagesimal de medidas (Quadro 2).

SISTEMA SEXAGESIMAL DE MEDIDAS
Uso correto do sistema sexagesimal de medida.
Uso apropriado das medidas de tempo e ângulo.
Conversão de algumas unidades para outras.
Reconhecimento de medidas complexas e não-complexas ⁶ .
Realização de operações com medidas não-complexas.
Realização de somas de complexos.
Realização de subtrações de complexos.
Realização da multiplicação de um complexo por um número natural.
Realização da divisão de um complexo por um número natural.
Conversão de um número complexo em não-complexo.
Conversão de um número não-complexo em complexo.

Quadro 2 – Resumo de alguns procedimentos relativos ao sistema sexagesimal de medida⁷.

2.2.3. Atitudes associadas ao ensino de ângulo

Nos PCN, é colocado que o ensino de Matemática, no nível fundamental, tem, como um dos seus objetivos, o desenvolvimento geométrico por meio de situações-problema, nas quais estejam envolvidos localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo ângulo como um dos elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas.

Por intermédio de atividades desenvolvidas em consonância com a perspectiva supracitada, o educando pode desenvolver atitudes importantes para a vida em sociedade. O Quadro 3 mostra, de acordo com alguns autores⁸, atitudes que os alunos podem desenvolver a partir do estudo de ângulo.

⁶ Uma medida “complexa” é aquela que envolve mais de uma unidade de medição de ângulo, por exemplo, 3° 25' 32" (três graus, vinte e cinco minutos e trinta e dois segundos), onde apareceram o grau, o minuto e o segundo. Já uma medida não-complexa é aquela que possui apenas uma unidade de medida de ângulo, por exemplo, 3658" (três mil, seiscentos e cinquenta e oito segundos), neste caso só apareceu o segundo.

⁷ Quadro construído a partir de informações encontradas em Jarauta (2001).

⁸ Amaral (1997); Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006); Dante (2005); Diniz e Smole (1993); Giovanni e Parente (1999); Iezzi, Dolce e Machado (2005); Jarauta (2001) e Projeto Araribá (2006).

ATITUDES ASSOCIADAS AO ENSINO ÂNGULO
Excitar a observação das formas geométricas na natureza, nas artes, na arquitetura entre outros.
Reconhecer as novas tecnologias como instrumentos potencialmente viáveis na representação e entendimento de figuras geométricas.
Desenvolver a capacidade de investigação na busca de resultados e entendimento do conteúdo estudado.
Motivar a curiosidade matemática.
Tomar decisões relativas a mapas e localização e escolher qual o melhor percurso a seguir.
Decidir qual melhor angulação de um telhado, rampa, etc. dependendo da situação.

Quadro 3 – Resumo de algumas atitudes associadas ao ensino ângulo.

2.2.4. Conhecimentos prévios

Houve a necessidade de se investigar quais os conhecimentos prévios que os alunos traziam. Os conhecimentos prévios são entendidos, nesta pesquisa, como aqueles dos quais os alunos dispõem, no momento em que entram em contato com um novo conteúdo. Eles estão divididos, de acordo com Miras (2006, p. 62), quanto ao conteúdo a ser apreendido, em várias categorias:

- a) *Mais ou menos elaborados;*
- b) *Mais ou menos coerentes;*
- c) *Mais ou menos adequados e;*
- d) *Mais ou menos pertinentes.*

Elaborados: quanto ao nível de maturação que os alunos possuem para servir de suporte ao novo conhecimento a ser apreendido.

Coerentes: quanto à lógica como são articulados diante do novo conhecimento.

Adequados: quanto à importância que têm para a construção do novo conhecimento.

Pertinentes: quanto ao grau de relacionamento com os novos conhecimentos.

2.3. A GEOMETRIA E O ESTUDO DE ÂNGULO

Os PCN de Matemática, dos anos finais do ensino fundamental, tratam a Geometria no âmbito do “Espaço e Forma”. O referido documento mostra a importância desse campo da Matemática para a formação cognitiva e a apontam como importante meio dos alunos compreenderem, descreverem e representarem, de forma organizada, o universo ao redor deles.

Os conhecimentos geométricos contribuem para a aprendizagem de outros saberes. Eles são facilmente identificados em situações do cotidiano, possibilitando com isso sua inserção, nas aulas, por meio de situações-problema, as quais servem como facilitadoras no processo ensino-aprendizagem.

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (BRASIL, 1998, p. 51)

Esta pesquisa enfocou, apenas, um dos inúmeros saberes da Geometria, o “ângulo”. Este ente matemático é de grande importância para a formação cognitiva do aluno, não somente pelos seus aspectos formativos, mas por estar presente nas mais distintas situações do dia-a-dia, bem como alicerçar outros conhecimentos geométricos.

As aplicações do conceito de ângulo são incalculáveis, tanto na prática de muitas profissões, quanto na resolução de vários problemas cotidianos. Os PCN destacam que os professores devem tentar estabelecer elos entre a Matemática, as situações do cotidiano e as outras áreas do conhecimento.

Por meio de situações-problema, inclusive as que utilizam ângulo como recurso auxiliar, os professores podem contextualizar suas aulas. Os PCN consideram a resolução de problemas um ponto de partida no processo ensino-aprendizagem.

Abaixo estão elencadas algumas situações nas quais o conceito de ângulo pode ser empregado.

- a) No futebol, os ângulos estão presentes, desde o traçado do campo, até os chutes realizados pelos atletas;
- b) O carpinteiro usa os ângulos para determinar a inclinação do telhado de uma casa;
- c) Esportistas de arco e flecha têm que trabalhar com o ângulo de inclinação;
- d) Quem trabalha com molduras, precisa cortar cada lado do quadro em 45 graus para que as quatro hastes se encaixem sem folga;
- e) No desenho de figuras geométricas;
- f) Na construção de escadarias e rampas de acesso;
- g) O relógio do sol é outra aplicação do estudo de ângulo formado por sombras;
- h) Medição da posição e distância entre astros e planetas.

Exemplos como estes servem como motivadores na hora de introduzir o conceito de ângulo para alunos. Em sala de aula, eles serviram de ponte entre o saber e a realidade dos alunos, levando-os a investigar a presença de ângulos em situações do dia-a-dia, das profissões etc.

[...] é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permitam ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 51)

2.3.1. Definições de ângulo

Segundo Pais (2006), uma definição matemática estratifica, por intermédio de vocábulos e expressões, as características principais de um conceito. Contudo, tais características devem expor, objetivamente, a totalidade da ideia representada.

De acordo com Casas García e Luengo Gonzáles (2005) o problema em definir ângulo vem desde “Os Elementos” de Euclides, onde este apresenta as seguintes definições:

Definição 8. Um ângulo plano é a inclinação entre duas linhas em um plano, que se unem uma a outra e não estão sobre uma linha reta.

Definição 9. E, quando as linhas que contém o ângulo são retas, o ângulo se chama retilíneo. (CASAS GARCÍA; LUENGO GONZÁLES, 2005, p. 202, tradução nossa)

Para Casas García e Luengo Gonzáles (2005), estas definições não parecem ser muito precisas. Eles colocam que, enquanto a primeira definição reflete uma concepção de ângulo como a inclinação entre duas linhas, a segunda considera ângulo como algo contido entre as duas linhas.

Ambas as definições contêm também outras particularidades que podem ser destacadas, como a exclusão dos ângulos de 0° e 180° ou a possibilidade dos lados dos ângulos serem linhas curvas. (CASAS GARCÍA; LUENGO GONZÁLES, 2005, p. 202, tradução nossa)

As definições de ângulo que apareceram com maior incidência na revisão da literatura foram três. A que mais aparece é “a união de duas semirretas de mesma origem”, a qual será denominada “definição 1”; em segundo lugar, a “definição 2”, que trata ângulo como “região limitada por duas semirretas” e, por fim, a “definição 3”, que considera ângulo como “quantidade de giro”.

A terceira definição destaca-se na atual conjuntura do ensino de ângulo, pois os PCN e as Matrizes de Referência da Prova Brasil ressaltam que os ângulos devem ser reconhecidos como mudança de direção ou giros.

A seguir estão colocadas algumas definições encontradas na literatura pesquisada:

2.3.1.1. Definição 1

- a) Um ângulo é a reunião de duas semi-retas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semi-retas AB e AC então essas semirretas são chamadas lados do ângulo, e o ponto A é chamado vértice do ângulo. Tal ângulo é denominado ângulo BAC ou ângulo CBA e representado por $\angle BAC$ ou $\angle CAB$, respectivamente. Algumas vezes, quando está claro no texto, é simplesmente denominado ângulo A e representado por $\hat{A}$. (REZENDE, 2000, p. 21)
- b) Chamamos de ângulo a figura formada por duas semi-retas com a mesma origem [...] As semi-retas são chamadas de lados e a origem comum, de vértice do ângulo. Um ângulo formado por duas semi-retas de uma mesma reta é chamado de ângulo raso. (BARBOSA, 2002, p. 22)
- c) Chama-se ângulo à reunião de duas semi-retas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares). (DOLCE, 1997, p. 20)

2.3.1.2. Definição 2

- a) Ângulo é a região do plano limitada por duas semi-retas de mesma origem. (AMARAL, 1997, p. 431)
- b) Denomina-se ângulo a região convexa formada por duas semi-retas não opostas que têm a mesma origem. (GIOVANNI, 1999, p. 159)

2.3.1.3. Definição 3

- a) Ângulo é a quantidade de inclinação entre as duas semirretas. (CASAS GARCÍA; LUENGO GONZÁLES, 2005, p. 203, tradução nossa)

- b) Ângulo é a quantidade de volta necessária para transladar uma semirreta para a posição de outra. (CASAS GARCÍA; LUENGO GONZÁLES, 2005, p. 203, tradução nossa)

Apesar de existirem várias definições para ângulo, todas elas apresentam alguma dubiedade, tornando necessária atenção redobrada dos professores na hora de explicitar o conceito de ângulo, para, com isso, evitar contradições e, conseqüentemente, não gerar confusão no aprendizado deste conceito.

Entre as três definições de ângulo, a primeira gera dubiedade quanto ao ângulo que é gerado pelas semirretas no vértice. Como definir os ângulos côncavos e convexos? E como definir um ângulo negativo? Dessa forma, temos sempre que recorrer a desenhos para identificar os ângulos, o que vai de encontro à natureza formal dos objetos matemáticos.

Para Casas García e Luengo Gonzáles (2005) a segunda definição de ângulo não serve para os ângulos de 0° , de 180° , de 360° ou maiores. Nem para ângulos negativos.

A terceira definição de ângulo permite considerar ângulos maiores que 360° e os negativos, porém se torna algo abstrato, pois não existe nada material para representá-lo, como um par de retas ou uma região no espaço. Porém, esse conceito se destaca dos demais por proporcionar uma visão dinâmica de ângulo, enquanto os outros passam ideia estática de ângulo.

Segundo Gadotti (2008), antes de aceitarmos uma definição como correta, podemos verificar se ela está bem construída, contextualizada e delimitada. Para essa autora, a definição está, também, ligada à sua utilidade dentro de uma realidade específica, de uma sala de aula específica, ou seja, do contexto e do perfil nos quais se enquadram os alunos e o professor.

[...] a seleção e organização de conteúdos deve levar em conta sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno e não deve ter como critério apenas a lógica interna da Matemática. (BRASIL, 1998, p. 57)

Cabe aos professores, diante de cada contexto, verificar a realidade em que os alunos estão inseridos, bem como os conhecimentos prévios dos aprendizes, e buscar desenvolver, de forma eficiente, o conceito de ângulo, antes de defini-lo.

2.3.2. Conceito de ângulo

O estudo de ângulo, considerando seu aspecto figurativo, é intuitivo e elementar. Entretanto, associado a ângulo têm-se vários conceitos, podendo ele ser definido e interpretado, como visto anteriormente, de diversas maneiras, onde cada uma destas definições traz consigo limitações e possibilidades.

De acordo com Gadotti (2008, p. 12) existe uma complexidade de se trabalhar com as ideias associadas a ângulo, pois ele “[...] é um conceito difícil de ser aprendido e difícil de ser ensinado, apesar de ser elementar da Geometria e aparentemente simples”.

Autores como Mitchelmore e White (2000), Diniz e Smole (1993) e Lorenzato (1995) defendem que o ensino de ângulo deve ser iniciado logo nos anos iniciais do ensino fundamental. Segundo Piaget (1960) *apud* Diniz e Smole (1993), uma criança leva muito tempo para compreender o conceito de ângulo, o que corrobora com a ideia de se começar seu estudo o mais breve possível.

De acordo com Diniz e Smole (1993), é importante que o conceito de ângulo seja desenvolvido tanto em contextos dinâmicos quanto estáticos. O descritor seis do tema I da Prova Brasil, diz que os alunos devem “reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos” (BRASIL, 2008, p. 152).

O valor de se trabalhar o conceito de ângulo em contextos dinâmicos pode ser justificado, de certa forma, pelos resultados encontrados por Mitchelmore e White (2000). Eles mostram, estatisticamente, que os alunos dos anos iniciais

sentem mais dificuldade na identificação de ângulo dentro do contexto de “giro”, pois não visualizam os dois lados do ângulo.

Diante do exposto e na contramão do que se vem sendo praticado por alguns professores e livros didáticos – resumindo o ensino de ângulo à mera apresentação da definição e uso de instrumentos de medida, a abordagem didática sugerida no capítulo 4 deste trabalho propõe que a conceituação de ângulo seja priorizada antes de defini-lo.

Geralmente, o trabalho com ângulos, iniciado na escola elementar, ocorre por volta da quinta ou sexta série, onde é colocada a definição formal de ângulo, qual seja, duas semi-retas de mesma origem, e, imediatamente, um transferidor é apresentado aos alunos, como se eles já conhecessem bem o assunto e tudo se resumisse ao uso adequado do transferidor e a uma lista de propriedades relativas a ângulos. (DINIZ; SMOLE, 1993, p. 1)

Para fundamentar, teoricamente, a abordagem didática, foi realizada uma pesquisa acerca de uma teoria que abarcasse o ensino do conceito de ângulo, o que foi perfeitamente suprido pela “teoria do desenvolvimento dos conceitos de ângulo por abstração progressiva e generalização” de Mitchelmore e White (2000), a qual se apresenta a seguir

2.4. ABSTRAÇÃO PROGRESSIVA E GENERALIZAÇÃO.

Mitchelmore e White (2000) apresentaram uma nova teoria sobre o desenvolvimento dos conceitos de ângulo. Eles propuseram que as crianças, progressivamente, identificassem semelhanças profundas entre as experiências físicas com ângulos. Num primeiro momento, eram classificadas em situações específicas, depois, em contextos mais gerais, e, por fim, em domínios abstratos. O conceito de ângulo mais geral foi chamado pelos autores de “conceito de ângulo padrão”, o qual será apresentado mais adiante.

2.4.1. Formação de conceito por abstração

As ideias fundamentais que subjazem à formação de conceitos utilizada por Mitchelmore e White (2000) são: classificação, semelhança, abstração e conceito, as quais, segundo estes autores, se relacionam, sucintamente, da seguinte maneira:

Abstrair é uma atividade pela qual nós nos damos conta de semelhanças [...] entre nossas experiências. Classificar significa coletar nossas experiências na base destas semelhanças. Uma abstração é algum tipo de mudança duradoura, o resultado da abstração é que nos permite reconhecer novas experiências como tendo as semelhanças de uma classe já formada. [...] Para distinguir entre abstração como uma atividade e abstração como seu produto-final, nós [...] chamaremos o último de conceito. (SKEMP, 1986, p. 21, *apud* MITCHELMORE; WHITE, 2000, p.211, tradução nossa)

De acordo com os autores supracitados, abstração é a formação de um novo objeto mental que representa uma classe de objetos ou experiências. As outras ideias que sustentam a teoria de tais autores são: a formação de conceitos cotidianos, a formação de conceitos matemáticos elementares e a formação de conceitos matemáticos formais.

2.4.1.1. Conceitos Cotidianos

De acordo com Mitchelmore e White (2000), as crianças aprendem a classificar objetos desde cedo. As semelhanças que unem objetos em classes cotidianas, frequentemente, relacionam-se ao propósito dos objetos e não são, normalmente, definíveis em termos de um único atributo.

Objetos cotidianos são classificados na base de um agrupamento de atributos. Alguns objetos possuem, nitidamente, todos os atributos importantes de uma classe; outros possuem atributos pertinentes, em um grau suficiente, para ser considerado membro daquela classe. Existem, ainda, outros objetos que possuem

uma seleção fraca dos atributos pertinentes, podendo ser questionados sobre sua classificação.

Em algum ponto, crianças começam a tratar classes de objetos como entidades únicas. Crianças que dizem "Uma xícara comporta água" ou jogam o jogo da "tesoura, papel, pedra" com as suas mãos, estão operando com classes e não com objetos individuais. Palavras como xícara e tesoura denotam conceitos — novos objetos mentais, criados fora das classes de objetos concretos que podem ser relacionados um ao outro sem referência para objetos específicos e concretos (GREENO, 1983, *apud* MITCHELMORE; WHITE, 2000, p. 218, tradução nossa).

Segundo Piaget (1970), o processo de formar conceitos cotidianos de uma classe de objetos cotidianos é chamado de abstração empírica. A visão de Piaget de formação de conceito como abstração ou separando as qualidades essenciais de uma classe de objetos dos objetos individuais é bastante difundida. Para Mitchelmore e White (2000), abstração é a formação de um novo objeto mental que representa uma classe de objetos ou experiências.

Podem ser criados vários níveis de classes cotidianas, as quais podem ser separadas em subclasses ou combinadas em classes superordenadas. É dito que o conceito associado a uma classe superordenada – por exemplo, automóvel – é uma ordem mais alta que os conceitos associados às classes de componente – por exemplo, “carro”, “ônibus” e “caminhão” – que são, por sua vez, de uma ordem mais alta que os subconceitos – por exemplo, Fiat, Honda, Chevrolet, etc. Podendo assim formar hierarquias de conceitos cotidianos.

As classes também podem crescer por meio de acréscimo. Se por exemplo for formado o conceito de “automóvel” por abstração de exemplos familiares como “carro” e “caminhão”, uma criança pode adicionar, posteriormente, novos exemplos como “ônibus” e “caminhonete”. Como resultado, o conceito original fica mais amplo. Tal processo é chamado generalização.

Segundo Mitchelmore e White (2000), os termos “generalização” e “abstração” são frequentemente confundidos na literatura. Entretanto, a diferença essencial entre eles é que a abstração cria um novo objeto mental – um conceito –

enquanto na generalização estende-se o significado de um conceito existente a outras situações.

2.4.1.2. Conceitos matemáticos elementares

Os conceitos matemáticos elementares são formados pelo mesmo processo de classificação e abstração dos conceitos cotidianos, entretanto os objetos classificados não são unicamente concretos ou mentais, envolvem-se, também, as relações entre tais. Mitchelmore e White (2000) exemplificam da seguinte maneira: o conceito de número é o resultado da abstração, não apenas das propriedades dos conjuntos dos objetos, mas também das propriedades das operações nesses conjuntos.

2.4.1.3. Conceitos matemáticos formais

De acordo com Mitchelmore e White (2000), conceitos matemáticos formais são abstrações de conceitos matemáticos elementares. Por exemplo, grupo e anel podem ser considerados como abstrações de conjuntos estruturados de números, funções, permutações e outras transformações. Porém, estes objetos estão agora definidos em termos de propriedades de operações indefinidas em elementos indefinidos.

2.4.2. **Aprendizagem de ângulo por abstração progressiva**

A teoria de Mitchelmore e White (2000) sugere que o desenvolvimento do conceito de ângulo passa por três fases sobrepostas de abstração. Ela aponta para uma classificação progressiva, aonde, cada vez mais, vão sendo refinadas as experiências dos alunos. Abaixo estão descritas, de forma sucinta, as três fases da abstração progressiva.

2.4.2.1. Fase 1 – Conceitos de ângulo situados

Muitos dos conceitos cotidianos que as crianças pré-escolares aprendem (tesoura, cruz, carrossel, deslizamento, colina, telhado, ponto de lápis, vara curvada e guindaste) podem ser utilizados por um adulto para desenvolver a ideia de ângulo. Mitchelmore e White (2000) denominam tais conceitos de “conceitos de ângulo situado”, resultando estes de uma classificação mental realizada pelos alunos a partir de experiências vivenciadas por eles. As referidas experiências são designadas pelos autores de “situações físicas de ângulo”. Um conceito de ângulo situado se limita às situações aparentemente semelhantes, as quais envolvem ações semelhantes e é experienciado em circunstâncias sociais semelhantes.

A partir de investigações realizadas por Mitchelmore e White (2000), observa-se que crianças formam muitos conceitos de ângulos situados exatamente nos primeiros anos escolares. Estes autores afirmam que uma criança de seis anos reconhece imediatamente o modelo de uma colina e mostra uma excelente compreensão do efeito das variações em sua declividade.

2.4.2.2. Fase 2 – Conceitos de ângulo contextual

As investigações de Mitchelmore e White (2000) indicam que, durante a escola primária, muitas crianças aprendem a usar vocabulários como "declive" e a classificar situações físicas de ângulo, a partir disso são formados contextos, os quais são denominados pelos autores de “contextos físicos de ângulo”.

Segundo Mitchelmore e White (2000), quando os alunos são indagados sobre exemplos de "coisas que se inclinam como uma colina", eles mencionam uma extensa quantidade de situações de declive. Os autores interpretam isto entendendo que as crianças, em alguma fase, identificam alguma semelhança entre colinas,

telhados, etc., e passam a chama-la de "declive.". De acordo com os autores, as crianças podem argumentar sobre declives de forma geral, assim indicando que "declive" se tornou um objeto mental – um conceito. Tais conceitos são chamados de “conceitos de ângulo contextual”.

2.4.2.3. Fase 3 – Conceitos de ângulo abstrato

Diferentemente das semelhanças entre as situações existentes num contexto físico de ângulo, as semelhanças entre contextos em um domínio de ângulo abstrato podem não ser tão óbvias.

Para Mitchelmore e White (2000), o reconhecimento de tais semelhanças requer, frequentemente, uma ação física ou mental por parte dos alunos. Segundo os autores, os estudantes demonstram, comumente, a semelhança entre um azulejo e uma rampa movendo fisicamente um dos cantos do azulejo para ajustar no espaço entre a rampa e a base horizontal. Percebe-se então que um giro é visto como sendo semelhante a um canto, guardando a posição inicial do objeto de giro na memória.

Uma classe de contextos de ângulo físicos que uma criança identifica como semelhante é um “domínio abstrato de ângulo”. Se a semelhança torna-se abstraída para formar um conceito, aonde este é denominado de “conceito de ângulo abstrato”.

Mitchelmore e White (2000) encontraram evidências de que às crianças, para apresentarem semelhanças entre diversos contextos físicos de ângulo, utilizaram vários conceitos de ângulo abstrato. Um desses conceitos abstratos foi o de “ponto”, usado por algumas crianças para relacionar cantos e interseções; outro foi o de “uma única linha inclinada”, usada para relacionar objetos de giro e declive; e, indubitavelmente, o mais comum foi o de “duas linhas inclinadas que se encontram num ponto”, utilizado para relacionar uma variedade de contextos. Este último é

chamado de “conceito de ângulo padrão” e a classe de contextos que ele se relaciona denomina-se “domínio de ângulo padrão”.

O conceito de ângulo padrão pode relacionar, efetivamente, todos os contextos físicos de ângulo. Nos diferentes contextos de ângulo, as duas linhas que o compõem podem ser indicadas tanto por objetos lineares, como por meio de extremidades retilíneas, bem como por linhas imaginárias – o importante é que sempre há duas linhas. A inclinação entre duas linhas pode apresentar significados diferentes dependendo do contexto – por exemplo, ponta, declividade ou quantidade de giros – porém, sempre existirá alguma significação ligada à inclinação relativa.

O conceito de ângulo padrão é o mais geral no sentido de, além destas duas características (duas linhas encontrando-se em um ponto e a sua inclinação relativa), não haver nada mais comum a todos os contextos físicos de ângulo.

De acordo com Battista (2007), a construção de uma formulação matemática formal para o conceito de ângulo abstrato padrão pode ser considerada o quarto estágio do desenvolvimento do conceito de ângulo.

Como foi observado nos parágrafos anteriores, percebe-se que, para o aluno formar o conceito de ângulo padrão, é necessário desenvolver os três estágios da abstração progressiva: inicialmente, desenvolvendo conceitos de ângulos em situações físicas experienciadas por eles, depois, classificando, de maneira refinada, as situações, formando, com isso, conceitos de ângulos contextuais e, finalmente, de ângulo padrão em domínios abstratos.

2.5. CONSIDERAÇÕES SOBRE OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

A seguir estão dispostas algumas considerações acerca da utilização e avaliação dos livros didáticos de matemática. São levadas em conta sugestões dos PCN, PNLD e autores da área.

2.5.1. Papel do livro didático.

As escolas da Rede Municipal de Ensino de Campina Grande (RMECG) participam do Programa Nacional do Livro Didático e os professores têm acesso ao Guia de Livros Didáticos, que os ajudam na escolha do livro que será adotado pela escola por, pelo menos, três anos.

Dentre os recursos didáticos que o professor utiliza em sala de aula, especial destaque merece o livro didático, tornando-se este um meio privilegiado para o professor e para o aluno no processo de ensino-aprendizado.

O livro didático contribui para o processo de ensino-aprendizagem como mais um interlocutor que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, tal texto é portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo de se conseguir aprendê-lo mais eficazmente – que devem ser explicitados no manual do professor. (BRASIL, 2007, p. 11)

Para Pais (2006), o aprofundamento neste interlocutor é de grande valia, devido à grande aceitação e utilização pelos nossos educadores e, também, por esse recurso didático expressar a consciência didática de uma comunidade de pesquisadores, representativa de um dado período evolutivo da área de Educação Matemática no Brasil.

O livro didático é o recurso mais utilizado na prática da maioria dos professores de Matemática. E, não é por menos, que este instrumento foi tão difundido entre os educadores; ele sempre acompanha as mudanças ocorridas na história.

O PNLD (BRASIL, 2007, p. 11) mostra que as funções mais importantes do livro didático na relação com o aluno são:

- a) Favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes;
- b) Propiciar o desenvolvimento de competências cognitivas, que contribuam para aumentar a autonomia;
- c) Consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos;

- d) Auxiliar na auto avaliação da aprendizagem;
- e) Contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania.

Segundo o PNLD de Matemática, para o professor, o livro didático desempenha, entre outras, as importantes funções de (BRASIL, 2007, p. 10):

- a) Auxiliar no planejamento e na gestão das aulas, seja pela explanação de conteúdos curriculares, seja pelas atividades, exercícios e trabalhos propostos;
- b) Favorecer a aquisição dos conhecimentos, assumindo o papel de texto de referência;
- c) Favorecer a formação didático-pedagógica;
- d) Auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno.

Contudo, os livros didáticos mostram uma linearidade acentuada, principalmente quando se observa a sequência fortemente ordenada e encadeada dos conteúdos. De acordo com Pais (2006) o formato usual do texto escolar é tão forte que chega, em casos extremos, a sobrepôr a sequência de ações feitas pelo professor na sala de aula, como também a ordem na qual os conteúdos são apresentados e que, em Matemática, essa sobreposição é ainda mais forte do que em outras disciplinas, tendo em vista o componente mais acentuado da formalidade.

[...] o livro didático é recurso auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Não pode, portanto, ocupar papel dominante nesse processo. Assim, cabe ao professor manter-se atento para que a sua autonomia pedagógica não seja comprometida. Não é demais insistir que, apesar de toda a sua importância, o livro didático não deve ser o único suporte do trabalho pedagógico do professor. É sempre desejável buscar complementá-lo, seja para ampliar suas informações e as atividades nele propostas ou contornar suas deficiências, seja para adequá-lo ao grupo de alunos que o utilizam. (BRASIL, 2007, p. 12)

Uma das atribuições do professor é favorecer o elo entre o conhecimento, a realidade dos alunos, a comunidade em que a escola está inserida e o livro didático. Recomenda-se que, em sala de aula, o professor não se oriente apenas pelos livros didáticos. É importante que o educador sempre busque autonomia em suas aulas, utilizando o livro didático apenas como recurso auxiliar no processo ensino-aprendizagem.

2.5.2. Critérios de avaliação do livro didático de matemática.

Pais (2006) sugere que a análise do livro didático, pelo professor, deve ser difundida, valorizada e realmente concretizada. Nesta direção, ele indica como norteadores os quatro critérios seguintes, citando-os como condições necessárias para realizar uma educação matemática compatível com as tendências atuais.

2.5.2.1. Correção conceitual

Os livros não podem trazer erros conceituais e a não correção conceitual é um dos critérios de eliminação das coleções didáticas. Existem frases nos livros que levam a interpretações dúbias, sendo percebida apenas pelo leitor com certo domínio do conteúdo. Geralmente, por não explicitar claramente os conceitos, o texto aparenta possuir contradições relacionadas ao entendimento do conteúdo.

Desse modo, são eliminadas as coleções que:

- a) Apresentarem, de modo errado, conceitos, imagens e informações fundamentais das disciplinas científicas em que se baseiam;

- b) Utilizarem, de modo errado, esses conceitos e informações em exercícios, atividades ou imagens, induzindo o aluno a uma equivocada apreensão de conceitos, noções ou procedimentos.

2.5.2.2. Diversidade de representações

Uma boa coleção de livros didáticos deve ser contemplada com uma variedade razoável de representações, pois, com isso, o aprendizado se tornará mais eficaz. A variedade de situações, uma contextualização mais ampla, exercícios diversos, experiências, etc., levam o educando a uma aprendizagem significativa e torna viável a adoção de uma coleção deste nível por qualquer instituição educacional em qualquer lugar do Brasil.

Os livros didáticos devem ser contemplados por uma abordagem interdisciplinar contendo textos variados, números, equações, figuras, tabelas, gráficos, símbolos, desenhos, fotos e outros elementos. Para uma aprendizagem ser realmente significativa, o aluno deve notar as diversas situações nas quais os conteúdos estão contextualizados. Assim, o livro didático precisa trazer diferentes situações, exercícios, experiências, observações que facilitem o aprendizado para o aluno.

2.5.2.3. Aspectos linguísticos

Se o aluno não entende o que está escrito no livro didático, se torna impossível o aprendizado a partir deste recurso. Construções complexas de ideias em forma de parágrafos, utilização de termos inacessíveis, obscuridades no texto etc., levam o aprendiz ao desânimo e, provavelmente, ao abandono da literatura Matemática.

Para Pais (2006), os livros didáticos devem apresentar uma linguagem adequada ao aluno e aos objetivos a serem alcançados. O saber escolar deve aparecer de forma compatível com o nível educacional a que se destina, envolvendo a limpidez do texto em língua materna, o vocabulário conexo com a Educação Matemática, além do equilíbrio entre a linguagem cotidiana e as formas diversas nas quais se apresenta a linguagem científica.

2.5.2.4. Argumentação no livro didático

Os livros didáticos devem trazer consigo boas argumentações para as afirmações neles contidas. O aprendizado torna-se mais eficiente na medida em que o educando vivencia diversas maneiras de tratar da argumentação das afirmações contidas em Matemática. Na produção das ciências, o objetivo da argumentação é validar os enunciados, os teoremas, as fórmulas e os demais modelos.

De acordo com Pais (2006), os livros didáticos devem levar em consideração os conhecimentos prévios dos alunos a quem se destinam, e os exercícios não devem se limitar a respostas prontas, trazendo também, questões de solução aberta, o que motiva ainda mais o aluno, pois estará participando, ativamente, das resoluções dos exercícios.

O livro didático, por meio de suas atividades, pode, ainda, ajudar a desenvolver atitudes nos alunos, por meio de propostas onde se trabalhe em equipe, e com a supervisão do mestre, os educandos estarão evoluindo e desenvolvendo atitudes de convivência, como cooperação, solidariedade, respeito, tolerância, etc.

Uma das tarefas compartilhadas pelo professor e pelo livro é a apresentação do conteúdo de forma a valorizar as múltiplas competências, tais como anunciar as condições da sociedade da informação. Entre tais competências, estão interpretação e produção de textos, observação, argumentação, organização e tratamento de dados, análise, síntese, comunicação de idéias, formação de hipóteses, memorização, compreensão, trato com o método científico, trabalho em equipe. O livro pode ainda favorecer o

desenvolvimento da capacidade intelectual do aluno, se propuser atividades que o levem a fazer conjecturas e estimativas, tal como acontece em diversas situações do cotidiano. (PAIS, 2006, p. 56-57)

3. METODOLOGIA

A atual pesquisa apresenta-se como uma abordagem quanti-qualitativa. Entretanto, em decorrência dos objetivos, ela tanto é exploratória, pois busca esclarecer algumas inquietações acerca do ensino do conceito de ângulo, quanto experimental, por tentar evidenciar as relações entre o aprendizado dos alunos e a teoria da abstração progressiva. Quanto aos procedimentos de produção, esta é uma pesquisa de campo, pois buscou as informações diretamente com a população pesquisada – professores e alguns alunos da RMECG.

Apesar de a RMECG possuir 15 escolas que trabalham com os anos finais do ensino fundamental (Anexo A), o universo da pesquisa foi constituído por uma dentre tais.

Os sujeitos da pesquisa foram 22 professores de Matemática da RMECG, que representam 58% dos 38 existentes⁹ – o restante ou não foi encontrado ou se negou a colaborar. Inserem-se, também, como sujeitos da pesquisa, 16 alunos¹⁰ de uma turma do 6º ano do ensino fundamental de uma escola integrante da mesma rede de ensino. Foram analisados, ainda, os livros didáticos mais utilizados pelos professores supracitados.

Quanto à produção dos dados, foram utilizados: questionário (Apêndice A), pré-teste e pós-teste (Apêndice B); entrevistas informais; anotações de campo; atividades e cadernos de desenho.

Para verificar como os professores de Matemática da RMECG abordam o conceito de ângulo em turmas do sexto ano do ensino fundamental, foi aplicado um questionário (Apêndice A) contendo dez questões fechadas e abertas. As fechadas solicitavam do professor o ano em que leciona, livro didático utilizado, saber se ele

⁹ Dados fornecidos pela Secretaria de Educação da Prefeitura Municipal de Campina Grande.

¹⁰ Apesar da caderneta do professor indicar um total de vinte alunos, o fato de dois deles terem sido transferidos, um desistir de estudar e outro não frequentar número de aulas suficiente para ser avaliado, foram excluídos da pesquisa.

ensina Geometria, se aborda o conceito de ângulo, qual a forma didática de introdução deste conceito, em que ano, quais as ideias de ângulos trabalhadas, além de uma questão aberta, solicitando sugestões que possam ajudar no ensino de ângulos. Foram realizadas, ainda, entrevistas informais com cinco professores, nas quais inexisteram registros audiovisuais, tentando-se obter respostas espontâneas; as observações relevantes foram registradas no caderno de campo, logo após os encontros.

Junto com a elaboração do questionário, criou-se um arquivo, à parte, com as pretensões de cada pergunta. Inicialmente, o questionário foi testado com professores da rede de ensino de outras cidades, os quais participavam de um curso de especialização em ensino de matemática, oferecida pela UEPB. Após o teste, foram realizadas algumas correções, sendo o referido aplicado, definitivamente, aos professores sujeitos dessa pesquisa. Dos vinte e dois questionários respondidos, seis o foram por e-mails e dezesseis por contato direto, em visitas às escolas.

Para investigar se os professores que efetivam o conceito de ângulo o fazem em consonância com os descritores da Prova Brasil,¹¹ observou-se a oitava pergunta do questionário, que foi complementada com respostas dadas pelos professores entrevistados. Observou-se, na revisão da literatura, que o único descritor da Prova Brasil que aborda ângulo é o sexto do tema 1.

Quanto à análise dos livros didáticos de matemática, *a priori*, foi preciso identificar quais eram os mais utilizados pelos professores sujeitos da pesquisa. Para tanto, se valeu das perguntas 2 e 3 do questionário, as quais, respectivamente, buscavam descobrir se o professor utilizava o livro didático em suas aulas e quais eram tais livros. Foram selecionados os livros com aceitação de pelo menos 25% dos professores.

¹¹ Os descritores da Prova Brasil indicam habilidades que deveriam ser desenvolvidas numa fase específica do ensino, o que interessou a esta pesquisa, foi o descritor seis dos anos finais do ensino fundamental. Os descritores contemplam apenas os objetivos considerados mais relevantes e possíveis de serem mensurados em uma prova para, com isso, obter informações que forneçam uma visão real do ensino.

No que diz respeito à consonância do conceito de ângulo, abordado pelos livros didáticos e o descritor seis, do tema 1 da Prova Brasil, foi feita uma minuciosa leitura, tanto no corpo do texto, quanto no manual do professor.

Com o interesse de investigar os conhecimentos prévios dos alunos foi aplicado um pré-teste (Apêndice B) na primeira aula da abordagem didática.

Para desenvolver, aplicar e analisar a abordagem didática sobre o conceito de ângulo partiu-se de uma revisão literária sobre o tema, na qual foi descoberta a teoria do desenvolvimento do conceito de ângulo por abstração progressiva e generalização de Mitchelmore e White (2000), a qual embasou boa parte da abordagem; porém, existiu a necessidade inserir atividades que abarcassem o conceito de ângulo dinâmico, motivo pelo qual foram adaptadas algumas atividades de Rêgo e Rêgo (2004) e Diniz e Smole (1993). O detalhamento da construção e aplicação de tal abordagem está descrito no próximo capítulo.

Após a aplicação e análise da abordagem didática, foi desenvolvido um módulo didático¹² sobre o ensino de ângulo no 6º ano do ensino fundamental (Apêndice C), o qual poderá ser utilizado por outros professores em suas aulas, podendo, inclusive, ser adaptado para outras realidades.

¹² Produto (ou processo) final exigido pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, pois, o mestrado é profissional.

4. ABORDAGEM DIDÁTICA.

O ensino de ângulo, de uma forma macro, abrange o desenvolvimento do seu conceito, de habilidades para criá-los e medi-los, da sua definição, da habilidade em operar com eles, tanto graficamente quanto numericamente, de classificá-los e conhecer suas propriedades. No entanto, a presente abordagem buscou desenvolver apenas o conceito de ângulo e algumas habilidades para criá-los e medi-los.

Doravante, serão apresentados os procedimentos para criação e aplicação de uma abordagem didática diferente das encontradas nos livros didáticos adotados pelos professores sujeitos da pesquisa.

O conceito de ângulo padrão foi desenvolvido por meio de um processo, o qual abarcou as três fases da abstração progressiva (conceito de ângulo situado, conceito de ângulo contextual e o conceito de ângulo abstrato), sugeridos por Mitchelmore e White (2000) e apresentados na revisão da literatura.

Desenvolvida no transcorrer de seis dias não consecutivos, a abordagem totalizou 16 horas-aula, distribuídas da seguinte forma: o 1º e o 4º dias foram de 2 horas-aula cada um, e os demais de 3 horas-aula. Todas as aulas ocorreram em uma turma do 6º ano do ensino fundamental, anteriormente citada no capítulo metodologia.

A professora da turma esteve presente em todas as etapas da abordagem didática; na primeira, ela conduziu a aula; nas demais, filmou as aulas. Todas as aulas foram filmadas por uma câmera móvel, focando os principais momentos.

A abordagem didática foi dividida em seis etapas, a saber: sondagem; construção do material didático inicial; desenvolvimento das 1ª e 2ª fases da abstração progressiva; atividades para desenvolver o conceito de ângulo padrão em contextos de giro; desenvolvimento da 3ª fase da abstração progressiva; por fim, medição de ângulos.

4.1. OBJETIVOS DA ABORDAGEM DIDÁTICA

- a) Desenvolver o conceito de ângulo padrão partindo de situações específicas, em seguida, dos contextos de giro limitado e ilimitado, canto e declive e, por fim, dos domínios abstratos;
- b) Fazer ligações entre tais conceitos, buscando o desenvolvimento do conceito padrão de ângulo;
- c) Identificar e manusear instrumentos de criação e medição de ângulos.

4.2. RECURSOS

Alguns dos recursos abaixo foram utilizados como material didático, outros se prestaram à confecção deste, havendo ainda, aqueles que foram aproveitados como apoio nas atividades.

- a) Cartolina ou papelão;
- b) Computador e impressora;
- c) Tesoura;
- d) Cola branca;
- e) Canudos flexíveis;
- f) Giz ou pincel de quadro branco;
- g) Régua;
- h) Compasso;
- i) Esquadro;
- j) Transferidor;
- k) Caderno de desenho;
- l) Bússola.

4.3. DESENVOLVIMENTO

A seguir, apresenta-se o desenvolvimento de todas as etapas da abordagem didática, bem como algumas observações feitas em sala de aula.

4.3.1. 1ª Etapa – Sondagem

Esta etapa foi a única conduzida pela professora da turma¹³; ao término desta etapa, ela comunicou aos alunos que, a partir das próximas aulas, durante cinco dias, quem iria desenvolver o restante das atividades seria o professor Kléber¹⁴, como de fato cumpriu-se.

Nesta etapa, buscou-se identificar os conhecimentos prévios dos alunos, bem como descobrir quais eram as expectativas deles em relação ao ensino de ângulo. Para tanto foram seguidos os passos a seguir elencados:

- a) No primeiro momento, foram explicados aos alunos os objetivos da abordagem, em seguida discutiu-se o significado de ângulo, bem como a existência dele no dia-a-dia, na sala de aula, etc..
- b) Após a discussão, os alunos assinaram a lista de presença (Apêndice D). Foi-lhes explicado que a lista serviria para identificá-los – a finalidade foi preservar a identidade dos alunos; eles passaram a ser referenciados pelo número correspondente à assinatura, por exemplo: aluno 1, aluno 15 etc.
- c) Em seguida, o pré-teste foi distribuído. Intitulado “exercícios de sondagem”, ele foi dividido em duas partes (Apêndice B), pois algumas questões da segunda parte poderiam influenciar em algumas respostas da

¹³ Professora que cedeu sua sala de aula para que fosse desenvolvida a abordagem didática. No Anexo B encontram-se as autorizações por escrito da professora e da diretora da escola.

¹⁴ O autor desta abordagem didática e desta dissertação estava presente na primeira etapa, filmando a aula.

primeira. Porém, elas foram aplicadas numa mesma aula, sendo a segunda entregue ao aluno apenas quando ele devolvesse a primeira. A finalidade do pré-teste foi constatar quais conhecimentos prévios os alunos traziam acerca de ângulo e de outros conceitos geométricos, bem como fazer um comparativo entre ele e o pós-teste¹⁵, aplicado no final da abordagem. Os dados produzidos foram considerados no planejamento da intervenção didática, visando a explicitar atividades que possibilitassem ao aluno o desenvolvimento do conceito de ângulo. Abaixo, estão elencados os objetivos de cada uma das questões do pré-teste:

- Na primeira questão da primeira parte, foi verificado se o aluno associava conceitos primitivos da Geometria, representados de forma abstrata (escrita), às respectivas representações geométricas semiconcretas (figuras);
- Por intermédio da segunda questão da primeira parte, observou-se se os alunos relacionavam as representações do cotidiano (fotos) às figuras correspondentes.
- Com a terceira questão da primeira parte, foi verificado se o aluno associava alguns conceitos geométricos primitivos às representações geométricas correspondentes, ambas apresentadas da forma escrita;
- Por meio da quarta questão da primeira parte, foi identificado se o aluno reconhecia ângulo como a união de duas semirretas de mesma origem;
- Na última questão da primeira parte, foi observado se os alunos identificavam ângulos em várias figuras do cotidiano.
- O primeiro exercício da segunda parte teve por finalidade descobrir se o aluno associava a medida de um ângulo à sua abertura e não ao comprimento dos segmentos de reta que compõem os lados do ângulo;

¹⁵ O Pós-teste e o pré-teste são idênticos, com a única diferença de ter sido aplicado no final da abordagem didática.

- Na segunda questão da segunda parte, foi verificado se os alunos reconheciam o “grau” como unidade padrão de medida de ângulo.
- Com a terceira questão da segunda parte, foi observado se os alunos reconheciam o transferidor como um instrumento de medição de ângulo, bem como se conheciam uma das notações de ângulo ($x\hat{O}y$) relacionando-a à medida de ângulo;
- Por meio da quarta questão da segunda parte, foi identificado se o aluno diferenciava o ângulo reto dos não retos, como sugere o descritor seis da Prova Brasil;
- O quinto exercício da última etapa procurou observar se os aprendizes relacionavam ângulos com movimento de giro do corpo.

4.3.2. 2ª Etapa – Construção do material didático

A construção do material pode ser realizada em sala-de-aula, entretanto, no presente estudo, devido ao tempo que seria gasto, o material já foi levado pronto. O importante é que, na terceira etapa, as representações em cartolina estejam prontas.

Na escolha das representações dos ângulos situados, foram levadas em conta algumas das situações indicadas pelos alunos no pré-teste (borracha e cama na Figura 3), outras de exemplos citados por Mitchelmore e White (2000) (Figura 1), e as demais foram adicionadas a partir das experiências do autor.

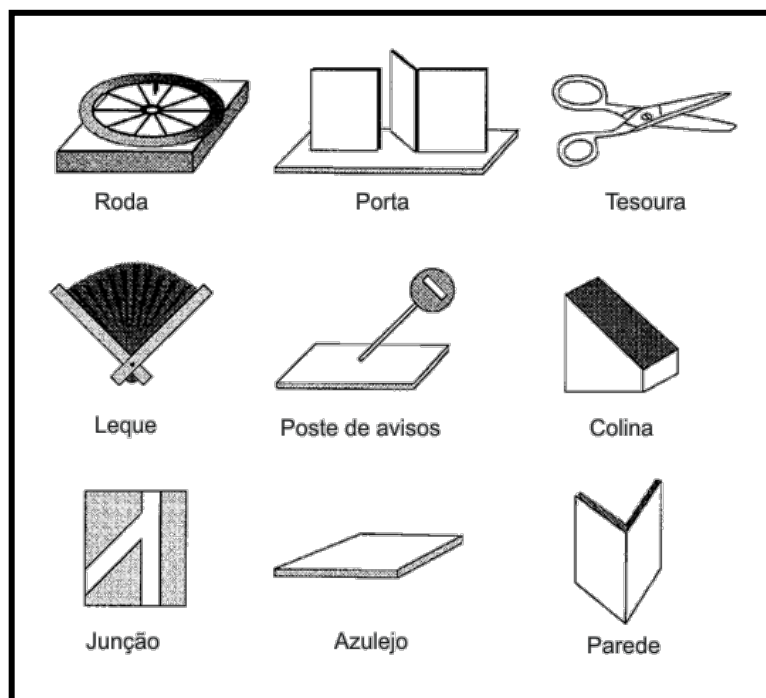


Figura 1 – Modelos de situações de ângulos. (MITCHELMORE; WHITE, 2000, p. 221).

As nove situações de ângulo, que estão representadas na Figura 1, foram selecionadas por Mitchelmore e White (2000) dentre vários contextos físicos de ângulo. As primeiras quatro situações estão inseridas no domínio de ângulo abstrato dinâmico e as demais no estático.

Na presente abordagem didática, foram utilizados os seguintes contextos de ângulo: inclinação, canto, giro limitado e giro ilimitado. Os quais estão representados, respectivamente, por meio das Figuras 2, 3, 4 e 5.

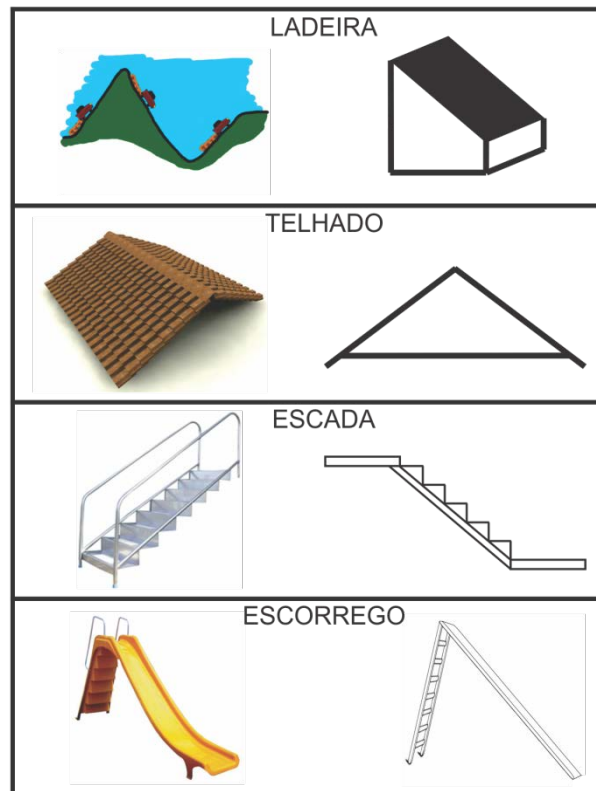


Figura 2 – Representações do contexto de declive.

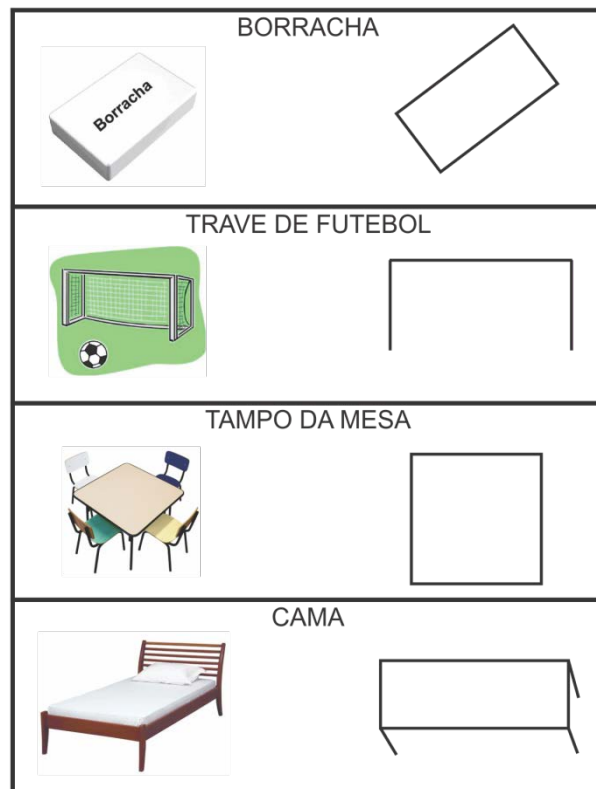


Figura 3 – Representações do contexto de canto.

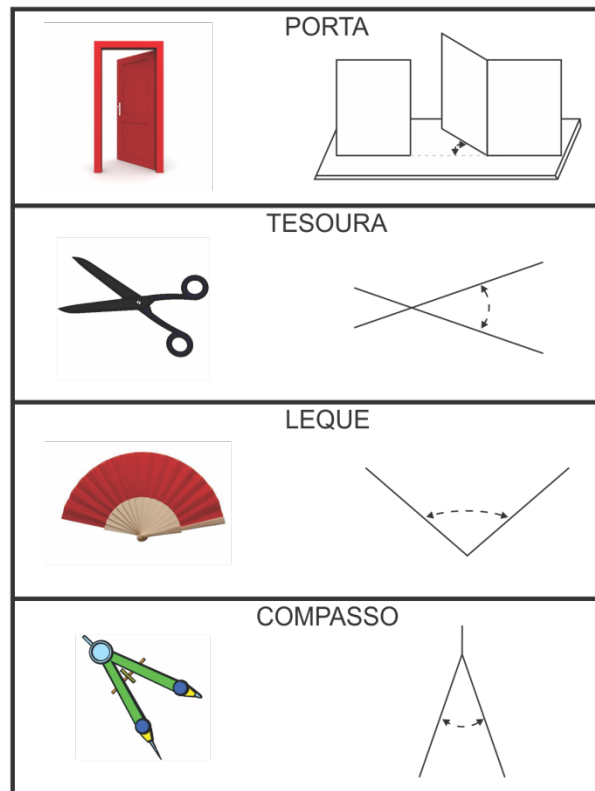


Figura 4 – Representações do contexto de giros limitados.

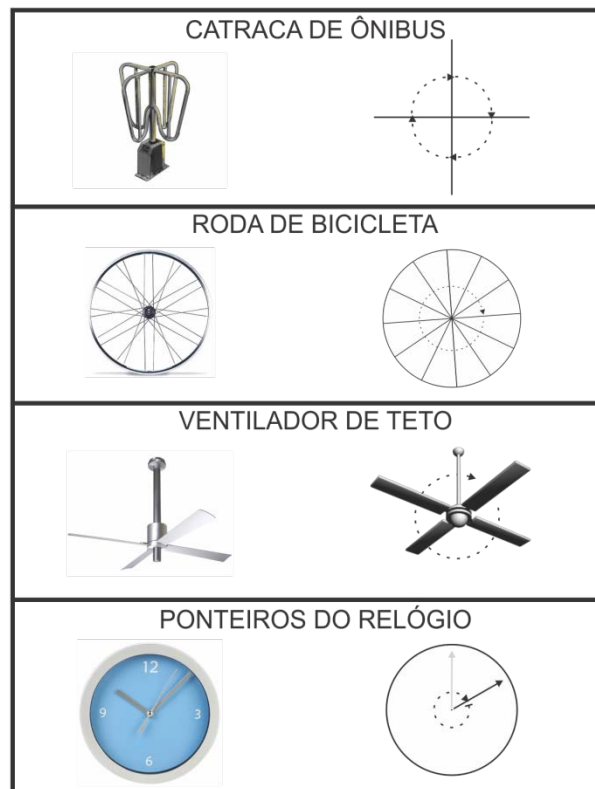


Figura 5 – Representações do contexto de giros ilimitados.

Cada situação física de ângulo foi representada por figuras, as quais foram impressas em folhas de papel A4; foram criadas e impressas também representações geométricas de cada situação, para serem coladas no verso da cartolina, conforme procedimento descrito a seguir.

A Montagem do material foi simples. Para efetivar esta etapa, foram realizados os seguintes procedimentos:

- a) Impressão das figuras e das respectivas representações geométricas;
- b) Colagem das mesmas em pedaços retangulares de cartolina, para que ficassem rígidas (Figura 6).
- c) Colagem das representações geométricas no verso da cartolina.

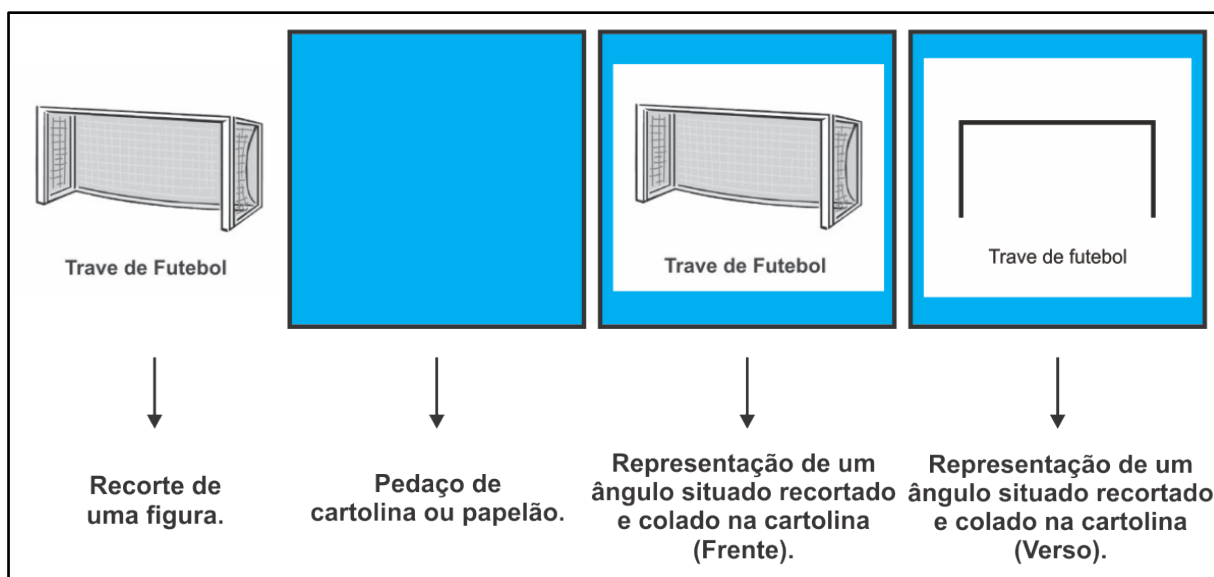


Figura 6 – Procedimentos para criação das representações de situações físicas de ângulo.

4.3.3. 3ª Etapa – Desenvolvimento das 1ª e 2ª fases da abstração progressiva

A seguir, estão descritos os procedimentos realizados para criação e aplicação das atividades embasadas nas duas primeiras fases da abstração progressiva.

4.3.3.1. Desenvolvimento da 1ª fase da abstração progressiva

Por meio da análise dos pré-testes e com o auxílio do material didático, o professor oportunizou aos educandos uma situação favorável ao desenvolvimento da primeira fase da abstração progressiva – o conceito de ângulo situado. Para tanto, foram realizados os seguintes procedimentos:

- a) Com todas as representações prontas, o professor solicitou que cada aluno escolhesse uma figura;
- b) Cada aluno mostrava ao restante dos colegas a figura escolhida;
- c) No momento em que eles mostravam suas figuras, o professor os indagava a respeito da existência do ângulo naquela situação – a partir disso, iniciavam-se debates acerca da existência de ângulos nas diversas situações;
- d) Em seguida, o aluno mostrava o verso da cartolina, o qual continha a representação geométrica; com isso, os alunos discutiram em busca de elos entre a figura e sua representação;
- e) Depois da escolha das figuras, foram entregues, aos alunos, canudos flexíveis, régua, transferidores, esquadros, tesouras e cadernos de desenho – ficou certo que no final da abordagem, eles devolveriam todo o material, exceto o transferidor que ficou como lembrança;
- f) Após o professor entregar os canudos flexíveis, foi pedido aos alunos que representassem o(s) ângulo(s) que eles visualizavam na figura, por meio dos canudos;
- g) Depois de repetir este processo com todos os alunos da sala, o professor solicitou que eles representassem no caderno de desenho o ângulo representado com os canudos;
- h) Os alunos, individualmente, mostraram aos demais colegas da turma, os ângulos identificados por eles a partir dos canudos;

- i) Aproveitando as situações físicas de ângulo existentes na escola, foi pedido aos alunos que procurassem fazer relações entre elas e as escolhidas por eles; a partir desse momento, eles foram apontando (ângulo estático) ou movendo (ângulo dinâmico) os objetos até ficarem com a mesma “abertura” do modelo criado com os canudos;
- j) Por fim, foi solicitado aos alunos que desenhasssem os ângulos encontrados por eles no caderno de desenho.

4.3.3.2. Desenvolvimento da 2ª fase da abstração progressiva

Além de auxiliar na formação dos grupos, o educador levou os alunos a perceberem as ligações existentes entre os conceitos de ângulos situados que estavam inseridos nos contextos físicos de ângulo.

O professor levantou questões que fizeram com que os alunos refletissem sobre possíveis ligações entre os conceitos de ângulos situados. A seguir, estão elencadas algumas das perguntas proferidas pelo professor:

- a) O que se “inclina” igual ao telhado?
- b) Tem outro objeto que gira igual à porta da sala?
- c) Existe algo que gira parecido com um ventilador?
- d) Vocês conhecem algo que possua cantos iguais aos do tampo de uma mesa?

Por meio das discussões, os alunos foram percebendo semelhanças entre as situações físicas de ângulo presentes nas figuras escolhidas por eles e as dos outros colegas.

O professor solicitou aos alunos que verificassem com os colegas quais situações eram parecidas com as deles. Foi, então, formando agrupamentos, os quais eram compostos por alunos que possuíam figuras do mesmo contexto.

O professor afirmou que cada grupo (contexto) era composto por quatro figuras. Os alunos começaram a interagir entre si, comparando as figuras e discutindo possíveis relações entre elas. Com isso, começaram a se inserir em um grupo homogêneo que pertencia a um mesmo contexto. Então, a sala ficou dividida em quatro grupos, que correspondiam aos quatro contextos físicos de ângulo abordado;

Em seguida, o professor escreveu no quadro, com ajuda dos alunos, os nomes dos contextos que cada grupo estava representando, a saber: inclinação, canto, giro limitado e giro ilimitado;

Com os grupos formados e os nomes dos contextos elucidados, cada grupo discutiu entre si as semelhanças encontradas por eles nas situações e, com os canudos flexíveis, fizeram comparações entre os ângulos, registrando nos cadernos de desenho os ângulos contextuais encontrados.

4.3.4. 4ª Etapa – Atividades para desenvolver o conceito de ângulo padrão em contextos de giro

Devido à literatura apontar possíveis dificuldades dos alunos em identificar o conceito de ângulo padrão nos contextos de giro, foram desenvolvidas três atividades visando a dirimir este problema.

Diante do exposto, esta abordagem didática promoveu atividades que permitem ao aluno identificar, em seus movimentos de giros, uma posição inicial e outra final, as associando aos lados do ângulo; com isso, acredita-se que tais alunos desenvolvam o conceito de ângulo padrão neste contexto.

4.3.4.1. 1ª atividade: Conhecendo os giros de uma volta, meia volta e $\frac{1}{4}$ de volta.

O professor pediu para os alunos ficarem de frente para uma parede e que levantassem um dos braços. Foi marcada no chão uma seta representando a posição inicial do braço. Em seguida, foram realizados os seguintes procedimentos:

- a) Foi solicitado aos alunos que, sem sair do lugar, realizassem um giro até voltarem para a mesma posição. O professor, então, afirmou que o movimento que eles realizaram foi o de um “giro completo”. Seguidamente, comparou aquele movimento com os de outros objetos como portas, volantes de carro, ponteiros de relógio, rodas, etc. e os indagou a respeito de coisas que também giravam.
- b) Pediu aos alunos que girassem até que ficassem de costas para parede. Em seguida, pediu para que dissessem a quantidade do giro dado por eles – a maioria respondeu meia volta;
- c) Depois, o professor pediu para os alunos que girassem até ficarem ombro-a-ombro com os colegas, e perguntou se o giro dado foi de maior ou menor que meia volta. Em seguida, pediu para que descrevessem o movimento – muitos disseram que era a metade da metade de uma volta, com o auxílio do professor eles entenderam que aquele era um giro de $\frac{1}{4}$ de volta;
- d) Ao final, o professor fez as seguintes perguntas:
 - Qual dos três movimentos feitos por vocês é o maior?
 - Preciso de quantas meias-voltas para obter uma volta?
 - Quantos giros de um quarto de volta é necessário para atingir meio giro? E para chegar a uma volta completa?
- e) Foi pedido aos alunos que desenhasssem, no caderno de desenho, os seguintes ângulos:
 - Desenhem um ângulo de meia volta;
 - Desenhem um ângulo de $\frac{1}{4}$ de volta;

- Desenhem um ângulo de uma volta;
- Desenhem um ângulo de $3/4$ de volta;
- Desenhem um ângulo de $4/4$ de volta;
- Desenhem um ângulo de $2/4$ de volta;

4.3.4.2. 2ª atividade: Aplicando os giros de uma volta, meia volta e $1/4$ de volta.

No início da aula, o professor entregou a atividade intitulada “mapa da sala” (Apêndice E), na qual constava uma imagem (Figura 7) representando aquela sala-de-aula. Foi solicitado aos alunos que formassem duplas. Um dos alunos ficava de olhos vendados e o outro aluno da dupla o conduzia, utilizando comandos verbais, até chegar à carteira onde ele sentava comumente.

Para tanto, o segundo aluno só poderia utilizar os comandos: ande tantos passos para frente, pare, ande tantos passos para trás, gire um quarto de volta, gire meia volta pra direita ou esquerda.

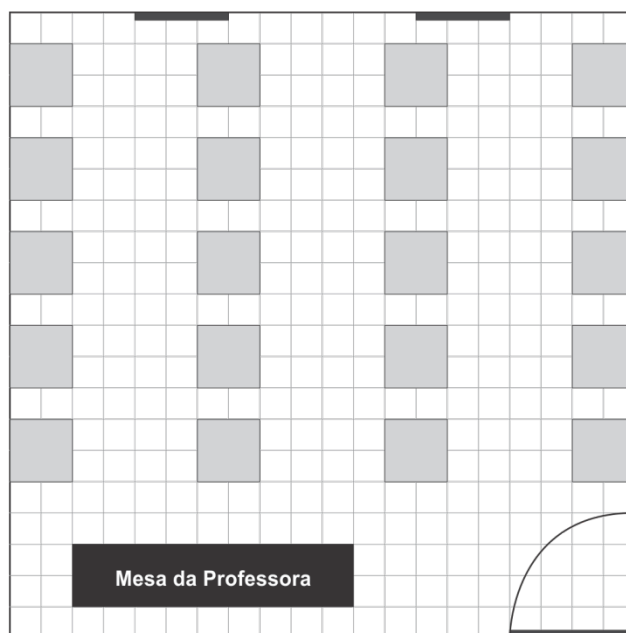


Figura 7 – Mapa da sala.

Enquanto uma dupla realizava a atividade, o par vizinho desenhava no mapa da sala o trajeto feito por aqueles. No verso da atividade (Apêndice E), os alunos responderam alguns questionamentos, dentre tais atividades, havia uma na qual a dupla deveria descrever, a partir dos comandos que foram utilizados, todo o percurso realizado.

4.3.4.3. 3ª atividade: Direção, sentido, localização e a rosa dos ventos.

A terceira atividade teve início com uma discussão a respeito do significado de direção, sentido e da rosa dos ventos, bem como sobre a utilidade desta última. Em seguida, foi distribuído o texto “SAIBA MAIS!” (Apêndice F), o qual apresentava cada um destes conceitos.

Primeiro, o texto foi lido juntamente com os alunos; depois, foi-lhes perguntado se poderiam dar exemplos de direções e sentidos, os quais, a princípio, foram confusos, mas, depois de alguns exemplos dados pelo professor, melhor compreendidos.

Com o auxílio de uma bússola, os alunos aprenderam como localizar o norte magnético e, a partir dele, juntamente com os giros, construíram os pontos cardeais (Figura 8), da seguinte maneira:

- a) Os alunos afastaram as cadeiras, até que o centro da sala ficasse livre;
- b) Foi escolhido um aluno para ficar no centro da sala;
- c) Com um pincel de quadro branco, este aluno pintou, no chão da sala, que era de cerâmica branca, seguindo as instruções que os colegas forneciam – dando giros de meia volta e quartos de volta – até construir as quatro primeiras pontas da rosa dos ventos, que representaram os quatro pontos cardeais;
- d) Foram relacionados o leste e o oeste com o nascente e o poente do sol, respectivamente;

- e) Foi explicado o que era um giro de $\frac{1}{8}$ de volta e, com isso, os alunos construíram os pontos colaterais (Figura 8);
- f) Ao final, foi solicitado aos alunos que desenhassem a rosa dos ventos no caderno de desenho, identificando os ângulos.

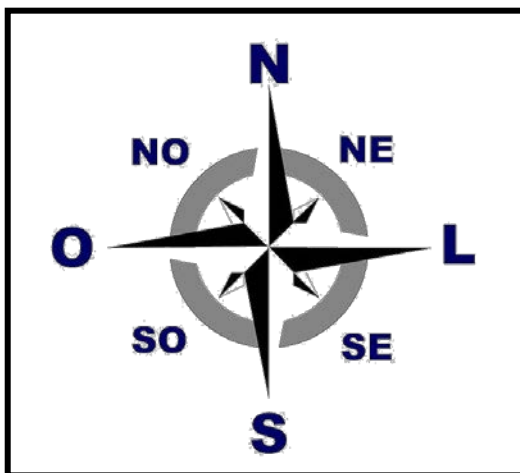


Figura 8 – Rosa-dos-ventos indicando os pontos cardeais e colaterais.

4.3.5. 5ª Etapa – Desenvolvimento da 3ª fase da abstração progressiva

As atividades dessa etapa foram realizadas em grupo. Buscou-se, com isso, propiciar aos alunos momentos fecundos de atitudes como participação, interação e colaboração.

Foi solicitado aos alunos que ficassem em pé e agrupados de acordo com os contextos estabelecidos na 3ª etapa. Cada grupo escolheu um aluno para representá-los. Estes representantes mostraram ao restante da turma os ângulos observados por eles em cada figura do seu contexto.

O professor, então, fez as seguintes perguntas:

- a) Vocês percebem alguma semelhança entre estes contextos?
- b) É possível perceber que alguns ângulos estão presentes em situações de movimento e outros em situações estáticas?

c) Quais são as situações que possuem movimento? E as paradas?

Com isso, alguns alunos fizeram ligações entre os diversos contextos de ângulo, criando domínios abstratos e, conseqüentemente, formando os conceitos de ângulo abstrato dinâmico e ângulo abstrato estático.

Foi sugerido pelo professor que os grupos formados a partir dos dois domínios interagissem e procurassem, com os canudos flexíveis, encontrar semelhanças e registrarem no caderno de desenho.

No final, todos os grupos se uniram e foi aberta uma discussão entre eles acerca das semelhanças entre todos os ângulos ali presentes, chegando-se a um consenso de que, independente da situação do contexto ou domínio, um ângulo é sempre formado por duas linhas de mesma origem.

4.3.6. 6ª Etapa – Medição de ângulos

Após a conceituação, foi iniciado o trabalho de medição de ângulos. Para tanto, os alunos foram apresentados à unidade padrão de medida de ângulo, o grau, e a alguns instrumentos de construção e medida de ângulos.

Foi colocado que medir algo, nada mais é, que compará-lo. Ou seja, só é possível medir alguma coisa, comparando-a com outra coisa de mesma natureza, onde esta será a unidade de medida. Foram dados exemplos de medições como as de comprimento, capacidade, massa etc... Depois foi dito que, para medir um ângulo, basta saber quantas vezes a unidade de medida cabe nele.

4.3.6.1. O auxílio da História da Matemática

Com a ajuda da História da Matemática, para que os alunos pudessem conhecer a origem do grau ($^{\circ}$), o professor apresentou “1 $^{\circ}$ ” (um grau) como o “ângulo unidade” de medição de ângulos. A seguinte explanação histórica¹⁶ foi proferida pelo professor na sala de aula:

Entre os anos 2000 a.C. e 1000 a.C. surgiram na Mesopotâmia várias civilizações conhecidas de um modo geral como civilização babilônica. Este povo realizou estudos ligados à astronomia e à álgebra elementar e possuía um sistema de numeração bastante desenvolvido cuja base era sessenta. Dentre as heranças deixadas por eles encontramos a marcação das horas (1 hora = 60 minutos; 1 minuto = 60 segundos) e a medição dos ângulos em graus. Com base nos seus estudos sobre movimentos de estrelas e planetas e por causa de seu sistema de numeração, os babilônios dividiram o círculo em 360 partes iguais. Cada uma dessas partes recebeu, mais tarde, o nome de um grau. O grau tem sido uma das unidades utilizadas para expressar a medida de ângulo ao longo de muito tempo. Assim, o giro completo mede 360 graus, que denotamos de modo simplificado por 360 $^{\circ}$.

4.3.6.2. Utilização de dobraduras

Foram construídos transferidores pelos alunos a partir de dobraduras, conforme os passos descritos abaixo. A intenção foi levá-los a estimar medidas e mostrar a necessidade de um instrumento mais preciso de medição de ângulos – o transferidor de plástico (Figura 9), que é marcado gradualmente.

¹⁶ Trechos históricos adaptados de Diniz e Smole (1993, p. 37)

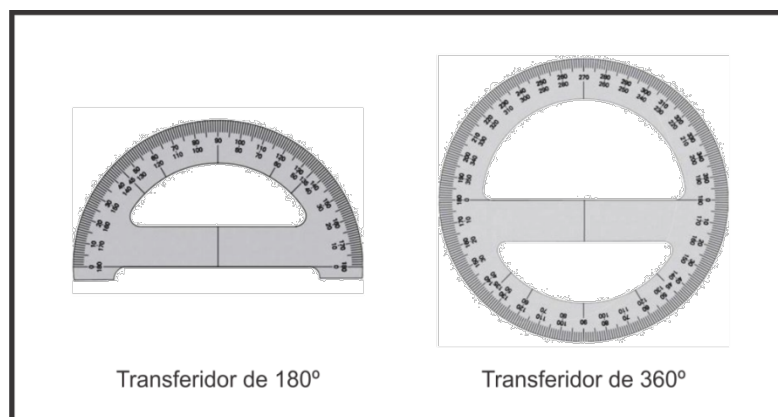


Figura 9 – Transferidores graduais rígidos de 180° e 360°.

Abaixo seguem os passos dessa atividade:

- a) Desenhe com o compasso um círculo de, aproximadamente, 10 cm de raio e recorte-o com a tesoura;
- b) Esse círculo representa um ângulo de 360°, dobre-o ao meio e corte-o no vinco, obtendo-se um ângulo de 180° (Figura 10).

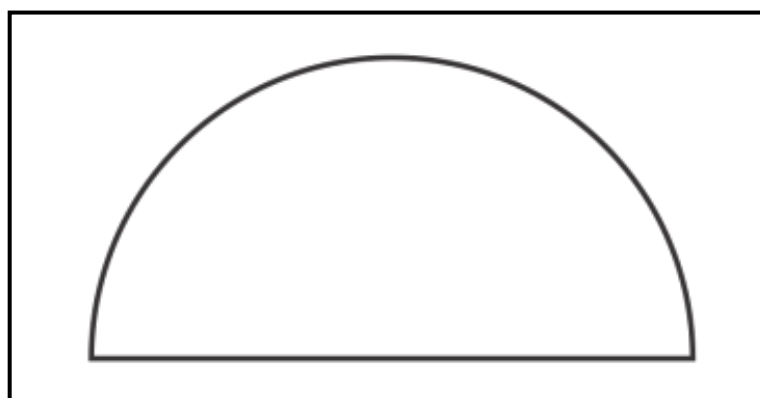


Figura 10 – Círculo (360°) sendo dobrado ao meio e o respectivo semicírculo (180°).

- c) Pegue um dos semicírculos e dobre-o pela metade e, novamente, pela metade, obtendo três vincos espaçados por ângulos de 45° cada um (Figura 11).

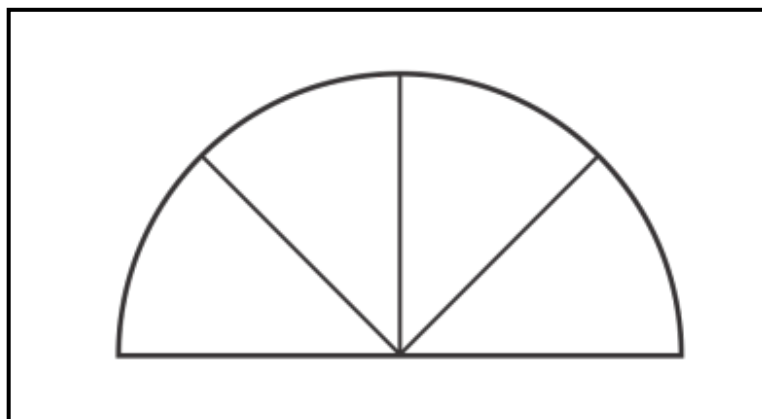


Figura 11 – Três vincos dividindo o semicírculo em 4 ângulos de 45° .

- d) Desdobrem o semicírculo e dobrem-no em três partes iguais, ficando marcados outros três vincos, separados por ângulos de 60° (Figura 12);

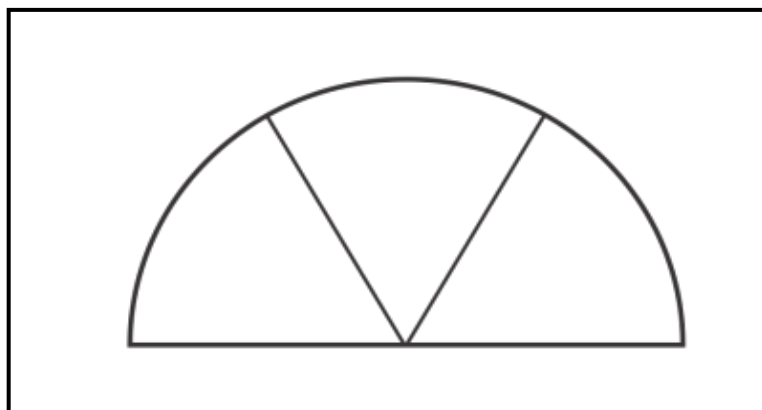


Figura 12 – Dois vincos dividindo o semicírculo em 3 ângulos de 60° .

- e) Dobrando ao meio cada uma destas três partes têm-se ao todo seis ângulos de 30° (Figura 13). Deve-se ter cuidado para não confundir os vincos de 60° com os de 45° neste momento. Nesta parte, o professor pode introduzir, se achar conveniente, o conceito de bissetriz;

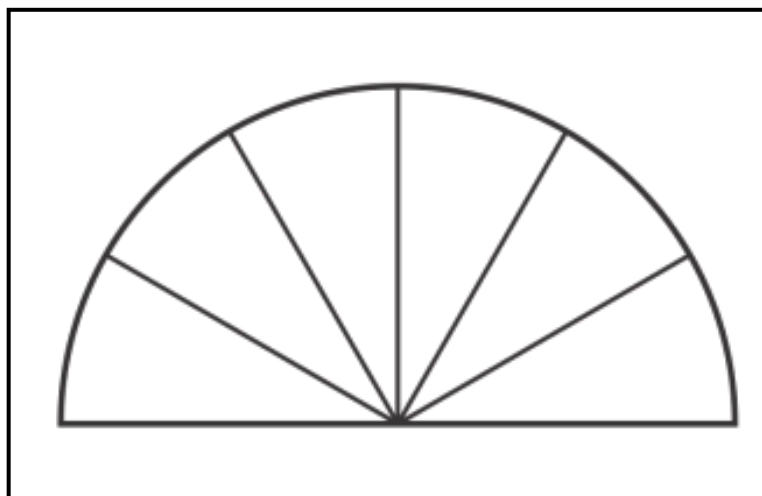


Figura 13 – Cinco vincos dividindo o semicírculo em 6 ângulos de 30°.

- f) Novamente, dobrando cada ângulo de 30° ao meio, obtemos 12 ângulos de 15° (Figura 14);

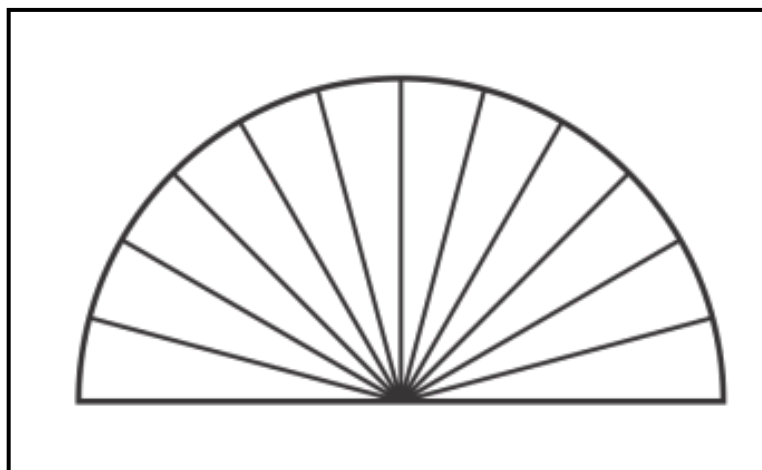


Figura 14 – Onze vincos dividindo o semicírculo em 12 ângulos de 15°.

Depois de construir o transferidor com as crianças, o professor ensinou a utilizá-lo. Logo em seguida, aplicou uma atividade (Apêndice G) e pediu para que os alunos medissem os ângulos nela contidos. Observou-se que a maioria dos alunos encontraram ângulos aproximados dos verdadeiros, e muitos acertaram os ângulos retos e o raso.

Em seguida, o professor pediu para os alunos utilizarem os transferidores de plástico por ele fornecidos. Em seguida, mostrou que, para efetuar a medição de um ângulo utilizando tal instrumento, é preciso que o centro do transferidor coincida com

o vértice do ângulo e que um dos lados do ângulo coincida com a linha marcada em 0° (zero grau).

Foi dito, ainda, que alguns transferidores (Figura 9) possuíam duas numerações, de 0° a 180° – uma da direita para a esquerda e outra da esquerda para a direita – e que outros mais simples possuíam apenas a numeração em um dos sentidos.

Foi solicitado dos alunos que conferissem as medições feitas por eles na atividade anterior (Apêndice G), observando se as estimativas por eles realizadas foram coerentes.

Após concluir todas as etapas da abordagem didática, foi aplicado um pós-teste com os mesmos alunos, só que, desta vez, quem aplicou foi o autor deste trabalho e não a professora da turma. Os resultados do comparativo entre o pré-teste e o pós-teste foi analisado e encontra-se no próximo capítulo.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Doravante, serão apresentadas as análises dos efeitos da abordagem didática, do questionário aplicado aos professores e, por fim, dos livros didáticos mais utilizados por tais professores.

5.1. COMPARATIVO ENTRE O PRÉ-TESTE E O PÓS-TESTE

Inicia-se neste paragrafo a análise dos efeitos da abordagem didática. Pelo fato do pós-teste ser igual ao pré-teste – compostos pelas mesmas perguntas e alternativas – foi possível fazer um comparativo percentual entre o antes e o depois do desenvolvimento da abordagem didática.

Os testes supracitados, ambos divididos em duas etapas, foram analisados e estão descritos conforme a ordem das etapas e das perguntas respectivamente. Em decorrência do comparativo foram observados resultados relevantes, os quais serão apresentados adiante.

Observa-se no Gráfico 1 que os conhecimentos adequados dos alunos evoluíram. Destacando-se o conhecimento relativo à “reta”, que passou da inexistência para 63% dos alunos associando tal conceito à respectiva representação geométrica.

Dentre os conhecimentos prévios dos alunos, o menos pertinente para desenvolver o conceito de ângulo, nas três primeiras questões, foi o relativo a “plano”, e os mais adequados foram os de “reta” e “semirreta”.

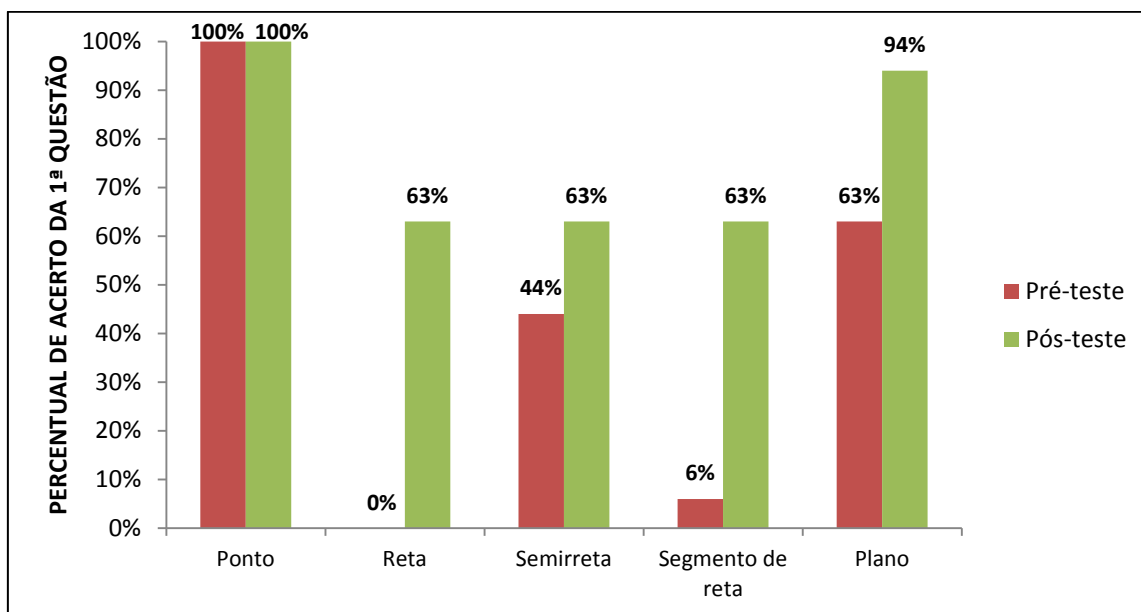


Gráfico 1 – Comparativo do percentual de acerto relativo à primeira questão da 1ª etapa aplicada no pré-teste e pós-teste.

A maioria dos alunos mostrou capacidade de associar a ideia de ponto a situações do cotidiano, inclusive 94% deles associaram, no pré-teste, um estrela no céu à figura geométrica correspondente ao ponto (Gráfico 2).

Percebe-se que há um progresso quanto às relações perpetradas pelos alunos entre as representações do cotidiano (fotos) e as figuras geométricas correspondentes, com destaque para a “semirreta” que passou de 25% para 63% dos alunos acertando tal alternativa (Gráfico 2).

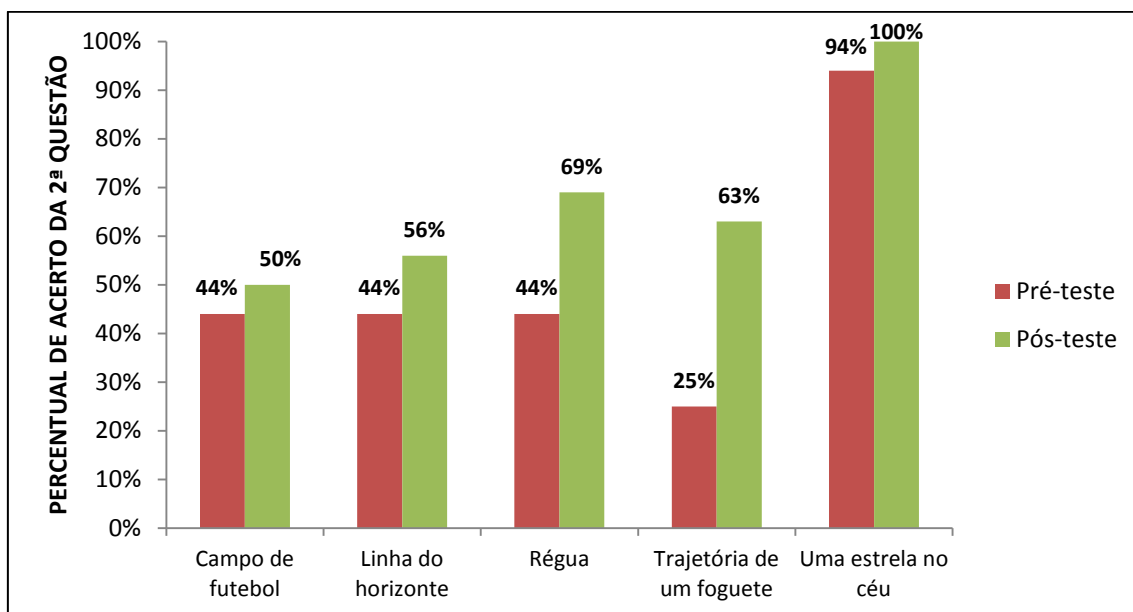


Gráfico 2 – Comparativo do percentual de acerto relativo à segunda questão da 1ª etapa aplicada no pré-teste e pós-teste.

Quanto às associações feitas pelos alunos entre os conceitos geométricos primitivos e as representações geométricas correspondentes – ambas apresentadas de forma escrita – verifica-se, por meio do Gráfico 3, que o aprendizado referente à “reta” e a “semirreta” se destaca dos demais conceitos.

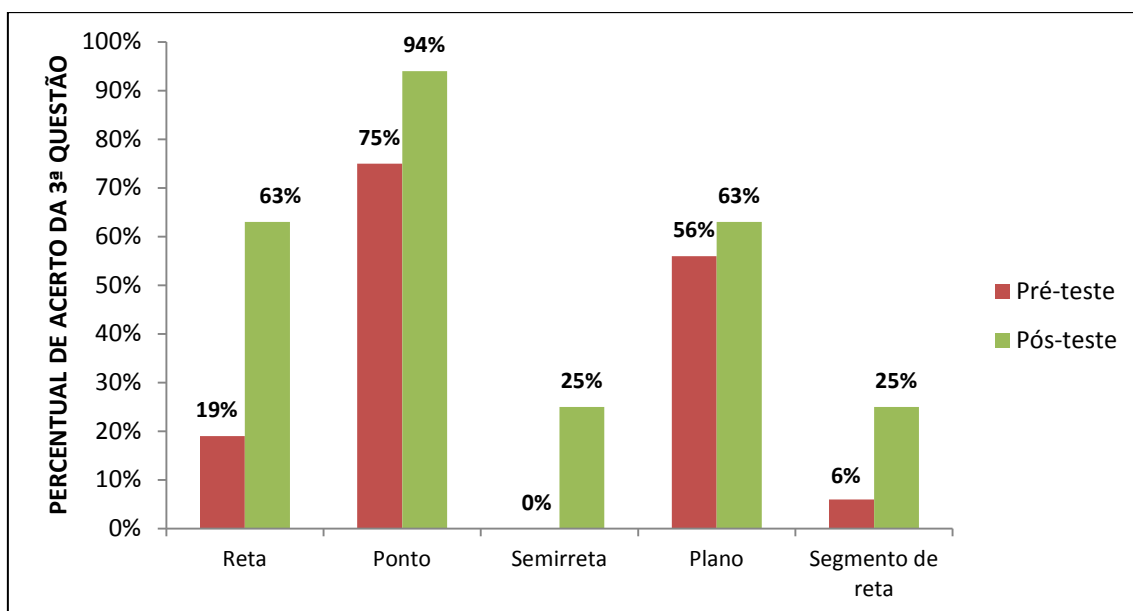


Gráfico 3 – Comparativo do percentual de acerto relativo à terceira questão da 1ª etapa aplicada no pré-teste e pós-teste.

O Gráfico 4 resume os resultados da quarta questão da 1ª etapa. Nela encontram-se três categorias, a saber: errou a questão – mostra o percentual dos alunos que não identificou nenhum ângulo; acertou parcialmente – aqueles que identificaram apenas uma das duas representações de ângulo, ou que marcaram alguma representação de ângulo juntamente com outras que não representavam ângulo; acertou totalmente – inseriram-se nesta categoria os alunos que marcaram exclusivamente as duas representações de ângulo existentes na questão.

Constatou-se que nenhum aluno errou a quarta questão da primeira etapa no pós-teste, e o número de alunos que acertaram parcialmente tal questão foi 6%, por fim, verifica-se que 94% dos alunos que acertaram totalmente a referida questão.

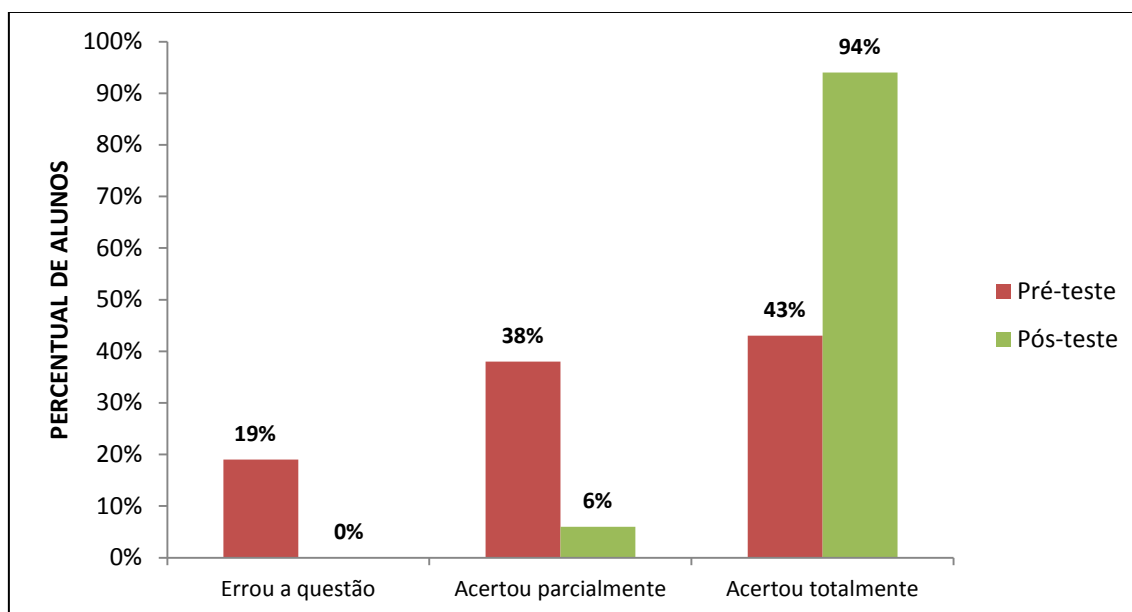


Gráfico 4 – Comparativo do percentual de alunos que identificaram ângulos dentre várias figuras.

O Gráfico 5 expõe os resultados da quinta questão da 1ª etapa. Idem a questão anterior, nela encontram-se três categorias, porém o teor delas difere, percebe-se: errou a questão – mostra o percentual dos alunos que não identificou nenhum ângulo; acertou parcialmente – mostra o percentual dos alunos que identificou pelo menos um ângulo em qualquer das representações do cotidiano; acertou totalmente – só pertence a esta categoria os alunos que marcaram pelo menos um ângulo em todas as representações do cotidiano.

Os dados apontam para uma abordagem didática realmente funcional, pois eles sugerem que os alunos construíram conhecimentos significativos, fato que é ratificado quando o Gráfico 5 mostra a redução para 6% dos alunos errando ou acertando parcialmente a quinta questão, e principalmente por mostrar que 88% deles acertaram totalmente a referida questão.

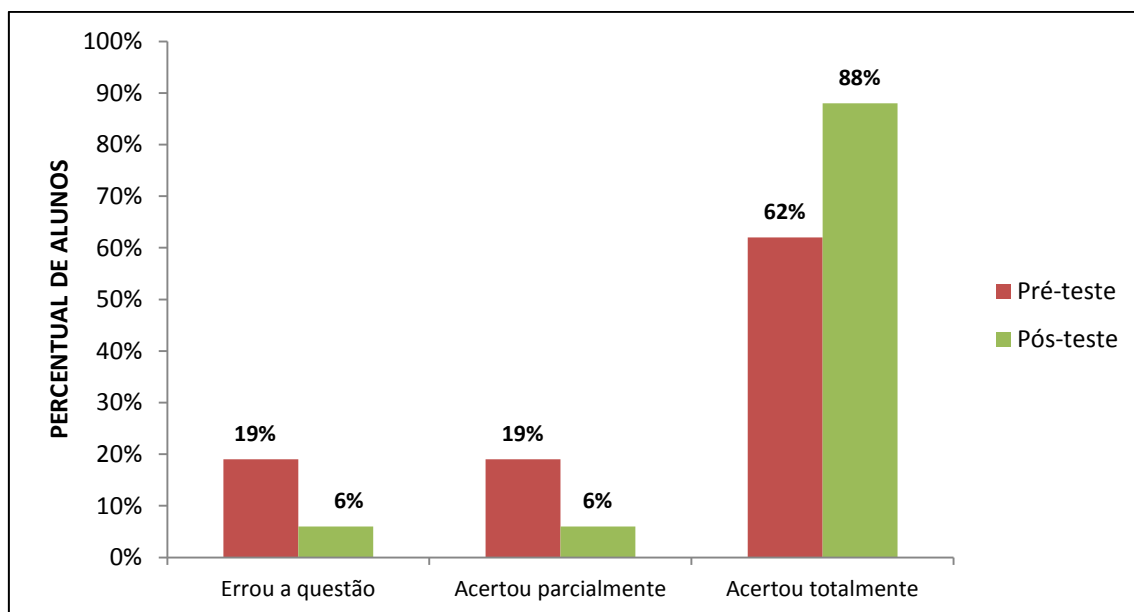


Gráfico 5 – Comparativo do percentual de alunos que identificaram ângulos em várias representações do cotidiano.

Os resultados obtidos permitem afirmar que uma grande parcela dos alunos conseguiu chegar a um enfoque profundo da aprendizagem de ângulo, pois passaram a associar a sua ideia tanto a situações do cotidiano como a situações internas a matemática.

Tanto o Gráfico 4 quanto o 5 apresentam resultados favoráveis quanto à eficiência da abordagem em relação ao aprendizado dos alunos, sobretudo por reduzirem os erros e aumentarem o conhecimento significativamente – o conceito de ângulo padrão.

A seguir, o Gráfico 6 estratifica os resultados da primeira questão da segunda parte dos testes. Nele, percebe-se que houve uma aprendizagem significativa, aparecendo uma inversão de resultados. A maioria dos alunos passou a associar a medida de ângulo a sua abertura e não mais aos segmentos de reta.

Os dados do pré-teste ratificam as observações de Klitzke (2010), quando ela sinaliza possível associação da medida do ângulo ao comprimento dos segmentos de reta que o compõe. Porém, após o desenvolvimento da abordagem didática observou-se a evolução de 81% da quantidade de alunos associando de forma correta a medida de ângulo.

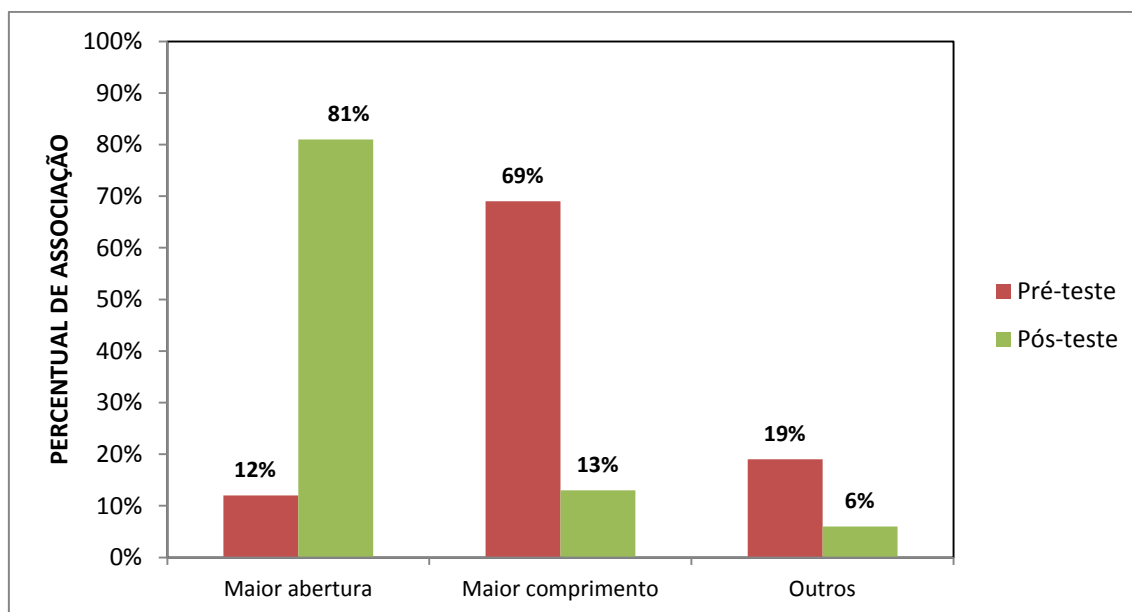


Gráfico 6 – Comparativo do percentual dos alunos que associaram a maior medida de um ângulo à sua abertura.

Outro dado que aponta a abordagem didática como funcional é o do reconhecimento do grau como unidade padrão de ângulo. No gráfico 7 observa-se que apenas $\frac{1}{4}$ dos alunos faziam tal associação, após o desenvolvimento da abordagem todos os alunos reconheceram o grau como unidade padrão de ângulo.

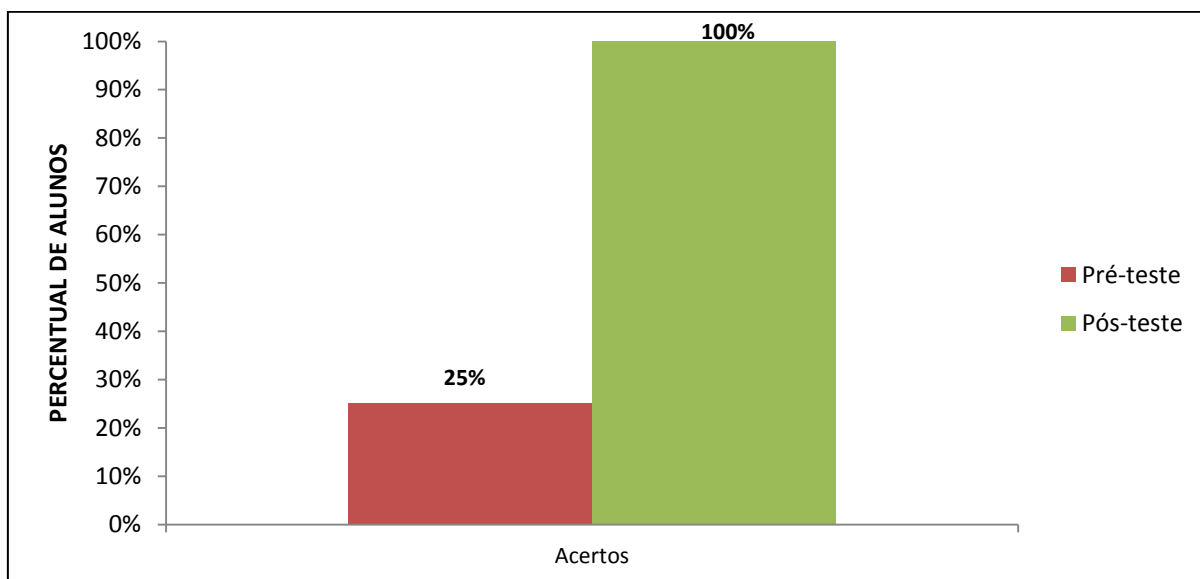


Gráfico 7 – Comparativo do percentual dos alunos que reconheceram o grau como unidade padrão de ângulo.

Os Gráficos 8 e 9 representam o resultado de uma mesma questão – a terceira da 2ª etapa. No entanto o Gráfico 8 relaciona-se com o item “a” da questão, enquanto o Gráfico 9 resume os resultados dos itens “b” e “c”.

Com relação aos conteúdos de habilidades, verifica-se no Gráfico 8 que nenhum dos alunos identificou o transferidor como instrumento de medição de ângulos, porém ao término das atividades 81% deles reconheceram tal instrumento.

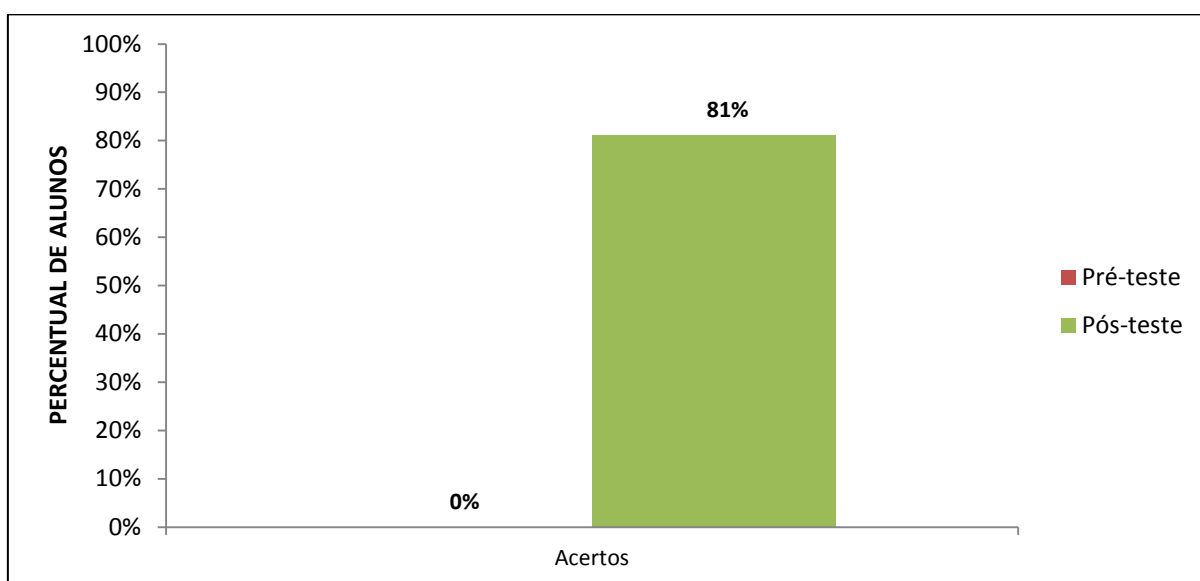


Gráfico 8 – Comparativo do percentual dos alunos que reconheceram o transferidor como instrumento de medida de ângulo.

Quanto ao desenvolvimento da habilidade com o transferidor, esta ficou comprometida, pois embora o Gráfico 9 apontar um aumento percentual do número de alunos que conseguiram medir os ângulos de 180° e 90° , este resultado foi associado ao domínio da representação escrita do ângulo – FÔH e AÔF. O desenvolvimento do domínio desta representação apresentou problemas, merecendo um maior esforço de trabalho na abordagem didática para o seu desenvolvimento.

A conclusão acima é reforçada pelos resultados obtidos na penúltima questão, apresentada no Gráfico 10, onde 81% dos alunos consideraram um ângulo apresentado figurativamente como sendo reto.

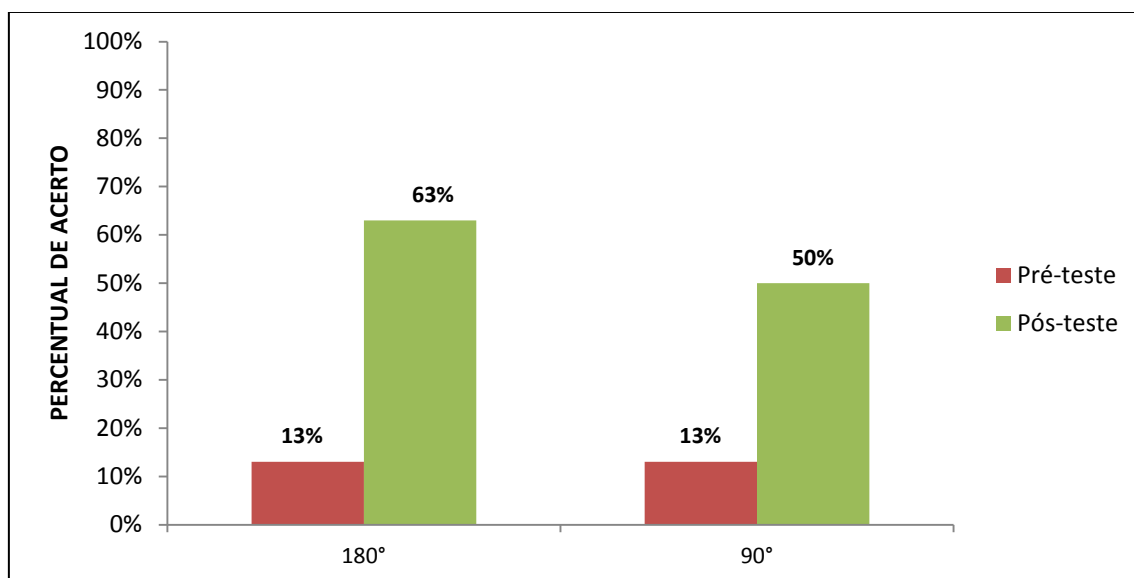


Gráfico 9 – Comparativo do percentual dos alunos que reconheceram e mediram ângulos representados pela imagem de um transferidor.

Adiante estão apresentados, por meio do Gráfico 10, os resultados da quarta questão da segunda etapa. Nele percebe-se um aumento quantitativo de alunos identificando o ângulo reto dentre três apresentados, sendo os outros dois um agudo e o outro obtuso.

O percentual elevado de alunos que acertaram tal questão do pós-teste (Gráfico 10) reflete mais um índice satisfatório da abordagem didática, pois a identificação do ângulo reto é um dos objetivos do descritor seis da prova Brasil.

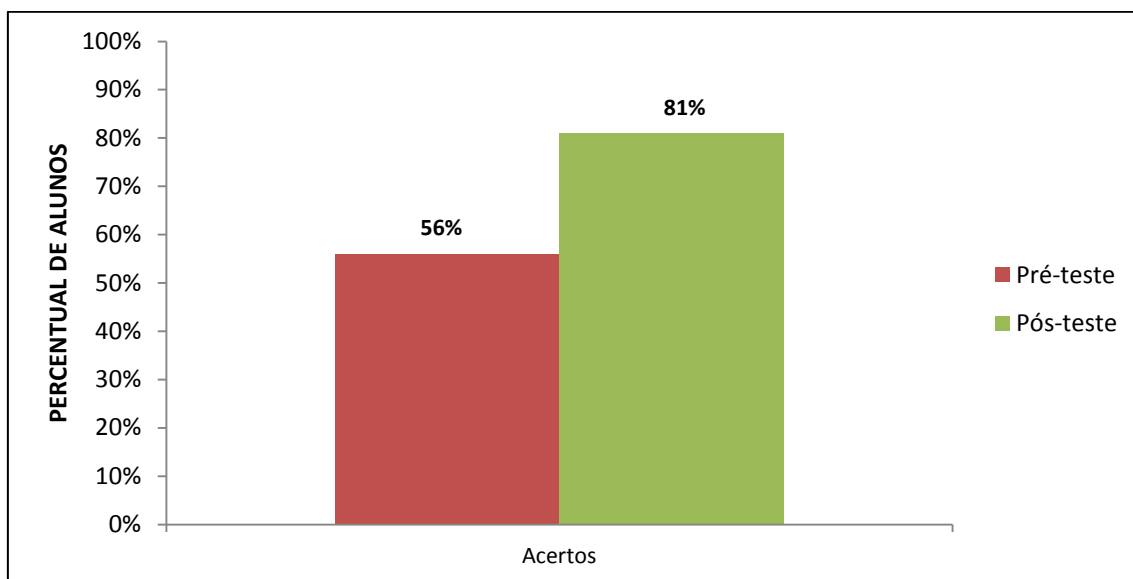


Gráfico 10 – Comparativo do percentual dos alunos que identificaram um ângulo reto.

Por fim, apresentam-se, no Gráfico 11, os resultados obtidos por meio da última questão. Nela encontram-se três categorias, a saber: errou a questão – mostra o percentual dos alunos que não fez nenhuma associação entre o movimento e a representação do respectivo ângulo; acertou parcialmente – mostra o percentual dos alunos que associou pelo menos um movimento à representação do respectivo ângulo; acertou totalmente – exibe o percentual dos alunos que associou os movimentos do corpo às respectivas representações do ângulo de giro.

Após terem sido desenvolvidas três atividades envolvendo o conceito de ângulo como giro, as quais se inserem no que sugere o descritor 6, do tema 1 da Prova Brasil, e das quais os alunos participaram ativamente, observa-se que o percentual de alunos que acertaram tal questão, depois da abordagem, foi de 88%, verificando-se a evolução na aprendizagem dos alunos, sendo este mais um ponto favorável à abordagem didática.

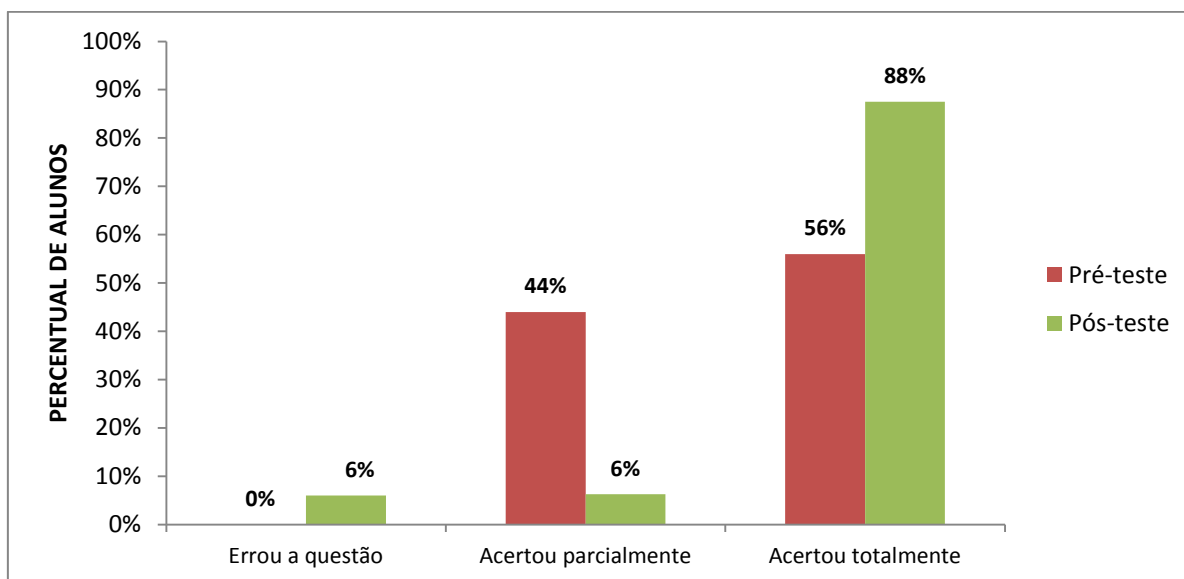


Gráfico 11 – Comparativo do percentual dos alunos que relacionaram giros a ângulos.

Ao término da análise dessa etapa observou-se de uma evolução cognitiva dos alunos, haja vista a observância dos índices de acerto no pós-teste. Percebeu-se que a maioria dos alunos construiu as ideias de ângulos e de medida de forma significativa.

5.2. QUESTIONÁRIO

A partir da análise dos dados obtidos por meio do questionário aplicado aos professores da RMECG (Apêndice A), verifica-se a existência de situações já estudadas em diferentes pesquisas acerca do ensino de Geometria, inclusive do ensino de ângulo, que nos permitiram desenvolver um perfil de como está se desenvolvendo este processo no contexto investigado. Os resultados serão apresentados a seguir, por intermédio de gráficos e discutidos a partir do referencial teórico adotado.

No Gráfico 12, construído a partir da 1ª questão, observou-se um equilíbrio quanto ao número de professores que lecionam nos anos finais do ensino fundamental. O sexto ano apresentou um menor percentual.

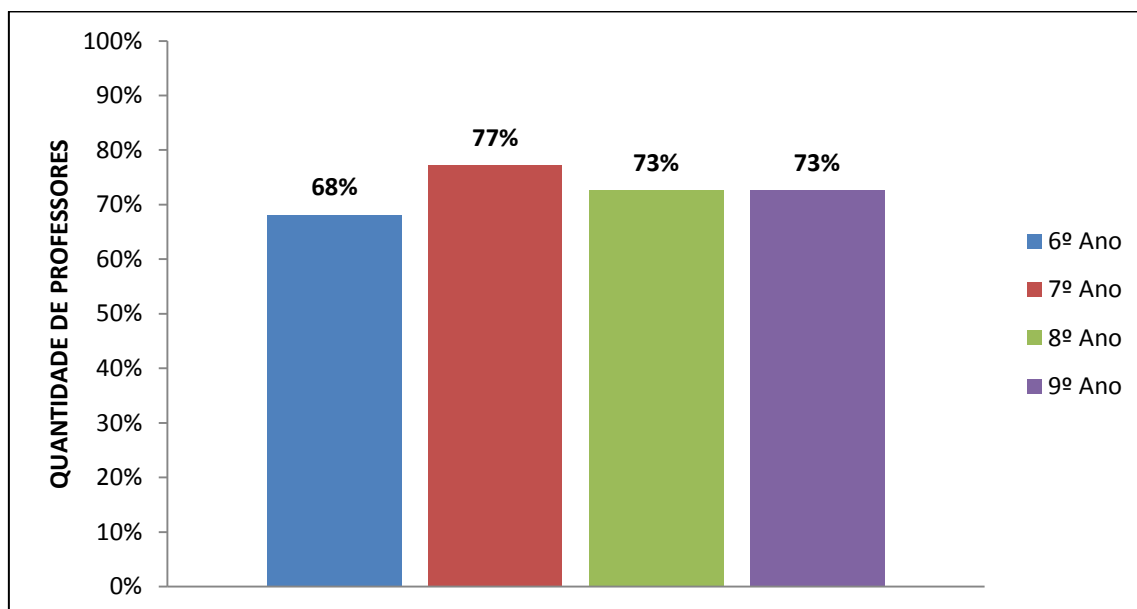


Gráfico 12 – Percentual de professores da RMECG que lecionam em cada um dos anos finais do ensino fundamental.

Analisando o Gráfico 13, construído a partir da 4ª questão, observa-se um elevado percentual dos professores da RMECG assumindo ensinar Geometria raramente. Este índice vai ao encontro dos dados levantados na revisão da literatura, quando autores como Pavanello (1989), Lorenzato (1995), Gadotti (2008) e outros asseguram que muitos professores ou não ensinam Geometria ou o fazem de forma aligeirada. Merece neste caso, pesquisas mais acuradas, onde se verifique, com questões mais direcionadas, ou com entrevistas, o que realmente representam as respostas dadas.

As entrevistas informais, já mencionadas na metodologia, apontam para uma formação inicial deficitária dos professores de matemática envolvidos neste estudo, estes alegaram dificuldades de ensinar conteúdos de Geometria, pois não teriam visto disciplinas que trabalhassem devidamente os conteúdos desta área, restringindo-se à disciplina Geometria Euclidiana.

Outro indicativo do descaso com o ensino da Geometria na RMECG são os planos de curso de Matemática distribuídos pela referida rede (Anexo C), os quais se mostram ineficazes e incapazes de nortear qualquer professor quanto aos conteúdos geométricos a serem ensinados.

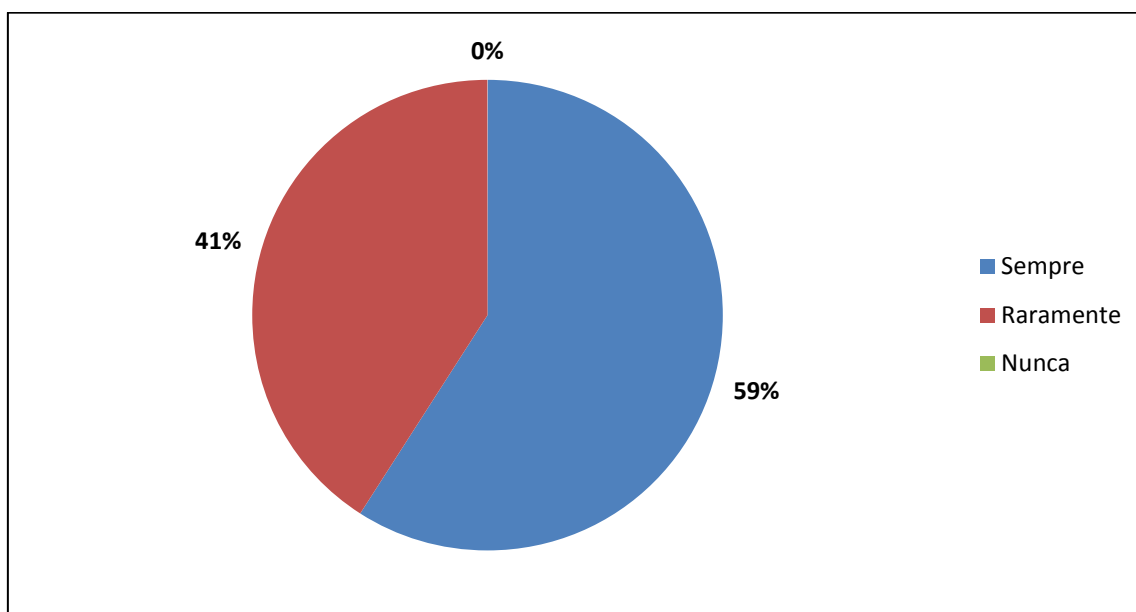


Gráfico 13 – Percentual dos professores da RMECG que ensinam ou já ensinaram Geometria.

Adentrando na especificidade desta pesquisa, no que tange ao ensino do conceito de ângulo, percebe-se, no Gráfico 14, construído a partir da 5ª questão, que a maioria dos professores pesquisados desenvolvem o ensino de ângulo em suas aulas.

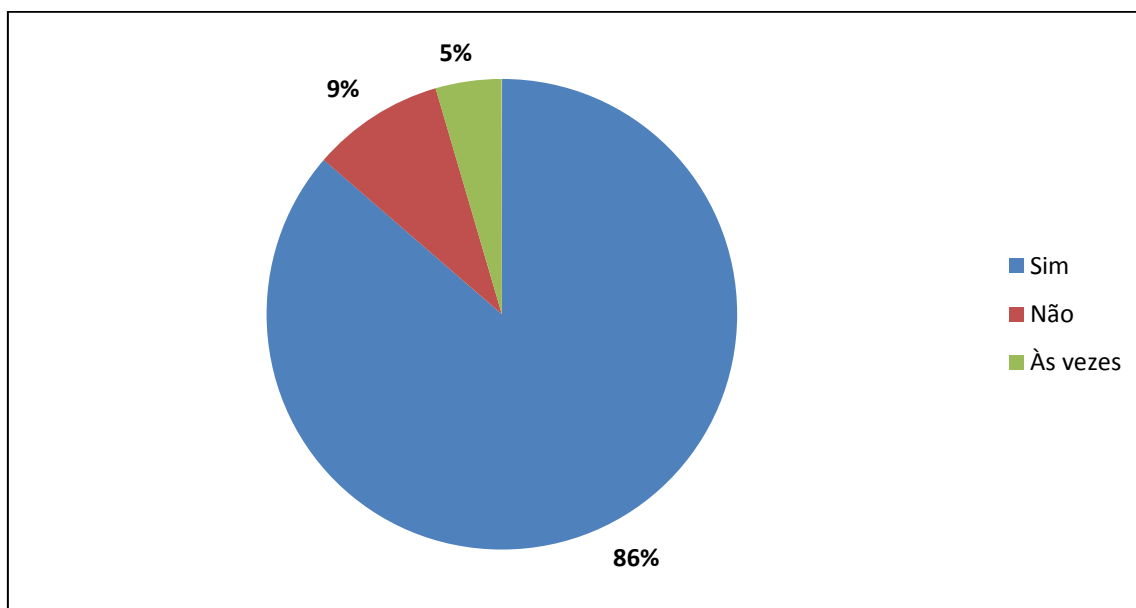


Gráfico 14 – Percentual dos professores da RMECG que ensinam ângulo.

Por meio da 6ª questão, considerando os professores que sempre lecionam ângulo e os que lecionam tal conteúdo às vezes, obtêm-se um percentual de 91%, destes, 70% (Gráfico 15) o fazem de acordo com o sugerido pelos PCNs e em conformidade com a opinião de alguns autores como Mitchelmore; White (2000), Lorenzato (1995) e Gadotti (2008), os quais sugerem que situações envolvendo o conceito de ângulo devam ser abordadas antes da definição.

Procurou-se, informalmente, em entrevista posterior, saber quais situações-problemas eram utilizadas pelos professores antes de definir ângulo; alguns indicaram que davam exemplos geralmente retirados do livro texto, citando também os ângulos presentes no cotidiano e na sala de aula.

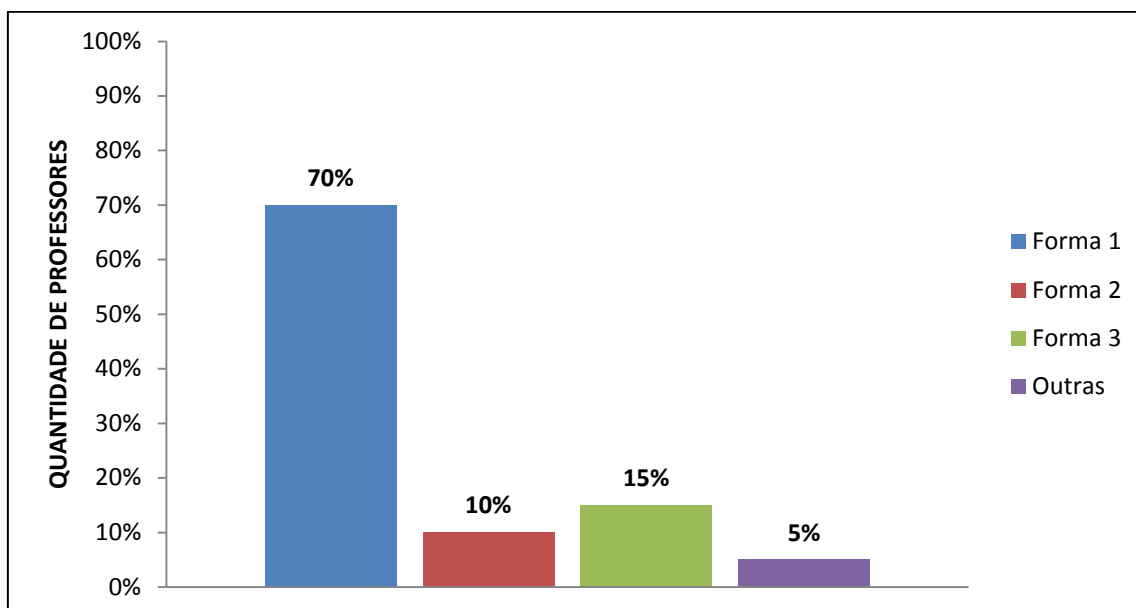


Gráfico 15 – Percentual relativo à forma como os professores da RMECG introduzem o conteúdo de ângulo.

Legenda: Forma 1 – Primeiro trabalha com situações onde aparecem ângulos e depois define; Forma 2 – Primeiro define e depois trabalha com situações onde aparecem ângulos; Forma 3 – Primeiro define e depois trabalha com medição, operações e as propriedades de ângulo.

Apesar do Gráfico 16, o qual foi construído a partir da 10ª questão, mostrar um alto índice de professores fornecendo sugestões acerca do ensino de ângulo, observa-se, nas respostas dadas, que a maioria delas foram pouco substanciais, apontando um baixo grau de afinidade entre os professores e o ensino de ângulo. Apenas uma professora sugeriu algo concreto, como a exploração do corpo humano para introduzir o conceito de ângulo, entre outros exemplos da mesma natureza.

É observado, de forma não tão sistemática, como sugerem Mitchelmore e White (2000), na primeira fase da abstração progressiva, que professores utilizam-se inconscientemente da teoria da abstração progressiva, porém não há continuidade no que tange às demais fases dessa teoria, na qual estão incluídos os conceitos de ângulo contextual e abstrato.

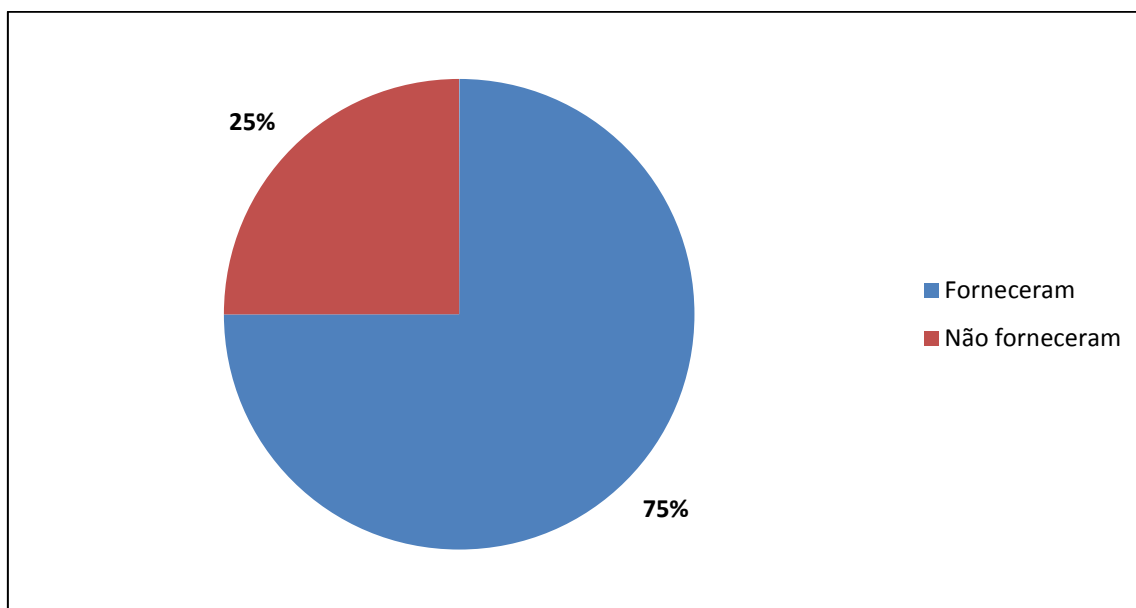


Gráfico 16 – Percentual dos professores da RMECG que forneceram sugestões relativas ao ensino de ângulo.

Segundo Diniz e Smole (1993), o ensino de ângulo deve ser iniciado no sexto ano do ensino fundamental. De acordo com o Gráfico 17, construído a partir da 7ª questão, percebe-se que este fato não é praticado por 40% dos professores envolvidos na pesquisa.

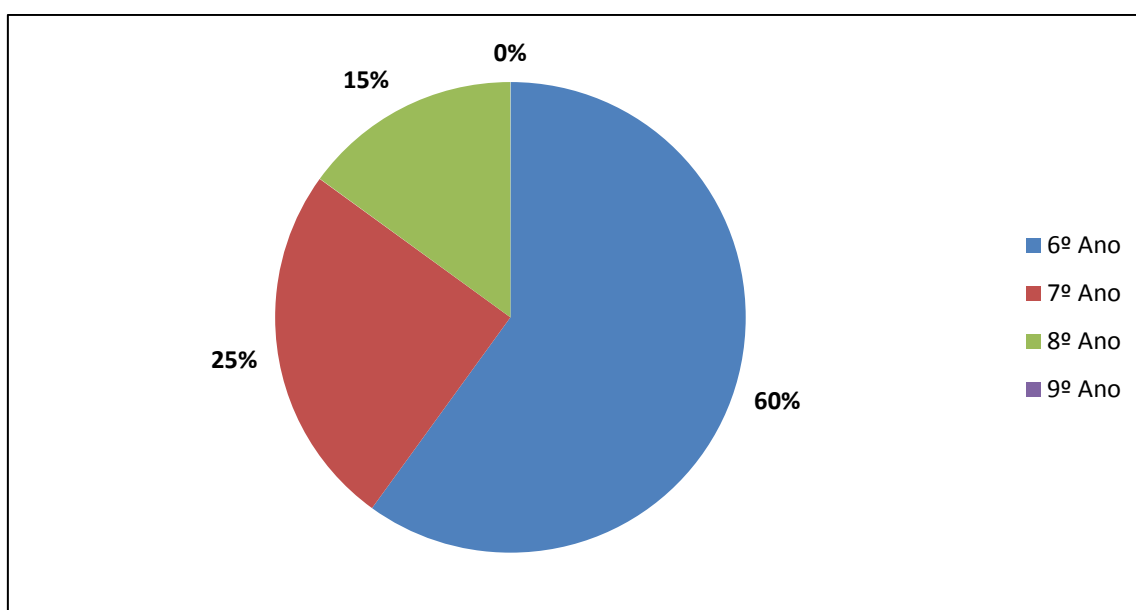


Gráfico 17 – Percentual dos professores da RMECG que introduzem o ensino de ângulo de acordo com o ano do ensino fundamental.

Como o descritor seis do tema 1 da Prova Brasil sugere que seja trabalhada a ideia de ângulo como giro ou mudança de direção, verificou-se, a partir da 8ª questão, que apenas 40% dos professores lecionam de acordo com esta vertente (Gráfico 18), o que representa um baixo nível de comprometimento dos professores com o ensino de ângulo dinâmico.

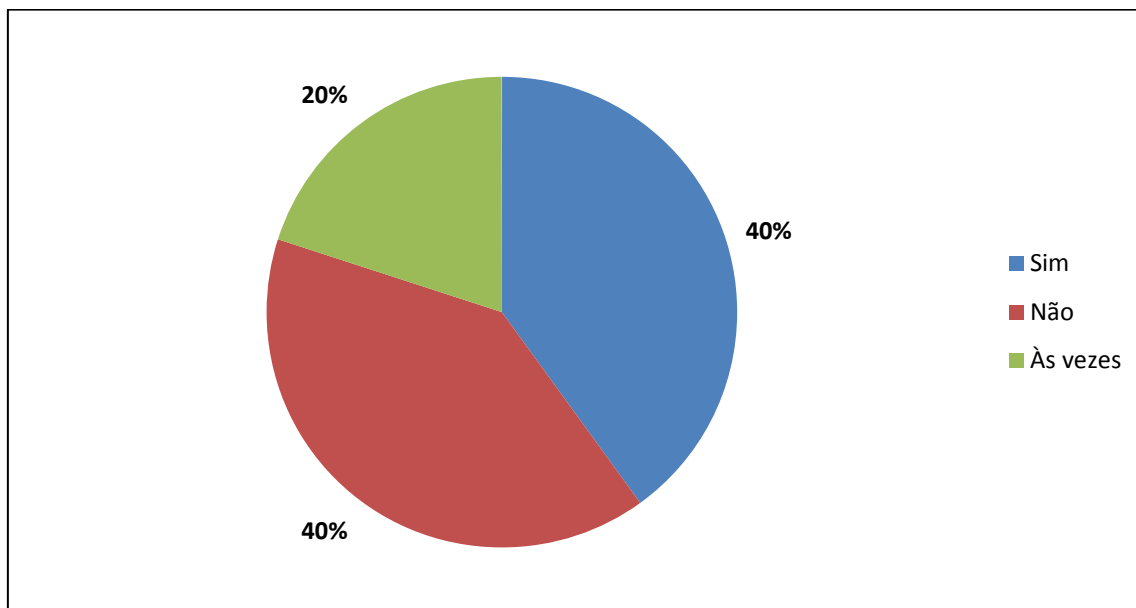


Gráfico 18 – Percentual dos professores da RMECG que trabalham o conceito de ângulo como giro ou mudança de direção.

Percebe-se pelo Gráfico 19, construído a partir da 9ª questão, que a definição de ângulo mais utilizada foi a da região limitada por duas semirretas de mesma origem, abrangendo 60% dos professores pesquisados. A definição mais indicada, segundo Mitchelmore e White (2000), pois representa bem o conceito de ângulo padrão. É empregada por apenas 15% dos professores sujeitos da pesquisa que abordam o ensino de ângulo.

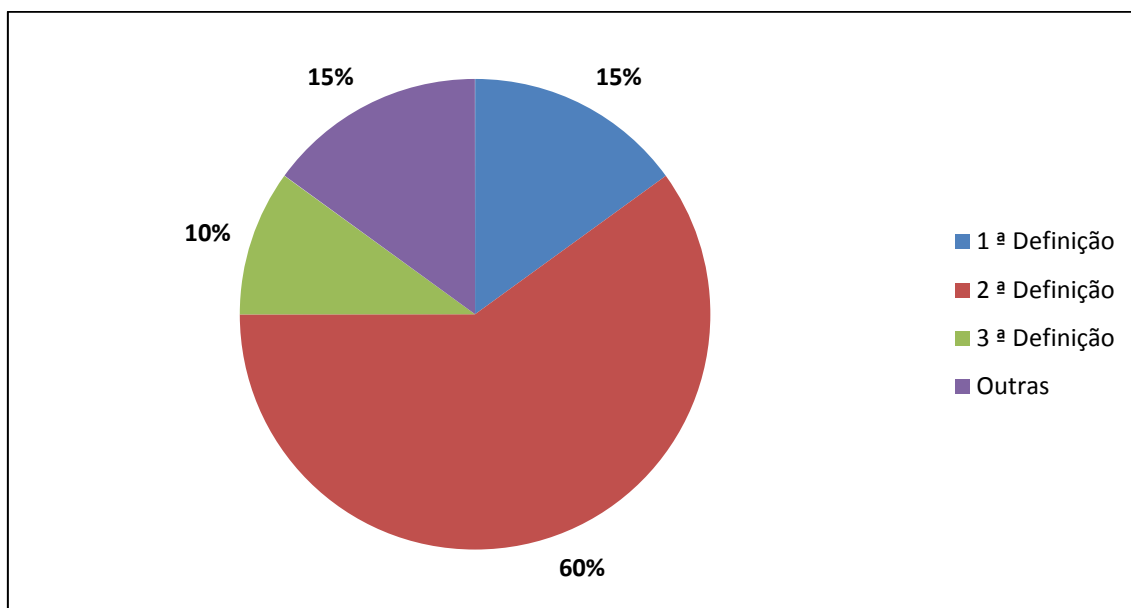


Gráfico 19 – Percentual dos professores da RMECG que utilizam tais definições de ângulo.

Legenda: Definição 1 – União de duas semirretas de mesma origem; Definição 2 – Região limitada por duas semirretas de mesma origem; Definição 3 – Quantidade de giro.

A revisão da literatura aponta para o uso excessivo dos livros didáticos por parte dos professores, bem como alerta para que esses não se tornem o único meio didático do professor.

Tanto Pais (2006), quanto os PCN, ressaltam a grande aceitação do livro didático em sala de aula, o que é ratificado nessa pesquisa, diante do percentual de 82% dos professores, que afirmaram ser adeptos deste recuso didático, como mostra o Gráfico 20, construído a partir da 2ª questão,.

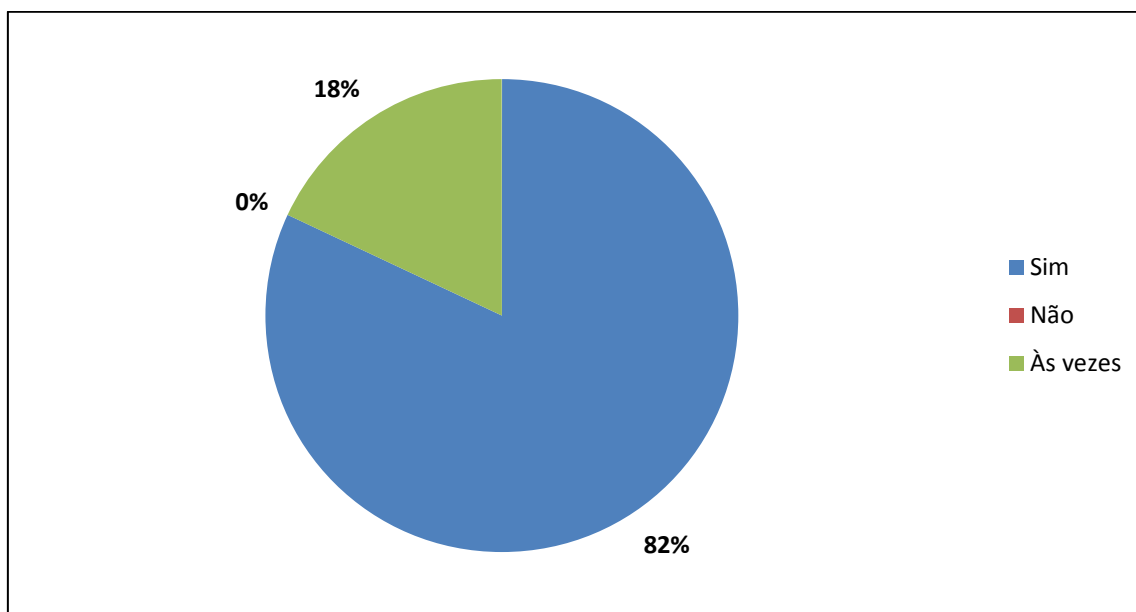


Gráfico 20 – Percentual dos professores da RMECG que utilizam livros didáticos nas aulas.

Esta pesquisa buscou levantar quais os livros didáticos mais utilizados pelos professores da RMECG, objetivo atingido por intermédio da terceira pergunta do questionário (Apêndice A); o resultado encontra-se estratificado no Gráfico 21.

De acordo com o Gráfico 21, construído a partir da 3ª questão, os três livros didáticos mais aceitos pelos professores da RMECG que participaram da pesquisa foram: Matemática e Realidade da editora Atual; Matemática: fazendo a diferença da editora FTD e o Projeto Araribá da Editora Moderna.

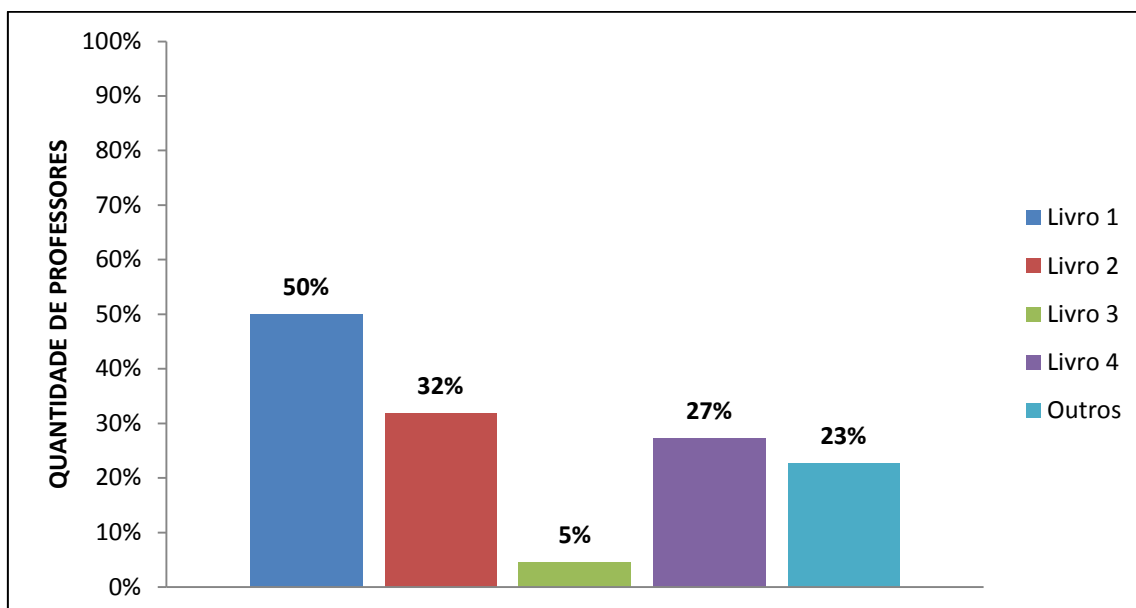


Gráfico 21 – Percentual de professores da RMECG que utilizam cada um dos livros didáticos elencados.

Legenda: Livro 1 – Matemática e Realidade (Editora Atual); livro 2 – Matemática: fazendo a diferença (Editora FTD); livro 3 – Matemática na vida e na escola (Editora do Brasil); livro 4 – Projeto Araribá (Editora Moderna).

A partir dos dados acima, foram analisados os três livros didáticos do 6º ano do ensino fundamental de maior aceitação pelos professores. Com metade dos professores adotando o livro “Matemática e Realidade” da editora Atual, ele despontou como o mais utilizado, sendo, portanto, o primeiro a ser analisado.

5.3. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

5.3.1. Matemática e Realidade

O ensino de ângulo é introduzido no Capítulo 7 (Ângulos) inserido na terceira unidade, intitulada “Geometria: primeiros passos.” Antes de introduzir o ensino de ângulo este livro aborda fatos históricos para desenvolver noções basilares da

Geometria – reta, ponto e plano. Em seguida traz uma noção do que seja semirreta e segmento de reta.

O ensino de ângulo é introduzido por meio de ilustrações (Figura 15) as quais o livro afirma transmitirem a ideia de ângulo. Seguidamente traz a definição: “A união de duas semirretas distintas e de mesma origem é um ângulo”. Depois tenta mostrar o que é um ângulo reto e os ângulos formados por retas concorrentes. E encerra o estudo de ângulos com nove exercícios dos quais, apenas um trabalha a ideia de ângulos em mapas e deslocamentos.



Figura 15 – Ilustrações acerca da ideia de ângulo.

De acordo com o manual do professor, que se encontra no final do livro, o capítulo sobre ângulo busca desenvolver os seguintes objetivos:

- Reconhecer ângulo como reunião de duas semirretas distintas e de mesma origem;
- Identificar vértice e lados de um ângulo;
- Formar a ideia de ângulo reto;
- Classificar duas retas coplanares como paralelas ou concorrentes;
- Classificar duas retas concorrentes como oblíquas ou perpendiculares.

Apesar de o livro atender as exigências do PNLD e estar em conformidade com alguns critérios sugeridos por Pais (2006) o livro deixa a desejar quanto ao ensino de ângulos, inclusive ao conceito de ângulo como giro ou mudança de direção, objetivo desta discussão.

5.3.2. Matemática: fazendo a diferença

O segundo livro didático analisado, com aceitação de 32% dos professores envolvidos na pesquisa (Gráfico 10), foi o livro “Matemática: fazendo a diferença” da editora FTD. Nele o ensino de ângulo é introduzido na 11ª unidade, sendo 15 as existentes no livro.

Este fato remete aos livros didáticos da época do MMM, citados por Pavanello (1989), Bürigo (1989) e outros, os quais traziam os conteúdos de Geometria apenas nos últimos capítulos. O ensino de ângulo é precedido do estudo de ponto, reta, plano, semirreta e segmento de reta.

Um breve comentário histórico introduz o ensino de ângulo. Nele é dito, apenas, que os ângulos apareciam nas construções das pirâmides do Egito e nas grandes navegações. Em seguida traz dois exemplos de situações do cotidiano nas quais os ângulos se fazem presentes (Figura 16), inclusive um deles trabalha com a ideia de ângulo como mudança de direção.

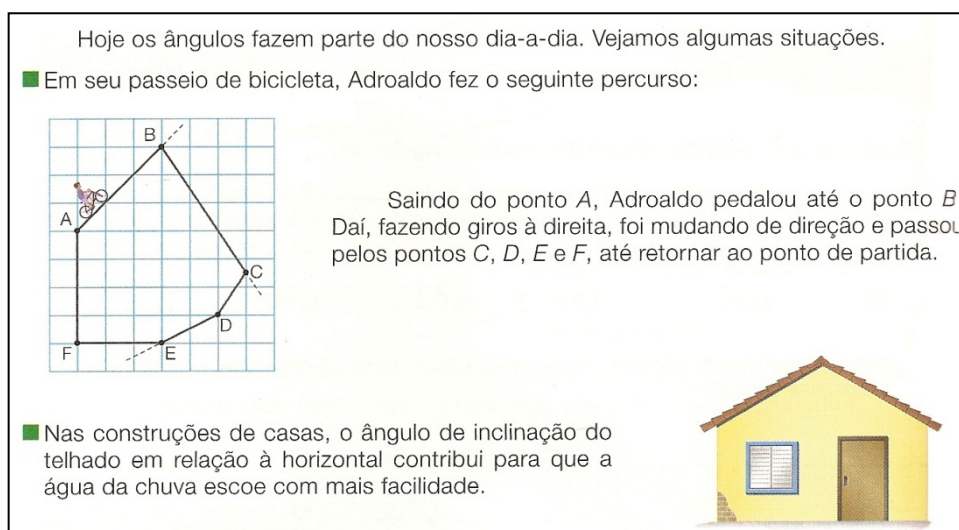


Figura 16 – Exemplos de situações do cotidiano que possuem ângulos no segundo livro analisado.

Após os exemplos supracitados o livro define ângulo como sendo a região limitada por duas semirretas de mesma origem, apresenta o transferidor, explica que

o grau é a unidade padrão de medida de ângulos e ensina a usar o transferidor. Por fim classifica os ângulos em reto, agudo e obtuso. Nos exercícios ele busca desenvolver atividades pouco criativas e meramente mecânicas.

O manual do professor, que se encontra no final do livro, diz que o estudo com ângulos objetiva desenvolver os seguintes conteúdos procedimentais:

- a) Conceituar ângulo e identificar o vértice e os lados;
- b) Medir ângulo com auxílio do transferidor;
- c) Reconhecer e classificar ângulos retos, agudos, obtusos e rasos.

Apesar de o livro atender as exigências do PNLD e estar de acordo com alguns critérios sugeridos por Pais (2006) o livro deixou a desejar quanto ao ensino de ângulos, pois não trouxe atividades que desenvolvessem o conceito de ângulo como giro ou mudança de direção. Quanto a esta abordagem o livro se restringiu a um único exemplo sobre mudança de direção, sem nenhum aprofundamento, inclusive nos objetivos do livro não há nada acerca do Descritor seis, do Tema 1, da Prova Brasil.

5.3.3. Projeto Araribá

O último livro analisado foi o “Projeto Araribá” da editora Moderna com 27% dos professores sujeitos da pesquisa adotando-o em suas aulas (Gráfico 9). Esse livro traz o ensino de ângulo na penúltima unidade. Diferente dos dois livros analisados anteriormente, neste o ensino de ângulo é abordado no início da unidade, sendo sucedido pelo estudo dos polígonos e círculo.

Percebe-se que o livro didático em questão difere-se dos demais analisados. Nele o estudo de ângulo é introduzido por intermédio de uma série de perguntas acerca de giros, movimentos, sentidos, posições, etc. (Figura 17). O referido livro busca desenvolver o conceito de ângulo nos contextos de giro, abertura, inclinações

e regiões. Porém, toda a abordagem se restringe a três páginas de conteúdo, e três páginas com exercícios.

Para começar...

► **Responda às questões em seu caderno.**

- ◆ Nesse trecho da música "Roda Viva", Chico Buarque sugere uma semelhança entre os movimentos da Terra, da roda-gigante, do moinho e do pião. Que semelhança seria essa?
- ◆ Você consegue citar outros exemplos desse tipo de movimento? Quais?
- ◆ Quando a roda-gigante da foto da página ao lado é posta em movimento, o carrinho circulado começa a subir ou a descer?
- ◆ Quando algo gira como os ponteiros de um relógio, dizemos que gira no *sentido horário*. O sentido oposto ao giro dos ponteiros do relógio é chamado de *sentido anti-horário*. Em qual sentido você imagina que essa roda-gigante estivesse girando?
- ◆ Como você descreveria a posição do carrinho circulado?
- ◆ Que posição esse carrinho passará a ocupar quando a roda-gigante der meia volta?
- ◆ E quando ela der apenas um quarto de volta?
- ◆ E se a roda-gigante der uma volta completa, para que posição vai o carrinho?
- ◆ O sentido do movimento que você imaginou para essa roda-gigante interferiu nas respostas das três últimas questões?
- ◆ Nas figuras ao lado, a parte amarela representa um giro. Em qual figura o giro é maior? Em qual é menor?
- ◆ Como você descreveria o tamanho do giro em cada figura da questão anterior?

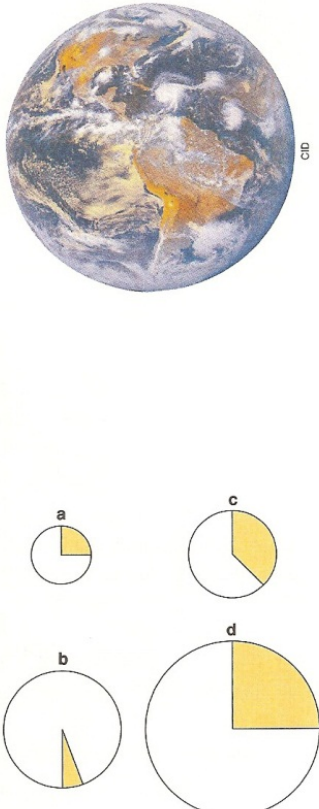


Figura 17 – Perguntas introdutórias do terceiro livro didático analisado.

Observou-se, ainda, que o livro não define ângulo. Entretanto ele aborda algumas representações de ângulo, os lados, o vértice, o transferidor, o grau e por fim a classificação dos ângulos em retos, agudos e obtusos.

Os exercícios são diversificados e contextualizados, busca-se trabalhar com todos os contextos de ângulo apresentados na parte teórica, além de trazer questões com abordagens atuais como os giros dados por num *skatista*.

De acordo com o manual do professor, a parte do livro didático que abrange o estudo de ângulo tem a finalidade:

- a) Compreender o que são ângulos por meio de suas ideias de giro, abertura, inclinação e região;

- b) Aprender a efetuar medições de um ângulo com o uso do transferidor;
- c) Comparar ângulos por sua classificação em reto, agudo ou obtuso.

Dentre os três livros analisados, o terceiro foi o menos adotado pelos professores envolvidos na pesquisa, no entanto, além dele estar de acordo com as exigências do PNLD e comungar dos critérios sugeridos por Pais (2006), abarca o que é indicado pelo Descritor seis, do Tema 1, da Prova Brasil, apontando ser o livro mais adequado dentre os analisados para o estudo de ângulo.

Além do que se verificou nos livros didáticos supracitados, percebeu-se, na revisão da literatura, que algumas definições de ângulo trazem erros conceituais, o que induz os leitores a uma interpretação errônea. Observou-se este fator nas três primeiras definições do subcapítulo 2.3.1.1 e na segunda do subcapítulo 2.3.1.2; a seguir, apresentam-se, sublinhados por nós, alguns trechos, seguidos dos respectivos comentários:

a) Um ângulo é a reunião de duas semi-retas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta.[...] (REZENDE, 2000, p. 21)

Esta definição está excluindo o ângulo raso e o ângulo nulo.

b) Chamamos de ângulo a figura formada por duas semi-retas com a mesma origem [...] As semi-retas são chamadas de lados e a origem comum, de vértice do ângulo. Um ângulo formado por duas semi-retas de uma mesma reta é chamado de ângulo raso. (BARBOSA, 2002, p. 22)

Aqui pode haver confusão, pois, o ângulo nulo também possui as duas semirretas numa mesma reta.

c) Chama-se ângulo à reunião de duas semi-retas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares). (DOLCE, 1997, p. 20)

Esta definição possui o mesmo erro conceitual da primeira, ela está excluindo o ângulo raso e o ângulo nulo.

d) Denomina-se ângulo a região convexa formada por duas semi-retas não opostas que têm a mesma origem. (GIOVANNI, 1999, p. 159)

Esta definição está excluindo o ângulo raso.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com os resultados obtidos, percebe-se que o panorama local acerca do ensino de Geometria não se distancia do observado na revisão da literatura – no sentido da necessidade de um esforço de tornar mais eficiente o ensino deste campo da Matemática.

Quanto à abordagem do conceito de ângulo, conclui-se que, apesar da maioria dos professores buscarem trabalhar com situações contendo ângulos antes de defini-lo, o universo e a forma destas abordagens são limitados. Percebeu-se que as abordagens utilizadas não abarcam as fases da abstração progressiva, inclusive, o fato de alguns professores não iniciarem o ensino de ângulo no ano recomendado pode comprometer o desenvolvimento de outros saberes geométricos.

Ficou evidente que o conceito de ângulo como giro ou mudança de direção (introdução de modelos dinâmicos) é pouco difundido entre os professores da RMECG. Tornando claro, assim, a necessidade de pesquisas na área, a fim de produzir objetos de aprendizagem utilizáveis por estes professores.

A partir das análises dos livros didáticos, conclui-se que a maioria deles não possui compromisso com o ensino do conceito de ângulo. Este despreço dos autores com tal ensino acentua-se, quando se observa o que sugere o descritor seis do tema 1 da Prova Brasil. Este fato é preocupante, já que a maioria dos professores sujeitos da pesquisa afirmaram utilizar tal instrumento didático em suas aulas. Embora a pesquisa tenha sido desenvolvida em pleno século XXI, a maioria dos livros didáticos analisados apresentou algumas características associadas aos livros utilizados no MMM, quanto ao formalismo desenvolvido e à distribuição dos conteúdos.

A abordagem didática desenvolvida nesta pesquisa mostrou-se eficiente quanto aos seus objetivos. Por meio dela, vários alunos passaram a identificar o ângulo padrão em domínios abstratos.

Praticamente todos os alunos conseguiram identificar os ângulos existentes nas representações escolhidas por eles, desenvolvendo os conceitos de ângulo situado de forma satisfatória. Já na segunda fase da abstração progressiva, com os grupos formados, os alunos conseguiram identificar semelhanças entre os ângulos situados deles e os dos colegas do grupo, desenvolvendo o conceito de ângulo contextual. Apesar dos grupos sentirem um pouco de dificuldade em perceber os ângulos existentes em seus contextos, depois das atividades com ângulos dinâmicos, acabaram por sanar tais lacunas. O resultado final foi bastante satisfatório, pois, os alunos, na terceira fase da abstração progressiva, conseguiram desenvolver o conceito de ângulo padrão, falando que, independente do contexto, os ângulos são formados por duas linha que se encontram num mesmo ponto.

Conclui-se, também, que é possível desenvolver atividades eficientes de ensino sem que haja custos elevados. O fato dos materiais utilizados, tanto na construção quanto na aplicação da abordagem didática, serem pouco onerosos, sugere uma aceitação de outros professores, principalmente de escolas públicas.

A presente pesquisa se deparou com algumas limitações. O primeiro fator limitador foi o difícil acesso aos dados que se encontravam na Secretaria de Educação de Campina Grande. Foram necessárias várias solicitações e visitas junto à respectiva instituição, para conseguir informações acerca das escolas, professores etc.

Conforme os descritores da Prova Brasil, tanto os livros didáticos quanto os professores e os alunos apresentam aspectos limitadores e possibilidades de modificações face ao que se espera do ensino e aprendizagem do conceito de ângulo.

Com relação à abordagem didática, esta se mostrou plenamente factível, ocorreram limitações nas atividades *in loco*, devido ao calendário escolar, pois houve dias em que as aulas foram suspensas antes da abordagem começar; em outra ocasião, faltou um número considerável de alunos, impossibilitando o desenvolvimento da abordagem didática.

Com relação aos conteúdos desenvolvidos pela pesquisa, esta se restringiu ao ensino do conceito de ângulo, fato este que não diminui a importância do trabalho, pois, a partir deste, os demais conteúdos do estudo de ângulo se desenvolvem com maior facilidade – conforme se comprova por meio do estudo sobre medição de ângulos.

Podendo ser adaptada para diversos contextos, espera-se que esta pesquisa sirva como norteadora para futuras investigações acerca do ensino de ângulo, principalmente do seu conceito.

Espera-se que pesquisas posteriores aprofundem as investigações sobre as atitudes dos professores de matemática diante do ensino de conteúdos geométricos. Fica como sugestão a realização de entrevistas estruturadas e semiestruturadas, bem como a comparação de uma sequência de aulas tradicionais com outra de aulas construtivistas.

Provavelmente, para que haja mudança no ensino de Geometria, os professores necessitariam modificar a postura diante do ensino tradicional; o currículo de algumas universidades necessita ser revisto, bem como deveriam ser disponibilizados cursos de formação continuada para os professores, nos quais a Geometria recebesse o devido tratamento, que sua importância formativa e funcional demanda.

REFERÊNCIAS

AMARAL, J. T. (Sup.) **Manual compacto de matemática**: teoria e prática, 1º grau. São Paulo: Rideel, 1997.

ARAÚJO, M. A. S. Porque ensinar Geometria nas séries iniciais de 1º grau. **A Educação Matemática em Revista**. Blumenal: SBEM, Ano 2, nº 3, 1994.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 5ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

BATTISTA, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *In* LESTER JR., F. K. **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the national council of teachers of mathematics**. IAP & NCTM. Charlotte, NC, 2007.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Trad. Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BONJORNO, J.R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. **Matemática: Fazendo a diferença: 5ª série**. São Paulo: FTD, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008: Matemática**. Brasília: MEC, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE**: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (5ª a 8ª series)**: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BÜRIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil**: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 1989.

CASAS GARCÍA, L. M.; LUENGO GONZÁLES, R. Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. enseñanza de las ciencias. **Revista de investigación y experiencias didácticas**, v. 23, n. 2. p. 201-216, 2005.

COLL, C. *et al.* **Psicologia do ensino**. Porto Alegre: Artmed: 2000.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática: 5ª série**. São Paulo: Ática, 2005.

DINIZ, M. I. S. V.; SMOLE, K. C. S. **O conceito de ângulo e o ensino de Geometria**. São Paulo: CAEM-IME/USP, 1993.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar, 9: Geometria plana: exercícios resolvidos, exercícios propostos com respostas, testes de vestibular com respostas**. 7ª ed. São Paulo: Atual, 1997.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

FAINGUELERNT, E. K. O ensino de Geometria no 1º e 2º graus. **A Educação Matemática em Revista**. Blumenau: SBEM, Ano 3, nº 4, 1995.

GADOTTI, M. F. **Definições matemáticas do conceito de ângulo: influências da história, do movimento da matemática moderna e das produções didáticas nas concepções dos docentes**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências Humanas. Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba, 2008.

GIOVANNI, J. R.; PARENTE, E. A. M. **Aprendendo Matemática: 7ª série**. São Paulo: FTD, 1999.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade: 5ª série**. 5ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

JARAUTA, J. M. S. *et al.* **Área de matemáticas: 1º. ciclo de la E.S.O.** Madrid: Digitalia, 2001.

KLINE, M. *Mathematics for the nomathematician*. New York: Dover, 1985.

KLITZKE, A. B. L. Questão de ângulo: Estratégias eficientes no ensino do conceito matemático. **Nova Escola**. São Paulo: Abril, Ano 25, nº 231, 2010.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**. Blumenau: SBEM, Ano 3, nº 4, 1995.

MIRAS, M. Um ponto de partida para a aprendizagem de novos conteúdos: os conhecimentos prévios. In COLL, C. *et al.* **O construtivismo na sala de aula**. 6ª ed. São Paulo: Ática, 2006.

MITCHELMORE, M. C.; WHITE, P. *Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation*. **Educational Studies in Mathematics**, v. 41, n. 3, p. 209-238, 2000.

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria**: uma visão histórica. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PIAGET, J. **Epistemologia Genética**. Petrópolis: Vozes, 1970.

PONTE, J. P. *et al.* **Didáctica da matemática**. Lisboa: Ministério da Educação (DES), 1997.

PROJETO Araribá: Matemática: 5ª série. São Paulo: Moderna, 2006.

RÊGO, R.; RÊGO, R. **Matematicativa**. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2004.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas: Editora da Unicamp; São Paulo: Imprensa Oficial, 2000.

APÊNDICES

Apêndice A – Questionário aplicado aos 22 professores da RMECG.

QUESTIONÁRIO

Este questionário tem o objetivo de subsidiar uma dissertação de mestrado, no qual será desenvolvido material sobre o ensino de ângulo, de maneira a fornecer informações sobre o ensino de tal conteúdo no Nível Fundamental de nossas escolas. Pedimos a sua contribuição, de modo a responder as perguntas com franqueza. Não é necessário se identificar.

1. Marque os anos do ensino fundamental que você leciona.

☐ 6º ano ☐ 7º ano ☐ 8º ano ☐ 9º ano

2. Você utiliza algum livro didático nas suas aulas?

☐ Sim ☐ Não ☐ Às vezes

3. Qual(is) dos livros didáticos abaixo você utiliza com seus alunos:

☐ Matemática e Realidade (Editora Atual)

☐ Matemática: fazendo a diferença (Editora FTD)

☐ Matemática na vida e na escola (Editora do Brasil)

☐ Projeto Araribá (Editora Moderna)

☐ Outro: _____

4. Na sua carreira como professor de matemática da RMECG¹⁷, você:

☐ Sempre ensinou Geometria.

☐ Raramente ensina Geometria.

☐ Nunca ensinou Geometria.

¹⁷ Rede Municipal de Ensino de Campina Grande.

5. Dentre os conteúdos de Geometria que você trabalha (ou trabalhou), o ensino de “ângulos” está presente?

☐ Sim ☐ Não ☐ Às vezes

Obs.: Se você marcou “não” na questão anterior, ignore as próximas perguntas.

6. Como você introduz o conteúdo ângulo?

☐ Primeiro trabalha com situações onde aparecem ângulos e depois define.

☐ Primeiro define e depois trabalha com situações onde aparecem ângulos.

☐ Primeiro define e depois trabalha com medição, operações e as propriedades de ângulo.

☐ Outro: _____

7. Em qual ano do ensino fundamental você introduz o estudo de ângulo?

☐ 6º ano ☐ 7º ano ☐ 8º ano ☐ 9º ano

8. Você procura trabalhar a ideia de ângulo como giro (mudança de direção)?

☐ Sim ☐ Não ☐ Às vezes

9. Qual das definições de ângulo abaixo você utiliza:

☐ União de duas semirretas de mesma origem.

☐ Região limitada por duas semirretas de mesma origem.

☐ Quantidade de giro.

☐ Outra: _____

10. Forneça sugestões que possam ajudar no ensino de ângulo.

Apêndice B – Pré-teste e pós-teste aplicados aos alunos de uma turma do 6º ano de uma escola da RMECG.

EXERCÍCIO DE SONDAGEM – 1ª PARTE

Número do aluno: _____ Idade: _____

- ☺ Leia todas as questões com bastante atenção;
- ☺ Procure entender o que está sendo pedido;
- ☺ Em caso de dúvida, consulte o professor.

1. Associe os nomes abaixo às respectivas figuras:

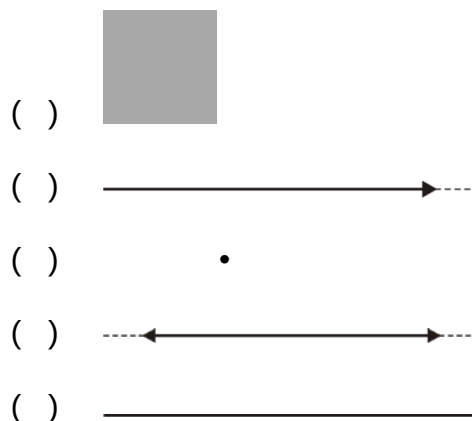
(a) Ponto

(b) Reta

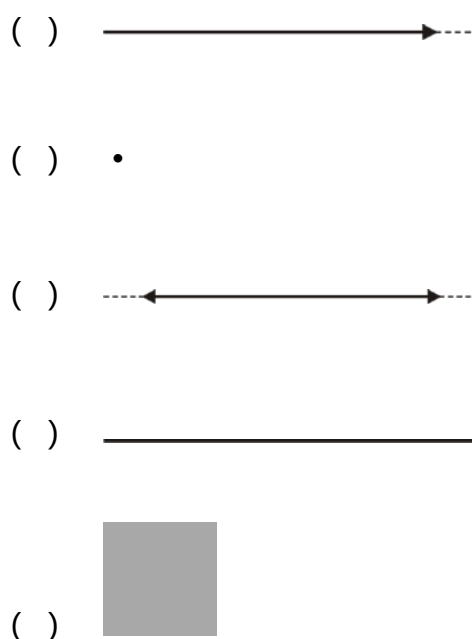
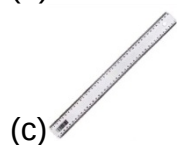
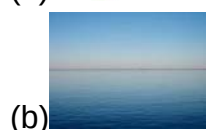
(c) Semirreta

(d) Segmento (pedaço) de reta

(e) Plano



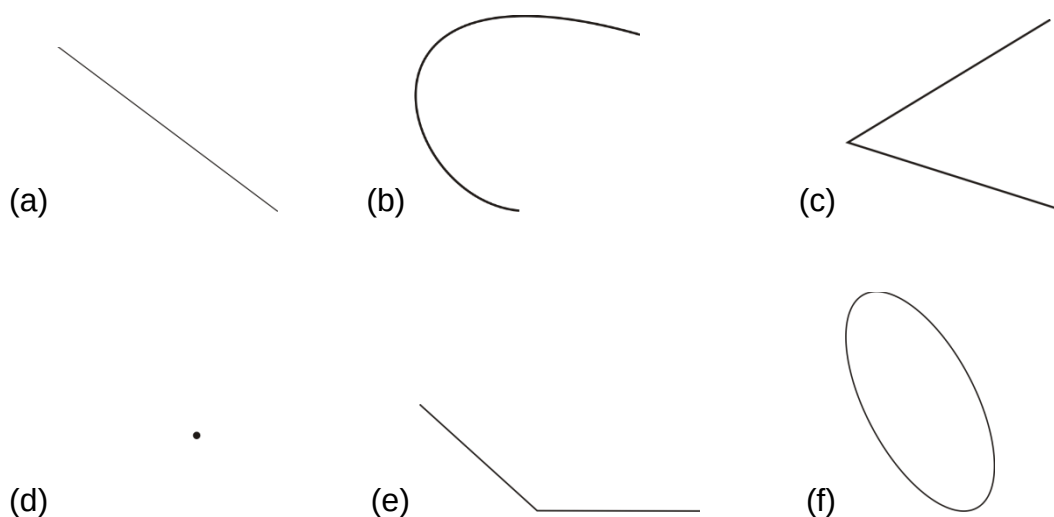
2. Relacione as fotos da 1ª coluna às figuras da 2ª coluna.



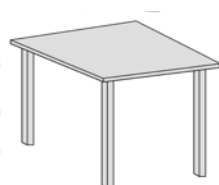
3. Enumere os contextos do dia-a-dia, que estão à direita, de acordo com os respectivos conceitos geométricos da esquerda:

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| (1) Reta | () A linha do horizonte. |
| (2) Ponto | () Uma estrela no céu. |
| (3) Semirreta | () Uma régua. |
| (4) Plano | () O campo de futebol. |
| (5) Segmento (pedaço) de reta | () A trajetória de um foguete. |

4. Quais das figuras abaixo representam ângulos?



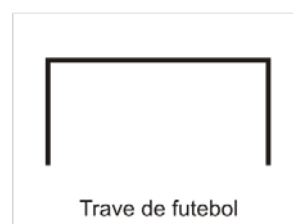
5. Mostre, em cada uma das figuras abaixo, os ângulos que você vê nelas:



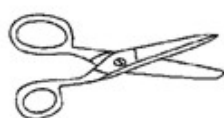
Mesa



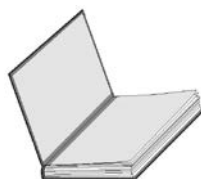
Escorrego



Trave de futebol



Tesoura



Livro



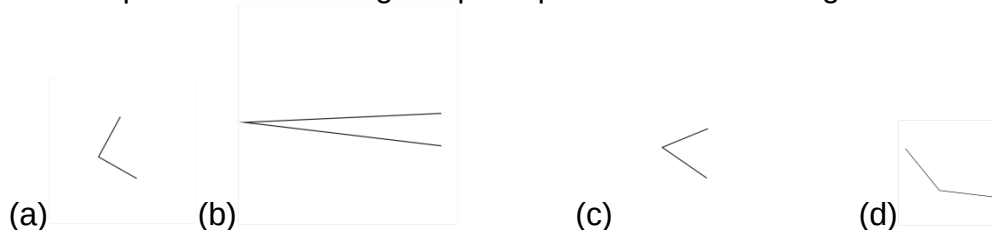
Relógio

☺ Você visualiza ângulos em outras situações do dia-a-dia? Quais?

EXERCÍCIO DE SONDAGEM – 2ª PARTE

Número do aluno: _____

1. Marque um “X” na imagem que representa o maior ângulo:



2. Qual das unidades de medida abaixo é utilizada para medir os ângulos?

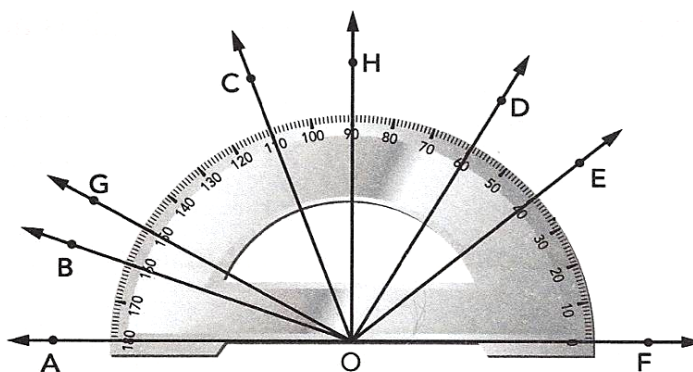
- a) m (metro) b) ° (grau) c) ℓ (litro) d) g (grama)

3. Observe a figura e responda as perguntas abaixo:

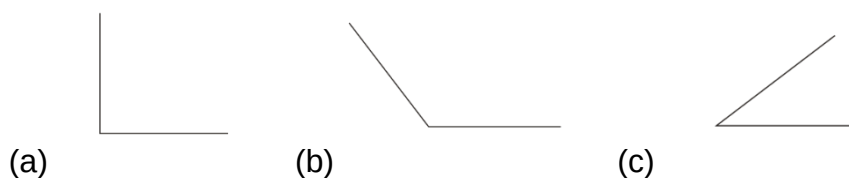
a) Qual o nome do instrumento, representado na figura ao lado, utilizado para medir ângulo?

b) Qual a medida do ângulo AÔF?

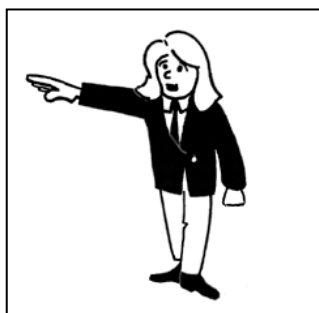
c) Qual a medida do ângulo FÔH?



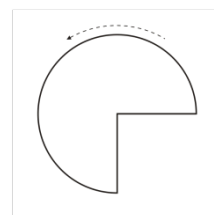
4. Qual dos três ângulos abaixo é chamado de “ângulo reto”?



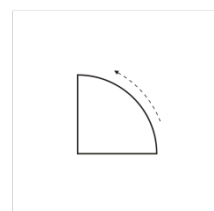
5. Faça de conta que você está no lugar da criança abaixo – com o braço direito levantado para frente, sem dar passos adiante, nem para trás ou para os lados. Agora, se imagine girando de acordo com o que é pedido pelo professor nas frases da 1ª coluna. Depois de imaginar os giros que você daria, ligue as frases da 1ª coluna às figuras da 2ª coluna.



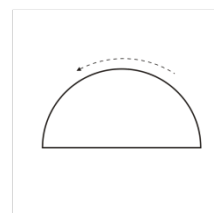
- Gire uma volta completa.



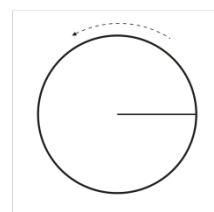
- Gire meia volta.



- Gire 1/4 volta.



- Gire 3/4 volta.



☺ Você pode dá um giro maior que uma volta? O que acontece?

Apêndice C – Módulo didático.

MÓDULO DIDÁTICO

OBJETIVOS

- a) Desenvolver o conceito de ângulo padrão partindo de situações específicas, em seguida, dos contextos de giro limitado e ilimitado, canto e declive e, por fim, dos domínios abstratos;
- b) Fazer ligações entre tais conceitos, buscando o desenvolvimento do conceito padrão de ângulo;
- c) Identificar e manusear instrumentos de criação e medição de ângulos.

RECURSOS

Alguns dos recursos abaixo foram utilizados como material didático, outros se prestaram à confecção deste, havendo ainda, aqueles que foram aproveitados como apoio nas atividades.

- | | |
|------------------------------------|------------------------|
| a) Cartolina ou papelão; | g) Régua; |
| b) Computador e impressora; | h) Compasso; |
| c) Tesoura; | i) Esquadro; |
| d) Cola branca; | j) Transferidor; |
| e) Canudos flexíveis; | k) Caderno de desenho; |
| f) Giz ou pincel de quadro branco; | l) Bússola. |

DESENVOLVIMENTO

O ensino de ângulo, de uma forma macro, abrange o desenvolvimento do seu conceito, de habilidades para criar e medi-los, da sua definição, da habilidade em operar tanto graficamente quanto numericamente, de classifica-los e conhecer suas propriedades. No entanto a presente abordagem buscou desenvolver, apenas, o conceito de ângulo e habilidades para criá-los e medi-los.

O conceito de ângulo padrão foi desenvolvido por meio de um processo o qual abarcou os três estágios da abstração progressiva (conceito de ângulo situado, conceito de ângulo contextual e o conceito de ângulo abstrato) sugeridos por Mitchelmore e White (2000) e apresentados na revisão da literatura.

Doravante serão apresentados os procedimentos para criação e aplicação de uma abordagem didática diferente das encontradas nos livros didáticos.

1ª Etapa – Sondagem

- a) Discutir o significado de ângulo, bem como a existência dele no dia-a-dia, na sala de aula, etc..
- b) Distribuir um pré-teste, o qual terá por finalidade sondar os conhecimentos prévios dos alunos, a exemplo do contido no Apêndice B.

2ª Etapa – Construção do material didático

A construção do material pode ser realizada em sala-de-aula. O importante é que, na terceira etapa, as representações em cartolina estejam prontas.

Na escolha das representações dos ângulos situados, podem ser levadas em conta algumas das situações indicadas pelos alunos no pré-teste.

No presente Módulo Didático, foram utilizados os seguintes contextos de ângulo: inclinação, canto, giro limitado e giro ilimitado, os quais estão representados, respectivamente, por meio das Figuras 1, 2, 3 e 4. Ressalte-se que poderão ser abordados outros contextos de ângulo, a critério do professor, tais como: quina, intercessões, abertura, direções, entre outros.

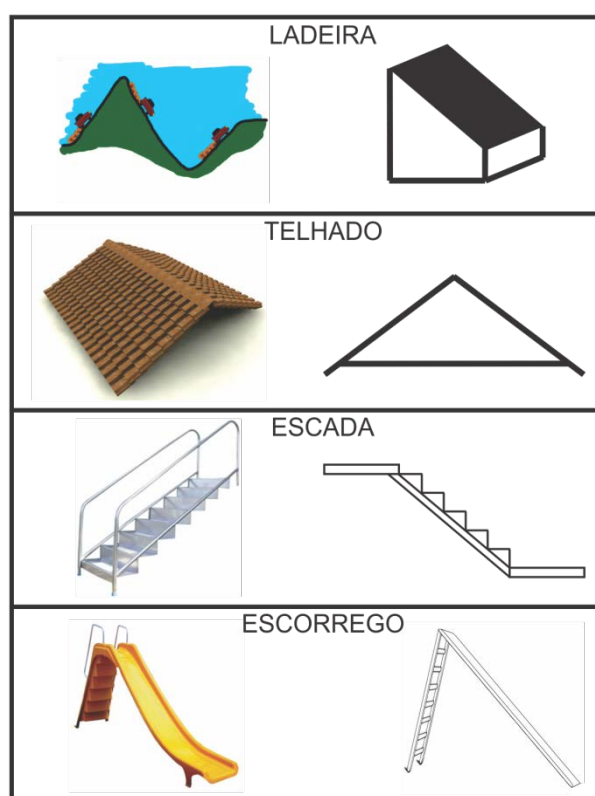


Figura 1 – Representações do contexto de declive.



Figura 2 – Representações do contexto de canto.

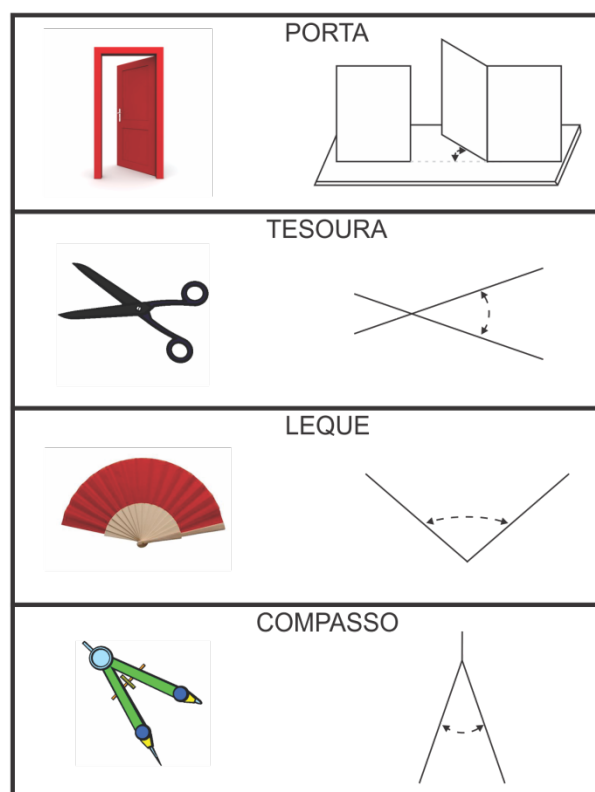


Figura 3 – Representações do contexto de giros limitados.

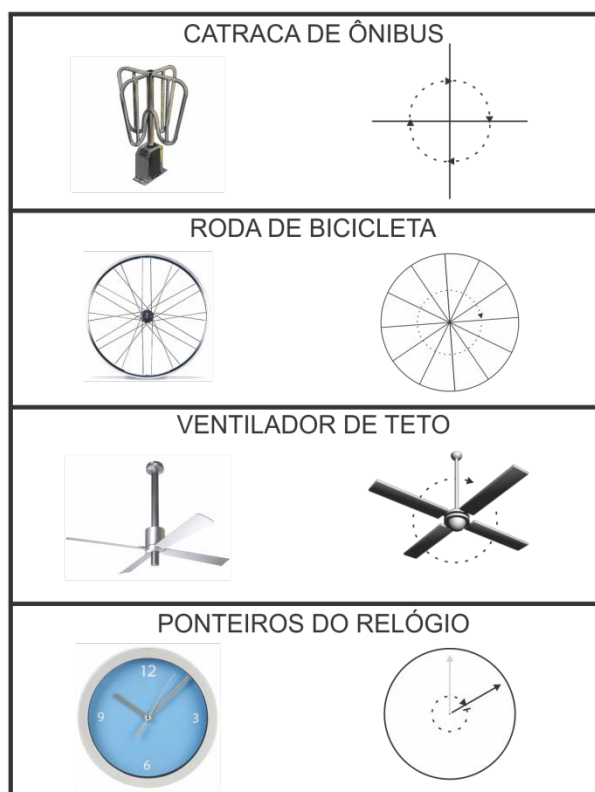


Figura 4 – Representações do contexto de giros ilimitados.

Cada situação física de ângulo será representada por figuras, as quais serão impressas em folhas de papel A4; deverão ser criadas e impressas representações geométricas de cada situação, para serem coladas no verso da cartolina, conforme procedimento descrito a seguir:

- a) Impressão das figuras e das respectivas representações geométricas;
- b) Colagem das referidas figuras em pedaços retangulares de cartolina, para que fiquem rígidas (Figura 5).
- c) Colagem das representações geométricas no verso da cartolina.

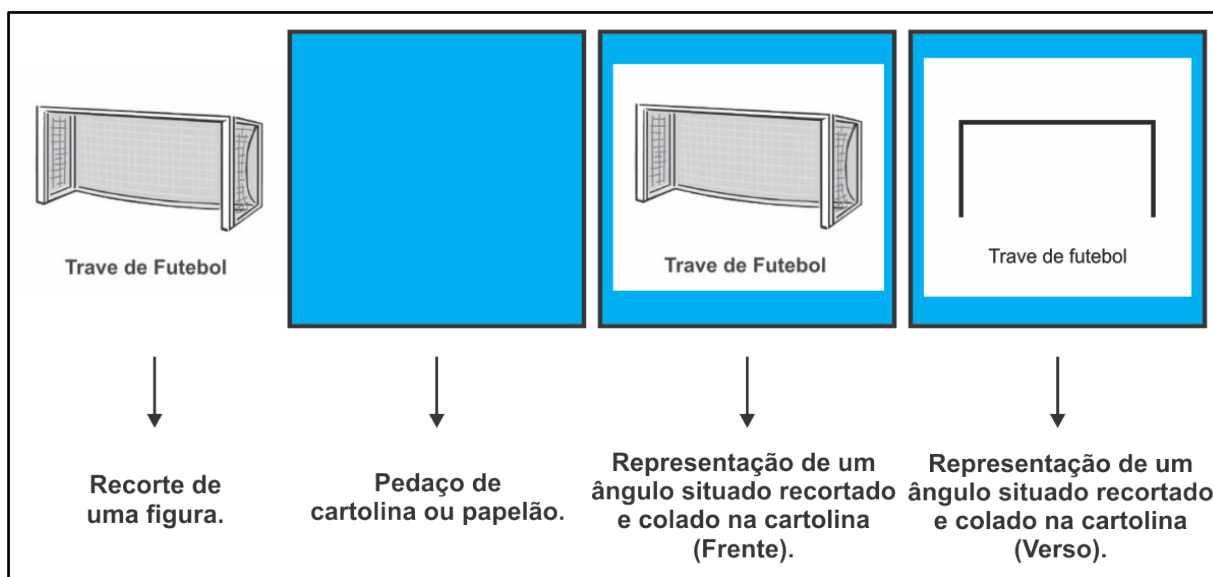


Figura 5 – Procedimentos para criação das representações de situações físicas de ângulo.

3ª Etapa – Desenvolvimento das 1ª e 2ª fases da abstração progressiva

Os procedimentos realizados para criação e aplicação das atividades embasadas nas duas primeiras fases da abstração progressiva consistem em:

Desenvolvimento da 1ª fase da abstração progressiva

- Com todas as representações prontas, o professor deve solicitar que cada aluno escolha uma figura;
- Cada aluno deverá mostrar ao restante dos colegas a figura escolhida;
- A partir deste ponto, o professor deve indagar a respeito da existência do ângulo naquela situação, o que tornará oportunos debates acerca da existência de ângulos nas diversas situações apresentadas;

- d) Em seguida, o aluno deve mostrar o verso da cartolina, o qual conterá a representação geométrica; com isso, os alunos pode-se abrir uma discussão em busca de elos entre a figura e sua representação;
- e) Depois da escolha das figuras, deverão ser entregues aos alunos canudos flexíveis, régua, transferidores, esquadros, tesouras e cadernos de desenho;
- f) Após o professor entregar os canudos flexíveis, deverá pedir aos alunos que representem o(s) ângulo(s) que visualizaram na figura, por meio dos canudos;
- g) Depois de repetir este processo com todos os alunos da sala, o professor deverá solicitar que eles representem no caderno de desenho o ângulo representado com os canudos;
- h) Os alunos, individualmente, mostram aos demais colegas da turma, os ângulos identificados por eles a partir dos canudos;
- i) Aproveitando as situações físicas de ângulo existentes na escola, deve-se pedir aos alunos que procurem fazer relações entre elas e as escolhidas por eles; a partir desse momento, os alunos devem apontar (no caso dos ângulos estáticos) ou moverem os objetos (no caso dos ângulos dinâmicos), até que estes fiquem com a mesma “abertura” do modelo criado com os canudos;
- j) Por fim, deve ser solicitado aos alunos que desenhem os ângulos encontrados por eles no caderno de desenho.

Desenvolvimento da 2ª fase da abstração progressiva

O educador deve levar o aluno a perceber as ligações existentes entre os conceitos de ângulos situados que estão inseridos nos contextos físicos de ângulo. Para isso, pode levantar questões como:

- a) O que se “inclina” igual ao telhado?
- b) Tem outro objeto que gira igual à porta da sala?
- c) Existe algo que gira parecido com um ventilador?
- d) Vocês conhecem algo que possua cantos iguais aos do tampo de uma mesa?

O professor pode solicitar aos alunos que verifiquem com os colegas quais situações são parecidas com as deles. A partir daí, pode formar agrupamentos, compostos por alunos que possuíam figuras do mesmo contexto.

Deve ser explicado que cada grupo (contexto) é composto por quatro figuras, sugerindo aos alunos que interajam, comparando as figuras e discutindo possíveis relações entre elas. Com isso, a turma pode ser dividida de acordo com os quatro diferentes contextos.

Em seguida, o professor escreverá no quadro, com ajuda dos alunos, os nomes dos contextos que em cada grupo está representado, a saber: inclinação, canto, giro limitado e giro ilimitado;

Com os grupos formados e os nomes dos contextos elucidados, cada grupo discutirá entre si as semelhanças encontradas nas situações e, com os canudos flexíveis, farão comparações entre os ângulos, registrando nos cadernos de desenho os ângulos contextuais encontrados.

4ª Etapa – Atividades para desenvolver o conceito de ângulo padrão em contextos de giro

A literatura aponta possíveis dificuldades dos alunos em identificar o conceito de ângulo padrão nos contextos de giro, portanto o professor pode desenvolver atividade(s) visando a dirimir este problema.

Este módulo didático traz, como sugestão, três atividades que permitirão ao aluno identificar, em seus movimentos de giros, uma posição inicial e outra final, associando-as aos lados do ângulo; com isso, acredita-se que tais alunos desenvolverão o conceito de ângulo padrão neste contexto.

1ª atividade: Conhecendo os giros de uma volta, meia volta e $\frac{1}{4}$ de volta.

O professor deve pedir aos alunos que fiquem de frente para uma parede e que levantem um dos braços. Deve ser desenhada uma seta no chão, representando a posição inicial do braço. Em seguida, devem ser realizados os seguintes procedimentos:

- a) Solicitar aos alunos que, sem sair do lugar, realizem um giro até voltarem para a mesma posição. O professor, então, deve esclarecer que o movimento realizado é o de um “giro completo”. Seguidamente, deve comparar aquele movimento com os de outros objetos como portas, volantes de carro, ponteiros de relógio, rodas, etc. e indagar a respeito de coisas que também giram.
- b) Pedir aos alunos que girem até ficarem de costas para parede. Em seguida, pedir para que digam a quantidade de giros dado por eles;

- c) O professor deve pedir aos alunos que giem até ficarem ombro-a-ombro com os colegas e perguntar se o giro dado é maior ou menor que meia volta. Em seguida, deve pedir para que descrevam o movimento;
- d) Ao final, o professor deve fazer as seguintes perguntas:
- Qual dos três movimentos feitos por vocês é o maior?
 - Preciso de quantas meias-voltas para obter uma volta?
 - Quantos giros de um quarto de volta é necessário para atingir meio giro? E para chegar a uma volta completa?
- e) Pedir aos alunos que desenhem, no caderno de desenho, os seguintes ângulos:
- Um ângulo de meia volta;
 - Um ângulo de $1/4$ de volta;
 - Um ângulo de uma volta;
 - Um ângulo de $3/4$ de volta;
 - Um ângulo de $4/4$ de volta;
 - Um ângulo de $2/4$ de volta;

2ª atividade: Aplicando os giros de uma volta, meia volta e $1/4$ de volta.

No início da aula, o professor deve entregar um “mapa da sala” (Apêndice E), na qual constará uma imagem (Figura 6) representando a sala-de-aula. Deverá solicitar aos alunos que formem duplas. Um dos alunos deve ficar de olhos vendados e o outro aluno da dupla o conduzirá, utilizando comandos verbais, até chegar à carteira onde ele senta comumente.

Para tanto, o segundo aluno só poderá utilizar os comandos: ande “X” passos para frente; pare; ande tantos passos para trás; gire um quarto de volta; gire meia volta pra direita ou esquerda.

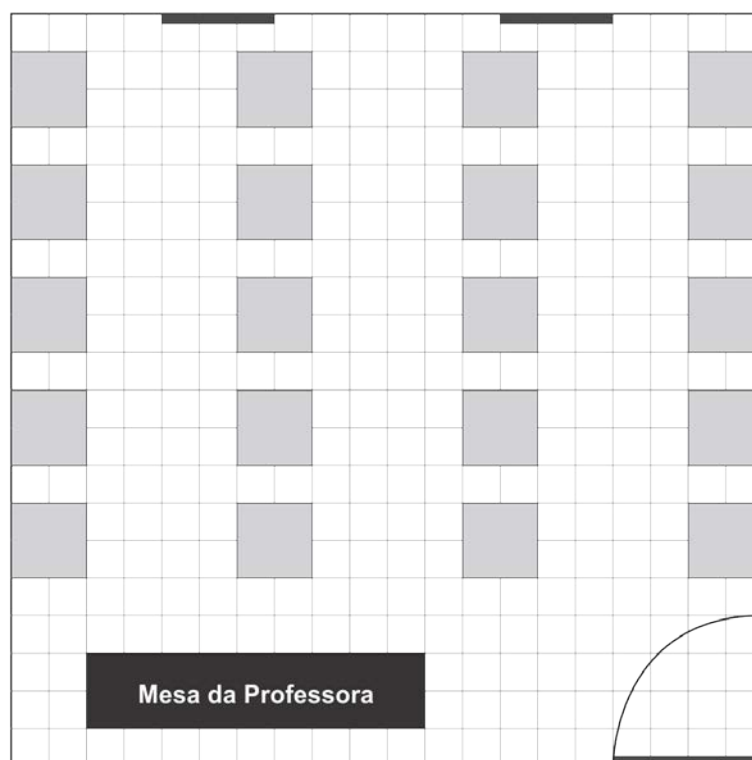


Figura 6 – Mapa da sala.

Enquanto uma dupla realiza a atividade, o par vizinho deve desenhar no mapa da sala o trajeto feito por aqueles. No verso da atividade (Apêndice E), os alunos responderão alguns questionamentos, elaborados pelo professor; poderá ser solicitado a eles, por exemplo, que representem o percurso realizado.

3ª atividade: Direção, sentido, localização e a rosa dos ventos.

A terceira atividade deve ter com uma discussão a respeito do significado de direção, sentido e explicações acerca da rosa dos ventos, incluindo sua utilidade. Em seguida, deve ser distribuído o texto “SAIBA MAIS!” (Apêndice F), o qual apresenta cada um dos referidos conceitos.

Primeiro, o texto deve ser lido juntamente com os alunos; depois, deve-lhes ser perguntado se podem dar exemplos de direções e sentidos, podendo o professor dar exemplos, a fim de facilitar a execução do que foi solicitado.

Com o auxílio de uma bússola, o professor deverá ensiná-los a localizar o norte magnético e, a partir dele, juntamente com os giros, construir os pontos cardeais (Figura 7), da seguinte maneira:

- a) Os alunos afastarão as cadeiras, até que o centro da sala fique livre;
- b) Será escolhido um aluno para ficar no centro da sala;
- c) Com um pincel de quadro branco, este aluno construirá, no chão da sala, seguindo as instruções que os colegas fornecerão – dando giros de meia volta e quartos de volta – as quatro primeiras pontas da rosa dos ventos, que representam os quatro pontos cardeais;
- d) O professor pode relacionar o leste e o oeste com o nascente e o poente do sol, respectivamente;
- e) Deve explicar o que é um giro de $1/8$ de volta; a partir daí, os alunos construirão os pontos colaterais (Figura 7);
- f) Ao final, deverá solicitar aos alunos que desenhem a rosa dos ventos no caderno de desenho, identificando os ângulos.

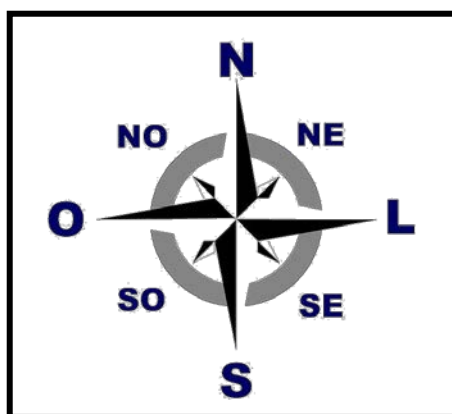


Figura 7 – Rosa-dos-ventos indicando os pontos cardeais e colaterais.

5ª Etapa – Desenvolvimento da 3ª fase da abstração progressiva

As atividades dessa etapa serão realizadas em grupo. Buscar-se-á, com isso, propiciar aos alunos momentos fecundos de atitudes como participação, interação e colaboração.

Deverá ser solicitado aos alunos que fiquem em pé e agrupados de acordo com os contextos estabelecidos na 3ª etapa. Cada grupo escolherá um aluno para representá-los. Estes representantes mostrarão ao restante da turma os ângulos observados por eles em cada figura do seu contexto.

O professor, então, fará as seguintes perguntas:

- d) Vocês percebem alguma semelhança entre estes contextos?
- e) É possível perceber que alguns ângulos estão presentes em situações de movimento e outros em situações estáticas?
- f) Quais são as situações que possuem movimento? E as paradas?

Com isso, alguns alunos poderão fazer ligações entre os diversos contextos de ângulo, criando domínios abstratos e, conseqüentemente, formando os conceitos de ângulo abstrato dinâmico e ângulo abstrato estático.

O professor pode sugerir que os grupos formados a partir dos dois domínios interajam e procurem, com os canudos flexíveis, encontrar semelhanças, que podem ser representadas no caderno de desenho.

Ao final, todos os grupos se unirão e será aberta uma discussão entre eles acerca das semelhanças entre todos os ângulos ali presentes; o professor pode direcionar a discussão, de modo a deixar claro que, independente da situação do contexto ou domínio, um ângulo é sempre formado por duas linhas de mesma origem.

6ª Etapa – Medição de ângulos

Após a conceituação, o professor poderá trabalhar a medição de ângulos. Para tanto, aos alunos deve ser apresentada a unidade padrão de medida de ângulo (o grau), bem como alguns instrumentos de construção e medição de ângulos.

O professor poderá ressaltar que, para medir um ângulo, basta saber quantas vezes a unidade de medida cabe nele.

O auxílio da História da Matemática

Com a ajuda da História da Matemática, os alunos devem conhecer a origem do grau ($^{\circ}$); para isso, o professor deve apresentar “ 1° ” (um grau) como o “ângulo unidade” de medição de ângulos. A seguinte explanação histórica pode ser proferida pelo professor na sala de aula:

Entre os anos 2000 a.C. e 1000 a.C. surgiram na Mesopotâmia várias civilizações conhecidas de um modo geral como civilização babilônica. Este povo realizou estudos ligados à astronomia e à álgebra elementar e possuía um sistema de numeração bastante desenvolvido cuja base era sessenta. Dentre as heranças deixadas por eles encontramos a marcação das horas (1 hora = 60 minutos; 1 minuto = 60 segundos) e a medição dos ângulos em graus. Com base nos seus estudos sobre movimentos de estrelas e planetas e por causa de seu sistema de numeração, os babilônios dividiram o círculo em 360 partes iguais. Cada uma dessas partes recebeu, mais tarde, o nome de um grau. O grau tem sido uma das unidades utilizadas para expressar a medida de ângulo ao longo de muito tempo. Assim, o giro completo mede 360 graus, que denotamos de modo simplificado por 360° .

Utilização de dobraduras

O professor construirá transferidores, juntamente com os alunos, a partir de dobraduras, conforme os passos descritos abaixo. A intenção é levá-los a estimar medidas e mostrar a necessidade de um instrumento mais preciso de medição de ângulos – o transferidor de plástico (Figura 8), que é marcado gradualmente.

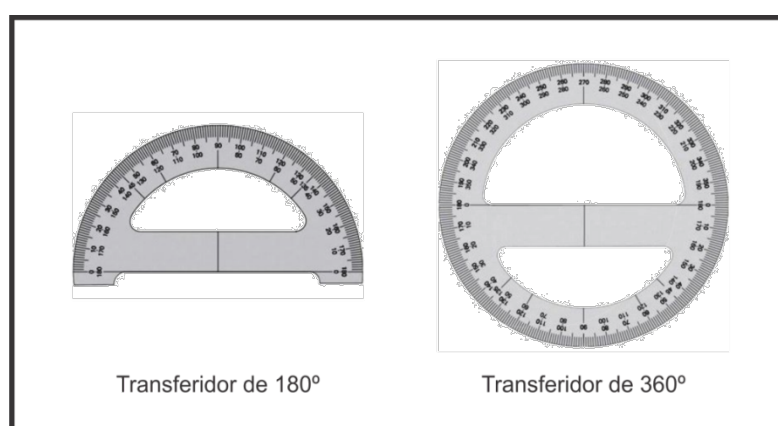


Figura 8 – Transferidores graduais rígidos de 180° e 360°.

Abaixo, seguem os passos da atividade:

- a) Desenhe com o compasso um círculo de, aproximadamente, 10 cm de raio e recorte-o com a tesoura;
- b) Esse círculo representa um ângulo de 360°, dobre-o ao meio e corte-o no vinco, obtendo-se um ângulo de 180° (Figura 9).

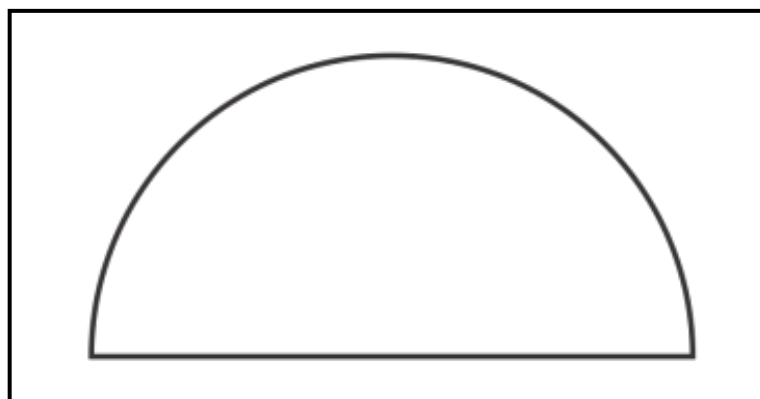


Figura 9 – Círculo (360°) sendo dobrado ao meio e o respectivo semicírculo (180°).

- c) Pegue um dos semicírculos e dobre-o pela metade e, novamente, pela metade, obtendo três vincos espaçados por ângulos de 45° cada um (Figura 10).

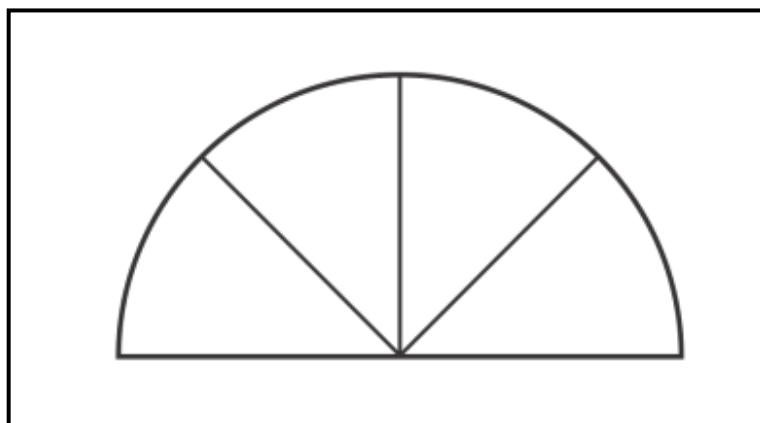


Figura 10 – Três vincos dividindo o semicírculo em 4 ângulos de 45° .

- d) Desdobrem o semicírculo e dobrem-no em três partes iguais, ficando marcados outros três vincos, separados por ângulos de 60° (Figura 11);

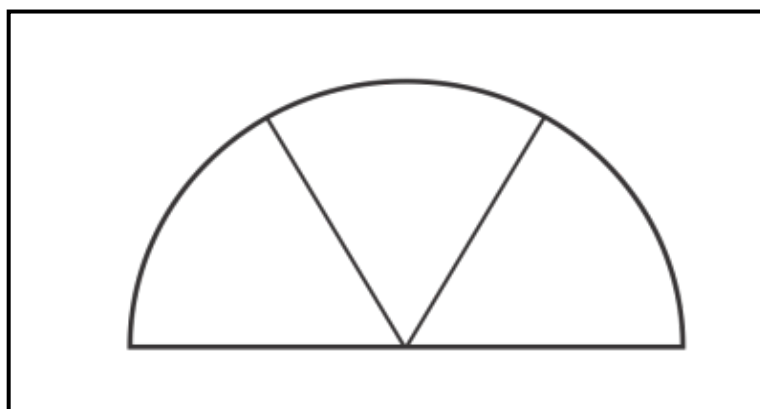


Figura 18 – Dois vincos dividindo o semicírculo em 3 ângulos de 60° .

- e) Dobrando ao meio cada uma destas três partes têm-se ao todo seis ângulos de 30° (Figura 13). Deve-se ter cuidado para não confundir os vincos de 60° com os de 45° neste momento. Nesta parte, o professor pode introduzir, se achar conveniente, o conceito de bissetriz;

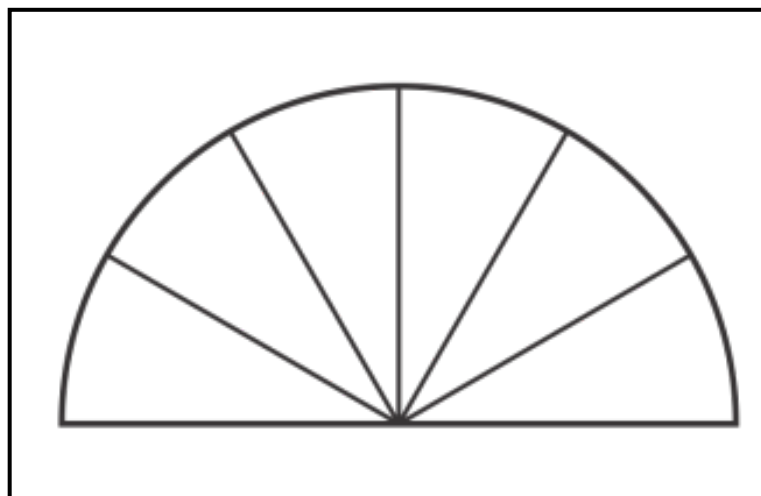


Figura 19 – Cinco vincos dividindo o semicírculo em 6 ângulos de 30°.

- f) Novamente, dobrando cada ângulo de 30° ao meio, obtemos 12 ângulos de 15° (Figura 14);

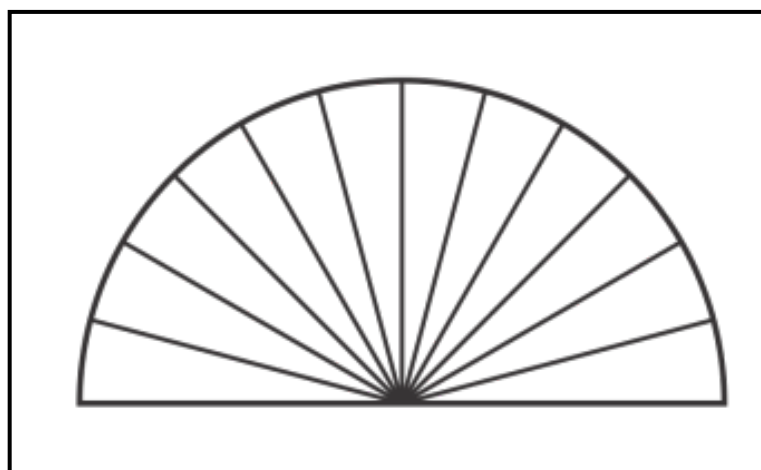


Figura 20 – Onze vincos dividindo o semicírculo em 12 ângulos de 15°.

Depois de construir o transferidor com as crianças, o professor ensinará a utilizá-lo. Em seguida, aplicará uma atividade (Apêndice G) e pedirá que os alunos meçam os ângulos nela contidos.

Em seguida, o professor pedirá aos alunos que utilizem os transferidores de plástico. Em seguida, mostrará que, para efetuar a medição de um ângulo utilizando tal instrumento, é preciso que o centro do transferidor coincida com o vértice do ângulo e que um dos lados do ângulo coincida com a linha marcada em 0° (zero grau).

Deve ser dito, ainda, que alguns transferidores (Figura 8) possuem duas numerações, de 0° a 180° – uma da direita para a esquerda e outra da esquerda para a direita – e que outros mais simples possuem apenas a numeração em um dos sentidos.

Deve ser solicitado dos alunos que confirmem as medições feitas por eles na atividade anterior (Apêndice G), observando se as estimativas por eles realizadas são coerentes.

Após concluir todas as etapas da abordagem didática, deve ser aplicado um pós-teste com os mesmos alunos.

Apêndice D – Lista de presença.

LISTA DE PRESENÇA

Atividade: Pré-teste Data: 25/08/2010

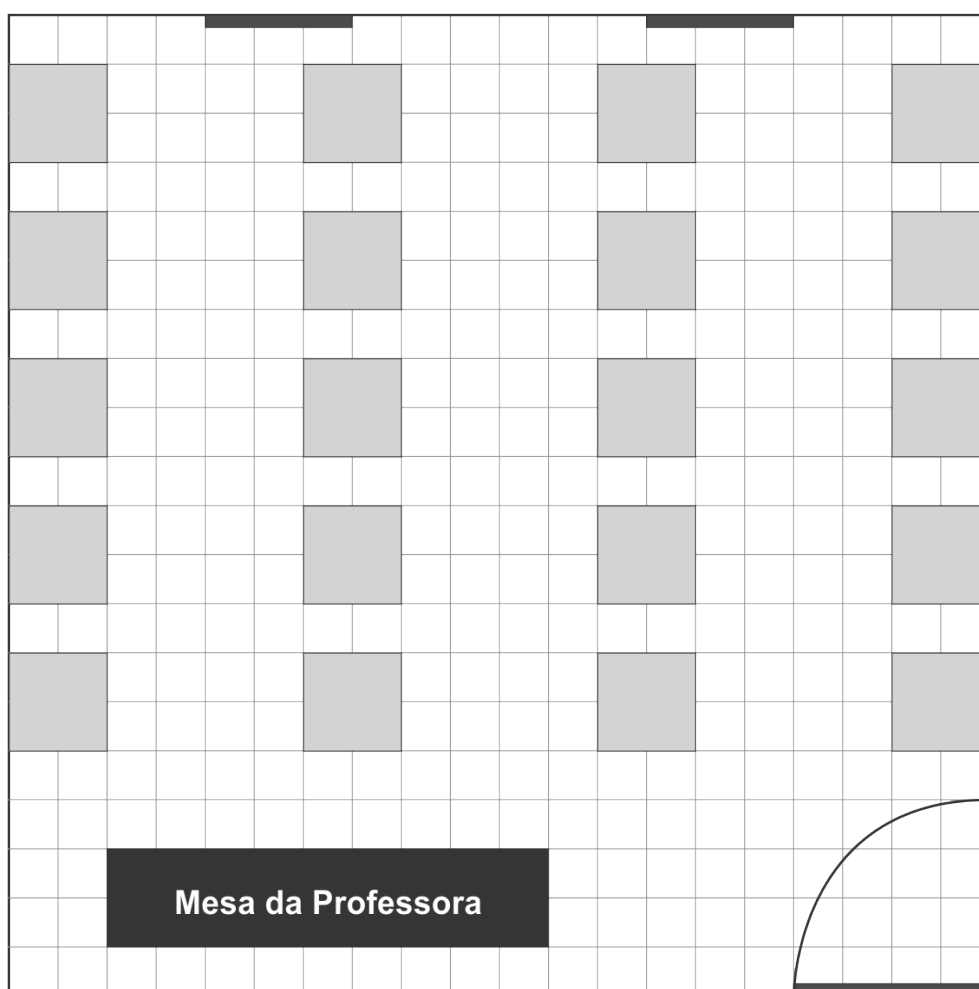
- 1 – _____
- 2 – _____
- 3 – _____
- 4 – _____
- 5 – _____
- 6 – _____
- 7 – _____
- 8 – _____
- 9 – _____
- 10 – _____
- 11 – _____
- 12 – _____
- 13 – _____
- 14 – _____
- 15 – _____
- 16 – _____
- 17 – _____
- 18 – _____
- 19 – _____
- 20 – _____
- 21 – _____
- 22 – _____
- 23 – _____
- 24 – _____
- 25 – _____

Apêndice E – Atividade “mapa da sala”.

MAPA DA SALA

Números dos alunos: _____ Data: ____/____/____

Desenhe no mapa o trajeto da dupla vizinha.



Responda as perguntas abaixo só depois de desenhar o trajeto.

1. Quais os números dos integrantes da dupla vizinha?
2. Descreva abaixo o trajeto da dupla vizinha.
3. Quais as direções e os sentidos que apareceram no trajeto?
4. Qual foi o ponto de partida? E o de chegada?
5. Mostre os ângulos criados durante a trajetória.

Apêndice F – Texto discutido em sala.

SAIBA MAIS!

Direção: linha imaginária ao longo da qual alguém ou algo se move ou aponta. (dicionário digital Houaiss)

Sentido: orientação segundo a qual se efetua um movimento. (dicionário digital Houaiss)

A rosa-dos-ventos¹⁸ é um instrumento de orientação baseado nas quatro direções fundamentais e suas intermediárias.

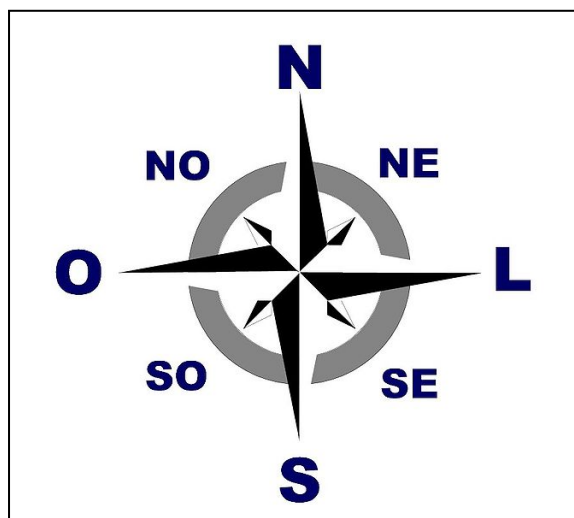
A utilização de rosas-dos-ventos é extremamente comum em todos os sistemas de navegação antigos e atuais. Seu desenho em forma de estrela tem a finalidade única de facilitar a visualização com o balanço da embarcação, portanto os quatro pontos cardeais principais são os mais fáceis de ser notados: norte (N), sul (S), este ou leste (L) e oeste (O). Dependendo do tamanho da bússola pode caber mais quatro pontos que são chamados de pontos colaterais; nordeste (NE), sudeste (SE), noroeste (NO) e sudoeste (SO).

Pontos cardeais

- **E:** este ou leste
- **N:** norte
- **O** ou **W:** oeste
- **S:** sul

Pontos colaterais

- **NE:** nordeste
- **NO** ou **NW:** noroeste
- **SE:** sudeste
- **SO** ou **SW:** sudoeste



Atividade:

Desenhe a rosa-dos-ventos no seu caderno de desenho.

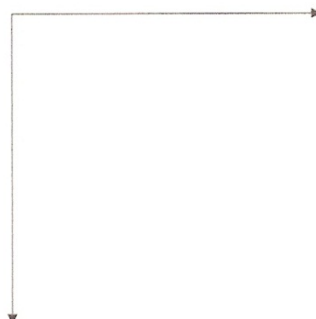
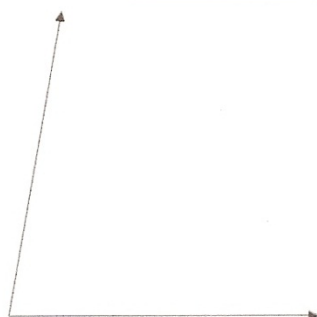
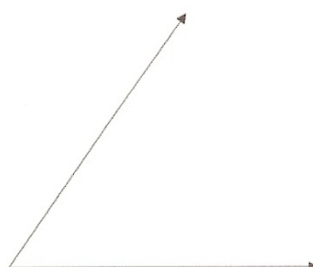
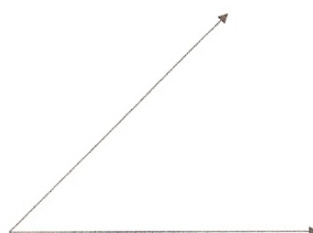
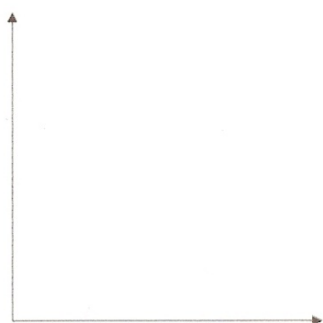
¹⁸ O texto sobre a rosa-dos-ventos foi retirado da *wikipedia* (internet) e a foto do *google imagens* (internet).

Apêndice G – Avaliação sobre medição de ângulo.

ATIVIDADE

Número: _____ Data: ____/____/____

Meça os ângulos abaixo com o transferidor produzido por você.



Agora meça os ângulos acima com o transferidor de plástico.

ANEXOS

Anexo A – Lista das escolas dos anos finais do ensino fundamental da RMECG.



ESTADO DA PARAÍBA
PREFEITURA MUNICIPAL DE CAMPINA GRANDE
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO, ESPORTE E CULTURA

RELAÇÃO DOS ENDEREÇOS DAS ESCOLAS DO 3º E 4º CICLOS

E.M. Lafayete Cavalcante Código: 25073699 Rua: Macstro Nestor G. Santiago Bairro: Malvinas Cep: 58108-393 Telefone: 3339.5674 / 3339.9615 Diretor (a): Maria do Socorro Flor- *8898.5431 Adj: Clodoaldo- *8855.8056 Horário de funcionamento: M/T/N	E.M. Lions Prata Código: 25074571 Rua: João Quirino Bairro: Catolé – Cep: 58104-555 Telefone: 3337.3978 / 3310.7066(Interno) Diretor (a): Mª do Carmo da Costa- *9907.5612 / 3337.2476 Adj: Dalva Lobão Assis- *9917.6762 / Horário de funcionamento: M/T/N
E.M. Manoel da Costa Cime Código: 25073745 Rua: Joaquim Gonçalves – Cep: 58108-070 Telefone: 3342.1715 / 3334.1989 Diretor (a): Ionaldo Patrício S. Araújo- *8886.7914 / 3333-2984 Adj: Ivã de Aguiar Camêlo- *3339-1353/9372-5126 Horário de funcionamento: M/N	E.M. Padre Antonino Código: 25073800 Rua: Carlos Alberto de Sousa – Cep: 58109-155 Telefone: 3333-1383 / 3333-1821(interno) Diretor (a): Joana Dark A. Gonçalves- *3321.4266/8860.6158 Adj: Mª Elisabete F. Furtado- *9909.7018 / 3322.853. Horário de funcionamento: T/N
E.M. Tiradentes Código: 25075071 Rua: Presidente Costa e Silva, 420 - Bairro: Sta Rosa. Cep: 58107-050 Telefone: 3341.4111(Interno) /3335.5298 Diretor (a): Maria Inadja Oliveira A Leôncio- *9921-8689 Adj: Mª do Socorro N. de Pontes Horário de funcionamento: M/N	E.M. São Clemente Código: 25076930 Rua: Arnaldo Luiz de Melo, 55 Bairro: São José da Mata. Cep: 58113-000 Telefone: 3314.1146 Diretor (a): Maria Nazaré M. da Silva- *3314.1289 Adj: Mª Dalva de Freitas Horário de funcionamento: M/T
E.M. Dr. Francisco Brasileiro Código: 25072820 Rua: José Rodrigues de Lima, 80 -Bairro: Santa Terezinha Cep: 58104-170 Telefone: 3338.2827 Diretor (a): Landilina de A. Brito- *8836.8963 / 3337.2239 Adj: Eva Gomes Ferreira Horário de funcionamento: M/N	E.M. CEAI Gov. Antonio Mariz Código: 25070720 Rua: Marcelino P. da Rocha Bairro: Conjunto Ressurreição II Cep: 58.100-000 Telefone: 3335.2807 / 3335.0774(Interno) Diretor (a): Giselda Alves de Melo- *9904.9513/3335.3715 Adjunta: Mª Geanne da Silva- *9134.6734 / 3335.3647 Horário de funcionamento: Tarde
E.M. CEAI João Pereira de Assis Código: 25108662 Rua: Manoel Alves de Oliveira Bairro: Catolé – Cep: 58105-000 Telefone: 3331.0298 Diretor (a): Mª Célia Ribeiro- *3331.9549 / 9975.2673 Adj.: Luciene Azevedo Dias- *3341.2958 / 8871.0220 Horário de funcionamento: M/N	E.M. Maria das Vitórias Código: Rua: Bairro das Cidades – Cep: Telefone: 3335.0048 /3335.4837 /3335.0452 Diretor: Marillac- *8815.8564 Adj.: Déia Costa- *3335.2343 / 8893.5364 Horário de funcionamento: T/N
E.M. Frei Dagoberto Stucker Código: 25073648 Rua Newton Estilac Leal Bairro: Alto Branco Cep: 58102-485 Telefone: 3341.0726 / 3341.5739(Interno) Diretor (a): Verônica Batista de Araújo- *9151.3392 Adjunta: Horário de funcionamento: M/N	E.M. Henrique Guilhermino Código: 25073605 Rua Catolé de Zé Ferreira Bairro: Velame – Cep: 58100-000 Telefone: 3335.1991 3335 3671 Gestora: Raimunda O. da Silva- *8717.7369/3339-6028 Adj. Célia Mª de S. Fonseca- *8823-1440/3335-3366 Horário de funcionamento: Tarde
E.M. Roberto Simonsen Rua Carlos Chagas, 261 Bairro: São José- Cep: 58107-670. Telefone: 3322-8900 Diretor (a): Luciene de Vasconcelos Sousa- *8857.0414 Horário de funcionamento: Manhã	E.M. CEAI Dr. Elpidio de Almeida Rua Joaquim Amorim Junior / Bairro: Ramadinha Cep: 58100-000 Telefone: 3333-4176/3333-1002(Interno) Diretor (a): Sônia Maria Pinto Cavalcante- *8853 1121 9108-3712/9334-7489/3333-6831 Horário de funcionamento: Manhã
E.M. Maria Anunciada Bezerra Rua José Nogueira Pereira / Bairro: Três Irmãs Cep: 58108-350 Telefone: 3339.5732 / 3335-2887(interno) Diretor (a): Rosalva Evaristo Gonçalves- *9142-1398 Adjunta: Jedida Freire de Lima Horário de funcionamento: Noite	

Anexo B – Autorizações concedidas pela professora e pela diretora de uma escola da RMECG para que fosse desenvolvida a abordagem didática.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Cara Diretora,

Eu, Kléber Mendes Vieira, mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, estou desenvolvendo uma pesquisa voltada ao ensino de ângulo por meio de uma abordagem didática diferente da tradicional.

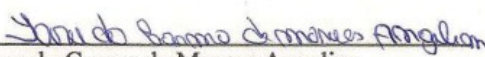
Serão realizadas cinco atividades durante a pesquisa envolvendo o conceito de ângulo; instrumentos de criação e medição de ângulo; definição de ângulo e atividade de ângulo como giro.

Como necessitarei da participação ativa dos alunos do 6º Ano A - turno manhã, e dos registros de todo o andamento das atividades com a utilização de instrumentos de captura de áudio e vídeo, gostaria de lhe pedir permissão para o desenvolvimento desta pesquisa.

Certo de que a permissão e apoio contribuirão fundamentalmente para a melhoria do ensino e aprendizagem da Geometria.

Eu, Iara do Carmo de Moraes Angelim, diretora da Escola Municipal de Ensino Fundamental Lions Prata, permito e dou apoio para que o professor Kléber Mendes Vieira possa desenvolver sua pesquisa de mestrado na turma do 6º Ano A – turno manhã.

Campina Grande, 18 de Agosto de 2010.


Iara do Carmo de Moraes Angelim

Iara do Carmo de Moraes Angelim
DIRETORA ESCOLAR
Autorização IME 29/2004



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Cara Professora,

Eu, Kléber Mendes Vieira, mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, estou desenvolvendo uma pesquisa voltada ao ensino de ângulo por meio de uma abordagem didática diferente da tradicional.

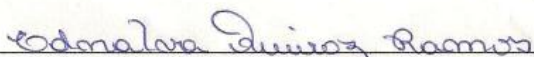
Serão realizadas cinco atividades durante a pesquisa envolvendo o conceito de ângulo; instrumentos de criação e medição de ângulo; definição de ângulo e atividade de ângulo como giro.

Como necessitarei da participação ativa dos alunos do 6º Ano A - turno manhã, e dos registros de todo o andamento das atividades com a utilização de instrumentos de captura de áudio e vídeo, gostaria de lhe pedir permissão para o desenvolvimento desta pesquisa em suas aulas.

Certo de que a permissão e apoio contribuirão fundamentalmente para a melhoria do ensino e aprendizagem da Geometria.

Eu, Profª Ednalva Queiroz Ramos, permito e dou apoio para que o Professor Kléber Mendes Vieira desenvolva sua pesquisa em minha sala de aula, com os meus alunos da turma do 6º Ano A, turno manhã, da Escola Municipal de Ensino Fundamental Lions Prata.

Campina Grande, 18 de Agosto de 2010.


Ednalva Queiroz Ramos

Anexo C – Planos de curso dos 3º e 4º ciclos iniciais e finais da RMECG.

PLANO DE CURSO – 3º CICLOS INICIAL

MATEMÁTICA

BIMESTRES DATAS	CONHECIMENTOS SISTEMATIZADOS	COMPETÊNCIAS
1º bimestre Período	- Sistema de Numeração Decimal - Adição e Subtração de Números Naturais. - Tópicos de Geometria	- Identifica os princípios do sistema de numeração decimal; - Interpreta e resolve situações-problema utilizando os algoritmos fundamentais; - Compreende e opera com números naturais; - Classifica figuras geométricas planas;
2º bimestre Período	- Multiplicação, divisão e potenciação de números naturais; - Múltiplos e divisores; - Tópicos de geometria.	- Interpreta e resolve situações-problema utilizando os algoritmos fundamentais; - Compreende e opera com números naturais; - Classifica figuras geométricas planas; - Identifica elementos fundamentais de figuras planas;
3º bimestre Período	- Números Racionais; - Conceito e representação; - Operações; - Juros e porcentagens. - Tópicos de Geometria; - Interpretação de tabelas e gráficos.	- Compreende e opera com números racionais; - Resolve situações problemas que envolvam o cálculo de juros e porcentagens; - Le e interpreta dados apresentados em tabelas e gráficos; - Classifica figuras espaciais;
4º bimestre Período	- Números Racionais - Resolução de problemas. - Grandezas e Medidas; - Tópicos de Geometria; - Interpretação de tabelas e gráficos.	- Resolve situações-problema que envolvam números racionais; - Opera e transforma unidades de medidas; - Identifica elementos fundamentais de figuras espaciais; - Lê e interpreta dados apresentados em tabelas e gráficos;



PREFEITURA MUNICIPAL DE CAMPINA GRANDE
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO ESPORTE E CULTURA
GERÊNCIA DE ENSINO FUNDAMENTAL
COORDENAÇÃO DO 3º E 4º CICLOS

PLANO DE CURSO – 3º CICLOS FINAL

MATEMÁTICA

BIMESTRES DATAS	CONHECIMENTOS SISTEMATIZADOS	COMPETÊNCIAS
1º bimestre Período	- Números inteiros; - Expressões numéricas; - Tópicos de geometria.	- Interpreta e resolve situações-problema utilizando os algoritmos fundamentais; - Compreende e opera com números inteiros; - Classifica figuras geométricas planas;
2º bimestre Período	- Números racionais; - Conceito - representação; - Operações; - Tópicos de geometria.	- Interpreta e resolve situações-problema utilizando os algoritmos fundamentais; - Compreende e opera com números racionais; - Classifica figuras geométricas planas; - Identifica elementos fundamentais de figuras planas;
3º bimestre Período	- Equações e inequações; - Interpretação de tabelas e gráficos; - Tópicos de geometria.	- Reconhece e resolve equações e inequações do 1º grau; - Classifica figuras geométricas espaciais; - Le e interpreta dados apresentados em tabelas e gráficos.
4º bimestre Período	- Sistemas de Equação; - Grandezas proporcionais; - Interpretação de tabelas e gráficos; - Tópicos de geometria.	- Reconhece e resolve sistemas de equações do 1º grau; - Estabelece relações entre grandezas proporcionais; - Identifica elementos fundamentais de figuras espaciais; - Le e interpreta dados apresentados em tabelas e gráficos;



PREFEITURA MUNICIPAL DE CAMPINA GRANDE
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO ESPORTE E CULTURA
GERÊNCIA DE ENSINO FUNDAMENTAL
COORDENAÇÃO DO 3º E 4º CICLOS

PLANO DE CURSO – 4º CICLO INICIAL

MATEMÁTICA

BIMESTRES DATAS	CONHECIMENTOS SISTEMATIZADOS	COMPETÊNCIAS
1º bimestre Período	- Conjuntos numéricos; - Expressões Algébricas; - Tópicos de geometria.	- Utiliza os diferentes significados dos números irracionais e reais e das operações para resolver problemas em contextos sociais matemáticos ou de outras áreas do conhecimento; - Utiliza a linguagem algébrica para representar generalizações inferidas a partir de padrões e tabelas em contexto numérico e geométrico. - Classifica figuras geométricas planas;
2º bimestre Período	- Polinômios; - Produtos notáveis; - Tópicos de geometria.	- Utiliza a linguagem algébrica para representar generalizações inferidas a partir de padrões e tabelas em contexto numérico e geométrico. - Identifica e desenvolve os produtos notáveis; - Classifica figuras geométricas planas; - Identifica elementos fundamentais de figuras planas.
3º bimestre Período	- Polinômios; - Produtos notáveis; - Tópicos de geometria.	- Utiliza a linguagem algébrica para representar generalizações inferidas a partir de padrões e tabelas em contexto numérico e geométrico. - Identifica e desenvolve os produtos notáveis; - Estabelece relações de congruências e semelhanças entre figuras planas e identifica propriedades dessas relações.
4º bimestre Período	- Fatoração; - Tópicos de geometria.	- Identifica as diferentes formas de fatoração; - Estabelece relações de congruências e semelhanças entre figuras planas e identificar propriedades dessas relações;



PREFEITURA MUNICIPAL DE CAMPINA GRANDE
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO ESPORTE E CULTURA
GERÊNCIA DE ENSINO FUNDAMENTAL
COORDENAÇÃO DO 3º E 4º CICLOS

PLANO DE CURSO – 4º CICLO FINAL

MATEMÁTICA

BIMESTRES DATAS	CONHECIMENTOS SISTEMATIZADOS	COMPETÊNCIAS
1º bimestre Período	• Potenciação e radiciação; • Cálculo com radicais; • Tópicos de geometria;	• Utiliza os diferentes significados dos números irracionais e reais e das operações para resolver problemas em contextos sociais matemáticos ou de outras áreas do conhecimento; • Realiza cálculo com radicais com compreensão; • Classifica figuras geométricas planas;
2º bimestre Período	• Equação do 2º grau; • Tópicos de geometria.	• Utiliza a linguagem algébrica para representar generalizações inferidas a partir de padrões e tabelas em contexto numérico e geométrico; • Reconhece e resolve equações do 2º grau, enquadrando-as em contexto real do cotidiano; • Identifica elementos fundamentais de figuras planas; • Estabelece relações de congruências e de semelhanças entre figuras planas e identifica propriedades dessas relações;
3º bimestre Período	• Equação do 2º grau; • Sistemas de Equação do 2º grau; • Tópicos de geometria.	• Resolve situações-problema por meio de equações e sistemas de equações do 2º grau • Estabelece relações de congruências e de semelhanças entre figuras planas e identificar propriedades dessas relações;
4º bimestre Período	• Sistemas de Equação do 2º grau; • Razões trigonométricas no triângulo retângulo; • Noções de Função.	• Resolve situações-problema por meio de sistemas de equações do 2º grau; • Institui razões trigonométricas do triângulo retângulo associando situações-problema reais. • Reconhece e resolver funções enquadrando-as em contexto real do cotidiano;