UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ADEILSON PEREIRA DA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM OLHAR PARA A SALA DE AULA

CAMPINA GRANDE-PB

2013

ADEILSON PEREIRA DA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM OLHAR PARA A SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientador: Profº. Drº. Silvânio de Andrade

CAMPINA GRANDE-PB

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

S586e Silva, Adeilson Pereira da.

Ensino-aprendizagem de análise combinatória através da resolução de problemas [manuscrito] : um olhar para a sala de aula / Adeilson Pereira da Silva. – 2013.

91 f.

Digitado

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, 2013.

“Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática.”

1. Análise combinatória. 2. Prática pedagógica. 3. Prática docente. 4. Cotidiano escolar. I. Título.

21. ed. CDD 519.2

ADEILSON PEREIRA DA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM OLHAR PARA A SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

Aprovado em 09 de julho de 2013

Banca Examinadora

Silvanio de Andrade
Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador) - UEPB

Angela M. Fernandes
Profa. Dra. Angela Maria Dias Fernandes - UFPB

Maria Amélia Monteiro
Profa. Dra. Maria Amélia Monteiro -UEPB

Campina Grande-PB

2013

Dedicatória

À minha família, aos meus companheiros de trabalho e a todos que buscam na educação fazer um mundo melhor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador por ter me aceitado de bom grado e ter servido como exemplo de pessoa e de profissional que é.

Agradeço aos meus amigos do mestrado pelas inúmeras contribuições e amizade que não tem preço.

Agradeço a minha esposa e filhos pela compreensão dos vários momentos em que não pude, fisicamente, estar presente.

Agradeço aos meus pais pelo esforço e dedicação em me oferecer uma educação de qualidade.

Agradeço aos companheiros de trabalho e aos alunos pela força e compreensão nas horas em que mais precisei.

Agradeço a Deus por ter me dado mais experiências que me possibilitassem chegar mais perto Dele.

O mundo é um lugar perigoso de se viver, não por causa daqueles que fazem o mal, mas sim por causa daqueles que observam e deixam o mal acontecer.

ALBERT EINSTEIN

SILVA, ADEILSON P.; **Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da resolução de problemas**: um olhar para a sala de aula. 2013. 91f. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, PB. 2013.

RESUMO

Essa pesquisa busca traçar um mapeamento do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, através da prática em sala de aula, utilizando como metodologia de ensino-aprendizagem a resolução e exploração de problemas, fruto de um olhar reflexivo para a nossa própria prática como professor-pesquisador. A pesquisa inicia com uma investigação no campo da Educação Matemática com o tema "Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória". No desenvolvimento do trabalho, foi possível observar a própria prática de sala de aula refletida nas discussões e nas ideias pertinentes ao conteúdo de Análise Combinatória apontadas pela literatura. Dessa forma, as ideias centrais no processo ensino-aprendizagem dessa matéria foram esclarecidas e expostas as perspectivas metodológicas no uso da exploração e resolução de problemas para o ensino-aprendizagem desse conteúdo, quando desenvolvido em salas de aula reais, não idealizadas. No todo, trazemos um caminhar reflexivo sobre o tema de análise combinatória, resolução de problemas, construtivismo social, filosofia da Matemática e Educação Matemática, tendo como metodologia a pesquisa pedagógica com o cotidiano escolar, fazendo uso de observações, registros das aulas e materiais utilizados pelos alunos. Na intervenção realizada, vivenciamos várias dificuldades pertinentes ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, como a distinção entre problemas de Arranjo e de Combinação, o que acarreta o fato de não se perceber, na compreensão do problema, por parte dos alunos, se a ordem dos elementos no agrupamento é pertinente ou não na contagem. A pesquisa traz contribuições para o conteúdo de Análise Combinatória e para a melhor compreensão do uso da resolução de problemas em sala de aula, como metodologia de ensino-aprendizagem. No desenvolver da pesquisa, o cotidiano requer a atenção do professor como elemento indispensável ao fazer pedagógico. Surgem então provocações e reflexões quanto à pesquisa com o cotidiano da sala de aula, que implicam em um olhar crítico para a mesma. Essa prática docente enseja uma oportunidade de mudança do *status quo* e a emancipação dos estudantes. Significa, pois, a busca de uma pedagogia que venha se constituir como resistência à opressão sofrida nas escolas.

Palavras-Chave: Ensino-Aprendizagem de Matemática. Análise Combinatória. Cotidiano Escolar. Sala de Aula. Resolução e Exploração de Problemas.

SILVA, ADEILSON P. Mathematics teaching and learning through problem solving and exploration**:** a reflective look in the classroom**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, PB. 2013.**

ABSTRACT

This research seeks to outline a mapping of the Combinatorial Analysis teaching and learning, through practice in the classroom, using mathematics teaching and learning through problem solving and exploration, the result of a reflective look at our own practice as teacher-researcher. The research begins with an investigation in the field of Mathematics Education with the theme "Combinatorial Analysis teaching and learning". In developing this work, it was possible to observe the actual classroom practice reflected in the discussions and ideas relevant to the content of Combinatorial Analysis by the theoretical perspectives. Thus, the central ideas in the teaching and learning process in this matter were clarified and exposed the methodological perspectives in the use of mathematics teaching and learning through problem solving and exploration that content, when developed in real classrooms, not idealized. On the whole, bring a wander reflective on the subject of combinatorial analysis, problem solving, social constructivism, philosophy of mathematics and mathematics education, and educational research as a methodology with the school routine, making use of observations, records of the classes and materials used by students. In interventions, it was experienced various difficulties relevant to Combinatorial Analysis teaching and learning, as the distinction between arrangement and combination problems, which leads to the failure to perceive, to understand the problem, by the students, if the order the grouping of the elements is not relevant or in the count. The research provides contributions to the content of Combinatorial Analysis and a better understanding of the use of problem solving and exploration in the classroom, as a method of teaching and learning. In developing the survey, the routine requires the attention of the teacher as an essential element in making pedagogical. Then come taunts and reflections on the research with the everyday classroom, which imply a critical eye to it. This teaching practice entails an opportunity to change the status quo and the emancipation of students. It means therefore the search for a pedagogy that may be constituted as resistance to oppression in schools.

Keywords: Mathematics Teaching and Learning; Combinatorial Analysis, School Routine, Classroom. Problem Solving and Exploration.

SUMÁRIO

PALAVRAS INICIAIS

Ainda estudantes da Graduação, durante um projeto como estagiários do Governo do Estado de Pernambuco – Programa Rumo à Universidade -, participamos de um curso de formação no qual foi proposto trabalharmos o conteúdo de Análise Combinatória, de modo a ser transmitido sem ter a cobrança excessiva da memorização e da aplicação de fórmulas, o que contrariava nossa formação e a de muitos colegas do projeto, inclusive, a dos professores formadores.

Durante o Ensino Médio, concebemos a Análise Combinatória como sendo um monte de fórmulas de Arranjo, Permutação e Combinação que não faziam sentido, tanto na sua origem como na sua aplicação. Embora durante o planejamento das aulas de Análise Combinatória houvesse a preocupação em fazer os alunos desenvolverem o pensar combinatório, na prática, porém, reproduzimos as aulas focadas nas fórmulas e nos exercícios repetitivos.

Inconformados com o fracasso dos alunos nas aulas, tiveram origem a inquietação e a motivação que desencadearam essa pesquisa. Que práticas metodológicas são mais comuns no processo ensino-aprendizagem de Análise Combinatória? Quais as contribuições da Metodologia da Resolução de Problemas para o ensino dessa disciplina? Que considerações e reflexões, quanto ao processo de ensino-aprendizagem, podem ser extraídas, a partir de uma abordagem que foque a resolução de problemas e o pensar combinatório?

O processo ensino-aprendizagem de Análise Combinatória tem sido tanto difícil para quem ensina como para aquele que aprende. É comum ouvirmos falar em conversas informais entre professores sobre a dificuldade, por parte dos estudantes, em aprender e dos professores em articular uma estratégia de aprendizagem eficiente, sem mencionarmos o fato de que uma boa parte dos professores tem evitado ensinar esse assunto, alguns até assumem o fato de não compreenderem conceitos básicos de Análise Combinatória.

Pesquisas como as de Wilton Sturm (1999), Inês Esteves (2001), Ricardo Sabo (2007), Analúcia Souza (2010), entre outras, têm ajudado a configurar o processo ensino-aprendizagem em Análise Combinatória, sobretudo, buscando compreender o cenário atual e possibilitando novas perspectivas para Análise Combinatória.

Dessa forma, as pesquisas têm indicado substituir o ensino pautado em exercícios repetitivos e com uso excessivo de fórmulas por metodologias que valorizem a formação conceitual com compreensão. Assim, o problema ganha outra dimensão em sala de aula, saindo do final do planejamento como uma aplicação, e percorrendo todo o processo, durante qual, por meio do problema, o aluno é capaz de operar os conceitos, pela internalização dos princípios abordados na resolução e exploração dos problemas. Tal postura não nega o uso de fórmulas, mas trata como mais uma ferramenta na resolução dos problemas, conforme afirma Esteves (2001):

> (...) Isto é, acreditamos na necessidade de o aluno iniciar trabalhando com situações-problema, usando um caminho intuitivo e, aos poucos, introduzimos situações mais complexas, onde poderemos institucionalizar o conceito introduzindo, ou não, as fórmulas. (ESTEVES, 2001, p.33.)

A resolução de problemas tem sido utilizada com diferentes interpretações: como meta, como processo e como habilidade básica. Destacamos esses meios como os mais enfatizados em sala de aula e nas pesquisas. No entanto, em nossa pesquisa, propomo-nos trabalhar o ensino-aprendizagem através da resolução de problemas, ou seja, nela o aluno aprende Matemática resolvendo problemas e, para resolvê-los, a partir do diálogo e da interação estabelecidos entre professor, problema e alunos, ensejamos a exploração de situações que vão além do simples achar as respostas, intencionando a formação conceitual.

Percebemos que, ao intensificar nos alunos o caráter investigativo, posicionamo-lo frente a um panorama de criticidade, por meio do qual ele passa a desempenhar um papel ativo no processo de ensino-aprendizagem. Acreditamos que colaboramos para fornecer ao aluno elementos que possibilitem pensar sobre sua posição na sociedade. Portanto, concluímos que a resolução de problema como metodologia de ensino possui implicações no cotidiano escolar. Tal pensamento também é reforçado nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCN): “Vale aqui ressaltar o quanto é importante, para o exercício da cidadania, a competência de analisar um problema e tomar as decisões necessárias à sua resolução [...]”.(BRASIL, 2006, p.84)

A experiência do professor e o cotidiano escolar têm muito a dialogar com implicações para a sua formação. Qual o papel, hoje, do professor, principalmente de escolas públicas? Concordamos com Giroux, ao afirmar que "a educação torna-se uma forma de ação que une as linguagens da crítica e da possibilidade [...] ela representa a necessidade de comprometimento apaixonado por parte dos educadores em tornar o político mais pedagógico [...]"(1997, p.147).

Para Giroux (1997), o ensino público tem oferecido mobilidade individual limitada aos membros da classe trabalhadora e a outros grupos oprimidos, ou seja, conforme ele, as escolas públicas são instrumentos poderosos para a reprodução de relações capitalistas de produção e de ideologias legitimadoras da vida cotidiana. Para nós, a escola representa mais do que um simples local de instrução; nela, a ação do professor supera o domínio de técnicas pedagógicas e a transmissão de conhecimento.

Nosso trabalho contribui na discussão do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, tendo implicações na formação, inicial e continuada, de professores, possibilitando estudos referentes ao ensino e à aprendizagem dessa disciplina, apontando considerações e reflexões, resultado de um olhar voltado para a sala de aula, a partir de uma intervenção, e da existência de oficinas focadas na metodologia de ensino de resolução de problemas e de pesquisas referentes ao tema. Nessa trama, podemos perceber o quanto a pesquisa em sala de aula é capaz de revelar-nos a existência de elementos imprevisíveis.

No capítulo 1, buscamos situar o ensino-aprendizagem da Análise Combinatória;para tal, referenciamos a Análise Combinatória na Matemática Discreta, destacando suas características e as recomendações de ensino propostas pelos documentos curriculares. Por meio de uma pesquisa no campo da Educação Matemática, traçamos múltiplos olhares dos pesquisadores referentes ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, mediante uma revisão bibliográfica das pesquisas e situando nossa pesquisa em sala de aula.

No capítulo 2, encontram-se os fundamentos metodológicos que justificam e orientam a pesquisa. Trazemos considerações quanto à prática da pesquisa pedagógica e à pesquisa em sua implicação com o cotidiano, estabelecendo um diálogo com as pesquisas não convencionais. Enfatizamos a necessidade de a pesquisa fazer parte da práxis do professor, apresentando resultados para o campo da Educação Matemática e para a própria sala de aula do professor. Dessa forma, possibilitamos melhor aproximação entre a pesquisa e a sala de aula.

No capitulo 3, discutiremos sobre o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, a resolução de problemas como metodologia de ensino, as ideias de Vigotski[1], a visão absolutista e falibilista da Matemática, assim como suas implicações em sala de aula. Para isso, fazemos uso da descrição e análise da intervenção, assim como reflexões e interações durante a intervenção e as respostas obtidas das atividades propostas aos alunos.

No capitulo 4, buscamos refletir o contexto da pesquisa, discutindo sobre a realidade escolar, compreendendo o papel social da escola. Reservamos um espaço em que são abordadas as considerações finais, assim como os limites, as possibilidades da pesquisa e as perspectivas para pesquisas futuras.

[1] Esse estudo baseou-se no pensamento de Vigotski (2009); Zanella (2001); Ferreira (2009); Nunez (2009); Moyses (1997) e Garnier (1996).

1. CONVERSANDO SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nesse capítulo, a pesquisa é situada dentro da Matemática Discreta e de reflexões concernentes ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Partindo de pesquisas referentes ao tema e de documentos oficiais de orientações curriculares, buscamos assim explicitar o problema dessa pesquisa, retratando nesta a vivência pessoal enquanto aluno e professor.

O desenvolvimento e a inserção da Matemática Discreta, por meio de uma melhor compreensão das bases combinatórias e da compreensão da heurística utilizada, surgiram da necessidade de responder a problemas de pesquisas operacionais no campo de algoritmos computacionais.

Segundo Dossey (1991), a Matemática Discreta, como área de estudo, ganhou força por volta de 1960. Publicações sobre o tema rapidamente influenciaram os livros didáticos, que passaram a inserir conteúdos dela: o conteúdo da teoria dos grafos (propriedades, árvores, circuitos e modelos de gráfico) e combinatórias (princípios de contagem, permutações e combinações, inclusão/exclusão e relações de recorrência).

No início da década de 1980, surge um movimento visando implementar, no currículo escolar, os conteúdos da Matemática Discreta. Tal movimento visava especificamente à inserção dessa disciplina no ensino superior. Aos poucos, foram adicionadas várias recomendações sobre a necessidade de desenvolver ideias de Matemática Discreta no início do currículo de Matemática. Em 1989, o NCTM – National Council of Teachers of Mathematics –reforça, para os anos escolares de 9 a 12 (correspondente ao nosso ensino médio), a inclusão destes tópicos de Matemática Discreta:

“In grades 9-12, the mathematics curriculum should include topics from discrete mathematics so that all students can:

• represent problem situations using discrete structures, such as finite graphs, matrices, sequences, and recurrence relations;

- represent and analyze finite graphs using matrices;
- develop and analyze algorithms;
- solve enumeration and finite probability problems;

and so that, in addition, college-intending can:

- represent and solve problems using linear programming and difference equations;
- investigate problem situations that arise in connection with computer validation and application of algorithms”.

Geralmente, o ensino de Análise Combinatória é vinculado ao ensino de Probabilidade. Morgado (1991) comenta que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa as estruturas e relações discretas, tendo como problemas mais frequentes:

- demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições dadas;
- contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

Vale salientar que o conteúdo da Análise Combinatória possui ideias pertinentes ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Tais princípios colaboram na compreensão do ser e do fazer Análise Combinatória, revelando metodologias de ensino-aprendizagem.

Mesmo com as crescentes pesquisas no âmbito acadêmico, quanto aos métodos e recursos didáticos no processo ensino-aprendizagem, um bom rendimento no ensino de Matemática, e especificamente em aprendizagem de Análise Combinatória, é algo que ainda temos que conquistar. A relação entre o professor, o aluno e o saber pode ser um campo de pesquisa para compreender essas dificuldades e encontrar soluções para uma prática pedagógica que resulte numa aprendizagem com compreensão.

É mais comum, no ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, os alunos reportarem-se apenas às fórmulas e à sua aplicação na resolução de casos isolados do que entenderem o porquê do procedimento adotado. É necessária uma prática que favoreça ao aluno entender esse procedimento a partir dos conhecimentos prévios, para que, ao gerar novos conhecimentos, não sobreponha um conceito sobre o outro. Deverá entender o desenvolvimento dos conceitos como um processo lógico.

Para uma discussão mais profunda na nossa pesquisa, optamos por apresentar uma breve descrição de algumas pesquisas direcionadas para o ensino médio ou com profunda análise nas estruturas e organização do currículo de Análise Combinatória.

1.1 Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória: múltiplos olhares

Pesquisas como as de Wilton Sturm (1999), Inês Esteves (2001) e Ricardo Sabo (2007) levam-nos a crer que a postura frente a este saber – o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória -, consiste, em sala de aula, em pôr ênfase nas fórmulas. Na maioria das vezes, os professores não conhecem o significado delas. A contribuição de um ensino dedicado à transmissão de conteúdos e ao simbolismo lógico-formal, que fez com que a prática em sala de aula constituísse num mero treinamento, por meio do qual o sucesso decorre da memorização e da aprovação, pouco valoriza a resolução de problemas ou a formação de conceitos transmitidos por meio de construções cognitivas.

Sabo (2007), em sua monografia, investiga a organização dos livros didáticos do Ensino Médio, referentes ao tema Análise Combinatória, objetivando fazer uma análise matemática dos conceitos envolvidos. Dessa forma, analisou três coleções de livros didáticos, buscando identificar as tarefas, as técnicas e o discurso teórico-tecnológico. Os resultados identificados por ele indicam que os autores dos livros didáticos salientam a aplicação da fórmula algébrica em exercícios que possuem, na grande maioria, tarefas e técnicas muito repetitivas e semelhantes:

> As análises realizadas nesse trabalho evidenciam que esses signos são expressos, na maioria das vezes, por fórmulas algébricas tecnicistas, seguidas por sequências de exercícios, nos quais as técnicas de resoluções são repetitivas. (SABO, 2007, p.52.)

Numa perspectiva crítica da Matemática, é necessário ressaltar que não há nos livros didáticos uma estratégia técnica que possa levar o aluno a refletir sobre sua própria prática, tornando-o coparticipante do processo de conceitualização, por conseguinte, deixando de ser mero reprodutor das relações estabelecidas. Sabo (2007) ainda acrescenta:

> Então, podemos concluir, com relação às técnicas analisadas nesses livros didáticos, que os alunos, apenas, manipulam os procedimentos, utilizando, para isso, algumas técnicas de resoluções que lhe são oferecidas de forma cabal, mas não são compreendidas de fato. (SABO, 2007, p.52.)

O trabalho de Sabo (2007) possibilitou uma reflexão quanto à utilização do livro didático e à importância lhe dada durante as aulas. Por vezes, o livro didático torna-se o único refúgio do professor que, por fim, termina seguindo-o sem qualquer adequação ou estudo sobre o tema.

Podemos encontrar nos PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio -, uma recomendação para o ensino de Análise Combinatória que não tem as fórmulas como eixo principal, mas que, por meio da resolução de problemas, constrói o raciocínio combinatório:

A contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada de raciocínio combinatório.

As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza estatística ou probabilística. (BRASIL, 2006, pp.126-127.)

Portanto, o PCNEM e o trabalho de Sabo (2007) orientaram-nos a trabalhar a Análise Combinatória, tendo como foco a resolução de problemas e as fórmulas como consequência do raciocínio combinatório. Algumas pesquisas, como a de Sturm (1999), Esteves (2001) e Souza (2010), têm trabalhado abordagens alternativas à comumente praticada, tendo como foco a resolução de situações-problema.

Esteves (2001), em sua pesquisa, elaborou uma investigação com dois grupos, um experimental e outro de referência, os quais estudaram a introdução de Análise Combinatória com abordagens diferentes. Para o primeiro grupo, foi utilizada uma proposta, elaborada por ela, em que as fórmulas não foram apresentadas, assim como as definições e nomenclaturas também só foram apresentadas no último encontro da sequência:

> [...] Isto é, acreditamos na necessidade de o aluno iniciar trabalhando com situações-problema, usando um caminho intuitivo e, aos poucos, introduzirmos situações mais complexas, onde poderemos institucionalizar o conceito introduzindo, ou não, as fórmulas. (ESTEVES, 2001, p.33.)

Essa postura consiste em iniciar o trabalho com situações-problema e explorá-las, buscando a formação conceitual por meio dos problemas, o que implica uma mudança no padrão comumente usado.

Para o segundo grupo, foi apresentada a abordagem tradicionalmente utilizada, em que se apresentam primeiro as definições, para depois trabalhar a técnica com exercícios repetitivos do *design* a seguir :

DEFINIÇÃO – EXEMPLOS – EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – e/ou APLICAÇÃO

Na parte referente à aplicação, observa-se pouca regularidade; muitas vezes a etapa de Exercícios de Fixação passa a ser a última etapa de uma sequência de ensino.

Esteves (2001) ainda apresenta algumas ideias também defendidas por outros pesquisadores como relevantes ao processo de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Aponta como dificuldades a falta de uma enumeração sistemática, ou seja, um procedimento recursivo que leve os alunos à formulação de todas as possibilidades, e ainda a confusão, na distinção entre os problemas de Arranjo e Combinação, em estabelecer um critério que distinga se a ordem é ou não importante. Tais análises orientam a ação pedagógica e a metodologia a ser utilizada. Durante o planejamento das atividades tais análises foram levadas em consideração.

Na tentativa de propor uma abordagem alternativa, Sturm (1999) elaborou uma pesquisa com alunos da 2ª série do Ensino Médio para identificar as possibilidades e os limites com relação ao ensino/aprendizagem da proposta, no sentido de colaborar com as futuras pesquisas em Análise Combinatória. A esse trabalho chama de *abordagem alternativa*, pelo fato de priorizar o pensamento combinatório, ao invés de dar ênfase às fórmulas. Um dos resultados apontados é que o princípio multiplicativo como estratégia permitiu que as fórmulas de Arranjo e de Permutação fossem aprendidas de modo natural. A fórmula foi compreendida como sendo apenas mais um auxílio na resolução dos exercícios, tendo a sistematização como síntese dos trabalhos anteriores. O trabalho de Sturm (1999) incentivou-nos a abordar a Análise Combinatória a partir da resolução de problemas, porém nossa preocupação era de que o aluno não precisasse necessariamente ter o conhecimento de Análise Combinatória para assim resolver os problemas, mas que o processo de resolvê-los possibilitasse aprender o conteúdo matemático fazendo uma exploração das potencialidades deles.

Analúcia Souza (2010) trabalhou Análise Combinatória fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, por meio da Resolução de Problemas. Desenvolveu três projetos para trabalhar com a metodologia de ensino, adotada em três cenários diferentes, concernente ao problema de pesquisa: como professora-pesquisadora, com seus próprios alunos, em sua sala de aula; como pesquisadora, ministrando minicursos e oficinas de trabalho em um encontro de Educação Matemática, tendo como participantes professores, educadores, matemáticos e até alunos da Licenciatura em Matemática; e como pesquisadora, em Encontros em Educação Matemática, divulgando sua pesquisa. Por meio da análise dos dados, obtidos nas aplicações dos três projetos, pôde mostrar como os participantes desses projetos se envolveram, ao fazer uso da metodologia de ensino adotada, relatando as contribuições que trouxeram para sua pesquisa.

De certa forma, trabalhar, em sala de aula, com resolução de problemas é algo inovador, o que desafia professores, alunos e o comprometimento de ambos com o ensino-aprendizagem. Então, é comum os alunos cobrarem do professor as respostas certas, não compreendendo que a resposta é uma instância que revela um saber, um fazer, um relacionamento com o conceito. Portanto, a ação de explorar o problema transita em compreender o processo, mas não com a intenção apenas de resolver outros problemas, como também de adquirir princípios dos conceitos a serem trabalhados.

O ensino-aprendizagem de um conteúdo exige também pesquisas em áreas específicas, na tentativa de compreender as diferentes implicações do conteúdo em contextos diferentes, e a relação ensino e aprendizagem obriga o professor a realizar uma pesquisa ativa nas áreas da Filosofia da Educação, Filosofia da Matemática, Filosofia da Educação Matemática, Didática e Metodologia, entre outras.

Vale ressaltar, nessa pesquisa, a importância de o professor ter um olhar crítico para sua prática em sala de aula:

> (...) é por meio de sua própria pesquisa que os professores podem ficar atentos ao seu método de ensino, e detectar o que faz com que os alunos tenham um menor rendimento, aprendendo menos do que poderiam. Com essa consciência, podem realizar mudanças criteriosas, colocá-las em práticas e melhorar os resultados do ensino. (LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M., 2008.)

Acreditamos que a formação do professor é um processo contínuo, pelo qual o “fazer” torna-se, ao mesmo tempo, “aprender”.

O esboço da aula de Análise Combinatória é traçado a partir das pesquisas, tendo, de fato, o foco em exercícios repetitivos sem compreensão dos métodos empregados. No entanto, as pesquisas também indicam uma tentativa de mudança do atual panorama, colocando como foco principal o desenvolvimento do pensamento combinatório. Para isso, faz-se uso do Princípio Fundamental de Contagem, esquema da árvore das possibilidades, entre outros, desenvolvendo no aluno a formalização dos conceitos a partir de um caminho intuitivo.

Assim, podemos traçar, como necessidade para os estudos em Análise Combinatória, o desenvolvimento de resolução/exploração de problemas como meio de propiciar melhor compreensão dos processos.

A pesquisa em sala de aula possibilita a melhor abrangência dos processos pertinentes ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Considerações e reflexões podem ser extraídas para contribuir com a formação do professor.

1.2 Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória através da Resolução e Exploração de Problemas

Num processo ensino-aprendizagem com compreensão e por meio da resolução de problemas, o aluno torna-se o sujeito de sua aprendizagem – “é quem realiza a ação e não alguém que sofre ou recebe uma ação”. Como a aprendizagem resulta das ações de um sujeito, não pode, portanto, ser resultado de qualquer ação, sendo necessária uma interação entre sujeito e meio ao redor.

Ao tratarmos da resolução de problemas, podemos acreditar que esta está intimamente ligada a um conjunto de possibilidades de exploração na formação conceitual. Portanto, cabe perceber que a reconstrução da Matemática condiz com a utilização de diferentes linguagens para a apreensão de significados, transformando-os e combinando-os numa construção que implica novas aprendizagens, gerando até novas reflexões sobre os mesmos significados. Logo, a resolução de problemas compreende uma situação ou tarefa para a qual não sabemos de imediato como atacá-las, mas que nos deixam sempre desejosos para fazer isso. Dessa forma, mobilizamos outros conhecimentos: a elaboração de estratégias ou procedimentos, a organização da informação, o teste da validade da resposta e mesmo a formulação de outras situações-problema. Na resolução de problemas, o aluno não tem de imediato um caminho a ser seguido, mas cria novos caminhos.

No tocante à exploração de problemas, podemos distinguir três modalidades:

1. **Ir além do problema** - no momento em que o professor faz uso do problema, mas extrapola os limites curriculares dele;

2. **Construindo novos problemas** – na exploração de uma determinada situação-problema, o professor lança mão de novas situações derivadas da primeira;

3. **Buscando padrões e mediando a aprendizagem** – ao trazer situações mediadoras para situações mais complexas, intensificando a aprendizagem do aluno.

Dessa forma, desejamos explorar os problemas na busca de despertar no aluno a atitude de investigador e construtor do conhecimento. Assim, ao explorarmos uma situação-problema, estaremos mediando o que o aluno possui construído com o saber a ser edificado. Ao trabalharmos na zona de desenvolvimento proximal do aluno, buscamos diminuir a distância entre o nível de desenvolvimento real e o potencial. Para isso, o aprofundamento e a atualização de conceitos e estratégias didático-pedagógicas, com a proposta de estudar a construção e propor possibilidades de exploração desse conteúdo, tornam-se uma prática necessária àquele que trabalha com o ensino-aprendizagem de Combinatória. Uma boa parte das ações ocorridas em sala de aula origina-se da experiência do docente enquanto aluno, levando a imitar as atitudes dos seus professores, com os quais estudou durante a vida. O que temos percebido é um modelo que há perdurado com uma prática que foca as fórmulas em detrimento da compreensão. No entanto, várias pesquisas têm trazido propostas, como a de Sturm (1999), de uma abordagem alternativa para o ensino de Análise Combinatória

Gardiner (1991) evidencia, como estratégia de ensino para a Matemática Discreta, escolar, a aplicação de problemas que façam uso de uma variedade diferente de soluções, proporcionando a exemplificação de certo número de princípios fundamentais - ou seja, os alunos começam por tentar construir uma solução própria e vivenciar algumas dificuldades que surgem, e, à medida que o tamanho do problema cresce, podem melhorar seus métodos, buscando um método mais eficaz, um algoritmo padrão.

São observadas, nas OCN – ORIENTAÇÕES CURRICULARES NACIONAIS –, para o Ensino Médio (volume 2, “Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias”), recomendações quanto ao ensino de Análise Combinatória:

> A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. [...] A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento. (BRASIL, 2006.)

Diante dessas considerações, resolvemos pesquisar as ideias pertinentes ao ensino de Análise Combinatória, por entendermos que os trabalhos acima citados desempenham papel fundamental nas questões reveladas por eles. Para isso, buscamos na literatura contribuições que possam ajudar a compreender os fenômenos presentes na sala de aula, evidenciando considerações e reflexões; logo, sentimos a necessidade de vivenciar na sala de aula todas as reflexões e dialogar com outros pesquisadores sobre o avanço da pesquisa em congressos e eventos de Educação Matemática.

Vale destacar que, numa proposta de ensino, pautada na exploração/resolução de problemas, é comum partir da exploração da criatividade do estudante, de seus conhecimentos prévios e, para tanto, fazer uso de atividades concretas, jogos, TICs, entre outros meios. Nesse contexto, vale ressaltar que não há uma negação das fórmulas, mas estas são resultados do processo de compreensão dos estudantes e da generalização no processo de resolução de problemas, o que possibilita uma atividade mais significativa para eles, visto que participam de todas as etapas da conceitualização.

Portanto, o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, por meio da exploração/resolução de problemas, busca partir de situações-problema, que, num processo de ação-reflexão, medeia o desenvolvimento das ideias e dos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação, enfatizando assim o pensar combinatório como uma ferramenta essencial na abstração e formalização de conceitos científicos.

De acordo com as pesquisas elencadas, traçamos algumas ideias relacionadas ao processo ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

1. Embora tenha estreitamento com a probabilidade, a Análise Combinatória possui o raciocínio combinatório;

2. A utilização da árvore das possibilidades facilita a visualização da estrutura dos múltiplos passos de um experimento composto;

3. O ensino-aprendizagem de Análise Combinatória deve ter a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril.

4. Os problemas devem exemplificar princípios fundamentais e possuir níveis de dificuldades.

5. As dificuldades mais pontuadas são a falta de uma sistematização na enumeração das possibilidades e distinção entre Arranjo e Combinação na relevância ou não da ordem.

6. A utilização do princípio multiplicativo como estratégia possibilita que a fórmula seja compreendida como mais um auxílio na resolução dos exercícios.

Essas ideias estiveram presentes por todo o caminho da intervenção, orientando as ações do planejamento e da sala de aula.

2. CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O SIGNIFICADO DE PESQUISAR NO COTIDIANO ESCOLAR

Em um primeiro momento de nossa pesquisa, buscávamos intensificar e vivenciar em sala de aula a resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

A intervenção aplicada na sala de aula do próprio professor pesquisador caracteriza a necessidade de a pesquisa trazer resultados para sua prática pedagógica. Para nós, a ação de pesquisar deve fazer parte da práxis do professor através da ação-reflexão-ação, assim a pesquisa nos enriquece com considerações e reflexões quanto ao processo de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

No entanto, em um segundo momento, à luz do cotidiano escolar e da sala de aula, vivenciados nessa pesquisa, percebemos a necessidade de um olhar mais atento para o cotidiano escolar. Foi nesse momento que, buscando compreender o cotidiano e agir sobre ele, as leituras sobre educação crítica nos inquietaram, levando-nos a pensar sobre o papel e a formação do professor, principalmente de escolas públicas.

Partindo das observações e relações estabelecidas com o cotidiano escolar, verificamos uma prática metodológica de sala de aula que vem ampliando nossas percepções sobre o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória em uma turma de 2ª série do Ensino Médio, de uma escola pública da rede estadual de ensino em Pernambuco. No entanto, vivenciar o cotidiano escolar e colocá-lo em suspensão são condições que possibilitam uma dimensão que vai além de uma visão conteudista e que também possibilitam uma reflexão quanto à necessidade de se trabalhar a formação do professor para lidar com situações reais do ensino em escolas públicas.

Durante a elaboração do projeto de pesquisa, tínhamos a convicção e vontade de trabalhar em uma sala de aula real, na necessidade de experimentar e vivenciar todas as sensações possíveis na intervenção. Acreditávamos que, ao observar nossa própria prática e refletir sobre/com ela, poderíamos melhor compreender as relações imbricadas no fazer pedagógico. Para melhorar o processo ensino-aprendizagem, tínhamos a crença de que bastava um bom planejamento, com as atividades adequadas e ações bem executadas que promoveriam a aprendizagem dos alunos nas aulas.

A aprendizagem dos alunos não é garantida apenas pelo bom planejamento da aula. O processo ensino-aprendizagem é uma via de mão dupla, na qual o professor aprende, ao ensinar. No entanto, ele não se encontra só nesse processo, o aluno aparece como um sujeito desse processo e nossa pesquisa percebeu que outros fatores, além desses, também contribuem no processo de ensino-aprendizagem.

A pesquisa desenvolvida com o cotidiano possui com mais frequência o inesperado, o inusitado. Assim, é preciso deixar-se ser tocado por elementos do cotidiano, o qual, por diversas vezes, as pesquisas predominantemente teóricas não puderam notar, mas que fazem parte da realidade. A pesquisa com o cotidiano tem o compromisso de trazer para a cena da pesquisa atores e fragmentos do cotidiano que, no estágio presente, não haviam sido notados porque passavam facilmente despercebidos.

Dessa forma, o caminhar da pesquisa precisa ser pensado a partir do cotidiano da sala de aula em toda sua complexidade. É a partir da vivência que vamos traçando o caminhar metodológico da pesquisa. Skovsmose afirma sentir a falta, nas pesquisas, de um olhar para as salas de aulas não padrão. Concordamos com Najmanovich (2003), quando diz:

> (...) os seguidores do método costumam pretender que o caminho preexiste à própria Terra. Seu caminho (significado etimológico de método) idealizado elimina a história viva do pensamento e com ela as dificuldades, os erros, as confusões e vias mortas, para apresentar-nos um traçado direto, sem rodeios, que nos conduz em linha reta desde a ignorância ao saber guiados somente pelas suas normas. (NAJMANOVICH, 2003.)

Logo, a pesquisa teve a preocupação de captar sensações, movimentos que por hora não houvessem sido notados. Por exemplo, além de pensarmos sobre os processos de ensino-aprendizagem dos alunos na escola, tivemos que pensar em questões como o uso de drogas e a motivação dos estudantes nas aulas de Matemática.

Na escola pesquisadas, deparamo-nos também com um fator bastante preocupante: o uso de drogas nessas instituições têm se tornado mais comum e ditado, cada vez mais, normas de convivência, tanto dentro como fora delas. Se já não fosse um grande desafio conseguirmos motivar os alunos na contemporaneidade, imaginemos alunos de escolas públicas com sonhos e planejamentos controversos. Um professor poderia pretender que seu aluno seguisse a carreira profissional de professor ou de médico, entre tantas que exigiriam um estudo profícuo e uma estabilidade financeira, porém nenhuma dessas profissões oferecem a rentabilidade e o respeito que o aluno pode conseguir sendo chefe de drogas. Certa vez, em conversa com alguns alunos da escola, um deles afirmou conseguir lucrar o salário mensal de um professor com apenas duas semanas de vendas de drogas. Esses adolescentes são treinados e acostumados desde cedo a nutrir o sistema do tráfico de drogas. Que influência e responsabilidade a escola tem para subverter essa situação? Que formação deve ter o professor e que professor deve-se ter para enfrentar situações como essas? Como refletir, a fim de realizar um ensino-aprendizagem de Matemática nesse contexto?

Acreditamos que a pesquisa deve fazer parte do fazer pedagógico do professor, contribuindo para sua formação e prática. Através da pesquisa, o professor pode ficar mais atento ao ensino-aprendizagem, apontando alternativas de ensino mais condizentes com a realidade escolar, e evitando, assim, o receio de que seja visto apenas como mero executor de ações bem sucedidas por outros, “os sabichões”, que desenvolveram pesquisas sobre a sala de aula, trazendo um “produto, receituário” a ser meramente aplicado pelo professor da educação básica. Defendemos que a ação do professor pode constituir-se numa ação de pesquisar -prática-teoria-prática- que reflete a sala de aula e todas as relações nela implicadas.

Assim, devemos repensar sobre a metodologia para a pesquisa do professor. Ludke (2009) a problematiza da seguinte forma:

> Como levar esses professores de educação básica a assumirem sua responsabilidade e sua competência para fazer pesquisa, se a própria representação de pesquisa que os orienta os inibe, os impede de se proporem como tais, [...]. (LUDKE, 2009, p.19.)

Portanto, se queremos investigar o cotidiano, e a pesquisa do professor se dá no cotidiano escolar, então se faz necessário quebrar as correntes que nos aprisionam, limitando nossa visão.

Durante nossa pesquisa, tivemos o cuidado de não nos fecharmos num rigor tão rígido que nos cegasse, impedindo de perceber elementos que influenciam a prática docente e a aprendizagem dos alunos reais, partes constituintes do ser e do fazer daqueles que estão todos os dias construindo a escola. O que surge é uma metodologia que possui um rigor flexível. Assim, não estamos descartando o método, mas ensejando um constante preparar-se.

Portanto, construímos nossa formação por meio da experiência profissional e pelas investigações em pesquisas que relacionaram o conteúdo de Análise Combinatória com o ensino-aprendizagem do mesmo; como exemplo, temos Sturm (1999), Esteves (2001), Sabo (2007), Souza (2010), PCNEM, Yearbook (1991), OCN. Também sentimos a necessidade de obter melhor compreensão do conhecimento matemático e assim realizamos um caminhar pela Educação Matemática, com foco na formação de conceitos e na proposta de ensino-aprendizagem. Isso nos fez refletir, sem perder de vista o cotidiano escolar, o que nos era apresentado quanto à resolução e exploração de problemas como metodologia de ensino. Fomos para a sala de aula com uma intervenção a ser vivenciada e abertos aaprender. Evitamos, assim, esquecermo-nos da condição dos alunos enquanto sujeitos, sujeitos esses que, ordinariamente, são invisíveis à Ciência, mas que dão vida ao dia a dia da escola.

> “Sujeitos que dão vida à escola pública e nela fracassam, ou criam muitos problemas, ou obrigam-nos permanentemente a refletir sobre as práticas escolares em sua profunda articulação com a dinâmica social” (ESTEBAN, 2003, p.199.)

Esteban (2003) continua afirmando que:

> A pesquisa no cotidiano nos coloca algumas indagações que exigem proposições metodológicas especificas, não bastando uma adaptação dos procedimentos instituídos, pois é uma pesquisa que não pretende apenas construir explicações para os fenômenos encontrados, mas procura aprofundar a compreensão sobre a realidade numa perspectiva dialógica vinculada a processos de intervenção. (ESTEBAN, 2003, p.199)

Portanto, faz-se necessário evidenciar as características de uma pesquisa com a sala de aula que não possui moldes pré-configurados rigidamente, pois sua dinâmica é específica. A pesquisa com a sala de aula tem como problemática a escola, em que se faz necessário uma compreensão do cotidiano escolar em toda sua singularidade e totalidade. Para tanto, a reflexão crítica é uma ferramenta indispensável à pesquisa de sala de aula e à prática docente. Para o professor-pesquisador, a compreensão e melhoria de seu próprio ensino precisam começar da reflexão crítica sobre sua própria experiência e a mera execução de receitas didáticas dos “sabichões” não é suficiente.

Acreditamos que o ensino-aprendizagem precisa ser reconhecido e vivido como um engajamento profissional; em relação a este, a pesquisa constitui um recurso por meio do qual o professor pode:

- contribuir para o sentimento de dignidade e autovalorização profissional;
- estabelecer mudanças no ensino-aprendizagem e na formação dos alunos.

Andrade (1998) destaca que a pesquisa em sala de aula tem duas finalidades: uma didática e outra científica. A primeira tem como objetivo a melhoria da aprendizagem de Matemática dos alunos, sendo da responsabilidade do professor e do pesquisador, por meio de um processo de ação-reflexão-ação, ocasionando mudanças criteriosas em suas ações didáticas. A segunda, geralmente desenvolvida por quem faz pesquisa do tipo de uma Dissertação de Mestrado ou Tese de Doutorado, tem como preocupação essencial o desenvolvimento do campo científico de pesquisa da Educação Matemática. Nossa preocupação é que essa pesquisa, de finalidade científica, resguarde o objetivo da primeira, sendo desenvolvida na práxis, em ambientes reais de sala de aula, por meio do processo de ação-reflexão-ação. Dessa forma, pretendemos, com essa pesquisa, uma mudança na nossa própria prática docente, bem como avançar o campo da educação matemática no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória em sala de aula.

Assim, nossa pesquisa busca colocar a sala de aula e seus múltiplos contextos em suspensão, sob um olhar de inquietude. Dessa forma, pretendemos, com essa pesquisa, operar uma mudança na nossa própria prática docente, bem como contribuir com o campo da Educação Matemática no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória na sala de aula. Trata-se de uma prática de pesquisa que encerra descrições ricas e detalhadas (em vez de contagens ou relações estatísticas) de pessoas em ação, ou práticas sociais.

Nessa perspectiva, Esteban (2003) comenta que a pesquisa com o cotidiano procura aprofundar a compreensão sobre a realidade numa perspectiva dialógica vinculada a processos de intervenção e não apenas construir explicações para fenômenos encontrados; acrescenta que as indagações da pesquisa com o cotidiano exigem proposições metodológicas específicas.

Nesse contexto, Esteban (2003) ressalta que:

> (...) a pesquisa no cotidiano nos conduz por um terreno movediço, híbrido, opaco, cindido, no qual estamos – todos os sujeitos implicados na pesquisa –, à deriva, percorrendo, portanto, um caminho que vai se constituindo como o possível, com riscos.

Logo, a teoria é uma possibilidade de caminhada com o cotidiano que abre possibilidades para tratar o objeto de estudo em perspectivas múltiplas, além de constituir-se num olhar unidimensional. Apoiamo-nos na teoria, mas não nos prendemos a ela como única, pois compreendemos que o cotidiano vai além, trazendo novos olhares para a própria teoria e a própria prática. Nessa perspectiva, vemos que a prática representa uma teoria intencional e a teoria é uma prática refletida.

Mediante a inquietação dos resultados indesejáveis, obtidos ano após ano no ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, houve a preocupação quanto ao modo de efetivar uma prática metodológica que pudesse proporcionar melhor aprendizado e compreensão dos conceitos, uma prática que não reforçasse o método repetitivo de memorização. Portanto, a pesquisa iniciou com uma investigação no campo da Educação Matemática, com o tema "Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória". Com as pesquisas encontradas sobre esse tema, foi possível observar a própria prática em sala de aula refletida nas discussões, assim como ideias pertinentes ao conteúdo de Análise Combinatória.

No todo, realizamos leituras sobre o tema de Análise Combinatória, sobre resolução e exploração de problemas, construtivismo social, filosofia da Matemática e educação matemática. Em decorrência desse caminhar, assumimos o propósito de vivenciar uma prática que viesse desenvolver o conteúdo de Análise Combinatória, a partir de uma proposta de ensino-aprendizagem embasada na Resolução e Exploração de Problemas, o que nos possibilitou elencar considerações e reflexões para o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

A parte de intervenção da pesquisa se deu com alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública localizada na região de Casa Amarela, Recife-PE. A escolha da instituição deve-se ao fato de o professor-pesquisador trabalhar nela e ser o professor da turma. Além disso, os documentos de orientações curriculares da Secretaria de Educação de Pernambuco propõem que o conteúdo de Análise Combinatória seja ensinado a partir da 2ª série do Ensino Médio, recomendação que temos adotado na nossa sala de aula.

Na turma em que fizemos a intervenção, eram ministradas seis aulas de Matemática, de 50 minutos cada, por semana, sendo quatro na quinta-feira (duas no período da manhã e duas no da tarde) e duas na sexta-feira (no período da tarde). O período da intervenção decorreu desde o dia 5 de maio de 2011 a 3 de junho de 2011, num total de vinte e duas aulas (onze encontros de duas aulas cada), destinadas ao conteúdo de Análise Combinatória. Elaboramos um conjunto de problemas que pudessem mediar as noções, os conceitos e as ideias referentes ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, abordando noções e ideias do Princípio Fundamental de Contagem, Arranjo, Permutação e Combinação, assim como Fatorial, de um número Natural.

Durante as aulas, tivemos o cuidado de escutar os alunos e observá-los, buscando encontrar elementos que os ajudassem a interagir conosco, fazendo-os avançar de um nível para outro.

A pesquisa pedagógica tem sido concebida como um exercício de oposição intencional, pelo fato de a vida e a prática em sala de aula serem direcionadas pela pesquisa baseada em abordagens experimentais e psicométricas da Ciência Social. Encontra-se relacionada com a investigação direta ou imediata das salas de aulas. Na pesquisa pedagógica, temos o professor o principal pesquisador, estando sua sala de aula sob investigação. Portanto, decorre dessa prática a melhora do papel e da identidade profissional dos professores. Durante a prática pedagógica, o professor aciona sua prática e seu conhecimento especializado como educador para tomar decisões sobre a melhor maneira de promover os objetivos da aprendizagem. Dessa forma, a pesquisa de professores pode ser vista como um importante recurso, por meio do qual os professores podem desenvolver sua competência para fazer julgamentos autônomos e tomar decisões adequadas a seu *status* como profissional.

A pesquisa de professores reflete diretamente em suas salas de aula, pois, por meio de sua própria pesquisa, podem ficar atentos ao seu método de ensino e detectar o que faz com que os alunos tenham um menor rendimento, aprendendo menos do que poderiam e, assim, podem realizar mudanças criteriosas, colocá-las em prática e melhorar os resultados do ensino. Outra faceta importante da pesquisa pedagógica é o desafio à cultura opressiva. Atualmente, os professores têm sido tratados como meros executores de práticas educacionais impostas e pré-ordenadas.

> (...) aqui, uma ênfase indevida é posta no treinar professores para serem gerentes e implementadores de um conteúdo pré-ordenado, e em métodos e cursos que dificilmente fornecerão aos estudantes uma oportunidade para analisar as prerrogativas ideológicas e interesses subliminares que estruturam a maneira em que o ensino é executado. (MCLAREN, 1977.)

A pesquisa pedagógica facilita a reflexão sobre o panorama da educação e facilita o diálogo entre a pesquisa e a sala de aula. Professores e pesquisadores vivem em ambientes profissionais diferentes, assim as diretrizes e a ênfase educacionais têm sido produzidas bem distantes da escola. Portanto, defendemos o engajamento profissional por parte do professor como fator indispensável nas elaborações de diretrizes educacionais.

Giroux (1997) comenta que, embora o clima político e ideológico não pareça favorável aos professores no momento, temos em mãos o desafio de unirmo-nos ao debate público e fazer uma autocrítica em relação à natureza e finalidade da preparação dos professores. Assim, o debate oferece aos professores a oportunidade de se organizarem coletivamente para melhorar as condições em que trabalham e demonstrar ao público o papel fundamental que desempenham em qualquer tentativa de reformar as escolas públicas. De acordo com Giroux (1997), para que haja o engajamento dos professores em tal debate, faz-se necessária uma perspectiva teórica que seja desenvolvida, redefinindo a natureza da crise educacional e ao mesmo tempo fornecendo as bases para uma visão alternativa quanto ao treinamento e trabalho dos professores.

Portanto, a pesquisa pedagógica pode oferecer elementos para constituir a base dessa visão alternativa, pois se ocupa com questões, problemas ou preocupações autênticas. A maneira como essas questões e preocupações são tratadas deve responder e atender às decisões e ideias do professor, sobre o que é útil e relevante, valorizando o conhecimento da sua experiência .

3. ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Nesse capitulo, dialogamos sobre a metodologia de ensino utilizada na intervenção, assim como fizemos um mergulho nas bases filosóficas que sustentam nossa ação em sala de aula. Referenciamos a Resolução de Problemas como uma linha de pesquisa e uma alternativa metodológica de ensino-aprendizagem, destacando as implicações e bases teóricas que nos orientaram na sala de aula. Nessa perspectiva, sempre que possível, será proposto um problema ou uma situação-problema para orientar a compreensão dos pressupostos envolvidos numa atividade de resolução de problemas.

Historicamente, podemos observar a Matemática, empenhada na resolução de problemas (contar quantidades, divisão de terras, cálculos de créditos, etc.), posicionada no patamar de verdade absoluta, a tal ponto que um saber só seria científico se pudesse ser validado matematicamente. Mas qual terá sido o reflexo disso nas salas de aula? De acordo com Alro e Skovsmose (2006), os alunos têm entendido o papel do professor de Matemática como o que consiste em apontar e corrigir erros.

Aparentemente, todos sabem ensinar, pois, enquanto estudantes, os professores desenvolveram concepções do que significa ser aluno e professor, o que fortalece mais ainda práticas compartilhadas por concepções semelhantes. O que observamos da prática dos professores, em sala de aula, em sua maioria, nada mais é do que procedimentos repetitivos da época de quando eram estudantes.

O retrato que conservam, ainda comumente compartilhado entre professores e alunos de um evento educativo, é o do professor na função de transmissor de conteúdos (único responsável pelo encaminhar da aula), por meio da qual transmite o conteúdo para o aluno que absorve e reproduz o que ele lhe oferece por meio de treinamento e memorização, como o *design*:.

DEFINIÇÃO – EXEMPLOS – EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO - e/ou APLICAÇÃO

Esse *design* acaba refletindo a prática do ensino de Análise Combinatória, como mostram as pesquisas de Sturm (1999), Esteves (2001) e Sabo (2007), sempre focando as fórmulas como principal. É a sequência abordada na maioria das aulas e dos livros didáticos. O professor inicia a aula com uma definição ou um conceito, aborda alguns exemplos e, em seguida, passa uma bateria de exercícios semelhantes aos exemplos resolvidos, para garantir a aprendizagem do aluno que, no fim, aplicará o conhecimento adquirido. No entanto, as pesquisas têm tentado contribuir com metodologias que possibilitem a participação do aluno na construção do seu conhecimento, tendo a fórmula como mais uma etapa do processo.

Nesse *design*, onde se pode acrescentar o erro? Como o erro pode ser entendido nessa aula?

Como o professor já tem a resposta para as suas questões de antemão, o aluno fica tentando adivinhar o que está em sua cabeça – a do professor -, e o erro, então, reflete o não domínio da técnica ou a não memorização e, de prontidão, o professor faz a correção sem dar muita importância ao erro do estudante.

Concordamos com Esteves (2001) quando afirma que:

> O importante é admitirmos que os erros dos alunos são normais no processo de aprendizagem, e que através deles podemos levar os discentes a superarem os obstáculos e, consequentemente, à evolução do desenvolvimento do conhecimento. (ESTEVES, 2001.)

Que atividade caracteriza o ato de fazer Matemática? Pesquisas nas bases dos fundamentos da Matemática possibilitam-nos perceber o tratamento dado a essa matéria e o modo como cada concepção influencia a prática do professor em sala de aula.

A Matemática, durante toda sua existência, já foi fundamentada e justificada por diversas visões diferentes, porém atualmente podemos agrupá-las em dois grandes blocos: a visão Absolutista e a visão Falibilista da Matemática. Compreender essas visões possibilita também compreender algumas ações e práticas em sala de aula de Matemática.

Quanto a isso, Alro e Skovsmose (2006) apontam o “erro” em sala de aula como uma chave para compreender a filosofia da Matemática. Uma atitude muito comum frente a um erro é afirmar “isso está errado!”. Alro e Skovsmose (2006) distinguem vários tipos de erros e comentam que o tratamento absoluto dado ao erro demonstra a influência da filosofia absolutista da Matemática nas salas de aula:

> [...] temos a impressão de que o absolutismo na filosofia da Matemática foi transferido automaticamente para o absolutismo pedagógico, que fundamenta certas maneiras de interação em sala de aula. (ALRO E SKOVSMOSE, 2006. p.22.)

A visão absolutista do conhecimento matemático pode ser caracterizada por certezas e verdades imutáveis, ou seja, o conhecimento matemático é constituído de verdades absolutas e representa o domínio exclusivo de certos conhecimentos. Daí, o certo ou o errado limita-se à autoridade do professor. Não há, por parte do aluno, o uso de habilidades metacognitivas.

Contrapondo com a visão Absolutista, a visão Falibilista do conhecimento matemático defende o conhecimento matemático fundamentado em verdades temporais, ou seja, sendo construído por relações do contexto histórico e social.

Dessa forma, o conhecimento matemático é uma construção humana acessível a todos.

3.1 Um olhar sobre a formação de conceitos

Ao tratarmos da resolução e exploração de problemas, acreditamos que estejam estas intimamente ligadas a um conjunto de possibilidades de exploração na formação conceitual. Portanto, cabe perceber que a construção e a reconstrução da Matemática, por parte do aluno, condizem com a utilização de diferentes linguagens para a apreensão de significados, transformando-os e combinando-os numa construção que implica novas aprendizagens, gerando até novas reflexões sobre os mesmos significados. Logo, a resolução e exploração de problemas no ensino de Matemática envolvem compreensão de uma situação que exige a identificação de dados, a mobilização de outros conhecimentos, a elaboração de estratégias ou procedimentos, a organização da informação, o teste da validade da resposta e mesmo a formulação de outras situações-problema. É uma atividade dialógica num processo de ida e volta. Durante a interação do sujeito com o problema, há uma troca de conhecimento que não acaba com a obtenção da sua resposta, e sim, cada um deles se torna ponto de partida para um problema subsequente.

No estudo sobre a formação de conceitos, Vigotski afirmou: “[...] para iniciar o processo é necessário confrontar o sujeito com uma tarefa.“ (VIGOTSKI, 2008, p.72.)

Há, portanto, necessidade na inversão do *design* antes mencionado, fazendo com que o problema saia do fim para o início do processo ensino-aprendizagem e que, por meio dele, possamos desenvolver conceitos e definições. No entanto, esse procedimento não deve ser entendido como um ato simples que consiste em achar a resposta ao problema do estímulo-resposta (S-R), mas sim como um processo mediado, do tipo S-X-R, em que devemos explorar todas as situações que permeiam a situação original, como também deve servir de ferramenta para indicar o raciocínio do sujeito, possibilitando ao professor uma estratégia de abordagem que oferece a solução do problema em níveis de compreensão, pois, dessa forma, é facultado compreender o processo que é internalizado quando o sujeito consegue transferir o conceito para outra situação.

Isso nos pareceu evidente quando vivenciamos a intervenção dos encontros 1 e 2 (descritos mais à frente, na seção 3.3 desse capítulo) em que foram desenvolvidos os problemas das cédulas e dos dados.

Problema das cédulas

No meu bolso tenho cédulas de R$ 10, R$ 20 e R$ 50. Que quantia poderei obter, ao retirar:

a) duas cédulas?

b) três cédulas?

Problema dos dados

Quantos e quais são os resultados possíveis no lançamento de:

a) 1 dado

b) 2 dados

c) 3 dados

d) n dados

Ao iniciarmos com os problemas, fizemos uso de materiais concretos que mediaram a sistematização da resposta, facilitando formalizar um pensamento para a enumeração. Tal fato ajudou a abstrair no problema dos dados a quantidade de possibilidade.

A apreensão dos conceitos ocorre, inicialmente, partindo de conceitos de um grau menos abrangente de generalidade para níveis mais abrangentes. Assim, os conceitos espontâneos surgem numa situação de confronto com uma situação concreta, enquanto que os conceitos científicos implicam uma atitude mediada.

Dessa forma, ao chegar ao último item do problema dos dados, alguns alunos arriscavam hipóteses baseadas na experiência com situações anteriores de resolução dos problemas. A cada nível de conhecimento o pensamento ficara mais refinado.

Os conceitos espontâneos diferenciam-se dos conceitos científicos pelo fato de haver neles a ausência da percepção consciente de suas relações. A criança manipula-os corretamente, em situações vivenciais, mas diferenciam-se, lógica e psicologicamente, do conceito científico. Para identificar a diferença entre eles, faz-se necessário aprofundar a análise nos processos e procedimentos mentais implicados. Por exemplo, em nossa intervenção, um grupo apresentou esta resposta para a quantidade de anagramas da palavra ARARA:

Por causa dos dois R

$$ARARA = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{120}{2} = \frac{60}{6} = 10$$

O grupo já explorava bem a ideia do princípio fundamental de contagem para multiplicar as possibilidades do evento e, após algumas discussões com o professor, percebeu a necessidade de eliminação das repetições através das divisões; no entanto, algo chamou a atenção do professor quanto à justificativa, pois há uma argumentação para a primeira divisão (divisão por 2), mas não há uma para a segunda (divisão por 6).

O diálogo promovido pelo professor na tentativa de explicar a situação demonstrou-se conflituoso para os alunos, pois ficou claro que, por ter duas letras "R", seria óbvia a divisão por 2, na tentativa de eliminação das repetições promovidas pela permutação; no entanto, as três letras "A" não favorecem a compreensão da divisão por 6, ou seja, parece que a compreensão dos alunos dá-se pela seguinte lógica:

2 letras repetidas ----------- divide por 2

3 letras repetidas ----------- divide por 3

Durante a interação social, o aluno internaliza processos similares ao conceito científico; são os conceitos espontâneos que possuem fortes laços com a experiência empírica. O conceito espontâneo e o conceito cientifico diferenciam-se qualitativamente, não sendo possível chegar ao segundo a partir do primeiro; para tal, faz-se necessário um salto.

Durante a exploração da resolução de problemas, temos cuidado de dar voz ao aluno. É nesse momento que o professor pode interferir na zona de desenvolvimento, comutando conceitos espontâneos em conceitos científicos.

As ações na sala de aula devem levar o aluno a uma atividade consciente da necessidade de elaboração de novos conceitos e da transformação de sua forma de pensar. A formação e o desenvolvimento de conceitos, por parte dos alunos, acontecem de forma gradativa, pela apreensão perceptiva imediata dos atributos ou das propriedades de objetos. Dessa forma, a atividade de ensino-aprendizagem deve constituir-se em uma atividade orientada e planejada sistematicamente, a fim de mediar os significados elaborados pelos alunos. À medida que o processo avança, vai ocorrendo a superação contínua da incompletude entre fenômenos e significados a eles atribuídos. O aluno vai formulando significados mais complexos, com níveis mais abrangentes de generalidade. Os conceitos adquirem maior precisão nos seus significados e nos limites de sua aplicabilidade, ocorrendo, então, as diferenciações.

Para iniciar o processo, faz-se necessário, primeiro, conhecer bem o que se quer como resultado, os requisitos principais que o aluno deve satisfazer; assim, buscam-se procedimentos ou vias para realizar o processo e garantir resultados em níveis mais qualitativos.

Percebemos que a formação e o desenvolvimento de conceitos dos alunos são efetivados por meio da ação mediadora do professor com as atividades orientadas e planejadas sistematicamente, concretizadas na atividade de ensino. Com isso, o processo estímulo-resposta é substituído por um mais complexo. Assim, a mediação é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação. A relação deixa, então, de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento.

Logo, o processo ensino-aprendizagem deve conduzir o aluno a uma atividade consciente da necessidade da elaboração de novos conceitos e da transformação de sua forma de pensar. Esse processo não ocorre de maneira espontânea; portanto, o papel desempenhado pelo professor é singular, de mediador.

No conjunto de problemas usados na intervenção, pudemos evidenciar ações que direcionavam a construção dos conceitos científicos. Isso se deve ao fato de os problemas serem orientados de modo a proporcionarem ao estudante uma ação de metacognição, proporcionando-lhe a compreensão do processo de resolução dos problemas e dos princípios gerais dos conceitos aplicados. Para tanto, o professor propõe atividades desafiadoras e que evidenciem princípios e características a serem apreendidas.

Para não limitar o potencial do aluno, o problema proposto deve apreciar seu nível. Portanto, partindo de uma situação do seu cotidiano, buscamos problematizar, para introduzir princípios do conteúdo em estudo, como no problema a seguir.

Problema das cédulas

No meu bolso tenho cédulas de R$ 10, R$ 20 e R$ 50. Que quantia poderei obter, ao retirar:

a) duas cédulas?

b) três cédulas?

Na sala de aula, o diálogo é estabelecido como uma negociação de significados. Surgem interpretações variadas para esse problema, como, por exemplo: no bolso há uma única cédula de R$10, R$20 e R$50, ou no bolso há várias cédulas de R$10, de R$20 e de R$ 50. Assim o professor pode permitir que os alunos enriqueçam sua percepção sobre o problema.

Para direcionar o trabalho, entregamos aos alunos um montinho de cédulas com várias delas sendo falsas, com as quantias referidas no problema.

O uso das cédulas falsas facilitou a construção das possibilidades, porém exigiu pouco dos alunos, uma postura sistemática que fazia parte dos nossos objetivos. Assim, as atividades necessitam ser orientadas para níveis de desenvolvimento que ainda não foram atingidos. Dessa forma, o “problema dos dados” busca completar os significados construídos no “problema das cédulas”, explorando a enumeração dos agrupamentos que são maiores em quantidade, o que obriga a sistematização e generalização, daí a razão de os problemas estarem organizados em níveis, 1 dado, 2 dados, 3 dados e n dados, fazendo o aluno perceber o que acontece em cada etapa.

Problema dos dados

Quantos e quais são os resultados possíveis no lançamento de:

a) 1 dado

b) 2 dados

c) 3 dados

d) n dados

Os limites impostos pelo concreto podem se tornar obstáculos para o desenvolvimento de generalizações teóricas. Ao observar 6 números em um dado, de imediato, o aluno imagina que os resultados possíveis no lançamento de dois dados são: 6 + 6 = 12.

Só por meio de atividades direcionadas é possível que a construção do conhecimento científico oportunize o desenvolvimento real, passando ao desenvolvimento potencial, que passará a ser o novo desenvolvimento real.

Portanto, a função do professor em sala de aula não é consiste em dar resposta, mas sim em favorecer, ajudar, orientar o aluno a encontrá-la por si mesmo.

3.2 Resolução de Problemas e a Pesquisa em Educação Matemática

A resolução de problemas tem sido proposta em diversos documentos de orientação curricular, nacional e internacional, porém percebemos na literatura a ausência de trabalhos que abordem como metodologia de ensino na sala de aula.

As atividades de resolução de problemas em Matemática incluem resolver problemas simples que são apresentados com muita frequência em livros didáticos, tais como resolver problemas não rotineiros ou quebra-cabeças, aplicar a Matemática a problemas do mundo real e conceber e testar conjecturas matemáticas. A resolução de problemas comporta várias interpretações. É uma expressão abrangente que pode significar diferentes coisas para diferentes pessoas ao mesmo tempo e diferentes coisas para as mesmas pessoas em diferentes ocasiões.

As interpretações mais comuns para resolução de problemas tomam-na:

- como uma meta;
- como um processo;
- como uma habilidade básica.

Na resolução de problema como uma meta, temos como foco principal o estudo da Matemática para resolver problemas. Esses passam a constituir uma aplicação dos conteúdos apreendidos. Ou seja, aprender a resolver um problema é a razão principal de se estudar Matemática.

Esses tipos de problemas geralmente aparecem no final do capitulo do livro didático com aplicações dos conceitos abordados durante o capitulo. O aluno está apto a resolvê-los, à medida que aprende o conceito matemático pertinente ao problema.

Na interpretação da resolução de problemas como um processo, o que é considerado importante são os métodos, os procedimentos, as estratégias e as heurísticas que os alunos usam na sua resolução. Portanto, buscamos capacitar o aluno a ser um bom solucionador de problemas.

A resolução de problemas como uma habilidade básica reforça a necessidade de ela fazer parte do currículo de Matemática. Tal posicionamento impõe este questionamento: O que, essencialmente, deve ser ensinado em matéria de resolução de problemas? Ao tratar da resolução de problemas como uma habilidade matemática básica, temos que considerar as especificidades do conteúdo envolvido no problema, tipos de problemas e métodos de solução.

Em nosso trabalho, a resolução de problema ganha uma dimensão que vai mais além das acima citadas. Consideramos que a resolução de problemas expressa mais do que o simples fato de achar a resposta, tendo a conotação de explorar todas as potencialidades do problema, ou seja, o aluno aprende Matemática resolvendo problema e, para resolver problemas, é necessário haver uma ação que não se limita à sua solução. Portanto, em nível de esclarecimento, estaremos usando o termo resolução e exploração de problemas para nos referirmos à metodologia de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas.

O desenvolvimento da resolução de problemas como campo de pesquisa e prática vem ganhando força nas últimas décadas. Segundo Silvanio Andrade (1998):

> Em nível mundial, as investigações sistemáticas sobre Resolução de Problemas e suas implicações curriculares têm início na década de 1970. Embora grande parte da literatura hoje conhecida em Resolução de Problemas tenha sido desenvolvida a partir dos anos 70, os trabalhos de George Polya datam de 1944. A partir do final da década de 1960, a metodologia de investigação, utilizando sessões de resolução de problemas em grupo e com os alunos se manifestando em voz alta, se tornou prática comum. O período de 1962 a 1972 marcou a transição de uma metodologia de investigação de natureza quantitativa para uma qualitativa. De um modo geral, os estudos em Resolução de Problemas preocuparam-se inicialmente, período anterior a 60, com desempenho bem-sucedido da obtenção da solução de problemas. Não houve preocupação com o processo. Para desenvolver sua capacidade em resolução de problemas, a criança deveria exercitar-se exaustivamente na solução de uma grande quantidade de problemas do mesmo tipo. O ensino de resolução de problemas limitava-se ao ensino da busca de solução, tipo treino, num esquema cognitivo estímulo-resposta. Posteriormente, período 60-80, a preocupação voltou-se para o

> processo envolvido na resolução do problema e, assim, centrando o ensino no uso de diferentes estratégias. (pp.7 – 8)

A publicação do livro de G. Polya possibilitou a sistematização de heurísticas e estratégias para resolução de problemas, tais como: O que se pede no problema? É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama? Qual é o seu plano para resolver um problema? Examine se a solução está correta.

Na década de 80, há um impulso em relação às publicações em Resolução de Problemas, incentivado, possivelmente, pelo fato de, no fim da década de 70, o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) haver recomendado, para a década de 80, a resolução de problemas como foco da Matemática escolar e a ATM (Associação of Teachers of Mathematics) haver estabelecido a resolução de problemas como habilidade central no ensino de Matemática. Essas publicações no Brasil caracterizaram-se por dissertações e teses que focalizaram o desenvolvimento no educando, quanto à capacidade de resolução de problemas. Portanto, os trabalhos investigaram o uso de estratégias especiais na resolução de problemas, acreditando-se que os hábitos para a consecução de tal fim poderiam ser aprimorados a partir de uma adequada formação e prática.

Segundo Andrade (1998), no final da década de 80 a resolução de problemas passa a ser pensada como metodologia de ensino, como um ponto de partida, um meio de ensinar Matemática (p.6). Na Resolução de Problemas, como metodologia de ensino, o aluno aprende Matemática resolvendo problemas e, para resolvê-los, é necessário haver um processo mais amplo, no qual o ensino de Matemática se desenvolve por meio de sua resolução.

Nos anos 90, os estudos de Resolução de Problemas, em âmbito de pesquisa, passam a ser mais voltados para o contexto real da sala de aula, saindo de pesquisas do tipo controle, dando, então, preferência a abordagens que buscam trabalhar com a sala de aula por inteiro. Também, nessa década, a perspectiva de Ensino-Aprendizagem de Matemática, via Resolução de Problemas, passa a dominar tanto nas pesquisas como nas propostas curriculares, como, por exemplo, os PCN. Também, na década de 90, os estudos de Resolução de Problemas passam a sofrer fortes influências de outras tendências em Educação Matemática: da Modelagem, da Etnomatemática, do Construtivismo Social e da Educação

Matemática Crítica (como é o caso da pesquisa de Andrade, que aborda a resolução de problemas numa perspectiva sociocultural, com a proposta da Exploração de Problemas). Nessa década, deu-se ênfase à proposição de problemas, à exploração de problemas, à investigação matemática. Entretanto, no final da década de 90 e início dos anos 2000, os estudos da Resolução de Problemas ficam um pouco diluídos em outras propostas, buscando novos significados. Nisso, notamosuma queda nos estudos dessa área nesse período, mas observamos que retornou com bastante vigor a partir de 2007-2010.

Embora a resolução de problemas esteja integrada a todo o currículo, na realidade, ela tem sido ensinada como um tópico separado no currículo de Matemática.

Na década atual, há uma grande preocupação com o tema "formulação/proposição de problema" e uma necessidade de explicitar melhor os processos envolvidos num ensino de Matemática, desenvolvido por meio da resolução de problemas. Embora ainda não esteja bem claro como pode ser um ensino-aprendizagem de Matemática, realizado por meio da resolução de problemas, tem sido razão de consenso entre os pesquisadores que ensinar Matemática, por essa via, implica sempre começar com um problema orientador e que os estudantes aprendem e entendem aspectos importantes de um conceito, ou ideia matemática, quando exploram situações-problema.

Essa postura de ensinar Matemática através da resolução de problemas é uma alternativa para desenvolver, entre os alunos, habilidades concernentes a essa tarefa, à medida que compreendem os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos.

Nossa pesquisa, de alguma forma, procurará trazer alguns indícios do trabalho de resolução de problema em sala de aula como metodologia de ensino-aprendizagem.

A exploração dos problemas, trabalhada por nós na intervenção, concentrou-se na "busca de padrões e na mediação da aprendizagem", traduzindo, assim, a falta de uma abordagem que intensificasse ir "além do problema", trazendo, sobretudo, temas como política, economia, gênero, entre outros.

A resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem tem intensificado nos alunos o papel ativo na aprendizagem dos conceitos, por meio dela deixam de ser meros expectadores para serem autores em sala de aula. Assim, a aprendizagem dos conceitos e procedimentos matemáticos fica conectada à experiência de resolução de problemas, fazendo sentido e valorizando a Matemática construída pelos próprios alunos em sala de aula.

Durante o processo de intervenção foi possível perceber a evolução dos alunos na forma de como expor as possibilidades através da enumeração; aos poucos foram percebendo maneiras mais sofisticadas de organizar e apresentar as combinações reveladas do diálogo com os seus professores e da experiência e reflexão na resolução dos problemas.

Em sala de aula, os alunos ainda não estão habituados a exercer um papel ativo no processo de aprendizagem em Matemática e geralmente ficam esperando a resposta do professor que, durante esse processo, fica sendo um mediador, um problematizador facilitando ao aluno a chegada por si mesmo à resolução dos problemas e às ideias matemáticas envolvidas. No entanto, nem sempre o problema proposto por nós conseguiu alcançar e mobilizar o aluno a querer resolver o problema; para isso acontecer, o aluno precisa aceitar o problema, daí este não pode ser fácil nem difícil demais. Com o problema fazendo parte do aluno, inicia-se todo o processo de ataque a ele na tentativa de explorá-lo.

3.3 Investigando e Refletindo com a Prática

Quais os conjuntos de saberes considerados importantes para o professor em seu exercício profissional e na pesquisa indispensável ao seu trabalho?

Com isso, buscamos evidenciar nas pesquisas docentes uma alternativa de aproximar a pesquisa e a sala de aula, possibilitando ao professor um crescimento profissional e melhor compreensão das necessidades dos seus alunos, possibilitando-o agir sobre essa realidade de forma critica e fundamentada.

Dessa maneira, temos abaixo detalhes do trabalho realizado com os alunos e considerações para o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Como fazendo parte da pesquisa, tivemos a seguinte distribuição das aulas:

Encontros 1 e 2 (quatro aulas) - 05/05/2011

– A pesquisa foi apresentada aos alunos e trabalhada a importância de um critério na enumeração dos objetos, referente aos problemas de Análise Combinatória. Foram apresentadas a árvore de possibilidades e as tabelas como ferramentas na visualização dos agrupamentos.

Conteúdos trabalhados: contagem dos agrupamentos, árvore das possibilidades e métodos de enumeração dos agrupamentos.

- **Objetivo**: desenvolver métodos de contagens, a partir do pensamento dos alunos, buscando evidenciar padrões de enumeração, árvore de possibilidades, tabelas e outras ferramentas que possibilitassem a organização dos dados.
- **Atividades**: Problemas 1 e 2

*** PROBLEMA 1 -** Problema das cédulas

No meu bolso tenho cédulas de R$ 10, R$ 20 e R$ 50. Que quantia poderei obter, ao retirar:

a) duas cédulas?
b) três cédulas?

* **PROBLEMA 2 -** Problema dos dados

Quantos e quais são os resultados possíveis no lançamento de:

a) 1 dado
b) 2 dados
c) 3 dados
d) n dados

Descrição e Análise. Iniciamos a aula explicando que, a partir daquele momento, as aulas ministradas seriam observadas de forma singular, por fazer parte de uma pesquisa de Mestrado, na qual buscávamos encontrar considerações e possibilidades quanto ao ensino de Análise Combinatória. Dando continuidade à aula, entregamos uma folha de atividade com alguns problemas. Em seguida, pedimos aos alunos para que se organizassem em grupos e resolvessem o seguinte problema:

Problema das cédulas (Problema 1)

> No meu bolso tenho cédulas de R$ 10, R$ 20 e R$ 50. Que quantia poderei obter, ao retirar:
>
> a) duas cédulas?
> b) três cédulas?

Após esclarecimentos para a compreensão do problema, alguns alunos começaram, timidamente, a expor comentários e sugestões de respostas:

10 e 20 10 e 50 20 e 50

O professor aproveitou para perguntar se alguém havia encontrado outra maneira e se concordava com a resposta do colega, então outro aluno colocou uma sugestão de resposta diferente:

10 e 10	10 e 20	10 e 50
20 e 10	20 e 20	20 e 50
50 e 10	50 e 20	50 e 50

Logo, foi questionado se os alunos concordavam com a resposta e observado que a pergunta estava interessada em saber a quantia obtida pela retirada de duas cédulas e que, portanto, 20 e 10, ou 10 e 20 resultavam numa mesma quantia, ou seja, trinta reais, o que fez os alunos perceberem que a ordem da retirada das cédulas não era importante e sim as cédulas presentes em cada retirada possível. Dessa forma, os alunos chegaram à resposta:

$20 = 10 + 10$ $30 = 10 + 20$ $60 = 10 + 50$

40 = 20 + 20 70 = 20 + 50

100 = 50 + 50

Outro grupo apresentou esta solução para o item b:

30 = 10 + 10 + 10 60 = 20 + 20 + 20

40 = 10 + 10 + 20 90 = 20 + 20 + 50

70 = 10 + 10 + 50 120 = 20 + 50 + 50

50 = 10 + 20 + 20 150 = 50 + 50 + 50

80 = 10 + 20 + 50

110 = 10 + 50 + 50

Para facilitar a sistematização das respostas, o professor entregou um conjunto com cédulas falsas de 10, 20 e 50 reais para que os alunos pudessem manusear e visualizar com mais facilidade cada agrupamento, fazendo em seguida as suas anotações no caderno.

Para finalizar, comentamos sobre a dificuldade dos alunos em encontrar a resposta, visto não organizá-las por meio de um padrão, embora a ordem das cédulas no agrupamento não diferencie a resposta. A ordem na apresentação desses agrupamentos pode facilitar a elencar todas as possibilidades, como ilustrado na resposta do item b, em que o grupo começou expondo todas as quantias, cujas retiradas começavam com a cédula de R$ 10 reais, em seguida com a de R$ 20 reais, no início, e, por fim, com a de R$ 50 reais.

Problema dos dados (Problema 2)

Quantos e quais são os resultados possíveis no lançamento de:

a) 1 dado
b) 2 dados
c) 3 dados
d) n dados

Os alunos não possuíam material concreto para facilitar a visualização, mas continuaram expondo suas respostas; para um dado, não houve tanta dificuldade de chegarem rapidamente a:

6 possibilidades : 1, 2, 3, 4, 5, 6

No entanto, para o lançamento de 2 dados, surgiram algumas dificuldades:

- Um grupo propôs como resposta 12 possibilidades, pensando em 6 possibilidades de uma somada a 6 possibilidades do outro;
- Uma aluna sugeriu 6 possibilidades: (1, 1); (2, 2); (3, 3), (4, 4), (5, 5) e (6, 6)
- Outro grupo sugeriu 21 possibilidades,

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
(2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)
(3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)
(4, 4) (4, 5) (4, 6)
(5, 5) (5, 6)
(6, 6)
não aceitavam a troca da ordem.

O professor-pesquisador então sugeriu que imaginassem dois dados de cores diferentes, um vermelho e outro azul, e pediu para os alunos falarem sobre o que poderia acontecer. A seguir, os alunos começaram a dizer: “Ah! Pode sair!” *(1, 6)*; Um, dentre eles falou *(5, 2)*; depois de um tempo de debate entre eles mesmos e o professor, chegaram à solução abaixo:

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

O professor-pesquisador perguntou se alguém tinha uma ideia para obter a quantidade de possibilidades sem precisar descrever todas, e sugeriu pensar em que nem um dos alunos havia organizado seu pensamento da seguinte forma:

1, 1 1, 2 1, 3 1, 4 1, 5 1, 6

Percebemos que esse aluno imaginou todos os resultados possíveis com o número 1, saindo primeiro o que facilitou a compreensão de que, para o lançamento de dois dados, teríamos 6 x 6 = 36 resultados possíveis.

Para três dados, os alunos tiveram mais dificuldade e foi necessária uma maior intervenção do professor, que se apoiou na ideia do aluno anterior, para ilustrar todos os resultados possíveis com o número 1 saindo primeiro, desta forma:

(1, 1, 1); (1, 1, 2); (1, 1, 3); (1, 1, 4); (1, 1, 5); (1, 1, 6);

(1, 2, 1); (1, 2, 2); (1, 2, 3); (1, 2, 4); (1, 2, 5); (1, 2, 6);

(1, 3, 1); (1, 3, 2); (1, 3, 3); (1, 3, 4); (1, 3, 5); (1, 3, 6);

(1, 4, 1); (1, 4, 2); (1, 4, 3); (1, 4, 4); (1, 4, 5); (1, 4, 6);

(1, 5, 1); (1, 5, 2); (1, 5, 3); (1, 5, 4); (1, 5, 5); (1, 5, 6);

(1, 6, 1); (1, 6, 2); (1, 6, 3); (1, 6, 4); (1, 6, 5); (1, 6, 6);

Os alunos concluíram que se, ao começar com o número 1, foram obtidos 36 resultados possíveis para encontrar a solução, teriam que multiplicar 6 x 36 = 216 possibilidades. O professor-pesquisador interviu, dizendo que, para cada resultado do lançamento de dois dados, haveria 6 possibilidades novas.

Por fim, o professor-pesquisador, em conjunto com os alunos, organizou esta tabela no quadro:

Quantidade de dados	resultados possíveis
1 dado	6
2 dados	6 x 6 = 36
3 dados	6 x 6 x 6 = 216
n dados	6^n

A partir dessa atividade, percebemos que os alunos apresentaram tais dificuldades: a enumeração sistemática dos resultados e a relevância da ordem, dificuldades essas que têm sido também apontadas por outros pesquisadores em suas pesquisas, que consideram a enumeração sistemática dos resultados e a relevância da ordem como dificuldades dos alunos em compreender a distinção entre Arranjo e Combinação, na aplicação de fórmula ou no simples uso de Princípio Fundamental de Contagem, ao ensinar Análise Combinatória (ESTEVES, 2001).

Uma atitude muito comum, durante o processo de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, corresponde ao uso de fórmulas; tal observação é notada nos livros didáticos, conforme Sabo (2007) apresenta em sua monografia de especialização, e também discutida em outras pesquisas de Sturm (1999), Souza (2010), Esteves (2001). Algumas dessas pesquisas buscaram "*abordagens alternativas"* de ensino, nas quais o foco não consistisse no uso banal de fórmulas, sem uma verdadeira compreensão, tendo como principal objetivo educacional o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Quando Sturm (1999) sugeriu o trabalho de abordagem alternativa, acreditava que o trabalho em torno de problemas proporcionaria melhor compreensão das fórmulas e dos conceitos a serem abordados; por isso, durante sua vivência, buscou o uso de estratégias variadas de resolução para os problemas de enumeração, árvore das possibilidades, Princípio Fundamental de Contagem, etc.

É importante destacar que uma abordagem que não priorize as fórmulas não significa que as negue. As fórmulas se tornam um resultado de processos de reflexão, generalização e sistematização, após o aluno compreender todas as etapas.

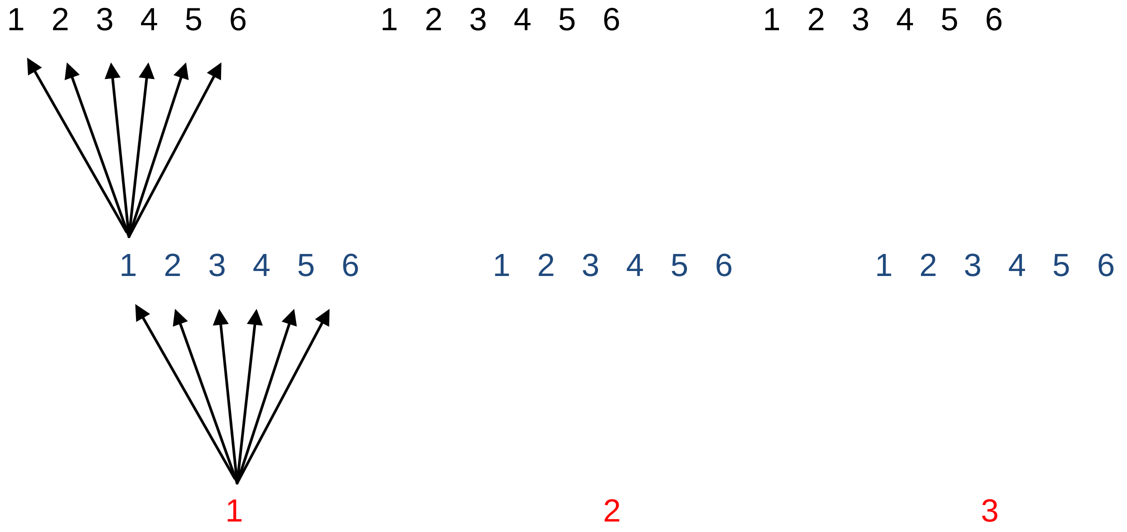
Sendo assim, faz-se necessária a resolução de problemas que trabalhem os conhecimentos prévios dos alunos para construir os conceitos, trabalhando problemas que visam à interação entre os dois conceitos, possibilitando, dessa forma, a diferenciação entre os dois tipos de agrupamento, na tentativa de deixar mais nítidos os conceitos de Arranjo e Combinação e suas diferenças.

O "problema das cédulas" tem a intenção de colocar o aluno numa situação de contagem bem cotidiana para trabalhar as dificuldades da "enumeração dos elementos" e a "ordem nos agrupamentos". Normalmente os problemas introdutórios de Análise Combinatória são facilmente resolvidos por uma multiplicação, buscando deixar mais evidente o princípio multiplicativo. Para nós, esse momento é indicado para fazer o aluno traçar uma estratégia de resolução; a mais adequada é a enumeração dos elementos, facilitada, principalmente, pela utilização do material concreto disponibilizado. Sendo assim, o processo de formação de conceitos é fruto de uma discussão e reflexão compartilhada entre todos os participantes, respeitando o saber do aluno e validando sua fala.

No estudo sobre a formação de conceitos, Vigotski afirmou: [...] "para iniciar o processo é necessário confrontar o sujeito com uma tarefa" (VIGOTSKI, 2008, p.72). No entanto, esse procedimento não deve ser entendido como o simples ato de achar a resposta ao problema, mas sim como a atividade que "explora todas as situações que permeiam a situação original" e "também deve servir de ferramenta para indicar o raciocínio" do sujeito, possibilitando ao professor uma estratégia de abordagem que oferece a solução do problema passo a passo, pois, dessa forma, possibilita compreender o processo que se internaliza quando o sujeito consegue transferir o conceito para outra situação.

No problema citado, o trabalho realizado pelos alunos, embora incompleto e não correto, proporcionou-lhes perceber que a ordem não era relevante, já que o que importava era a quantia obtida pela adição das cédulas retiradas. Uma observação importante concernente a esse problema é que, enquanto os alunos expunham as ideias das respostas, não seguiam um padrão de ordem, o que terminava por confundi-los. Esse fato gerou a necessidade de organizar as respostas.

Tal entendimento é altamente relevante, pois facilita compreender, por exemplo, no problema dos dados, que:



Esse modelo foi utilizado pelo professor no encontro seguinte, quando estava explicando o Princípio Fundamental de Contagem, reforçando que, para cada resultado possível no dado vermelho, teríamos seis resultados possíveis no dado azul e que, para cada resultado possível no dado azul, outros seis resultados eram obtidos no dado preto. Tal forma de organização das informações facilita a compreensão do Princípio Fundamental de Contagem, além de tornar-se numa forma diferenciada de responder o problema.

Na Matemática Discreta podemos ter como referência de ensino uma proposta pautada em resolução de problemas que possibilitem aos alunos criar métodos de soluções e compreender princípios comuns, sistematizando informações para aplicar em situações mais complexas.

Gardiner (1991) evidencia, como estratégia de ensino para a Matemática Discreta escolar, a aplicação de problemas que façam uso de uma variedade diferente de soluções, proporcionando a exemplificação de certo número de princípios fundamentais, ou seja, os alunos começam por tentar construir uma solução própria e vivenciar algumas dificuldades que surgem. À medida que o tamanho do problema cresce, podem melhorar seus métodos, buscando um método mais eficaz, um algoritmo padrão.

Dessa forma, durante as aulas temos que avaliar as formalizações existentes nos alunos, valorizar seu conhecimento e, a partir daí, construir novas formalizações, tendo sempre o cuidado de não trazer atividades que não estejam aptos a resolver, o que poderia desestimulá-los.

Encontros 3 e 4 – (**quatro aulas**) – 12/05/2011 **–** Teve por principal objetivo apresentar o Princípio Fundamental de Contagem como ferramenta na resolução dos problemas. Conforme é comum, os problemas possuíam níveis variados, buscando servir de obstáculos e desafios que proporcionassem aos alunos a necessidade de um pensar mais refinado

- **Conteúdos trabalhados** – Princípio Fundamental de Contagem (PFC)
- **Objetivo**: apresentar o PFC como mais uma ferramenta na resolução dos problemas de Análise Combinatória, construindo a partir da generalização e abstração das enumerações.
- **Atividades**: Problemas 3, 4, 5 e 6.

*** PROBLEMA 3 -** Problema dos caminhos

Para ir da cidade A à cidade B há 3 rodovias, e da B à C, 5 rodovias. De quantas maneiras diferentes é possível ir da cidade A a C, passando por B?

* **PROBLEMA 4 -** Problema das linhas de ônibus

Em uma cidade, há duas linhas de ônibus: Norte-Sul e Leste-Oeste. Cada ônibus tem um código formado por 3 números escolhidos entre 1, 2, 3, 4 e 5 para a linha Norte-Sul, e entre 6,7,8 e 9 para a Leste-Oeste. Não são permitidos códigos com 3 números iguais.

a) Quantas linhas disponíveis há para a linha Norte-Sul?

b) Quantos códigos disponíveis há para a linha Leste-Oeste?

* **PROBLEMA 5 -** Problema do mapa

Durante a aula de Geografia, um aluno pretende pintar as cinco grandes regiões em um mapa do Brasil. Sabendo que o aluno tem disponível 10 lápis de cores diferentes e que não será utilizada a mesma cor para pintar regiões diferentes, determine de quantas maneiras distintas o mapa poderá ser pintado.

* **PROBLEMA 6 -** Problema alfabético

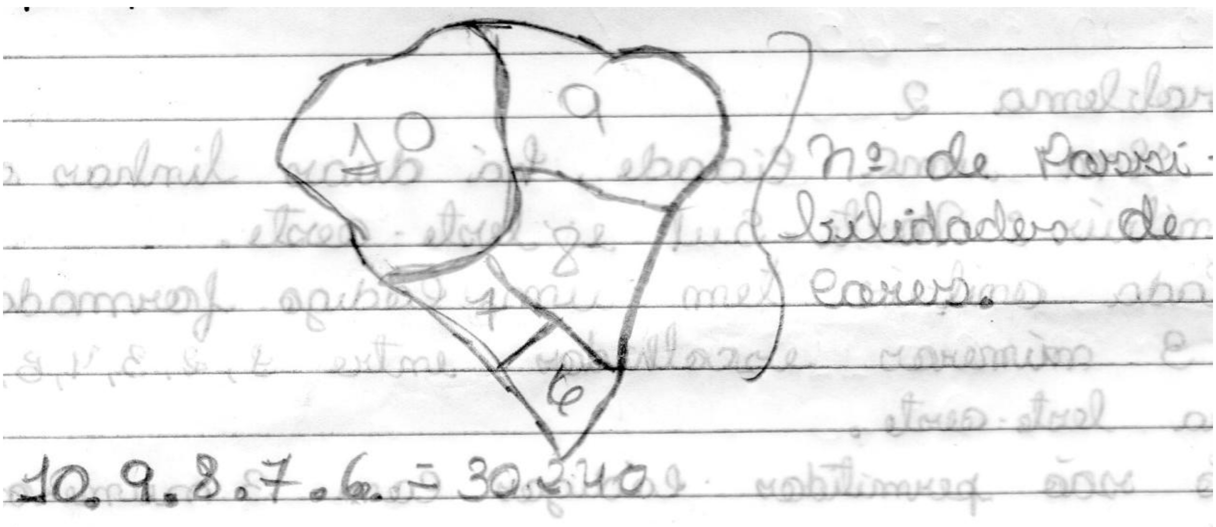
Calcule o número de anagramas das palavras:

a) PAZ b) BANANA c) ARARA

Descrição e Análise. Na aula, o principal objetivo consistia em fornecer aos alunos uma sistematização do que fora estudado antes e levá-los a conceitualizar o Princípio Fundamental de Contagem. Conforme é comum, partia-se de um problema para conceitualizar.

O "problema dos caminhos" possibilita trabalhar princípios já vistos anteriormente e generalizar para o Princípio Fundamental de Contagem, já que a quantidade de eventos é pequena e facilita sua enumeração, o que permite aos alunos aplicarem métodos de resolução, como a enumeração sistemática, elencando cada uma das possibilidades. No entanto, o "Problema das linhas de ônibus" possui uma variedade maior; assim, o problema tornava-se um obstáculo, por obrigá-los a aperfeiçoar o método, ou seja, fazer uso do Princípio Fundamental de Contagem. Nessa perspectiva, o “Problema do mapa” fortalece esse pensamento e a visualização na prática do PFC.

Os problemas que facilitam a visualização do PFC possuem um risco. Na tentativa de facilitar a percepção do principio multiplicativo que os agrupamentos possuem, o aluno pode desenvolver a generalização de que essa multiplicação sempre manterá a essência de multiplicar os números de forma decrescente. São problemas comuns nos livros didáticos quando os alunos estão aprendendo o PFC em que os alunos determinam a primeira quantidade de possibilidades e em seguida multiplicam, n. (n – 1). (n – 2). ..., isso não reflete a quantidade de possibilidades em cada evento.



Contudo, nesse processo de generalização e abstração, existe a possibilidade de os alunos desenvolverem falsos conceitos, conceitos espontâneos.

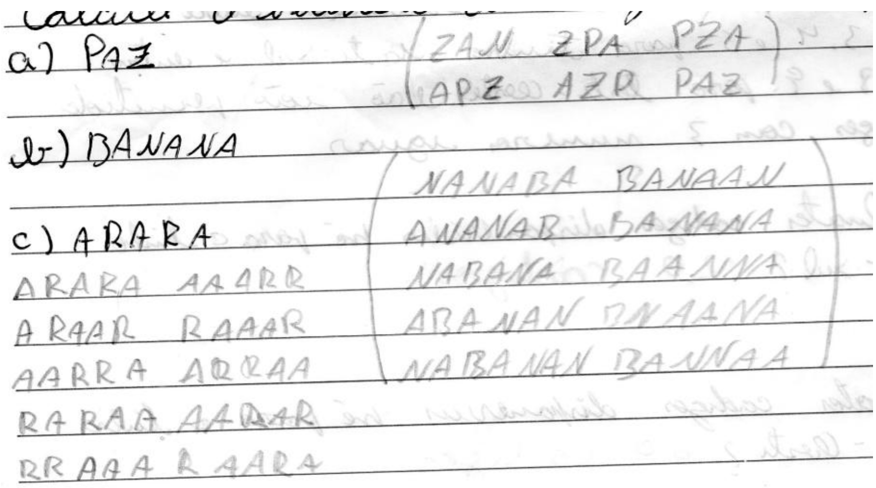
Vigotski (2009) denomina de “conceitos espontâneos” os conhecimentos com os quais os alunos chegam à sala de aula, conceitos que são formados a partir das experiências vivenciadas no seu contexto social e na própria sala de aula. Logo, o processo ensino-aprendizagem deve conduzir o aluno a uma atividade consciente da necessidade da elaboração de novos conceitos e da transformação de sua forma de pensar.

Para isso, faz-se necessário desenvolver atividades que foquem o conhecimento científico. O “Problema alfabético” buscou desenvolver o Princípio Fundamental de Contagem por meio de um “conflito”. A essa altura os alunos já começavam a aplicar o PFC, mas criaram a ilusão de que o processo corresponderia a uma multiplicação que, na maioria das vezes, se dá pelos números em ordem decrescente. Portanto, propomos o “Problema alfabético”, por ser um problema em que se faz possível aplicar o PFC. Porém, há a necessidade de dividir, fator este que não nos aparecia em problemas anteriores.

Um dos alunos não se deteve ao PFC e sua resposta foi baseada na enumeração dos elementos, encontrando todas as possíveis palavras, confrontando com o resultado que os outros alunos haviam encontrado. Esse fato também observado no trabalho de Esteves (2001) indica que, na busca por uma sistematização do conhecimento, os alunos recorrem ao que é mais concreto para eles. Em Esteves (2001), os alunos demonstravam compreender a relevância ou não da ordem quando faziam a enumeração dos elementos; no nosso caso, tal fato oportunizou a discussão entre a generalização e o concreto facilitando a compreensão do artifício utilizado para contagem.

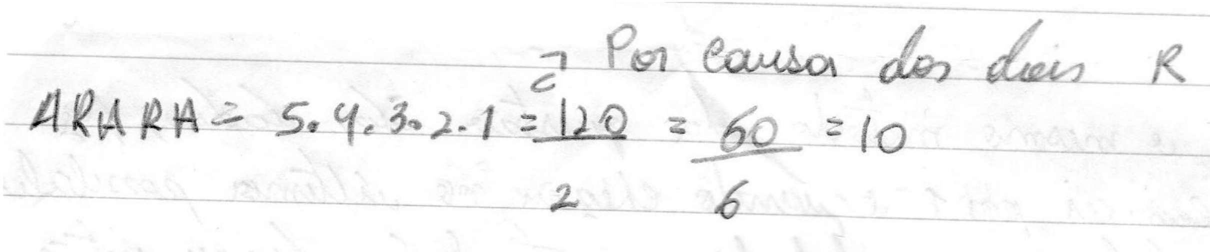
É a Matemática sendo construída sob verdades temporais, uma construção social derivada das ações e decisões tomadas em contextos; é a visão Falibilista do conhecimento Matemático. É comum a ciência, e, portanto, a Matemática, ser apresentada como um conhecimento destituído de significados, puro, sem erros ou caminhos equivocados, porém historicamente o conhecimento matemático tem suas idas e vindas em verdades temporais, verdades que se constituem através da experiência, tentativa e contexto, logo não são verdades absolutas.

Em sala de aula, o processo de generalização e a enumeração fazem parte da construção do conhecimento matemático do aluno, caminham juntas com a mediação do professor. É um processo em que o professor faz uso da enumeração para concretizar um pensar mais sistematizado. É importante destacar que não é uma discussão de hierarquia de saber, que não estamos defendendo um pensar em detrimento do outro e sim níveis de compreensão.



Esse exemplo fortalece a observação de Esteves (2001), em sua dissertação, quando comenta que**,** na busca por uma sistematização do conhecimento, os alunos recorrem ao que lhe é mais concreto, demonstrando compreender a relevância ou não da ordem quando faziam a enumeração dos elementos. Porém, preocupávamo-nos em construir um mecanismo matemático que facilitasse a contagem de situações em que houvesse repetições de repetições, ora por elementos repetidos, ora pela irrelevância da ordem. O mecanismo encontrado foi a divisão pela permutação que representa as repetições. Contudo, o exemplo citado acima mostra um cenário corriqueiro nas aulas de Matemática.

Tal situação proporcionou um debate. O diálogo estabelecido entre todos direcionamo-lo no sentido de encontrar um método que proporcionasse uma mesma resposta. Com ajuda do professor, os alunos perceberam que as letras repetidas, ao serem trocadas de posição, não originavam palavras diferentes e que seria necessária a divisão para eliminar as palavras repetidas.



Esse problema possibilitou, no encontro seguinte, introduzir a ideia de PERMUTAÇÃO. Embora os alunos tenham desenvolvido corretamente o problema, a compreensão, de fato, não foi alcançada, gerando, assim, a necessidade de aprofundar tal questão. Podemos observar isso no extrato da atividade de um dos alunos, pois ele evidencia o divisor 2 como causa dos dois R da palavra ARARA, mas não explicou o surgimento do divisor 6.

Encontro 5 – (**2 aulas**) – 13/05/2011 – Como os alunos já tinham conhecimento do PFC e apresentaram dificuldade em problemas de Permutação com repetição tivemos o objetivo de fortalecer o PFC por meio de problemas de Combinação e Permutação simples.

- **Conteúdos Trabalhados** – Combinação e Permutação Simples
- **Objetivo**: Apresentar problemas que envolvam situações de combinação e de permutação, oportunizando assim reflexões quanto à utilização do PFC, uma vez que na combinação, temos repetições.
- **Atividades**: Problemas 7 e 8.

* **PROBLEMA 7 -** Problema na concessionária

Muitas concessionárias de automóveis disponibilizaram para seus clientes a lista de opcionais: **direção hidráulica, vidro elétrico, trava elétrica e desembaçador de vidros**.

a) Em uma compra promocional, um cliente poderia escolher dois opcionais. Quais seriam as possibilidades de escolha?

b) Caso o cliente possa escolher três opcionais, quais serão as possibilidades?

* **PROBLEMA 8 -** Problema dos livros

Um estudante possui um livro de Matemática, um de Biologia, um de Física, um de Química, um de História e um de Geografia. Desejando organizá-los lado a lado em uma estante, de quantos modos poderá fazê-lo?

A seguir, considere as seguintes condições:

a) o primeiro livro seja de Matemática

b) o 1º livro seja de Matemática e o 2º de Física

c) os dois primeiros livros sejam os de Matemática e Física

d) os livros de Matemática e Física fiquem juntos

Descrição e Análise. Nessa aula, buscávamos colocar um obstáculo na tentativa de fazer o aluno refletir as decisões tomadas durante a aplicação do PFC. Ao oportunizar um problema de combinação, podemos acrescentar um elemento novo à contagem que seria a repetição de agrupamentos, que, assim como na pesquisa de Esteves ,(2001), só foi perceptiva e compreendida após a enumeração de cada agrupamento. No inicio a preocupação era a respeito do nível do problema, se os alunos seriam capazes de responder a um problema de combinatória. Isso se deu provavelmente porque esperávamos que a resolução partisse do PFC; no entanto, essa ação teve que ser concretizada pelo professor, pois os alunos não chegaram nela sozinhos; depois de muita discussão e pensamentos distorcidos, apresentaram como resposta a enumeração e assim o professor aproveitou para aproximar o pensar a partir da enumeração para a utilização do PFC.

Inicialmente, o professor releu o problema e interpretou a situação destacando que temos dois eventos (dois opcionais) e que o princípio fundamental de contagem leva em consideração a ordem e nesse caso a escolha: direção hidráulica como 1º opcional e vidros elétricos como 2º opcional (DH-VE) é diferente de vidro elétrico como 1º opcional e direção hidráulica como 2º opcional (VE-DH), havendo assim a necessidade de dividir o produto (4.3) por 2, já que cada possibilidade repete-se, ao inverter-se a ordem. Tal atitude compreendida pelos alunos revelou outra situação, pois, ao calcular as possibilidades para três opcionais, alguns alunos pensaram em dividir por 3, já que eram três opcionais. Assim relembramos o PROBLEMA ALFABETICO e a resolução dos anagramas e sugerimos a seguinte situação:

De quantas maneiras pode ser anunciado um grupo musical formado por:

a) duas pessoas;

b) três pessoas;

c) quatro pessoas;

d) cinco pessoas;

e) seis pessoas.

Para isso, fizemos uso de voluntários, a fim de ilustrar cada situação e evidenciar que o grupo em cada caso era o mesmo; no entanto, para cada três pessoas no grupo, haveria seis maneiras diferentes de anunciá-lo

Uma atividade que pode auxiliar melhor os alunos na compreensão da necessidade ou não da ordem é propor os problemas:

- Quantos triângulos podem ser formados a partir de um conjunto com 8 pontos não colineares dois a dois?

- Quantas representações podem ser dadas para os triângulos que podem ser formados a partir de um conjunto com 8 pontos não colineares dois a dois?

Esses problemas trabalham com agrupamentos tipo Combinação e do tipo Arranjo, possibilitando a evidência das diferenças.

O problema dos livros não teve sua conclusão durante a aula, sendo solicitado que continuassem em casa que na aula seguinte seria feito o debate das respostas.

Durante os dias 19 e 20 de maio, os alunos foram submetidos a um simulado com questões objetivas, estilo vestibular, para habituá-los com o processo seletivo. Para a escola, o simulado é parte integrante da avaliação.

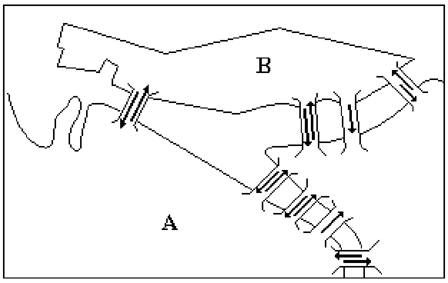
Encontro 6 e 7 – (**4 aulas**) – 26/05/2011 – correção do simulado

O simulado é uma prova contendo questões diversificadas das disciplinas divididas em dois blocos. Nessa prova são distribuídas questões objetivas de múltipla escolha na busca de familiarizar o alunado com os exames seletivos (concursos e vestibulares). Nesse simulado os conteúdos explorados foram: Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares e Análise Combinatória num total de 10 questões. Para nossa observação e análise traremos as questões pertinentes ao conteúdo de Análise Combinatória.

Acreditamos que a discussão sobre o simulado seja pertinente, visto que ele revela os anseios do professor quanto à aprendizagem dos alunos, o que possibilita de alguma forma evidenciar de fato o que os alunos estão conseguindo fazer sozinho, ou seja, qual o nível de desenvolvimento real.

Por ser uma prova objetiva, o simulado, não revela com clareza o pensar do aluno, dessa forma realizamos um debate na sala de aula para perceber o raciocínio adotado pelos alunos na resolução de problemas. Durante esse processo o professor avalia a aprendizagem, os erros, os obstáculos e o pensar do aluno.

QUESTÃO -01. Na figura a seguir temos um esboço de parte do centro da cidade do Recife com suas pontes. As setas indicam o sentido do fluxo de tráfego de veículos. De quantas maneiras, utilizando apenas o esboço, poderá uma pessoa ir de carro do ponto A ao ponto B (marco zero) e retornar ao ponto de partida passando exatamente por três pontes distintas?



a) 8 b) 13 c) 17 d) 18 e) 20

QUESTÃO -02. Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

a) 12 b) 18 c) 36 d) 72 e) 108

QUESTÃO -03. Um farmacêutico dispõe de 4 tipos de vitaminas e 3 tipos de sais minerais e deseja combinar 3 desses nutrientes para obter um composto químico. O número de compostos que poderão ser preparados usando-se, no máximo, 2 tipos de sais minerais é:

a) 32

b) 28

c) 34

d) 26

e) 30

QUESTÃO -04. Um bufê produz 6 tipos de salgadinhos e 3 tipos de doces para oferecer em festas de aniversário. Se em certa festa devem ser servidos 3 tipos desses salgados e 2 tipos desses doces, o bufê tem x maneiras diferentes de organizar esse serviço. O valor de x é:

a) 180

b) 360

c) 440

d) 720

QUESTÃO -05. Sejam os conjuntos A = {1,2,3} e B = {0,1,2,3,4}, o total de funções injetoras de A para B é:

a) 10

b) 15

c) 60

d) 120

e) 125

Para podermos ter acesso ao pensamento utilizado pelos alunos, foi necessário estabelecer um diálogo em que o aluno se sentisse à vontade para expressar suas ideias. O que foi possível perceber foi uma dificuldade na clareza dos enunciados das questões em Análise Combinatória. Tal situação foi observada também nos trabalhos de Esteves (2001), quando afirma que todos os alunos pesquisados apresentaram dificuldade na interpretação dos problemas propostos.

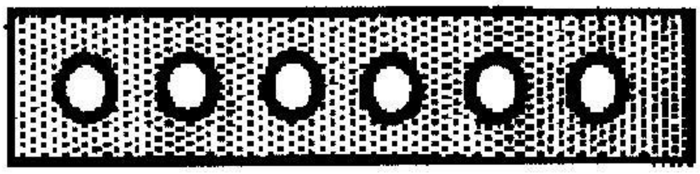
Um fato que nos chamou a atenção, e que também foi apontado por Sturm (1999), foi a constatação de que mesmo os alunos que, no decorrer do ano, apresentam um bom desempenho em Matemática, possuem dificuldades em resolver problemas de Análise Combinatória.

Encontro 8 – (**2 aulas**) – 27/05/2011 – Como os alunos já tinham vivenciado problemas de variados tipos de agrupamentos, resolvemos buscar introduzir a fórmula como mais uma ferramenta de solução dos problemas, sistematizando os passos outrora utilizados.

- **Conteúdos trabalhados**: Arranjo, Combinação, Permutação e Fatorial**.**
- **Objetivo**: Introduzir a utilização da fórmula como sistematização das resoluções utilizadas antes**.**
- **Atividades**: Problemas 9, 10, 11 e 12.

* **PROBLEMA 9 -** Problema das Lâmpadas

(AMAN) Um painel de lâmpadas é composto por 6 (seis) bocais dispostos em fileira, conforme mostra a figura abaixo. Para preencher esse painel, estão disponíveis 6 (seis) lâmpadas distintas que apresentam as seguintes cores: amarela, verde, azul, branca, vermelha e laranja. Calcule quantas disposições diferentes de preenchimento do painel são possíveis, empregando as lâmpadas disponíveis, de maneira a permitir que as lâmpadas de cor branca e vermelha fiquem posicionadas de maneira adjacente no painel (uma imediatamente ao lado da outra).



* **PROBLEMA 10 -** Problema Fatorial

a) 8!

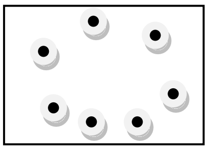
b) 6! – 4!

c) 16! / 13!

d) 9! / (4! . 5!)

* **PROBLEMA 11 -** Problema Geométrico

No plano representado abaixo estão marcados 7 pontos, de modo que não há 3 que pertençam à mesma reta. Determine:



a) Quantos segmentos de retas podem ser formados, sendo suas extremidades 2 desses pontos?

b) Quantos triângulos podem ser formados, sendo seus vértices 3 desses pontos?

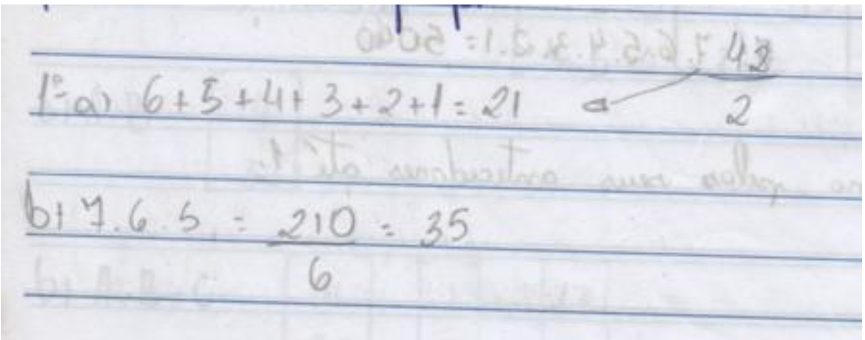
* **PROBLEMA 12 -** Problema na escalação do time

O futsal é um esporte coletivo em que cada time é composto de 5 jogadores: 1 goleiro e 4 jogadores de linha. Em um campeonato de futsal, o treinador de um dos times contará com 8 jogadores, dos quais apenas 1 joga no gol. De quantas maneiras distintas o treinador pode escalar a equipe?

Descrição e Análise. Nesse momento, acreditamos que uma discussão, quanto ao conceito de problema, faz-se necessária, visto que o “Problema 10 – Problema Fatorial” pode também ser entendido como um exercício. Para os alunos, Fatorial ainda era algo estranho, tanto em sua definição como em sua representação e propriedades, “algo que não possuía uma resposta imediata”.

Para definir o termo “fatorial”, o professor relembrou com os alunos a resolução dos problemas que envolviam permutação, para, em seguida, fazer uma exposição do conceito de fatorial; assim o “Problema Fatorial” consistia num reforço e numa exploração das propriedades do fatorial que seriam úteis no desenvolvimento e na compreensão das fórmulas de Arranjo, Permutação e Combinação.

O processo de sistematização revela-se um tanto quanto problemático para o aluno, pois, na passagem de um pensar mais concreto para um mais abstrato, ele necessita convencer-se. É o que nos mostra a resposta de um grupo que inicialmente apresenta como resposta para o “Problema Geométrico” uma solução baseada na visualização dos pontos e que só depois de incentivado a apresentar uma solução diferente é que apresenta uma resposta com a utilização do principio fundamental de contagem.



Esse problema foi utilizado pelo professor para exemplificar a fórmula de Combinação, evidenciando a relação entre o Arranjo e a Permutação.

O **problema 9** mostrou-se um tanto de difícil compreensão para os alunos que não conseguiram elaborar uma estratégia dentro do nosso planejamento. Este é um risco comum a quem trabalha com a resolução de problemas**:** o de os alunos não alcançarem a compreensão e solução do problema. Assim nos perguntamos: O que devemos ensinar para tornar os alunos melhores solucionadores de problemas? Uma das respostas é que as pesquisas desenvolvidas na perspectiva de um ensino-aprendizagem de metodologia através da resolução de problemas tem contribuído de alguma forma para tornar os alunos melhores resolvedores de problemas. Nessa abordagem, o aluno já aprende Matemática resolvendo problemas, o aluno pensa sobre o seu próprio processo.

Encontros 9, 10 e 11 – (**6 aulas**) – 02/06/2011 e 03/06/2011 – Dando continuidade ao trabalhado no último encontro, propusemos novas situações-problema que proporcionassem aos alunos a sistematização e aplicação das fórmulas na resolução dos problemas.

- Conteúdos trabalhados: **Arranjo, Combinação, Permutação e Fatorial.**
- Objetivo: **utilizar a fórmula como sistematização das resoluções utilizadas antes.**
- Atividades: Problemas 13, 14, 15 e 16.

* **PROBLEMA 13 -** Problema Numérico

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?

* **PROBLEMA 14 -** Problema de letramento

Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra BRASIL?

* **PROBLEMA 15 -** Problema da Copa

Suponha que um campeonato com 16 equipes seja disputado em turno, isto é, quaisquer duas equipes jogam entre si apenas uma vez, o número total de jogos do campeonato é:

a) 120 b) 240 c) 160 d) 360 e) 16

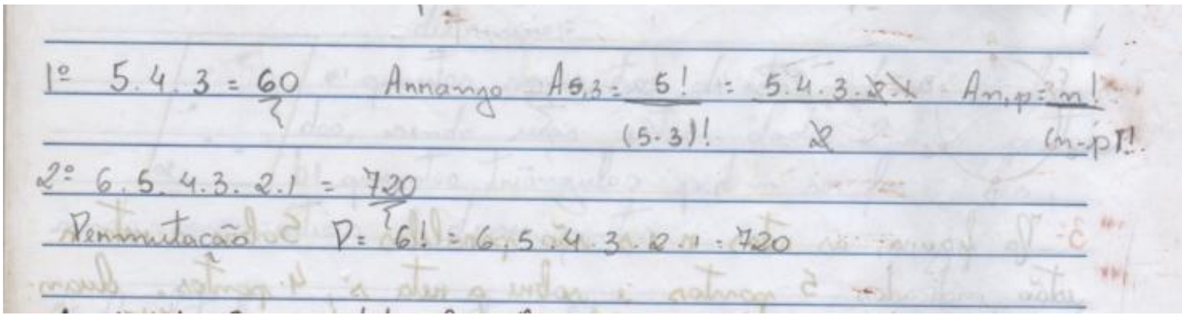
* **PROBLEMA 16 -** Problema artístico

No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formandos desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura acima.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor, nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

Descrição e Análise. A utilização da fórmula como recurso a mais de resolução dos problemas é bem aceitável pelos alunos quando é resultado da sistematização das atividades dos alunos. No entanto, pareceu-nos dificultoso para alguns grupos a aceitação como uma ferramenta válida; geralmente, os grupos apresentavam as duas maneiras de resolução, sem fórmula e com fórmula, como podemos notar na resolução do grupo a seguir para os problemas 13 e 14.



Durante as aulas, tivemos o cuidado de deixar o aluno bem à vontade para escolher qual metodologia de resolução desejaria aplicar, mas sempre que necessário apresentando soluções diferentes para ampliar as possibilidades e compreensão de outras metodologias de resolução. Uma de nossas principais preocupações era que um saber não se pusesse sobre outro hierarquicamente.

Portanto, o desenvolvimento do raciocínio combinatório, quando explorado, possibilita ao aluno escolher entre a enumeração, PFC ou a fórmula.

O ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, por meio da resolução e exploração dos problemas, enfatiza o raciocínio combinatório, ao invés de representar mero treinamento em aplicar as fórmulas.

A seguir, mostramos um quadro que relaciona as ideias centrais sobre análise combinatória com os problemas utilizados na intervenção.

IDEIAS/PROBLEMAS	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
I.1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
I.2	X	X	X										X	X		X
I.3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
I.4	X	X	X			X	X	X		X	X					
I.5	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X
I.6	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X

Trabalhar a resolução de problemas em sala de aula é algo que está em desenvolvimento, mas percebemos que os alunos melhoram seu relacionamento com a Matemática à medida que se deparam como autores da Matemática utilizada por eles mesmos. Nesse processo, é comum os alunos manterem receio no início, pois há uma mudança de postura, com paradigmas que o forçam a ir atrás do saber, persegui-lo e descobri-lo, diferentemente do que é comumente feito em sala de aula, de se apresentar tudo pronto e acabado.

4. COTIDIANO ESCOLAR E O ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA SALA DE AULA

Nesse capítulo, apresentamos algumas reflexões sobre a prática de sala de aula e o cotidiano escolar vivenciado. Também são abordadas as considerações finais, assim como os limites e as possibilidades da pesquisa e as perspectivas para pesquisas futuras.

O conteúdo de Análise Combinatória está inserido na Matemática Discreta e é parte importante do conteúdo de Probabilidade.

Estudos e pesquisas apontam tais dados:

1. Embora possua estreitamento com a probabilidade, a Análise Combinatória possui raciocínio combinatório específico, reforçando o fato de que, mais do que mera aplicação de fórmulas, esse conteúdo possui um pensar próprio, o raciocínio combinatório.

2. A utilização da árvore das possibilidades facilita a visualização da estrutura dos múltiplos passos de um experimento composto;

   Em Análise Combinatória é comum fazer generalizações a partir de alguns eventos concretos. Dessa forma, a árvore das possibilidades é um recurso indispensável para a generalização e abstração dos eventos.

3. O ensino-aprendizagem de Análise Combinatória deve ter a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril.

4. Os problemas devem exemplificar princípios fundamentais e possuír níveis de dificuldades.

   Ao resolver problemas, os alunos podem adquirir os princípios envolvidos e transferi-los e aperfeiçoá-los para aplicá-los em outros problemas mais complexos, com uma quantidade maior de agrupamentos.

5. As dificuldades mais pontuadas são a falta de uma sistematização na enumeração das possibilidades e distinção entre Arranjo e Combinação na relevância ou não da ordem.

6. A utilização do princípio multiplicativo como estratégia possibilita que a fórmula seja compreendida como mais um auxílio na resolução dos exercícios.

Tomar ciência dessas ideias possibilita organizar a aula de forma a desenvolver nos alunos tais princípios no estudo de Análise Combinatória.

4.1. Processo ensino-aprendizagem de Análise Combinatória

No ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, por meio da Resolução e Exploração de Problemas, observamos que os alunos apresentam dificuldades referentes à ordem dos elementos no agrupamento; por exemplo, a de perceber que as representações abaixo referem o mesmo quadrilátero, mesmo sendo representações diferentes.

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB	ADBC	ADCB
BACD	BADC	BCAD	BCDA	BDAC	BDCA
CABD	CADB	CBAD	CBDA	CDAB	CDBA
DABC	DACB	DBAC	DBCA	DCAB	DCBA

Assim, um aluno que, num conjunto de oito pontos distribuídos em uma circunferência, fosse determinar a quantidade de quadriláteros possíveis, pegando quatro desses pontos, poderia fazer diversas combinações possíveis:

$$\frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = \frac{1680}{24} = 70$$

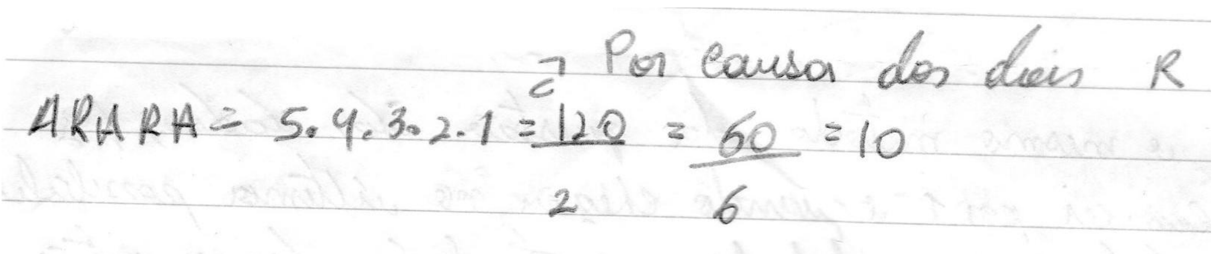
Nesse caso, a divisão por 24 corresponde ao fato de cada quadrilátero poder ser representado por 24 maneiras diferentes. Como é um problema de combinação simples, é possível aplicar a fórmula correspondente.

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4!.4!} = \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = 70$$

Assim reforçamos a relação existente entre Combinação, Arranjo e Permutação, em que a Combinação simples pode ser numericamente obtida pela divisão do Arranjo simples pela Permutação simples.

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_n}$$

Esse raciocínio, embora transpareça simplicidade durante as aulas, demonstrou a dificuldade em absorvê-lo. Como podemos observar na resolução do **problema alfabético,** proposta por um dos grupos observados; reflete ainda a necessidade de trabalhar melhor o raciocínio de dividir pelo número de repetições o que geralmente é confundido pela quantidade de elementos.


Por causa dos dois R
ARARA = 5.4.3.2.1 = $\frac{120}{2}$ = $\frac{60}{6}$ = 10

Nesse exemplo acima, o grupo dividiu por 2 e por 6, mas não apresentou argumento, isso nos fez pensar que por diversas vezes os alunos escrevem a resposta sem fazer uma conexão entre a explicação do professor e a resolução do problema, o que por fim deixa a divisão por 6 simplesmente porque o professor falou.

Observamos que, no conjunto de problemas trabalhados pelo professor e nas aulas dadas, há uma forte preocupação nossa com a formação dos conceitos.

Após essa intervenção, percebemos que poderíamos ter trabalhado com problemas de Análise Combinatória, mais voltados para questões do mundo social, com problemas envolvendo jogo do bicho, bingo, loteria esportiva, problemas modelados do social, etc, sem perder o foco da aprendizagem dos conceitos. Tais problemas possibilitam adentrar em discussões de cunho social, tornando o aluno um cidadão ativo que questiona e critica o *status quo*. Problemas como:

Problema 1 : Política ou politicagem?

O novo prefeito eleito de Recife, ao assumir a prefeitura, tomou ciência do orçamento e percebeu que daria para fazer de imediato três destas quatro obras sugeridas pela população: CONSTRUÇÃO DE BARREIRAS NOS MORROS, DRENAGEM E LIMPEZA DOS ESGOTOS, REFORMA E MANUTENÇÃO NOS POSTOS DE SAÚDE DO BAIRRO DE CASA AMARELA, REFORMA E MANUTENÇÃO NAS ESCOLAS DO BAIRRO DE CASA AMARELA. Quais as possíveis escolhas para o prefeito?

Podemos, para analisar esse problema, enumerar as possibilidades de escolha.

C.B.M – D.L.E – R.M.P

C.B.M – D.L.E – R.M.E

C.B.M – R.M.P – R.M.E

D.L.E – R.M.P – R.M.E

LEGENDA:

C.B.M - CONSTRUÇÃO DE BARREIRAS NOS MORROS

D.L.E – DRENAGEM E LIMPEZA DOS ESGOTOS

R.M.P – REFORMA E MANUTENÇÃO NOS POSTOS DE SAÚDE DO BAIRRO DE CASA AMARELA

R.M.E – REFORMA E MANUTENÇÃO NAS ESCOLAS DO BAIRRO DE CASA AMARELA

Uma outra perspectiva é utilizar o principio fundamental de contagem; como temos três escolhas, temos 4, 3 e 2 como possibilidades para a primeira, segunda e terceira escolha e, em seguida, dividimos por 3! (três fatorial) pela permutação das escolhas que não alteram o resultado, obtendo assim 4 possíveis escolhas de obras para o orçamento participativo.

$$\frac{4.3.2}{3.2.1} = 4$$

Ou, ainda, poderíamos definir como problema de Combinação e aplicar a fórmula $C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = \frac{4.3.2.1}{1.3.2.1} = 4$$

Essas são algumas abordagens das várias possíveis dentro da Matemática, porém acreditamos que esse problema, do tipo “política ou politicagem”, pela sua natureza, facilite ainda mais outras discussões no âmbito social, como exemplificamos em seguida.

No momento em que se escrevesse cada possibilidade, poderíamos refletir sobre o fato de que, mesmo a ordem das escolhas não sendo importante para o problema, no mundo real, poderíamos colocar prioridades; por exemplo, ao decidir o orçamento participativo das obras C.B.M – D.L.E – R.M.E, sendo em época próxima às chuvas, visar à urgência de se efetivar a construção de barreiras nos morros para favorecer as famílias em área de risco de desabamento.

Outra discussão é apresentar gastos com vereadores e deputados, como salários e as inúmeras ajudas de custo. Na edição de agosto de 2010[2] da revista “Super Interessante” há um artigo com o título: “Quanto custa um deputado?” Nesse texto são mostrados gastos, em média, com os 513 deputados do Brasil; No artigo apresentam-se valores que hoje se encontram desatualizados, porém facilitam a compreensão dos gastos que chegavam, de acordo com o artigo, a R$ 166512,09 / mês. No artigo, ainda há a comparação do custo de um deputado federal com a riqueza média gerada por um cidadão em alguns países, o que, no Brasil, chega a 69 brasileiros / deputado Tal discussão favorece, inclusive, o trabalho com outros

[2] O artigo pode ser acessado pelo site http://super.abril.com.br/cultura/quanto-custa-deputado-601265.shtml acessado em 05/02/2013.

conteúdos de Matemática, como razão, porcentagem, entre outros, contribuindo para que o aluno possa construir novos significados.

O ensino-aprendizagem da Matemática em conexão com o social pode ser mal compreendido e tratado como um “fingir ensinar Matemática”. O que nos faz pensar numa supremacia da Matemática sobre as outras áreas do conhecimento? Certa vez, em uma reunião pedagógica na escola, um professor de Matemática questionou a quantidade de aulas de sua matéria, afirmando que as novas disciplinas do currículo do aluno, tais como artes, direitos humanos, empreendedorismo, seriam “embromação” e que se deveria investir nas disciplinas mais importantes. Preocupa-nos uma abordagem da Matemática que não possibilite compreender o aluno como um cidadão completo, com necessidades que vão além do que a Matemática pode explicar.

4.2. O cotidiano escolar e políticas públicas: interface para prática pedagógica.

As atuais políticas públicas de Educação voltada unicamente a resultados têm reduzido a escola, os alunos e toda a Educação a uma empresa, o que, de certa forma, reflete no professor. Nessa política, a escola fica reduzida a mostrar resultados como aprovações em vestibulares ou concursos. Como exemplo, na escola em que foi desenvolvida essa pesquisa, há o projeto “Pacto pela Educação” do Governo do Estado de Pernambuco, cuja preocupação é muito mais com o quantitativo dos resultados do que com um olhar denso voltado para os processos. Nesse projeto, a Secretaria de Educação do Estado aplica provas de Português e Matemática, calculando médias e, utilizando as médias internas de avaliações dos alunos, determinam o “ranking” das escolas. Tal política influencia todo projeto pedagógico.

No momento em que as políticas públicas para a Educação pressionam a escola por uma meta em número de aprovados no final de ano, esconde nos números a atual realidade das escolas públicas, a má qualidade dos alunos formandos.

A escola tem como grande desafio recuperar a formação dos alunos que embarcam num sistema de ensino que não os motiva a serem estudantes e sensibilizar os professores de sua responsabilidade nesse processo, assim como pais e governo.

O professor tem adquirido, cada vez mais, responsabilidades que vão além do simples ato de “dar aula”. É preciso refletir sobre a formação dos educadores, que, no seu dia a dia, lidam com questões que vão além do ensino-aprendizagem, embora consigam manter, mesmo se deparando com todas essas adversidades, forte influência na sala de aula.

Para tanto, faz-se necessário pensarmos sobre a formação do professor. A busca constante por melhor compreensão dos elementos que permeiam o processo de ensino-aprendizagem auxilia o professor na sua atividade dentro e fora da sala de aula. O diálogo entre a experiência e a própria pesquisa ou a pesquisa de colegas, vivenciando experiências bem sucedidas adaptadas para própria realidade, é imprescindível.

A perspectiva de formação para o professor, aliada à pesquisa, torna-se um desafio que desencadeia algumas dificuldades, como a quebra com o método tradicional, disciplinar, no qual fomos formados, e também o fato de certas práticas em escolas públicas estarem enraizadas em ações rotineiras, sendo tratadas como “normais”.

Compreendemos a formação do professor em seu caráter mais amplo, tanto na fase inicial como contínua, embora esta última tenha nos chamado a atenção pela dificuldade de o conhecimento presente nas academias chegar aos professores da Educação básica das escolas públicas. Tal preocupação é decorrente do seguinte fato: ora, por diversas vezes, o Governo implanta medidas que dificultam a inserção; ora, por meio das capacitações promovidas pela própria Secretaria de Educação, o professor é tratado como mero aplicador e reprodutor de ideias de "especialistas da educação", negando-lhe, dessa forma, a possibilidade de refletir sua prática em sala de aula, de ser "um professor intelectual".

Faz-se necessário encontrar meios de a pesquisa chegar à sala de aula. Em sua pesquisa de Mestrado, Andrade (1998) mostra-se preocupado em fazer as pesquisas em Educação Matemática refletirem a sala de aula, colocando-a como um ambiente de pesquisa, no qual o professor e o pesquisador podem trazer avanços na práxis, pelo viés da ação-reflexão-ação.

Surge uma inquietação: - Como todas as reflexões e leituras podem ter contribuído para a prática em sala de aula? Ver a sala de aula como um ambiente de reflexão contribui para perceber fatores que influenciam o fracasso na aprendizagem dos alunos e, criteriosamente, isso leva a propor mudanças. Portanto, é fundamental, no desenvolvimento profissional do professor, haver a pesquisa e a formação continuada, a fim de que o professor possa ter acesso a metodologias e teorias educacionais compartilhadas por outros colegas nos mais diversos ambientes, como congressos, fóruns, encontros, escola, entre outros, tendo, portanto, implicações futuras na sua sala de aula. Quanto a isso, concordamos com as palavras de Freire, quando diz que: "é pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática" (FREIRE,1998).

O fazer pesquisa em sala de aula não é suficiente para uma mudança completa das práticas escolares, pois são necessárias ações coletivas e políticas públicas, como também é necessário ater-se às políticas de obstáculos de aprendizagem que fortemente interferem no processo de ensino-aprendizagem em Matemática.

No atual cenário da Educação, nas escolas públicas, é preciso definir a ação do professor, que vem se diluindo diante das obrigações burocráticas a que a escola tem se submetido.

BUROCRATIZAÇÃO DO TRABALHO DOCENTE

Diários de classe, repletos de informações a serem preenchidas pelos professores, demandam bastante tempo, o qual invade o tempo efetivo do ensino-aprendizagem da sala de aula. Formulários, planilhas, avaliações e outros documentos começam a fazer parte da rotina dos professores que, cada vez menos, têm tido tempo para repensar sobre as dificuldades de aprendizagens dos alunos e sobre sua própria formação. Para McLaren (1977), cabe a nós professores uma prática pedagógica que atue mais do que a simples transmissão de conhecimento e que nos possibilite enfrentar nossa própria culpa na reprodução da desigualdade e lutar para desenvolver uma pedagogia capaz de gerar resistência moral e intelectual à opressão.

Vale salientar que não estamos querendo apresentar metodologias de ensino fechadas, com receitas prontas para solucionar a atual situação da Educação nacional. Cabe a nós refletir e avaliar a realidade de nossas escolas, na tentativa de modificá-la. Tal desafio exige pesquisas que coloquem em suspensão os alunos, os professores, a instituição de ensino, a comunidade, o sistema de ensino, o cotidiano escolar.

A NECESSIDADE DE UM OLHAR CRÍTICO PARA O COTIDIANO

No contexto escolar é necessário termos um olhar que se estenda para além das aparências. A pedagogia crítica é um convite à quebra do hábito comumente exercitado e compartilhado nas escolas em que o professor, através do ensino, reproduz as relações de classe, raça e gênero existentes em nossa sociedade, ou ainda configura uma ideologia que transmite a estudantes em desvantagem econômica a noção de que seus papéis subalternos na ordem social estão justificados e são invioláveis.

Dessa forma, McLaren (1977) defende:

> “(...) aqui, uma ênfase indevida é posta no treinar professores para serem gerentes e implementadores de um conteúdo pré-ordenado, e em métodos e cursos que dificilmente fornecerão aos estudantes uma oportunidade para analisar as prerrogativas ideológicas e interesses subliminares que estruturam a maneira em que o ensino é executado”. (MCLAREN, 1977)

Portanto, nessa pesquisa buscamos elencar elementos pertinentes ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória a partir da proposta por nós aplicada, avaliando suas possibilidades e limitações e também elucidar fenômenos pertinentes à realidade do cotidiano escolar na tentativa de compreender sua complexidade e buscar agir sobre ela. Configurando, portanto, uma prática educativa baseada na ação-reflexão-ação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por fim, algumas perguntas nos levam a refletir sobre o campo atual da Educação e a atuação do professor:

- O que devemos ensinar para tornar os alunos melhores solucionadores de problemas?
- Como os professores podem aprender a ensinar Matemática através da resolução de problemas?
- Como o professor pode inserir questões de ordem social nas salas de aula de Matemática?

Percebemos que uma prática pedagógica crítica atribui novos papéis aos professores. Portanto, fazem-se necessárias as investigações e pesquisas em sala de aula, na tentativa de unir a experiência do professor e o saber formado na academia que, por diversas vezes, se apresenta desconectado ou não recebe a devida atenção no cotidiano da sala de aula.

Acreditamos que esse escrito não finalize todo o trabalho desencadeado com essa pesquisa. O sentimento de responsabilidade faz-nos perceber que esse trabalho é apenas um primeiro passo em direção à melhoria da Educação e que um trabalho constante no campo da Educação crítica é necessário para combater a opressão do sistema.

As possibilidades são variadas e o desafio é grande, no entanto, a esperança se fortalece, à medida que prosseguimos com a formação de professores como intelectuais, reflexivos, livres de uma formação puramente técnico-burocrática.

Assim, a resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem possibilita, no mínimo, uma formação critica e questionadora, provocando a autonomia do aluno nesse processo.

No entanto, ainda precisamos avançar muito quanto a um ensino-aprendizagem via resolução de problemas. Sabemos que, para tal, se faz necessário começar com um problema, entretanto há ainda pouco entendimento de como gerir o processo como um todo em sala de aula, mas compreendemos que é imprescindível o envolvimento do aluno na situação-problema, de forma tal que tome o problema para si. Isto é altamente desafiante: motivar o aluno a aprender Matemática a partir de um problema, em especial porque geralmente ele busca as receitas prontas, as dicas simplistas do tipo “é de mais ou de menos?”. Como exemplo, podemos citar o “problema 8 – problema dos livros”, em relação ao qual julgamos não ter sido motivador para os alunos, naquele momento, e para alguns deles, mostrou-se acima da zona de desenvolvimento potencial.

PROBLEMA 8 - Problema dos livros

Um estudante possui um livro de Matemática, um de Biologia, um de Física, um de Química, um de História e um de Geografia. Desejando organizá-los lado a lado em uma estante, de quantos modos poderá fazê-lo?

A seguir, considere as seguintes condições:

a) o primeiro livro é de Matemática

b) o 1º livro é de Matemática e o 2º de Física

c) os dois primeiros livros são os de Matemática e Física

d) os livros de Matemática e Física devem ficar juntos

Com esse problema buscávamos fortalecer o uso do Principio Fundamental de Contagem e a ideia de Permutação; como a enumeração de cada possibilidade é um trabalho árduo, tínhamos a convicção de que os alunos visualizariam com facilidade a aplicação do PFC de forma correta, o que não aconteceu em sua totalidade. Assim, nesse problema, houve mais a ação direta do professor na sua resolução.

Para nós, a ação do aluno deve concentrar-se em abraçar o problema, investigá-lo, descobrir seus limites e suas potencialidades, exercendo um papel ativo na aprendizagem. Dessa forma, o planejamento das aulas é flexível, pois o professor, por meio dos julgamentos que faz durante as aulas, problematiza situações a ponto de conseguir informações sobre o raciocínio dos alunos e sua participação no empenho em resolver os problemas.

Nossa pesquisa impulsiona-nos a compreender como os alunos aprendem a ser bons solucionadores de problemas e como se dá o processo de ensino-aprendizagem por meio da sua resolução. Não devemos nos esquecer de inserir o cotidiano escolar nas discussões e de promover uma prática pedagógica que lute contra a opressão.

REFERÊNCIAS

ALRO, HELLE; SKOVSMOSE, OLE. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática.** Belo horizonte: autentica, 2006.

ANDRADE, SILVANIO DE. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.** RIO CLARO: IGCE, UNESP, 1998. (DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA).

BRASIL,

CANOAS, SILVIA SWAIN. **O campo conceitual multiplicativo na perspectiva do professor das séries iniciais (1ª a 4ª série)**. 1997. Mestrado em ensino de Matemática. PUC-SP. 1997

D'AMORE, BRUNO. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DORNELAS, A.C.B. **O princípio multiplicativo como recurso didático para a resolução de problemas de contagem**. 2004. 128f. Dissertação (mestrado em ensino da ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2004.

DOSSEY, JONH A. Discrete Mathematics: The Math for Our time. In: Kenney, MARGARET.J.; Hirsch, CHRISTIAN.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12: 1991**, Yearbook. NCTM, 1991.

ESTEVES, INÊS. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental.** SÃO PAULO: PUC – SP. 2001 – Dissertação Mestrado.

FERREIRA, MARIA SALONILDE. **Buscando caminhos: uma metodologia para o ensino-aprendizagem de conceitos.** BRASÍLIA: LIBERLIVRO, 2009.

FILHO, CELSO PEDROSA**. Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do ensino fundamental (7 – 8 anos).** SÂO PAULO: PUC – SP. 2008.

FREIRE, PAULO. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à pratica educativa. SÃO PAULO: PAZ E TERRA. 1998.

GARDINER, A. D. A Cautionary Note. In: Kenney, MARGARET.J.; Hirsch, CHRISTIAN.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12: 1991**, Yearbook. NCTM, 1991.

GIROUX, HENRY A. **Os professores como intelectuais**: rumo a uma pedagogia crítica da aprendizagem. PORTO ALEGRE: ARTMED, 1997.

ITACARAMBI, RUTH RIBAS. **A resolução de problemas de geometria, na sala de aula, numa visão construtivista**. São Paulo: USP, 1993. Dissertação (mestrado em Educação).

KRULINK, STEPHEN; REYS, ROBERT. E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual editora, 1997.

LANKSHEAR, COLIN.; KNOBEL, MICHELE. **Pesquisa pedagógica: do projeto à implementação**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LEITE, MAICI. DUARTE. et al. **Softwares educativos e objetos de aprendizagem: um olhar sobre a análise combinatória**. 2009. Disponível em: < http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/cc/cc_46.pdf>. Acesso em 15/09/2009.

MCLAREN, PETER. **A vida nas escolas:** uma introdução à pedagogia crítica nos fundamentos da educação. Porto alegre. Artes médicas, 1977.

MORGADO, AUGUSTO C. O.. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

PAIS, LUIZ CARLOS. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. 2 ed. Belo Horizonte: Autentica, 2002.

PARRA, CECILIA.; SAIZ, IRMA. (ORGS.). **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.** PORTO ALEGRE: ARTMED, 1996. P. 36 – 47.

PRETZ, JEAN. E., Naples, ADAM. J. e Sternberg, ROBERT. J. Recognizing, Defining, and Representing Problems. In: **The Psychology of Problem Solving**. Cambridge. 2003

SABO, RICARDO DEZSO. **Análise de livros didáticos do ensino médio: um estudo dos conteúdos referentes à combinatória.** Monografia de Especialização em Educação Matemática, Centro Universitario Fundação Santo André, SP. 2007.

SOUZA, ANA LUCIA CASTRO PIMENTA DE. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de problemas.** Dissertação de Mestrado. RIO CLARO: IGCE, UNESP, 2010.

STURM, WILTON. **As possibilidades de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa**. 1999. Dissertação Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. 1999

VIGOTSKI, LEV SEMIONOVICH. **A construção do Pensamento e da Linguagem.** SÃO PAULO: WMF MARTINS FONTES, 2009.

VIGOTSKI, LEV SEMIONOVICH. **A formação social da mente.** SÃO PAULO: MARTINS EDITORA, 2009.

ZANELLA, ANDRÉA VIEIRA. **Vygotski**: Contexto, contribuições à psicologia e o conceito de zona de desenvolvimento proximal. ITAJAÍ: Ed. UNIVALI, 2001.

APÊNDICE A – CONJUNTO DE PROBLEMAS TRABALHADOS NA INTERVENÇÃO

PROBLEMA 1 - *Problema das cédulas*

No meu bolso tenho cédulas de R$ 10, R$ 20 e R$ 50. Que quantia poderei obter, ao retirar:

a) duas cédulas?

b) três cédulas?

PROBLEMA 2 - *Problema dos dados*

Quantos e quais são os resultados possíveis no lançamento de:

a) 1 dado

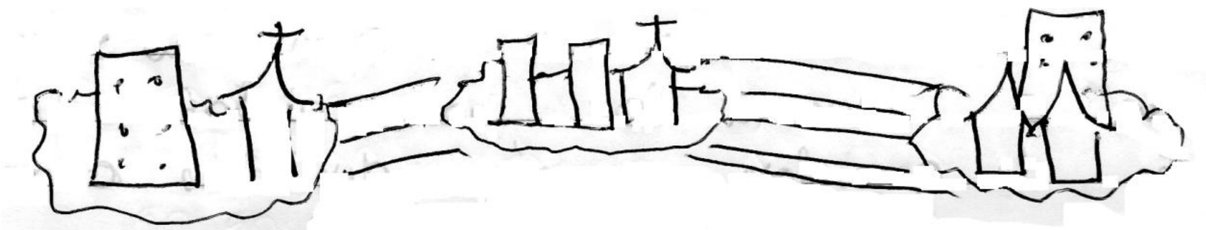
b) 2 dados

c) 3 dados

d) n dados

PROBLEMA 3 - *Problema dos caminhos*

Para ir da cidade A à cidade B há 3 rodovias, e da B à C, 5 rodovias. De quantas maneiras diferentes é possível ir da cidade A à C, passando por B?



PROBLEMA 4 - *Problema das linhas de ônibus*

Em uma cidade, há duas linhas de ônibus: Norte-Sul e Leste-Oeste. Cada ônibus tem um código formado por 3 números escolhidos entre 1, 2, 3, 4 e 5 para a linha Norte-Sul, e entre 6,7,8 e 9 para a Leste-Oeste. Não são permitidos códigos com 3 números iguais.

c) Quantas linhas disponíveis há para a linha Norte-Sul?

d) Quantos códigos disponíveis há para a linha Leste-Oeste?

PROBLEMA 5 - *Problema do mapa*

Durante a aula de Geografia, um aluno pretende pintar as cinco grandes regiões em um mapa do Brasil. Sabendo que o aluno tem disponível 10 lápis de cores diferentes e que não será utilizada a mesma cor para pintar regiões diferentes, determine de quantas maneiras distintas o mapa poderá ser pintado.

PROBLEMA 6 - *Problema alfabético*

Calcule o número de anagramas das palavras:

b) PAZ b) BANANA c) ARARA

PROBLEMA 7 - *Problema na concessionária*

Muitas concessionárias de automóveis disponibilizaram para seus clientes a lista de opcionais: **direção hidráulica, vidro elétrico, trava elétrica e desembaçador de vidros**.

a) Em uma compra promocional, um cliente poderia escolher dois opcionais. Quais seriam as possibilidades de escolha?

b) Caso o cliente possa escolher três opcionais, quais serão as possibilidades?

PROBLEMA 8 - *Problema dos livros*

Um estudante possui um livro de Matemática, um de Biologia, um de Física, um de Química, um de História e um de Geografia. Desejando organizá-los lado a lado em uma estante, de quantos modos poderá fazê-lo?

A seguir, considere as seguintes condições:

a) o primeiro livro seja de Matemática

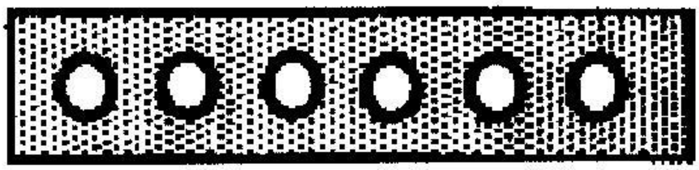
b) o 1º livro seja de Matemática e o 2º de Física

c) os dois primeiros livros seja os de Matemática e Física

d) os livros de Matemática e Física fiquem juntos

PROBLEMA 9 - *Problema das Lâmpadas*

(AMAN) Um painel de lâmpadas é composto por 6 (seis) bocais dispostos em fileira, conforme mostra a figura abaixo. Para preencher este painel estão disponíveis 6 (seis) lâmpadas distintas que apresentam as seguintes cores: amarela, verde, azul, branca, vermelha e laranja. Calcule quantas disposições diferentes de preenchimento do painel são possíveis, empregando as lâmpadas disponíveis, de maneira a permitir que as lâmpadas de cor branca e vermelha fiquem posicionadas de maneira adjacente no painel (uma imediatamente ao lado da outra).



PROBLEMA 10 - *Problema Fatorial*

a) 8!

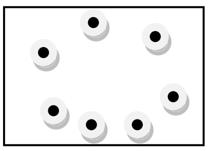
b) 6! – 4!

c) 16! / 13!

d) 9! / (4! . 5!)

PROBLEMA 11 - *Problema Geométrico*

No plano representado abaixo estão marcados 7 pontos, de modo que não há 3 que pertençam à mesma reta. Determine:



c) Quantos segmentos de retas podem ser formados, sendo suas extremidades 2 desses pontos.

d) Quantos triângulos podem ser formados, sendo seus vértices 3 desses pontos.

PROBLEMA 12 - *Problema na escalação do time*

O futsal é um esporte coletivo em que cada time é composto de 5 jogadores: 1 goleiro e 4 jogadores de linha. Em um campeonato de futsal, o treinador de um dos times contará com 8 jogadores, dos quais apenas 1 joga no gol. De quantas maneiras distintas o treinador pode escalar a equipe?

PROBLEMA 13 - *Problema Numérico*

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?

PROBLEMA 14 - *Problema de letramento*

Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra BRASIL?

PROBLEMA 15 - *Problema da Copa*

Suponha que um campeonato com 16 equipes seja disputado em turno, isto é quaisquer duas equipes jogam entre si apenas uma vez, o número total de jogos do campeonato é:

a) 120 b) 240 c) 160 d) 360 e) 16

PROBLEMA 16 - *Problema artístico*

No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formandos desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura acima.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

a) 6   b) 7   c) 8   d) 9   e) 10