UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

AIRLAN ARNALDO NASCIMENTO DE LIMA

INTRODUZINDO O CONCEITO DE DERIVADA A PARTIR DA IDEIA DE VARIAÇÃO

CAMPINA GRANDE-PB

2012

AIRLAN ARNALDO NASCIMENTO DE LIMA

INTRODUZINDO O CONCEITO DE DERIVADA A PARTIR DA IDEIA DE VARIAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE-PB

2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

L732i Lima, Airlan Arnaldo Nascimento de.

Introduzindo o conceito de derivada a partir da ideia de variação. [manuscrito] / Airlan Arnaldo Nascimento de Lima. – 2012.

111 f. : il. color.

Digitado

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática), Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, 2012.

"Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática"

1. Ensino de cálculo. 2. Derivada. 3. Sequência didática. I. Título.

21. ed. CDD 510

AIRLAN ARNALDO NASCIMENTO DE LIMA

INTRODUZINDO O CONCEITO DE DERIVADA A PARTIR DA IDEIA DE VARIAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

.

Área de Concentração: Educação Matemática

Aprovada em 11 de DEZEMBRO de 2012

Banca Examinadora:

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade – UEPB (Orientador)

Nilza Eigenheer Bertoni

Profª. Drª. Nilza Eigenheer Bertoni - UNB

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG

CAMPINA GRANDE-PB

2012

Dedico este trabalho ao meu pai, Arnaldo Sales de Lima (in memoriam), à minha avó, Inácia Sales de Lima (in memoriam) e à minha mãe, Maria Rozinete N. de Lima, principais responsáveis pela minha formação moral e por todas as minhas conquistas pessoais e acadêmicas.

AGRADECIMENTOS

Ao Criador do Universo, por me conceder a oportunidade de ter encontrado pessoas maravilhosas nos diversos caminhos que trilhei, e por me alimentar de força e esperança, me fazendo superar muitos momentos de dificuldade que enfrentei, sobretudo nos últimos três anos.

Aos meus pais, Arnaldo (in memoriam) e Rozinete, e à minha avó, Inácia, sertanejos constituídos de simplicidade e força, fontes infinitas de amor, baluartes de todas as minhas jornadas, por terem dedicado a mim todos os seus esforços, sem os quais, certamente eu não seria o que sou hoje.

Aos meus irmãos, Alysson e Arnaldo, pelo companheirismo, amizade, incentivo, união e também por muitos momentos de descontração.

Aos meus amados sobrinhos, Alysson Junior e Ana Júlia, cujos sorrisos infantis têm o poder de afastar de mim qualquer sinal de tristeza ou desânimo.

` À Mirella Amaral, mulher dotada de alma doce e grandiosa, exemplo de caráter e determinação, presença constante e firme em minha vida, por ter me ajudado a conquistar coisas que, para mim, não passavam de utopias.

À Maria Madelene e sua mãe, Dona Cordeira (in memoriam), sertanejas guerreiras e bondosas, por sempre terem me incluído nas suas orações e pela acolhida sempre carinhosa em sua residência durante as muitas viagens que realizei entre Pernambuco, Paraíba e Rio Grande do Norte.

Ao amigo e orientador deste trabalho, Prof. Dr. Silvanio de Andrade, exemplo de profissional, verdadeiro educador, prova viva de que excelência acadêmica, bondade e compreensão podem coexistir em total harmonia. Sempre me lembrarei dos seus muitos ensinamentos.

À Universidade Estadual da Paraíba e ao programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática.

À banca examinadora, nas pessoas da Profª. Dra. Nilza Eigenheer Bertoni e do Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho, pelas importantes contribuições que proporcionaram o enriquecimento deste trabalho.

Aos docentes do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em especial aos professores Aldo Bezerra Maciel, Rômulo Marinho do Rêgo, Kátia Maria de Medeiros e Abigail Fregni Lins (Bibi Lins).

Aos colegas do mestrado, de modo especial, aos amigos Débora Cristina, Edna, Nelson, Negreiro e Rodolfo, pelos momentos de aprendizado e companheirismo e por muitos momentos agradáveis.

Aos colegas e amigos Adeilson, Rômulo Alexandre, Eugeniano, Salvino, Poliana, Mauricio, Nahum e Ledevande, integrantes do Grupo de Estudo e Pesquisa Sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP), pelo companheirismo e importantes contribuições acadêmicas.

À todos os alunos que participaram desta pesquisa.

À Eduardo Lopes, o "Chun" e Sandro Melo, o "Ganso", amigos de longa data, pela amizade e por muitos momentos de diversão.

Aos amigos e companheiros de profissão, Bruno Lopes, Fernando Emílio e Fernando Peixe, pelo incentivo e companheirismo.

Aos amigos e ex-alunos, Robson Ferreira, Jean Monteiro, Iharany Tavares, Ana Paula Lima, Fred Brito e Júlia Coimbra, por serem exemplo de dedicação e perseverança.

Ao Prof. Dr. Ribamar Santos, grande figura humana e fiel companheiro durante o tempo que estive no Rio Grande do Norte.

Aos Professores Doutores Mario Monteiro, Glauco Reinaldo e Valdemir Mariano, colegas de trabalho que sempre se mostraram dispostos a colaborar com a realização desta pesquisa.

“Mestre não é quem sempre ensina, mas quem de repente aprende.”

Guimarães Rosa

“Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana, seja apenas outra alma humana”.

Carl Jung

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que possibilitasse a construção do conceito de derivada a partir da noção de variação. Resultados obtidos por pesquisadores como Silva e Igliori (1996), Dall'Anese (2000), D'Avloglio (2002), Rezende (2003) e Lehmann (2011) evidenciam que esta maneira de introduzir a derivada pode contribuir para a melhoria do aprendizado deste importante conceito matemático. O trabalho de campo foi realizado em uma instituição pública que oferece cursos de nível superior e a sequência didática foi aplicada em uma turma que iniciava seus estudos de Cálculo Diferencial e Integral. Optamos por pesquisar nossa própria sala de aula, e assim, de acordo com Lankshear e Knobel (2008), esta investigação caracteriza-se como uma pesquisa pedagógica. Princípios da Engenharia Didática estabelecidos por Artigue (1996) e as pesquisas de Silva e Igliori (ibidem), Dall'Anese (ibidem) e D'Avloglio (ibidem) nos forneceram subsídios metodológicos para a elaboração, aplicação e análise da sequência didática. A teoria de imagem de conceito e definição de conceito estabelecida por Tall e Vinner (1981) e as reflexões de Grattan-Guiness (1997) e Reis (2001) sobre rigor e intuição no ensino de Cálculo, contribuíram para a elaboração e análise da sequência didática. Os resultados obtidos nesta pesquisa indicam essencialmente que a maior parte dos alunos conseguiu conceitualizar adequadamente a derivada como uma medida de variação, compreendendo alguns dos seus significados, tais como: velocidade instantânea, taxa de variação instantânea e coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função.

Palavras-Chave: Derivada. Taxa de Variação. Sequência Didática. Ensino de Cálculo.

ABSTRACT

This research aimed to develop, implement and analyze a didactic sequence that enabled the construction of the concept derived from the notion of change. Results obtained by researchers as Igliori and Silva (1996), Dall'Anese (2000), D'Avloglio (2002), Rezende (2003) and Lehmann (2011) show that this way of introducing the derivative can contribute to the improvement of learning this important mathematical concept. Fieldwork was conducted in a public institution offering higher level courses and didactic sequence was applied to a class that began its studies of Differential and Integral Calculus. We chose to search our own class room, and so, according to Lankshear and Knobel (2008), this research is characterized as a pedagogical research. Principles of Engineering Didactic established by Artigue (1996) and the research of Silva and Igliori (ibid.), Dall'Anese (ibid.) and D'Avloglio (ibid.) in subsidies provided for the method of preparation, application and analysis of didactic sequence. The theory of concept image and concept definition established by Tall and Vinner (1981) and the reflections of Grattan-Guinness (1997) and Reis (2001) on intuition and rigor in teaching calculus, contributed to the preparation and analysis of didactic sequence. The results of this research indicate that essentially most students managed properly conceptualize the derivative as a measure of variation, including some of their meanings, such as: instantaneous velocity, instantaneous rate of change and the slope of the tangent line to the graph of a function.

Keywords: Derivative. Rate of Change. Sequence Didactic. Teaching Calculus.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A principal motivação para a realização desta pesquisa emergiu da nossa própria prática docente. Vivenciando o cotidiano da sala de aula e ministrando disciplinas matemáticas em instituições de ensino superior públicas, observamos que boa parte dos alunos tinham consideráveis dificuldades de aprendizagem. Nossas primeiras impressões atribuíam exclusivamente aos alunos a responsabilidade por tais dificuldades. Conversando com colegas docentes, constatamos que eles também enfrentavam situações semelhantes.

Ainda que ingenuamente do ponto de vista científico, realizamos reflexões sobre nossa metodologia de ensino, a qual consistia exclusivamente na aula expositiva, seguindo o roteiro estabelecido em um dos livros-texto indicados na bibliografia da disciplina. Impulsionados por nossas reflexões, procuramos métodos alternativos de ensino. Sempre que possível, recorríamos a textos de História da Matemática, problemas que julgávamos retratar situações do mundo real e recursos computacionais.

Não percebemos uma diminuição acentuada nas dificuldades apresentadas pelos alunos e uma certa angústia nos atingiu. Tendo consciência da necessidade de aprofundarmos nossos conhecimentos em relação aos processos de ensino e aprendizagem da Matemática e buscando aprimoramento profissional, resolvemos cursar o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, escolhendo o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) como nosso objeto de pesquisa.

Devido à sua enorme utilidade, o CDI se faz presente nos currículos de cursos superiores das mais diversas áreas no Brasil e no mundo. De fato, CDI é apontado por autores como Kline (1985 ; 1998), Eves (2004) e Boyer (1959) como responsável por muitos avanços ocorridos nas Ciências e na Matemática desde o século XVII. Nesse sentido, Rêgo (2000, p. 20) afirma que o CDI

> [...] representa a principal ferramenta teórica para a análise e compreensão dos processos e fenômenos onde ocorrem movimentos e variações que obedecem a determinados padrões. Trata do estudo inicial das propriedades das funções (curvas) que são associadas aos processos limites (infinitesimais) envolvendo continuidade, derivação e integração.

De modo geral, os conceitos, técnicas e resultados do CDI podem ser utilizados para resolver uma ampla gama de problemas, tais como: a determinação de máximos e mínimos de funções, o cálculo de áreas e volumes, o estudo do comportamento de funções, a modelagem do crescimento populacional em diversas situações, o estudo do movimento de corpos diversos e a modelagem matemática de muitas situações provenientes das mais diversas Ciências (STEWART, 2006; HUGHES – HALLETT et al, 2005 ; RÊGO, 2000 ; ANTON et al, 2007 ; COURANT & ROBBINS, 2000).

No entanto, altas taxas de reprovação aliadas a relatos de grandes dificuldades de ensino e de aprendizagem são componentes permanentes na realidade de muitos professores e alunos de CDI. Barufi (1999), Rêgo (2000) e Rezende (2003) em suas pesquisas de doutorado trazem dados alarmantes sobre a elevada quantidade de alunos que não são aprovados na disciplina Cálculo I, respectivamente na Universidade de São Paulo, Universidade Federal da Paraíba e na Universidade Federal Fluminense.

Segundo Júnior (2006, p. 2):

> Uma pergunta natural que poderia surgir é a seguinte: Seria este fenômeno encontrado apenas nos domínios das universidades brasileiras? A resposta é não e, pelo menos no que se refere ao ensino e à aprendizagem de Cálculo, o fenômeno transcende os limites nacionais e tem motivado as mais variadas reações na comunidade acadêmica.

Não sendo exclusividade de uma instituição, de uma época ou de uma determinada localidade, o insucesso de muitos professores e alunos no ensino e na aprendizagem do CDI tem atraído o interesse de pesquisadores em Educação Matemática no mundo todo, especialmente a partir de 1980, e diversas temáticas têm sido abordadas dentro deste amplo campo de investigação.

Pesquisas realizadas sobre dificuldades na compreensão dos conceitos de número real, função, limite, derivada e integral vêm evidenciado que diversos fatores influenciam no aprendizado destes conceitos. Em particular, obstáculos epistemológicos e didáticos, práticas metodológicas adotadas por professores, inadequações curriculares, ênfases equivocadas e alunos com deficiências no aprendizado de conteúdos matemáticos do ensino básico são apontados como alguns dos principais elementos que contribuem fortemente para o fracasso na aprendizagem do CDI. (TALL e VINNER 1981 ; CORNU, 1991 ; REZENDE, 1994 ; SIERPINSKA, 1994 ; CASSOL, 1998 ; IGLIORI, 2009).

Em fins da década de 80 teve início o movimento denominado “Calculus Reform”[1] nos Estados Unidos da América e:

> Segundo seus precursores, o “Calculus Reform” tem como características básicas: O uso de tecnologia, isto é, software computacional e calculadoras gráficas, tanto para o aprendizado de conceitos e teoremas como para a resolução de problemas; o ensino via a ”Regra dos Três”, isto é, todos os tópicos e todos os problemas devem ser abordados numérica, geométrica e analiticamente; grande preocupação, ou pretensão, em mostrar a aplicabilidade do Cálculo através de exemplos reais e com dados referenciados; tendência a exigir pouca competência algébrica por parte dos alunos, suprindo essa falta com o treinamento no uso de Sistemas de Computação Algébrica[2]. (REZENDE, 2003, p. 4)

Ou seja, o Calculus Reform recomendou mudanças não apenas na metodologia de ensino do CDI, mas também nas ênfases conceituais e nas propostas curriculares predominantes. No próximo capítulo deste trabalho discutiremos tais ênfases e propostas.

Frid (1994, apud Rêgo, 2000, p. 25) citando diversos educadores matemáticos sugere que o professor de CDI deve:

> Mudar o foco de ensino de Cálculo para as ideias fundamentais, ao invés de enfatizar o treinamento em habilidades e técnicas rotineiras, integrar aplicações ao curso de Cálculo através do reforço do papel de aproximações e situações- problema com contextos relevantes no campo da Matemática, produzir livros textos que deem suporte as mudanças e introduzir computação no currículo de Cálculo.

Considerando o que foi exposto até aqui, fica evidente que a busca por metodologias de ensino é uma temática relevante no contexto da pesquisa em ensino e aprendizagem do CDI. Assim, dentre os diversos caminhos que poderíamos trilhar, decidimos elaborar uma proposta metodológica que pudesse ser aplicada em sala de aula, visando uma melhoria na aprendizagem do conceito de derivada de uma função. Nossa escolha foi motivada por ser a derivada uma das noções mais importantes do CDI e seu ensino ainda continuar enfatizando fortemente as manipulações algébricas em detrimento da compreensão conceitual. (VILLAREAL, 1999 ; RAMOS, 2009).

Portanto, o principal objetivo da nossa pesquisa foi **elaborar, aplicar em sala de aula e analisar uma sequência didática que possibilitasse a introdução do conceito de derivada de uma função a partir da ideia de variação**. Autores como Kline (1985) e Cassol (1999), dentre outros, evidenciam que o significado mais abrangente que pode ser atribuído ao conceito de derivada é uma medida de variação, decorrendo deste outros importantes significados da derivada.

---

[1] Reforma do Cálculo (tradução nossa).
[2] Softwares que podem manipular simbolicamente expressões matemáticas e realizar cálculos numéricos.

Para atingir nosso objetivo, desejávamos realizar uma pesquisa de campo no sentido proposto por Fiorentini e Lorenzato (2009). Após algumas reflexões e discussões com nosso orientador, decidimos pesquisar nossa própria sala de aula, caracterizado nosso trabalho como uma pesquisa pedagógica, segundo Lankshear e Knobel (2008). Na nossa visão, tal método de pesquisa pode contribuir para uma aproximação entre a Universidade e a sala de aula de Matemática, na medida em que proporciona ao professor-pesquisador uma oportunidade de reflexão sobre sua própria prática docente.

Os trabalhos de Silva e Igliori (1996), Dall'Anese (2000) e D'Avoglio (2002) influenciaram nossa pesquisa, fornecendo subsídios metodológicos para organizarmos as aulas da nossa sequência didática. Também buscamos inspiração em princípios da Engenharia Didática conforme estabelecidos por Artigue (1996). Como pressupostos teóricos, nos apoiamos na teoria da imagem de conceito e definição de conceito, conforme proposta por Tall e Vinner (1981) e nas reflexões de Grattan-Guiness (1997) e Reis (2001) sobre o papel do rigor e da intuição no ensino de Cálculo. Nessa perspectiva, elaboramos um conjunto de atividades onde a ideia de variação foi explorada. A sequência de ensino foi concebida de modo que os conceitos de variação, variação média e taxa de variação instantânea (derivada) de uma função surgissem de modo intuitivo e natural no desenrolar das atividades propostas.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos conforme descreveremos a seguir.

No capítulo I, apresentamos algumas considerações sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo, mais especificamente sobre conceito de derivada serão feitas, destacado pesquisas que contribuíram para a realização do nosso trabalho.

No capítulo II, apresentamos uma síntese dos pressupostos teóricos nos quais esta pesquisa esta assentada. Noções de imagem de conceito e definição de conceito conforme elaboradas por Tall e Vinner (ibidem) são apresentadas neste capítulo. Algumas considerações sobre o papel da intuição e do rigor no ensino de Cálculo serão feitas, tomando por base os trabalhos de Grattan-Guiness (ibidem) e Reis (ibidem). Também serão discutidos alguns aspectos relacionados a derivada enquanto objeto matemático, focalizando sua conceitualização como uma medida de variação e destacando suas interpretações como velocidade instantânea e coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função .

Nossos procedimentos metodológicos serão apresentados no capitulo III. Traremos ainda uma descrição do modo através do qual as aulas da nossa sequencia didática foram conduzidas e o processo de coleta e análise de dados será explicitado.

No capitulo IV apresentamos as atividades que elaboramos para compor nossa sequência didática, devidamente acompanhadas das respectivas análises a priori.

No capitulo V, apresentamos nossa análise a posteriori da sequência didática, acompanhada de alguns protocolos produzidos em sala de aula, procurando evidenciar o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e estabelecer comparações com as análises a priori.

Por último, traremos nossas considerações finais, onde apresentaremos os resultados gerais obtidos na pesquisa e apresentaremos algumas reflexões que surgiram durante o processo de construção da presente pesquisa.

CAPÍTULO 1

ENSINO-APRENDIZAGEM DE CÁLCULO: ALGUMAS PESQUISAS E PROPOSTAS

Conforme foi explicitado na introdução deste trabalho, o fracasso experimentado por uma parte considerável dos alunos que cursam Cálculo na Universidade motivou pesquisadores em Educação Matemática a realizar investigações sobre os fatores que interferem no aprendizado do Cálculo.

Esse movimento de pesquisa foi iniciado por volta de 1980[3] e desde então, vem sendo ampliado e consolidado. A partir destas investigações, dentre outras coisas, constatou-se que o modo como o Cálculo era (e ainda é) habitualmente ensinado apresentava inadequações, não garantindo efetivamente um aprendizado significativo.

A necessidade de mudanças no ensino tradicional[4] de Cálculo foi evidenciada e a elaboração de propostas metodológicas que possam ser aplicadas na sala de aula de Cálculo tem sido objeto de interesse de muitos pesquisadores.

Durante a construção da nossa pesquisa, procuramos compreender melhor o ensino de Cálculo, e de modo particular, o ensino do conceito de derivada. Para atingir esse objetivo, realizamos diversas leituras e vimos com muita clareza que uma enorme complexidade permeia os processos de ensino e aprendizagem do Cálculo.

Assim, a literatura consultada nos forneceu um recorte da realidade que pretendíamos conhecer. Nessa perspectiva, nos afastando de qualquer tentativa de esgotar o assunto, procuramos apresentar neste capítulo alguns dos principais elementos que estão presentes no contexto do ensino e da aprendizagem do Cálculo e também apresentaremos algumas considerações sobre propostas metodológicas para o ensino do conceito de derivada.

1.1 A DINÂMICA DA AULA DE CÁLCULO

A sala de aula é um espaço no qual relações dinâmicas e complexas ocorrem. Em particular, o professor, os alunos e o saber estão em constante processo de interação.

[3] Convém observar que a partir de 1990, passa a crescer o número de pesquisas voltadas para a Matemática do ensino superior como um todo. Além do Cálculo, disciplinas como Álgebra Linear e Análise Real, dentre outras, tem sido objeto de investigações no domínio da Educação Matemática.

[4] Neste texto, o significado atribuído à esta expressão é o mesmo amplamente adotado no âmbito da Educação Matemática.

Espera-se que o professor tome para si a responsabilidade de escolher como as aulas serão conduzidas, quais estratégias de apresentação dos conteúdos serão utilizadas, como as avaliações serão feitas, dentre outras coisas. Tais escolhas são influenciadas por uma multiplicidade de fatores, indo desde concepções construídas durante o processo de formação do professor, até exigências da comunidade escolar.

Voltando nosso olhar para a sala de aula de Matemática, Silva (2010, p. 52) afirma que:

> A prática pedagógica mais comum em Matemática parece ser aquela em que o professor cumpre seu contrato[5] dando aulas expositivas e passando exercícios aos alunos; em suas aulas ele deve selecionar partes do conteúdo que aprender e propor problemas cujos enunciados contêm os dados necessários e tão-somente esses, cuja combinação racional, aliada aos elementos das aulas permite encontrar a solução do problema. O aluno por sua vez, cumpre seu contrato se ele bem ou mal compreende a aula e consegue resolver corretamente ou não os exercícios. Se isso não acontecer, o professor deverá ajuda-lo, dirigindo seu trabalho através de indicações que esclareçam suas duvidas ou através de pequenas questões elementares que conduzam ao resultado.

No caso específico das aulas de Cálculo Diferencial e Integral nas universidades brasileiras, Franchi (1995, apud Rêgo, 2000, p. 32) concluiu que:

> De modo geral as aulas são expositivas, sendo raras as tentativas de inovação. O centro do processo ensino/aprendizado está no professor, que deve transmitir os conhecimentos matemáticos ao aluno. Os conteúdos são apresentados prontos, de forma inquestionável e pouco têm a ver com situações da realidade. São apresentadas definições, enunciados e teoremas que a seguir são demonstrados. Seguem técnicas de cálculo e exercícios. . . . Os livros apresentam os conteúdos da mesma forma que o professor apresenta em aula, conservando a mesma estrutura desde as primeiras publicações. As listas de exercícios geralmente exigem do aluno apenas a repetição de técnicas, apresentadas de acordo com os exercícios resolvidos como exemplo.

As afirmações apresentadas até aqui, sintetizam conclusões de autores como Villarreal (1999), Dall'Anese (2000), Reis (2001), dentre outros. Isto evidencia que existe um modelo predominante de prática pedagógica dos professores de Cálculo. Não custa lembrar que muitos professores acreditam que o aluno aprende Matemática quando é capaz de memorizar definições e regras e manipular símbolos e as aulas são organizadas de acordo com esta crença.

Ainda neste contexto, Baldino (1998, p. 15-16) observa que:

---

[5] O autor se refere ao contrato didático, conforme definido por Guy Brousseau. Para mais detalhes, ver, por exemplo, Silva (2010, p. 49-74).

> [O Ensino Tradicional Vigente[6] -ETV] concebe o conhecimento como uma espécie de substância que se transmite do professor ao aluno por comunicação. O professor fala, codifica, o aluno ouve, decodifica. A culpa pelo fracasso na aprendizagem é lançada sobre o ruído na comunicação. [...] Numa palavra, o ETV *pressupõe que o professor ensina mostrando e o aluno aprende vendo*.

Olhando para a nossa trajetória enquanto estudante universitário, reconhecemos que nossa formação aconteceu dentro do modelo predominante descrito anteriormente. No início da nossa experiência docente, tanto no ensino de Cálculo quanto no ensino básico de Matemática, nossa prática de sala de aula também era baseada no mesmo modelo. Durante nosso caminhar, reflexões sobre nossa própria prática nos aproximaram da Educação Matemática e culminaram (mas de modo algum estão encerradas) com a pesquisa que ora apresentamos.

Neste momento achamos interessante reproduzir um episódio provavelmente fictício, narrado por Baldino (1998, p. 13) para caracterizar alguns aspectos do Ensino Tradicional Vigente numa sala de aula de Cálculo:

> [o matemático-professor] em meia hora demonstra [o teorema da média], explica e, depois, faz uma "aplicação" que reputa "muito importante": "se uma função tem derivada identicamente nula, então ela é constante". Neste ponto um aluno de Física lhe pergunta:
>
> -Professor, isso, então, quer dizer que um automóvel com velocidade zero não se mexe ?
>
> O professor fica surpreso, pensa um pouco, e termina concordando.
>
> -Então, retruca o aluno, não vejo porque perder tanto tempo demonstrado.

Para Baldino (ibidem), este episódio ilustra a preocupação do professor com o significado matemático dos resultados apresentados e não com o sentido que estes mesmos resultados podem (ou não) ter para o aluno. Obviamente, tal preocupação molda a forma com a qual o professor organiza e conduz suas aulas, trazendo importantes implicações para o (não) aprendizado dos conceitos do Cálculo. Na próxima secção, abordaremos uma das manifestações desta preocupação: a necessidade de apresentar os conceitos centrais do Cálculo numa ordem que, embora seja divergente do seu desenvolvimento histórico, contribui para o encadeamento lógico dos mesmos.

Nessa perspectiva, na sala de aula de Cálculo, há uma ênfase muito forte nas manipulações algébricas, nos exercícios repetitivos e nos algoritmos. A compreensão

---

[6] Para Baldino (1998, p 13), o Ensino Tradicional Vigente é um objeto de repulsa e se constitui numa caricatura de "tudo aquilo que é negativo no ensino que o senso comum chama de tradicional".

conceitual é, muitas vezes, relegada a um segundo plano e o cálculo de limites complicados, as regras de derivação e as técnicas de integração ocupam um lugar de grande destaque, sobretudo em cursos introdutórios, nos quais os alunos geralmente têm o primeiro contato com os conceitos de limite, derivada e integral.

Finalizamos esta seção observando que as pesquisas realizadas no campo da Educação Matemática têm revelado muitos indícios de que a aula conforme caracterizamos acima, não garante por si só um aprendizado no qual a compreensão dos conceitos abordados é atingida pela maior parte dos alunos.

1.2 A ÊNFASE NO CONCEITO DE LIMITE

De acordo com Reis (2001) e Rezende (2003), na grande maioria dos cursos introdutórios de Cálculo, a abordagem predominante dos conteúdos obedece a seguinte sequência: limites, continuidade, derivada e integral de Riemann, sendo que os três últimos conceitos são definidos e fundamentados rigorosamente a partir dos limites.

Para o historiador e professor inglês Ivor Grattan-Guinness[7] citado por Reis (2001, p. 63), "a História nos mostra o desenvolvimento do Cálculo, na seguinte ordem: cálculo integral; cálculo diferencial; cálculo de limites; noção de número real. Entretanto, o ensino inverte completamente esta ordem: números – limites – derivadas – integrais".

Ainda segundo Grattan-Guinness, as duas principais razões para esta inversão histórica são as seguintes:

> 1) O papel preponderante dos limites[8] na teoria inicialmente desenvolvida por Cauchy e, posteriormente, formalizada por Weierstrass: a definição de limite por $\epsilon - \delta$ foi tão marcante que ainda hoje, segundo o historiador, vivemos sob uma "ortodoxia epsilônica", descrita como um "rígido molde" para os livros didáticos;
>
> 2) A influência do movimento de Aritmetização da Análise[9]: na busca pelo rigor, as redefinições de conceitos como continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade utilizando a linguagem dos limites representou garantia inquestionável de obtenção de um nível de formalização bastante aceitável para os padrões acadêmicos da época e, porque não dizer, para as exigências acadêmicas da sociedade matemática a nível mundial de hoje.

---

[7] Segundo Reis (2001), em abril de 1997, Grattan-Guinness proferiu uma palestra na UNICAMP sobre a história do ensino de Cálculo e as afirmações em pauta foram feitas nesta ocasião, durante uma conversa pessoal.
[8] Grifo do autor.
[9] Grifo do autor.

No entanto, diversas pesquisas em Educação Matemática têm mostrado que o conceito de limite apresenta diversas dificuldades de aprendizagem. Em particular, os trabalhos de Sierpinska (1987) e Rezende (1994) evidenciam a existência de diversos obstáculos epistemológicos relacionados ao conceito de limite, que parecem dificultar seu aprendizado. Assim, é bastante razoável supor que os conceitos de continuidade, derivada e integral fundamentados a partir do conceito de limite, "herdarão" de algum modo, obstáculos epistemológicos que poderão provocar problemas de aprendizagem destes conceitos No próximo capítulo, nos apoiaremos no trabalho de Tall e Vinner (1981) para aprofundar um pouco mais esta discussão..

Considerando o que foi exposto até aqui, uma pergunta que surge de modo bastante natural é a seguinte: em um curso introdutório de Cálculo, o conceito de limite deve necessariamente ser estudado antes[10] dos conceitos de continuidade, derivada e integral ? respaldados por Tall e Vinner (1981), Cornu (1991), Baldino (1998), Reis (2001), Rezende (2003), Pereira (2009), dentre outros, nossa resposta para a questão supracitada é negativa.

É importante destacarmos que não defendemos que os limites sejam banidos do ensino de Cálculo. Por outro lado, entendemos que este importante conceito deve ser abordado em um primeiro curso de Cálculo de uma forma que o rigor matemático em alto nível não seja a principal preocupação. Concordamos com Rezende (1994, p. 148-149), afirmando que:

> Neste nível de aprendizagem o aluno precisa e deve conhecer as ferramentas básicas que fizeram do Cálculo Diferencial e Integral uma das maiores invenções da Matemática. É preciso que se resgate o valor histórico de cada um dos conceitos básicos do Cálculo, entre eles, inclusive, a operação de limite, sem que se dê ênfase em demasia às questões a níveis de fundamentação.

Diante dos argumentos explicitados acima, acreditamos que não é necessário que um estudo sistemático e aprofundado da teoria dos limites preceda e fundamente o estudo de conceitos como derivada e integral. Para Lima (2006), a derivada é um dos limites mais importantes da Matemática. Assim, o professor de Cálculo pode utilizar o conceito de derivada para justificar a necessidade do conceito de limite, caminhando na direção de um aprendizado mais significativo.

---

[10] Grifo nosso.

1.3 O LIVRO DIDÁTICO NO ENSINO DE CÁLCULO

O livro didático exerce uma grande influência no ensino e no aprendizado de qualquer disciplina matemática, na medida em que se constitui como um dos recursos didáticos mais utilizados por professores e alunos (FRANCHI, 1993).

O Cálculo Diferencial e Integral não escapa desta influência e achamos conveniente tecermos algumas considerações sobre o livro didático no ensino de Cálculo. Alertamos que não realizamos uma análise profunda de livros didáticos. Nos limitamos a dialogar com duas pesquisas que se debruçaram sobre esta temática.

Barufi (1999), em sua pesquisa de doutorado, realizou um estudo que objetivava compreender como o Cálculo Diferencial e Integral é apresentado nos diferentes cursos universitários ministrados na Universidade de São Paulo (USP). Para atingir seu objetivo, dentre outras coisas, a autora analisou vinte e quatro livros didáticos, que foram selecionados por serem aceitos e adotados pelos docentes do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da USP ou por apresentarem propostas inovadoras. Livros de Cálculo Avançado e Análise Real também foram incluídos na análise, "[...] a fim de poder observar como, em alguns casos, o curso inicial de Cálculo se aproxima, na verdade, muito mais de um curso avançado." (BARUFI, 1999, p. 58).

De acordo com Barufi (1999, p. 48):

> O livro didático é um "porto seguro", onde o autor ancora o curso, evitando desvios rota em demasia. Constitui-se num referencial sempre presente para ele e para os alunos. É claro que, no decorrer da viagem por mares nunca d'antes navegados, pequenas incursões em ilhas desconhecidas são permitidas, até mesmo podem ser estimulantes para tornar a viagem mais interessante. Entretanto, o rumo não pode ser esquecido.

Ainda neste contexto, concordamos com Barufi (1999, p. 49), defendendo que:

> A escolha do livro revela uma primeira compatibilidade entre a proposta do autor e a proposta do professor que ministra o curso. Essa premissa nos parece razoável diante do grande número de livros didáticos de Cálculo existentes e das escolhas normalmente realizadas.

Os fatores que conduzem o professor para a escolha de um livro didático são diversos: sua formação acadêmica, a ementa da disciplina ministrada, o tempo disponível, os objetivos e o público alvo do curso, as exigências institucionais, etc. É bastante razoável esperar que o professor não se baseie exclusivamente em um único livro didático. Sobretudo no ensino superior, diversos textos costumam ser usados.

Desta maneira, "[...] o curso não se desenvolve necessariamente de modo idêntico ao livro, mas, de modo geral, a organização do Cálculo, apresentada no texto, fornece fortes indícios das intenções do professor, de suas crenças em relação a como deverá ocorrer a construção do conhecimento por parte de seus alunos no decorrer do curso." (BARUFI, 1999, p. 49-50).

Em relação às diversas abordagens encontradas nas obras dos autores analisados, Barufi (1999, p. 52) observa que "existem dois modelos principais, muito diferentes, que norteiam as várias propostas didáticas, no sentido da maior ou menor proximidade de cada texto em relação a esses paradigmas." Ao tratar destes modelos, Barufi (1999, p. 52) esclarece que:

> O primeiro modelo se constitui na apresentação do Cálculo sistematizado, formal e logicamente organizado, como resultado do trabalho de pensadores, filósofos e matemáticos durante mais de vinte séculos. Esta é uma abordagem realizada por alguns autores em suas propostas para um primeiro curso de Cálculo Diferencial e Integral. Neste caso, a sequência temática, basicamente é Números Reais, Funções, Limites, Derivadas e Integrais, e o tratamento metodológico obedece, em muitos casos, a ideia de fornecer uma **revelação**[11] do Cálculo. A proposta parece basear-se no fato questionável de que a lógica interna consistente deva garantir a aprendizagem significativa por parte dos estudantes.

Acreditamos que professores adeptos do ensino tradicional vigente (ETV), conforme caracterizado por Baldino (1998), se sentirão mais "confortáveis" com livros que possuam as características descritas neste primeiro modelo.

O segundo modelo descrito por Barufi (1999, p. 53) é aquele que:

> [...] Apresenta o Cálculo **em construção**[12]. Este modelo diverge do anterior por apresentar uma sequência temática que não obedece necessariamente à estruturação lógica, mas muito mais ao desenvolvimento do Cálculo, ou à sua contemporaneidade. Isto se deve ao fato de basear-se numa metodologia **problematizadora**[13], segundo a qual aquilo que deflagra o processo de construção do conhecimento, por parte dos alunos, é a existência de problemas importantes e motivadores.

Na nossa concepção, livros didáticos que estejam de acordo com o segundo modelo, podem contribuir para que ocorra um aprendizado focado na compreensão dos conceitos

[11] Grifo da autora.
[12] Grifo da autora.
[13] Grifo da autora.

estudados. Acreditamos que um curso introdutório de Cálculo pode e deve ser conduzido de acordo com os preceitos deste segundo modelo.

De acordo com Barufi (1999) em alguns livros, a abordagem está mais adequada para o que seria um curso de Análise Real, afastando-se do que seria recomendando para um curso introdutório de Cálculo. A autora ainda destaca que foram encontrados livros que:

> [...] Não focalizam de maneira preponderante a questão das ideias do Cálculo através de problemas importantes e motivadores, ainda que vários deles, embora não partam de situações problema, consigam mostrar que o Cálculo tem diversas aplicações nas diferentes áreas do conhecimento. (BARUFI, 1999, p. 127)

Após a análise dos livros didáticos, Barufi (1999, p. 147), assevera que:

> [...] O que podemos concluir é que os livros selecionados apresentam todos propostas que são válidas e que podem ser apreciadas dentro de determinado contexto. A utilização do livro didático, conforme os critérios do professor, poderá ser um elemento mais ou menos facilitador do processo de ensino/aprendizagem do Cálculo, no sentido de proporcionar maior ou menor vivência dos significados que podem otimizar a construção do conhecimento.

Um fato curioso é que os três livros[14] mais adequados para os objetivos de um curso introdutório de Cálculo de acordo com os critérios estabelecidos por Barufi (1999) são pouco conhecidos no Brasil e não possuem até o presente momento tradução para o português.

Mateus (2007), na sua pesquisa de mestrado realizou uma análise de oito livros didáticos escritos com o objetivo de servirem de livros-texto para disciplinas introdutórias de Cálculo, procurando identificar como os conceitos de limite, derivada e integral são abordados. Dois destes livros são usados em Moçambique e os demais, no Brasil. De modo geral, suas conclusões apontaram que os conteúdos são normalmente introduzidos e tratados de maneira predominantemente algébrica e a formalização das ideias apresentadas é perseguida desde o início da abordagem e raramente os autores procuram uma contextualização na qual as mesmas ideias poderiam ser exploradas, discutidas e posteriormente formalizadas. Em particular, no caso da derivada foi constatado que:

---

[14]BARTKOVICH, K. G. et al. **Contemporary Calculus Through Applications**, Dedham MA, Janson Publications Inc., 1995.
BRUCKHEIMER, M. et al. **Introducción Al Cálculo Y Al Álgebra**. Vol I e II. (Texto de la Open University de Londres), Trad. Bartolomé Frontera Marqués, Barcelona, Editorial Reverté, S. A., 1976.
GREENSPAN, H. P. ; BENNEY, D. J. **Calculus – An Introduction to Applied Mathematics**. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1973.

> [...] Há diversas concepções associadas ao conceito de derivada:
> 1. Um número dado pela relação $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se tal limite existir;
> 2. A velocidade instantânea de corpo em movimento;
> 3. A taxa de variação de uma grandeza *y* relativamente à outra grandeza *x*;
> 4. Um número igual ao quociente de diferenciais $\frac{dy}{dx}$;
> 5. O valor de uma função $g(x)$, definida por $g(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ num ponto x de seu domínio;
> 6. O declive de uma porção do gráfico localmente linear.
>
> (MATEUS, 2007, p. 171-172)

Mas, apesar desta diversidade de concepções, de acordo com Mateus (2007, p. 172), "a definição de derivada como o limite da razão incremental [...]" (ou seja, a primeira concepção exibida acima) desempenha um papel de extrema importância, ocupando um papel central na abordagem adotada nos livros didáticos analisados, na medida em que é utilizada no desenvolvimento de quase todas as propriedades da derivada.

Em relação às atividades propostas nos livros analisados, Mateus (2007, p. 172) conclui que "[...] há muito mais atividades de repetição, visando a rotinização da técnica do que outro tipo de atividade".

Os trabalhos apresentados nesta seção mostram que uma parte considerável dos livros didáticos de Cálculo adota uma abordagem na qual a construção dos conceitos não é a preocupação principal.

1.4 SOBRE O ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE DERIVADA

Sendo parte integrante dos cursos introdutórios de Cálculo, o conceito de derivada de uma função é usualmente abordado após um estudo do conceito de limite. Em diversas ocasiões, utiliza-se a ideia de reta tangente ao gráfico de uma função para introduzir a derivada e logo em seguida, o cálculo de derivadas a partir da sua definição como um limite e as regras de derivação ocupam a atenção do professor e dos alunos. O próximo passo consiste em estudar algumas aplicações da derivada: velocidade e aceleração, taxas de variação, problemas de otimização, estudo do comportamento de funções e esboço de gráficos. (GODOY, 2004 ; LEHMANN, 2011)

Entretanto, Rezende (2003, apud Pereira, 2009, p. 53 - 54), observa que:

> Calcular exaustivamente derivadas de funções através das regras usuais de derivação não leva o aluno a construir efetivamente o significado desta operação. Interpreta-la tão somente como "coeficiente angular da reta tangente" significa ignorar o problema histórico essencial da "medida" instantânea da variabilidade de uma grandeza – esse foi inclusive, o grande problema perseguido inicialmente pelos filósofos escolásticos. Com efeito, **derivada, é sobretudo, taxa de variação instantânea**[15]. A interpretação geométrica não esgota completamente a ideia essencial de derivada; existe todo um campo de significações importante para a tecedura da noção de derivada: pensar velocidade instantânea como coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $s = s(t)$ é consequência, e não causa, da ação de interpretá-la como limite de velocidades médias, quando fazemos Δt cada vez mais próximo de zero. Na verdade ambas as interpretações se complementam e contribuem para a significação do conceito de derivada. Eximir a interpretação dinâmica do conceito de derivada é, além de um contrassenso histórico, um atentado ao seu próprio significado.

Isto sugere que a abordagem habitual do conceito de derivada parece não contribuir para que ocorra um aprendizado realmente eficaz. Diversas pesquisas como Cassol (1998), Dall'Anese (2000), Meyer (2003), Rezende (2003), Ramos (2009), têm apontado que a essência do conceito[16] de derivada não é devidamente compreendida pela maior parte dos estudantes e os mesmos não conseguem sucesso quando enfrentam problemas cujas soluções dependem não apenas de manipulações algébricas e habilidade para lidar com regras e técnicas de cálculo, mas principalmente de um entendimento mais amplo do conceito de derivada e dos seus diversos significados.[17]

Os problemas de aprendizagem relacionados ao conceito de derivada se constituem num objeto de considerável relevância para a pesquisa em Educação Matemática, dada a enorme importância deste conceito para a Matemática e suas aplicações. Amit e Vinner (1990, apud Meyer, 2003, p. 3) afirmam que:

> O conceito de derivada é especialmente importante. Se este conceito não é bem entendido, então suas relações com velocidade, taxa de variação, etc. não podem ser entendidas nas Ciências Naturais, e suas relações com o conceito de Valor Marginal não podem ser entendidas na Economia e na Administração de Negócios.

Uma das linhas de investigação que tem atraído a atenção de diversos pesquisadores é o desenvolvimento de propostas pedagógicas que contribuam para o aprendizado efetivo da derivada. Esta será a temática que abordaremos na próxima seção.

---

[15] Negrito nosso.
[16] Uma medida de variação.
[17] No próximo capítulo abordaremos com mais detalhes alguns dos significados da derivada.

1.5 A DERIVADA: ALGUMAS PROPOSTAS METODOLÓGICAS PARA SEU ENSINO

No campo da Educação Matemática, pesquisadores têm investigado como os conceitos centrais do Cálculo podem ser abordados em sala de aula através de metodologias de ensino que contribuam para minimizar os problemas de aprendizagem destes conceitos. Tais pesquisas têm sido realizadas sob diferentes perspectivas teórico-metodológicas. Passaremos agora a apresentar brevemente alguns destes trabalhos.

Silva e Igliori (1996) realizaram um estudo exploratório cujo objetivo foi conceitualizar a derivada como uma medida de variação. Os autores elaboraram uma sequência didática que foi aplicada a duas duplas de alunos do curso de Computação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC – SP) selecionados dentre os que apresentaram os piores resultados na disciplina de Cálculo. Os resultados da pesquisa mostraram que a exploração da ideia de variação contribuiu para a essência do conceito de derivada fosse compreendida pelos alunos. Os autores ainda sugerem que a pesquisa seja ampliada, investigando-se como trabalhar com uma turma inteira de alunos.

Dall'Anese (2000) elaborou uma sequência didática que foi trabalhada durante quatorze encontros (totalizando cerca de vinte horas) numa turma de alunos ingressantes no ensino superior na área de exatas que já haviam estudado o conceito de limite. Em cada encontro, os alunos organizados em duplas, resolviam um conjunto de atividades e, no final, realizava-se uma sessão plenária onde o professor-pesquisador debatia as respostas apresentadas e institucionalizava os conceitos abordados. Durantes estes momentos, diversas discussões relevantes foram desencadeadas. À noção de taxa de variação foi utilizada para introduzir e explorar o conceito de derivada, enfatizando a compreensão conceitual. Apesar da interpretação geométrica da derivada como inclinação da reta tangente ter sido trabalhada, interpretações físicas da derivada não foram exploradas. O autor conclui a pesquisa observando que houve uma aprendizagem bastante satisfatória do conceito de derivada.

D'Avoglio (2002) adotando uma abordagem análoga a que foi seguida por Dall'Anese (2000), utilizou-se da noção de velocidade (taxa de variação da posição de um móvel) para introduzir a derivada de uma função. A interpretação geométrica da derivada não foi explorada. Segundo o autor, os alunos compreenderam que a velocidade de um móvel num determinado instante pode ser calculada como o limite da velocidade média num intervalo de tempo cuja amplitude tende a zero e também que a derivada pode ser interpretada como uma generalização do conceito de velocidade instantânea.

Os trabalhos de André (2008) e Pereira (2009) tinham como objetivo investigar a possibilidade do conceito de derivada ser introduzido no ensino médio. Ambos utilizaram a ideia de variação de uma função para a elaboração de suas propostas metodológicas e softwares matemáticos como recursos didáticos. As propostas foram testadas em grupos de alunos do ensino médio que possuíam conhecimentos básicos sobre funções. Os autores concluem que o conceito de derivada pode ser estudado no ensino médio e sua interpretação como uma taxa de variação contribui para que ocorra um aprendizado satisfatório, trazendo mais riqueza para o estudo de funções no ensino básico e amenizando possíveis dificuldades de aprendizado em um provável curso de Cálculo.

Lehmann (2011) desenvolveu uma sequência didática que tinha por objetivo auxiliar os alunos no processo de aprendizagem da derivada como uma taxa de variação instantânea. A sequência didática foi aplicada ao longo de seis horas (divididas em três aulas) numa turma que havia cursado no semestre anterior uma disciplina cuja ementa era a seguinte: Funções Polinomiais, Funções Modulares, Funções Exponenciais, Funções Logarítmicas e Tópicos de História da Matemática. De acordo com a autora, os alunos apresentaram um desenvolvimento satisfatório na resolução das atividades propostas na sequência didática e construíram o conceito de derivada como taxa de variação instantânea, compreendendo inclusive suas interpretações geométrica e física.

Os resultados obtidos nestes trabalhos indicam que introduzir o conceito de derivada como uma taxa de variação, substituindo a aula meramente expositiva na qual o professor apresenta definições, propriedades, e exercícios de fixação, enfatizando a memorização de regras e longas manipulações algébricas por aulas onde os alunos participam ativamente, trabalhando isoladamente ou em duplas, elaborando conjecturas e principalmente refletindo sobre o significado do está sendo feito e não apenas manipulando símbolos carentes de significado, pode favorecer a compreensão da essência do conceito de derivada.

CAPÍTULO 2

REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, pretendemos expor os referenciais teóricos que embasaram a nossa pesquisa, contribuindo para a elaboração da nossa sequência didática e fornecendo subsídios para nossas análises.

Inicialmente descreveremos as noções de imagem de conceito e definição de conceito (Tall e Vinner, 1981), em seguida apresentaremos algumas reflexões sobre o papel do rigor e da intuição no ensino de Cálculo e finalizaremos o capítulo trazendo um estudo no qual o conceito de derivada é introduzido a partir da ideia de variação.

2.1. IMAGEM DE CONCEITO E DEFINIÇÃO DE CONCEITO

É fato bem conhecido que ainda prevalece (de modo consciente ou não) no ideário de muitos professores universitários uma crença na qual os mesmos processos utilizados para a validação de resultados obtidos na pesquisa em Matemática devem fundamentar o ensino da Matemática nos seus diferentes níveis.

De acordo com a concepção que nos parece ser predominante entre os matemáticos profissionais, a Matemática é uma ciência organizada segundo o método axiomático-dedutivo, onde a partir de conceitos primitivos, definições e axiomas, seus teoremas são demostrados rigorosamente, utilizando-se princípios lógicos e uma simbologia universalmente aceita pela comunidade de matemáticos.

Esta concepção é compartilhada por muitos professores cuja atuação em sala de aula é fortemente influenciada por ela. A sequência conceitos primitivos, definições, axiomas, teoremas, demonstrações, exemplos de aplicação e exercícios de fixação é adotada pelo professor na organização de suas aulas, sobretudo no ensino universitário. O professor acredita que este é o melhor modo para ensinar qualquer conteúdo matemático e o aluno que não consegue ser aprovado nas avaliações realizadas é o único culpado pelo seu fracasso, pois não estudou o suficiente ou apresenta alguma deficiência de natureza cognitiva.

Neste contexto, os conceitos matemáticos costumam ser introduzidos através da sua definição formal[18], a qual ocupa um lugar de destaque no ensino da Matemática. De acordo com Vinner (1991), professores e autores de livros didáticos são influenciados principalmente pelas seguintes concepções sobre as definições na Matemática:

1. Conceitos são principalmente adquiridos através de suas definições;
2. Os alunos usarão definições para resolver problemas e provar teoremas, quando necessário, de um ponto de vista matemático;
3. Definições devem ser mínimas. (Uma definição não deve conter partes que possam ser deduzidas de outras partes da própria definição);
4. É desejável que as definições sejam elegantes. (Por exemplo, alguns matemáticos acham que a definição de valor absoluto como $|x| = \sqrt{x^2}$ é mais elegante que a definição $|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$);
5. Definições são arbitrárias. (Definir, em Matemática, significa basicamente atribuir nomes).

Muito mais preocupado com a estruturação lógica do conhecimento matemático do que com seus aspectos pedagógicos e acreditando que a definição formal de um conceito matemático fornece os principais elementos para a sua compreensão, em muitas ocasiões o professor universitário adota práticas na sua sala de aula que podem não contribuir para que os alunos aprendam efetivamente o conceito em questão. Acreditamos que estas práticas assumem:

> O pressuposto implícito de que o que é imprescindível para que a teoria seja matematicamente consistente é também determinante da ordem pedagógica, o que sugeriria que o objetivo do ensino é simplesmente fazer com que o aluno seja capaz de imitar a teoria, e não que ele a "domine", isto é, que tenha uma compreensão suficientemente significativa do encadeamento logico da teoria, e que seja capaz de estabelecer relações de forma autônoma com a própria teoria em questão e com outras. (ESCARLATE, 2008, p. 14)

No entanto, Tall e Vinner (1981) afirmam que o cérebro humano não é uma entidade que funciona sempre obedecendo aos mesmos princípios lógicos que norteiam a estruturação da Matemática enquanto uma ciência construída segundo o método axiomático-dedutivo. Diante disto, é fundamental que se faça uma distinção entre o modo com o qual os conceitos matemáticos são logicamente organizados e os complexos processos cognitivos mobilizados no processo de aprendizagem destes conceitos.

[18] Neste texto, a definição formal de um conceito matemático é aquela que é aceita pela maioria da comunidade de matemáticos em um determinado contexto histórico.

De acordo com Meyer (2003) e Giraldo (2004), as noções de imagem de conceito e definição de conceito, conforme foram concebidas por Tall e Vinner (1981), estabelecem uma separação entre a Matemática enquanto uma atividade mental, onde o foco consiste na aprendizagem de seus conceitos e a Matemática concebida de acordo com o olhar do matemático profissional, vista como um sistema formal, logicamente estruturado e apresentam uma perspectiva para a compreensão da aprendizagem de conceitos matemáticos.

Segundo Tall e Vinner (ibidem, p. 152, tradução nossa), o termo imagem de conceito é usado para:

> Descrever toda a estrutura cognitiva associada ao conceito, incluindo todas as imagens mentais, os processos e as propriedades associadas. Ela é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.

Para Giraldo (ibidem), a imagem de conceito é composta por elementos de diferentes naturezas e graus de generalidade. Representações gráficas, símbolos, propriedades, representações algébricas, coleções de impressões e experiências pessoais (inclusive fora de contextos matemáticos) podem compor a imagem de conceito que um indivíduo possui em relação a um conceito.

Giraldo (ibidem, p. 9) observa que:

> A imagem de conceito de função real de um indivíduo, por exemplo, pode incluir elementos, tais como formas de representação (gráficos, fórmulas, tabelas, diagramas); elementos da definição (como domínio, contradomínio) propriedades especificas (como bijetividade, linearidade, monotonicidade); exemplos particulares (como certas funções familiares); possibilidades de manipulação (como operações, inversão); e assim por diante.

A imagem de conceito é um construto individual. Diferentes indivíduos podem ter diferentes imagens de conceito em relação a um mesmo conceito. Da mesma maneira, a imagem de conceito não faz parte do conjunto de propriedades do conceito. Assim, não tem sentido falar em imagem de conceito inerente a um conceito.

Durante seu processo de construção e desenvolvimento, a imagem de conceito de um indivíduo não necessariamente segue um caminho linear e diversas componentes podem ser acrescentadas, excluídas ou modificadas na medida em que o indivíduo vai vivenciando experiências cognitivas.

Para designar uma porção da imagem de conceito ativada em um instante particular, Tall e Vinner (ibidem) utilizam o termo imagem de conceito evocada. É possível que um indivíduo tenha uma imagem de conceito que contenha partes conflitantes entre si. Caso duas ou mais dessas partes sejam evocadas simultaneamente, podem ocorrer confusões ocasionando diversos tipos de erros. (TALL e VINNER, 1981 ; TALL, 2000 ; MEYER, 2003).

O termo definição de conceito é usado por Tall e Vinner (1981) para denominar um arranjo de palavras que um determinado indivíduo usa para especificar um conceito. Uma definição de conceito pode ser aprendida pelo indivíduo de uma maneira significativa, ou simplesmente memorizada. A definição de conceito (quando existe) faz parte da imagem de conceito[19] e pode ser resultado de uma reconstrução pessoal do estudante realizada a partir da definição formal. Por outro lado, sendo um atributo pessoal, a definição de conceito pode divergir completamente da definição formal. Tall e Vinner (1981) observam ainda que uma definição de conceito pode gerar uma imagem de conceito, chamada imagem de definição de conceito.

Sobre a relação entre a imagem de conceito e a definição de conceito, Giraldo (2004, p. 18) observa que:

> Da mesma forma que uma definição de conceito (mesmo uma que corresponda à definição formal) sem uma imagem de conceito rica poderia ser inútil; uma imagem de conceito rica sem uma definição de conceito adequada pode ser traiçoeira. Uma definição de conceito inconsistente com a definição formal não é necessariamente parte de uma imagem de conceito pobre ou inconsistente; nem uma imagem de conceito pobre necessariamente inclui uma definição de conceito incorreta. Em resumo, uma definição de conceito consistente com a definição formal, uma imagem de conceito rica e uma imagem de conceito consistente são fenômenos mutuamente independentes.

Uma imagem de conceito é considerada rica quando ela contém muitos elementos relacionados ao conceito, tais como: propriedades, experiências e impressões (inclusive fora do contexto matemático). Uma imagem de conceito rica não é necessariamente formada apenas por elementos coerentes do ponto de vista matemático e pode conter fatores que não contribuem para que o conceito em questão seja compreendido adequadamente. Além disso, a ausência de uma definição de conceito coerente com a definição formal também pode prejudicar o aprendizado. Giraldo (ibidem) apud Escarlate (2008, p. 11-12) ilustra este tipo de situação através do seguinte exemplo:

> Uma definição de conceito comumente encontrada entre estudantes em cursos iniciais de geometria euclidiana é a seguinte: “um retângulo é um quadrilátero com quatro ângulos retos, lados opostos iguais e lados consecutivos diferentes”. Podemos

[19] Em trabalhos posteriores, Vinner passa a conceber a definição de conceito como uma estrutura separada da imagem de conceito. Mas, de acordo com Giraldo (2004), os autores Tall e Vinner concordam que esta diferença não produz consequências relevantes para a teoria em si.

> facilmente imaginar que um estudante com esta definição de conceito forme uma imagem de conceito incluindo propriedades matematicamente corretas, como: “todo retângulo possui lados opostos paralelos”, ou “a área de um retângulo é igual ao produto dos comprimentos de seus lados”, e assim por diante. Assim, tal estudante teria uma imagem de conceito rica e poderia ser confiante ao desenvolver raciocínios matemáticos a partir dela. Entretanto, sua imagem de conceito sempre poderá traí-lo, uma vez que, segundo sua definição de conceito, um quadrado não seria considerado um retângulo (diferindo, portanto da definição formal usualmente aceita). Um segundo estudante pode ser capaz de recitar a definição correta: “um retângulo é um quadrilátero equiângulo”, sem ter conhecimento das propriedades da figura geométrica, ou construir uma imagem de conceito com propriedades incorretas como: “todo retângulo possui diagonais perpendiculares entre si”.

Para Vinner (1991), em contextos técnicos, a definição de um conceito desempenha um papel relevante. Em particular, no caso da Matemática, um conceito só passa a existir depois de formalmente definido. Embora a teoria da imagem de conceito sugira que a introdução de um conceito matemático através da sua definição formal não é um procedimento pedagogicamente adequado, compreender a definição formal é um dos objetivos a ser perseguido na aprendizagem da Matemática no ensino superior. Demonstrações e identificação de contraexemplos são algumas das tarefas matemáticas típicas em estudos mais aprofundados que só poderão ser realizadas a contento por um estudante que tenha compreendido as definições dos conceitos envolvidos.

Em linhas gerais, Tall e Vinner (1981) indicam que a definição formal de um conceito só é satisfatoriamente compreendida se o aprendiz possui uma imagem de conceito rica e coerente. Quando o estudante não possui uma imagem de conceito rica, mas mesmo assim memorizou a definição formal do conceito, a tendência natural é que diante de uma necessidade, o estudante não faça uso da definição memorizada e, geralmente de modo inadequado, lance mão de outros elementos da imagem de conceito (como analogias com a linguagem habitual). Cornu (1991) e Vinner (ibidem) evidenciaram que este processo provoca diversos prejuízos para a aprendizagem da Matemática em nível universitário.

Baseados na teoria de Tall e Vinner (ibidem), concluímos que a abordagem de um conceito matemático em sala de aula deve possibilitar a formação e o enriquecimento de uma imagem de conceito coerente. Diferentes caminhos pedagógicos podem e devem ser trilhados nesta direção. Ainda nessa perspectiva, observamos que a compreensão da definição formal do conceito não deve sempre ser considerada como ponto de partida e sim um objetivo a ser atingindo.

2.2 RIGOR E INTUIÇÃO NO ENSINO DE CÁLCULO: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Conforme evidenciamos na seção anterior, muitos professores universitários de Matemática acreditam que os elementos que tornam uma teoria matemática consistente (sob o ponto de vista da comunidade de matemáticos profissionais) são imprescindíveis no processo de aprendizado dos conceitos matemáticos. Assim, o encadeamento lógico da teoria tal como a mesma se encontra atualmente, assume um papel de grande relevância na sala de aula. Desta maneira, embora a construção histórico-cultural do conhecimento possa oferecer possibilidades de problematização e reflexão contribuindo para o processo de aprendizagem, ela é costumeiramente dispensada, inclusive em disciplinas introdutórias. Esta postura pode ser consequência de uma concepção de Matemática denominada formalista moderna:

> A concepção formalista moderna manifesta-se na medida em que passa a enfatizar a Matemática pela Matemática, suas fórmulas, seus aspectos estruturais, suas definições (iniciando geralmente por elas), em detrimento da essência e do significado epistemológico dos conceitos. Isto, porque se preocupa exageradamente com a linguagem, com o uso correto dos símbolos, com a precisão, com o rigor, sem dar atenção aos processos que o produzem; porque enfatiza o lógico sobre o psicológico, o formal sobre o social; o sistemático estruturado sobre o histórico [...] (FIORENTINI, 1995, p. 16)

Parece-nos razoável admitir que a concepção formalista moderna, em diferentes níveis de intensidade, se faz presente em muitos livros didáticos de Matemática destinados ao ensino superior e também na formação de uma parte considerável dos professores de Matemática que atuam nas universidades brasileiras. Uma preocupação excessiva com o rigor matemático, revelada tanto em livros didáticos quanto no discurso de professores, nos parece ser um dos reflexos do formalismo moderno em sala de aula.

Em geral, expressões como “definição rigorosa”, “demonstração rigorosa” e “abordagem rigorosa” são evocadas quando se deseja atestar o alto nível de precisão científica com o qual o professor (ou o livro didático) está definindo um conceito, demostrando um resultado ou abordando um conteúdo matemático. Dessa forma, entendemos que seria proveitoso, neste momento, tecermos algumas breves considerações sobre o papel do rigor no Cálculo e no seu ensino.

Inicialmente, gostaríamos de explicitar o significado que adotaremos para as palavras intuição e rigor, extraídos de um dicionário da língua portuguesa[20]. No caso da palavra intuição, temos: "pressentimento, espécie de instinto pelo qual se adivinha, descobre ou conhece o que é ou deve ser". Corroborando com este ponto de vista, Reis (2001, p. 74) esclarece que "[...] intuição é um conhecimento claro e imediato [...]", ou seja, a intuição pode ser entendida como uma espécie de "insight" no qual aspectos de um determinado conhecimento podem ser vislumbrados. Sobre a palavra rigor, encontramos: "concisão, exatidão, precisão".

A intuição sempre desempenhou (e continua desempenhando) um papel fundamental no processo de criação em Matemática. Muitos resultados profundos tiveram sua origem em conjecturas formuladas intuitivamente. Em particular, o Cálculo nos seus primórdios se valeu fortemente do apelo à intuição para justificar muitos resultados fundamentais. Entre os séculos XVII e XVII diversos matemáticos se ocuparam em explorar ao máximo o poder do Cálculo na resolução de importantes questões científicas. Isto não impediu que pesadas críticas fossem direcionadas ao pouco cuidado destinado à estruturação lógica dos conceitos e técnicas do Cálculo.

Observando que não é nosso objetivo realizar uma discussão pormenorizada sobre as críticas tecidas por diversos matemáticos sobre a falta de uma fundamentação rigorosa do Cálculo, apresentamos uma síntese de duas dentre as mais importantes destas críticas:

> Michel Rolle (1652-1719) abriu um debate em julho de 1700, ou seja, logo após as publicações dos trabalhos de Leibniz (1686) e de Newton (1671), que perdurou por dois anos com Varignon (1654-1722). Foram debatidos dois aspectos problemáticos do Cálculo: um com relação aos conceitos e princípios fundamentais e outro referente ao fato de o Cálculo conduzir a erros. No primeiro aspecto, discutia-se a falta de rigor lógico dos conceitos, destacando a falta de fundamentação do infinitamente pequeno e do infinitamente grande (principalmente sobre os diferenciais de ordem superior); os diferenciais de Leibniz, segundo Rolle, podiam ser interpretados tanto como quantidades não nulas determinadas, quanto como zero. Rolle sustentava que no Cálculo o todo era igual à parte, pois uma grandeza x somada ao seu diferencial dx era igual a ela própria; e que, além disto, os diferenciais eram manipulados diferentemente, conforme as necessidades para se atingir a solução do problema (a solução já era conhecida anteriormente). Varignon com base no método Newtoniano, respondeu a essas críticas de Rolle; porém, não satisfatoriamente, pois usou apenas um jogo de palavras que não esclareceu nada. No segundo aspecto, Rolle usou três curvas para calcular máximos e mínimos como exemplos de que o Cálculo conduzia a resultados diferentes da regra de Hudde e de Fermat (todos algébricos). Nesse caso, Varignos respondeu satisfatoriamente, mostrando que Rolle não tinha aplicado o Cálculo corretamente e que não havia diferença entre os três métodos. George Berkley (1685-1753) publicou

[20] Dicionário Contemporâneo da Língua Portuguesa – Caldas Aulete – Editora Delta – Rio de Janeiro – 1974.

> “O Analista” em 1734, no qual criticava os matemáticos incrédulos, que rejeitam a religião, mostrando que os métodos infinitesimais do Cálculo são tão obscuros quanto os mistérios da fé. Suas críticas eram de dois tipos. Os resultados obtidos pelo Cálculo durante os trinta anos passados, já tinham se mostrado seguros e fecundos; assim as críticas de Berkley se dirigiam aos fundamentos, à falta de rigor e tentavam mostrar que esses resultados eram exatos devido a um jogo de compensação de erros. (BRITO E CARDOSO, 1997, p. 138)

As consistentes críticas de Berkley ao lado da necessidade do ensino do Cálculo nas escolas Politécnica e Normal francesas e a separação entre a pesquisa em Física e Matemática motivaram matemáticos como Euler, D’Alembert, Lagrange, Laplace, Cauchy dentre outros, a construírem tentativas de fundamentação do Cálculo. (BRITO e CARDOSO, ibidem).

No século XIX, a atenção dos matemáticos se voltou de modo mais acentuado ainda para uma fundamentação rigorosa das ideias centrais do Cálculo, culminando na chamada Aritmetização da Análise. Os trabalhos de Cauchy, Dedekind e Weierstrass assentaram definitivamente o Cálculo em bases matematicamente sólidas, eliminado quaisquer traços de dúvidas ou imperfeições sobre seus fundamentos. Apelos à intuição e argumentos de natureza geométrica ou física foram abandonados e a aritmética dos números reais se constituiu no alicerce sobre o qual o vasto campo da Análise Matemática foi erguido. (BOYER, 1978 ; COSTA, 1971 ; EVES, 2004)

A busca pela fundamentação rigorosa do Cálculo foi uma das principais atividades matemáticas do século XIX e serviu de modelo para que outros ramos da Matemática também fossem construídos sobre fundamentos rigorosos. Dai em diante, embora o matemático fizesse uso da intuição nas suas pesquisas e conseguisse obter resultados importantes, o seu trabalho só teria valor científico se fosse apresentado de maneira rigorosa. (EVES, 2004 ; LAKATOS, 1978).

Sobre o rigor matemático, Costa (ibidem, p. 188) afirma que:

> [...] um raciocínio é rigoroso, quando, e somente quando forem preenchidas as condições seguintes, formuladas, pela primeira vez por Pasch (1882)[21]:
> 1) Serão apresentados explicitamente as noções primitivas por meio das quais se definirão logicamente todas as outras noções;
> 2) Serão enunciadas explicitamente as proposições primitivas por meio das quais se demostrarão logicamente as outras proposições (teoremas). Essas proposições fundamentais devem ser consideradas como puras relações lógicas entre as noções primitivas, independentemente de qualquer significação concreta que se possa atribuir a essas noções primitivas.
> A demonstração se fará, em seguida, de acordo com os princípios da lógica formal[22], mecanicamente, sem recurso à qualquer elemento que não esteja incluído nas premissas.

---

[21] M. Pasch publicou estas condições na obra intitulada “Vorlessugen uber neure Geometrie”. Esta obra apresenta uma construção axiomática rigorosa da Geometria Euclidiana.

Observemos que o conceito atual de rigor matemático foi explicitado pouco tempo após a Aritmetização da Análise. Isto evidencia que a construção desse conceito não ocorreu subitamente, mas se deu através de um processo reflexivo, para o qual matemáticos de diferentes correntes de pensamento apresentaram relevantes contribuições.

Como um exemplo desse fato, temos a Geometria Euclidiana apresentada na famosa obra[23] "Os Elementos". Tal geometria foi apontada por gerações de matemáticos ao longo de mais de dois milênios como um exemplo quase inquestionável[24] de rigor matemático. Entretanto, na última metade do século XIX, a Aritmetização da Análise e o surgimento das geometrias não euclidianas motivaram um exame mais aprofundado dos fundamentos da Geometria Euclidiana. Costa (1971, p. 185) afirma que:

> A crítica moderna mostrou, entretanto, que os axiomas e postulados enunciados explicitamente por Euclides são insuficientes para a dedução rigorosa[25] dos teoremas. Suas demonstrações contêm numerosos apelos à intuição geométrica, verdadeiras hipóteses tácitas. Essas hipóteses são indispensáveis: suprimindo-as, pode-se demostrar teoremas que contradizem outros teoremas de Euclides.

Dessa maneira, pode-se defender a existência de níveis de rigor. De fato, segundo Costa (ibidem, p. 184) "[...] examinando o conceito de rigor matemático – questão de primordial importância em uma crítica do valor da ciência – nós chegaremos a conclusão de que nunca se atinge senão um rigor relativo".

Habitualmente, o processo de rigorização de uma teoria matemática corresponde ao último estágio de desenvolvimento da mesma. Em determinados casos, este processo pode durar anos e até séculos. Conceitos aparentemente simples como o de número natural, por exemplo, demoraram muitos séculos até serem fundamentados rigorosamente.

Embora atualmente a comunidade matemática aceite universalmente a necessidade de um determinado nível de rigor na validação de resultados obtidos em pesquisas, o papel da intuição no processo criativo do matemático continua sendo de fundamental importância. Assim, refletir sobre o papel da intuição e do rigor no ensino-aprendizagem da Matemática se configura em objeto de considerável importância para os educadores matemáticos.

Voltando nossa atenção especificamente para o caso do Cálculo, Reis (2001, p. 74) afirma que "[...] a intuição deveria, obrigatoriamente, estar presente no processo de ensino-

---

[22] Costa (ibidem) afirma que essa lógica formal é uma lógica dedutiva muito mais complexa que a doutrina tradicional de Aristóteles e da Escolástica e seus princípios foram evidenciados em trabalhos matemáticos que se realizaram durante a Aritmetização da Análise e sofreram influência direta desta.

[23] Escrita por Euclides de Alexandria em torno do ano 300 A.C.

[24] Possivelmente o único questionamento dizia respeito ao chamado axioma das paralelas.

[25] De acordo com a atual concepção de rigor.

aprendizagem do Cálculo [...]". No entanto, muitos professores provavelmente motivados pela exigência de rigor na apresentação de pesquisas em Matemática, acreditam que uma abordagem intuitiva serve apenas para diminuir o valor matemático do conceito estudado e não contribui para a formação matemática do estudante.

Diante do exposto até aqui, acreditamos que o conceito de rigor deve ser considerado inserido dentro de um determinado contexto histórico, social e cultural, abrindo a possibilidade da existência de diferentes níveis de rigor, mesmo no universo da Matemática profissional. Nesse sentido, Grattan – Guiness (1997, p. 81) afirma que "[...] a História da Matemática ensina muito claramente que, de fato, o rigor se dá em níveis, os quais, portanto, devem ser especificados antes de se avaliar o trabalho matemático do estudante".

Nessa direção, ao assumir que existem diferentes níveis de rigor, o professor deve considerar o perfil dos estudantes, refletindo sobre seu grau de amadurecimento matemático e sua área de formação, bem como os objetivos do curso que está ministrando e efetuar a "avaliação de qual nível de rigor é conveniente atingir sem que, com isso, se perca o sentido e a real compreensão das ideias matemáticas". (REIS, ibidem, p. 78).

Como parte de sua pesquisa de doutorado, Reis (ibidem) discutiu de modo bastante aprofundado a relação tensional entre intuição e rigor no ensino de Cálculo e Análise Real e dentre outras coisas, entrevistou os renomados e experientes professores Geraldo Ávila, Elon Lages Lima, Djairo Figueiredo e Roberto Baldino. A opinião dos quatro professores sobre o nível de rigor que deve ser utilizado numa disciplina introdutória de Cálculo foi unânime: os conceitos de derivada e integral devem ser abordados da maneira clara e intuitiva. A ênfase deve ser dada para a compreensão dos conceitos. Sempre que possível, aplicações devem ser trabalhadas e o estudo rigoroso da teoria dos limites segundo a definição épsilon-delta de Weierstrass pode ser feito em uma disciplina mais aprofundada. Reis (ibidem) defende ainda que uma abordagem intuitiva de um conceito matemático, não significa necessariamente afastar-se totalmente do rigor, mas escolher um nível adequado deste. É nessa perspectiva que concebemos o ensino introdutório do Cálculo e construímos nossa pesquisa.

2.3 A NECESSIDADE DE LIDAR COM A VARIAÇÃO DE GRANDEZAS: OS PRINCIPAIS PROBLEMAS QUE MOTIVARAM O SURGIMENTO DO CÁLCULO

Nesta seção, não pretendemos apresentar um estudo aprofundado sobre o desenvolvimento histórico do Cálculo. Apenas desejamos evidenciar que o Cálculo surgiu como uma poderosa ferramenta matemática para resolver uma ampla classe de problemas relacionados à variação de grandezas. Esse poder foi ampliado ao longo dos últimos quatro séculos e continua sendo fundamental em muitas ciências atualmente.

Para Courant e Robbins (2000, p. 481), “com absurdo simplismo, a invenção do Cálculo é algumas vezes atribuída a dois homens, Newton e Leibniz. Na realidade, o Cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz; ambos, porém, desempenharam papel decisivo”. Nessa perspectiva, seria injusto negar a contribuição fundamental de diversos matemáticos para a criação do Cálculo.

De acordo com Kline (1985), a busca pela solução de quatro grandes problemas científicos impulsionou de maneira decisiva o surgimento do Cálculo no século XVII. De alguma forma, tais problemas estavam relacionados ao estudo do movimento de corpos ou a variação de quantidades físicas.

O primeiro desses problemas consistia na determinação da velocidade e da aceleração de corpos em movimento, quando se conhecia a posição do corpo em cada instante de tempo. Em diversas situações, a velocidade pode não ser constante, dificultando sua determinação. O movimento dos planetas ao redor do sol e de corpos em queda livre ou arremessados nas proximidades da superfície terrestre são alguns exemplos dessa situação. O problema inverso, ou seja, sendo conhecida a velocidade (ou aceleração) de um corpo em movimento em cada instante, determinar a posição (ou velocidade) do corpo também era importante e deveria ser considerado.

O segundo problema estava relacionado à determinação da direção na qual um projétil em voo está se movendo em um instante qualquer. Além de possibilitar determinar se o projétil atingirá ou não seu alvo, sabia-se que esta direção determina as componentes horizontal e vertical da velocidade. No entanto, a direção do movimento é geralmente variável de um instante para outro, provocando dificuldades para sua determinação.

O terceiro problema dizia respeito à determinação de valores máximos ou mínimos de uma função dada. O alcance horizontal máximo de um projétil, as dimensões mínimas de um recipiente de formato e volume fixos e área máxima de uma figura geométrica de perímetro dado são exemplos de algumas situações relevantes relacionadas a este problema.

O quarto problema consistia em encontrar volumes, áreas e comprimentos em situações nas quais os métodos disponíveis até então não poderiam ser aplicados. Por exemplo, na medida em que os planetas do sistema solar possuem órbitas elípticas, um problema relevante consistia em determinar o comprimento da órbita percorrida em um determinado intervalo de tempo. De modo geral, este problema sugere a seguinte questão: Como calcular o comprimento de uma elipse? Outro exemplo importante se dá na determinação do volume da Terra, considerando que sua forma não é a de uma esfera, mas de um esferoide achatado nos polos.

Os três primeiros problemas[26] que citamos acima foram resolvidos através do conceito de derivada e de suas interpretações como uma medida da variação instantânea (no caso do primeiro problema) e como coeficiente angular da reta tangente (no caso do segundo e do terceiro problema). Discutiremos um pouco mais essas interpretações da derivada na seção seguinte. O quarto problema foi resolvidos através do conceito de integral. Não aprofundaremos discussões sobre a integral, visto que estaríamos nos distanciando consideravelmente do escopo deste trabalho.

2.4 TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA DE UMA FUNÇÃO: A DERIVADA

Nesta seção, apresentaremos o conceito de derivada como uma medida de variação. Utilizaremos o conceito de velocidade como motivação. Não discutiremos aspectos relacionados à teoria dos limites. As regras de derivação não serão exploradas, mas exibiremos uma técnica para o cálculo de derivadas de funções polinomiais.

Antes de abordarmos a derivada, vamos nos deter um pouco no conceito de taxa de variação média de uma função. Para ilustrar nossas ideias, consideremos uma função[27] f definida no conjunto dos números reais e assumindo valores reais. Dado um determinado intervalo real I = $[x_1, x_2]$, a taxa de variação média de f relativa a I, é definida por:

$$V = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ou ainda, sendo $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ e $\Delta x = x_2 - x_1$, temos:

[26] A segunda parte do primeiro problema foi resolvida a partir da relação inversa entre derivada e integral.
[27] Neste texto, estaremos considerando apenas funções reais de variável real.

$$V = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Observemos que Δx é o acréscimo positivo de x, quando x varia de x_1 até x_2. Assim, podemos escrever $x_2 = x_1 + \Delta x$. Daí, também podemos escrever:

$$V = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

No caso particular onde *f* determina a posição de um móvel em função do tempo, a taxa de variação média relativa ao intervalo $I=[t_1, t_2]$ é usualmente denominada velocidade média[28] entre os instantes t_1 e t_2.

Embora não seja adequado falar em velocidade quando a função *f* não representa a posição de um móvel em função do tempo, de maneira geral, a taxa de variação média fornece uma medida da "rapidez" com a qual *f* está variando no intervalo considerado. Para explicitar melhor isso, suponhamos que a temperatura em um determinado dia de certa localidade foi anotada a cada hora, a partir da meia-noite e os dados obtidos estão na tabela abaixo:

Horas (após a meia-noite)	Temperatura (em graus Celsius)
0	19
1	18,5
2	18,3
3	17,2
4	17,1
5	17,1
6	17,5
7	18
8	20
9	23,5
10	25
11	27
12	30

[28] O conceito de velocidade média introduzido por Isaac Newton no século XVII motivou a definição de taxa de variação média no caso geral.

É bastante admissível admitir que, neste caso, a temperatura é uma função do tempo. Podemos, por exemplo, calcular a taxa de variação média da temperatura quando o tempo varia da meia-noite até quatro horas da manhã:

$$V = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{17{,}1 - 19}{4 - 0} = -0{,}475\ {}^{o}C/hora$$

Isto significa que no intervalo de tempo considerado, a temperatura decresceu (pois a variação obtida foi negativa) em média 0,475^{o}C por hora. Observemos que a unidade de medida para a taxa de variação média $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a unidade de Δy dividida pela unidade de Δx, ou seja, graus Celsius por hora.

Utilizando ainda a mesma tabela e calculando a taxa de variação média da temperatura entre sete horas da manhã e o meio dia, temos:

$$V = \frac{f(12) - f(7)}{12 - 7} = \frac{30 - 18}{5} = 2{,}4\ {}^{o}C/hora$$

O significado do valor obtido para V é análogo ao caso anterior: No intervalo considerado, a temperatura aumentou (variação positiva) em média 2,4^{o}C por hora.

Os resultados obtidos permitem concluir temperatura variou mais rapidamente na segunda situação, pois a taxa de variação média obtida neste caso foi maior (em módulo) do que a variação média obtida no primeiro caso.

A taxa de variação média admite uma interpretação geométrica. Sabemos da Geometria Analítica que o coeficiente angular *m* da reta que contém os pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q\big(x_2, f(x_2)\big)$, pertencentes ao gráfico de uma função *f* , é dado por:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Assim, a taxa de variação média de *f* relativa ao intervalo $[x_1, x_2]$é numericamente igual ao coeficiente angular da reta que contém os pontos P e Q e é secante ao gráfico de *f*, conforme pode ser visualizado na figura a seguir:

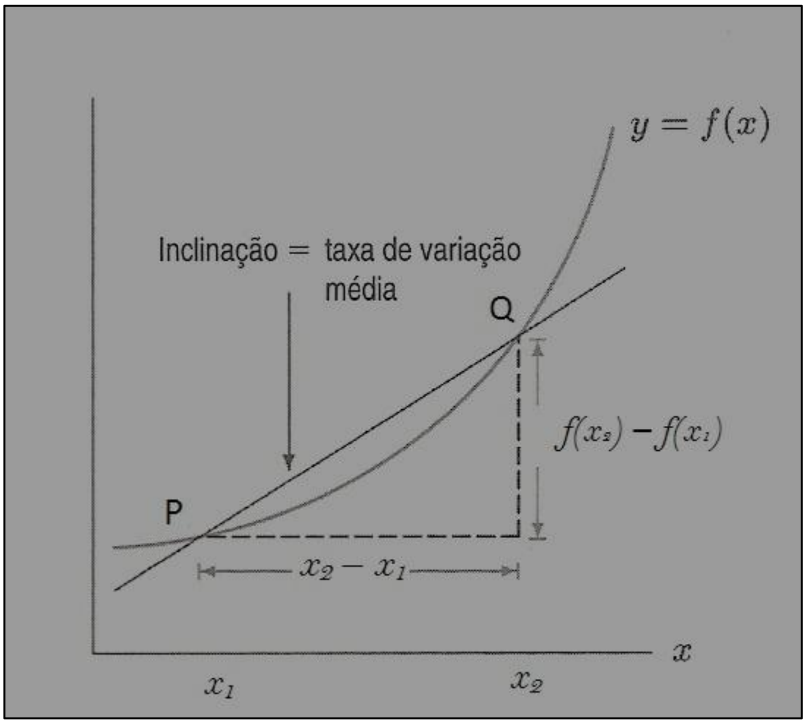


Figura 1: Interpretação geométrica da taxa de variação média.
Fonte: Hughes – Hallett; Et al (2005).

Conforme observa Kline (1985, p. 367), embora a taxa de variação média de uma função seja útil em inúmeras situações que podem surgir nos mais diversos campos científicos, em determinados casos ela pode apresentar limitações:

> Se um indivíduo viajando em um automóvel atinge uma árvore, não é a velocidade média considerada durante o tempo de viagem desde o ponto de partida até o choque com a árvore que realmente tem importância. É a sua velocidade no **instante** [29]da colisão, que determina se ele vai ou não sobreviver ao acidente. Temos aqui uma velocidade instantânea, ou a taxa de variação instantânea da distância em relação ao tempo. (Trad. nossa)

O problema de definir e calcular a velocidade instantânea de um móvel foi enfrentado por diversos matemáticos do século XVII, dentre os quais destacamos René Descartes, Pierre de Fermat, John Wallis, Isaac Barrow e Christiaan Huygens. Estes e outros matemáticos apresentaram contribuições importantes para uma solução deste problema. Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Von Leibniz desenvolveram métodos gerais que permitiram a completa resolução não somente do problema da velocidade instantânea, mas de questões como o

[29] Negrito nosso.

traçado de retas tangentes e a determinação de máximos e mínimos de funções[30]. (KLINE, 1985)

Segundo Ávila (2003, p. 79) "[...] Newton, preocupado com seus estudos de Mecânica, foi levado a introduzir a derivada para caracterizar a velocidade instantânea de um corpo". De modo semelhante ao ocorrido com a taxa de variação média, o conceito de taxa de variação instantânea pode ser generalizado e estendido para contextos que não tratam especificamente do movimento de corpos, ampliando de maneira significativa sua relevância.

Voltemos agora ao problema da velocidade instantânea. Para ilustrar nosso raciocínio, vamos imaginar a situação na qual uma pedra é abandonada em queda livre a uma altura de 200 metros. Desprezando a resistência do ar, desejamos determinar a velocidade da pedra no instante t (dado em segundos) após o início da queda. Conforme Stewart (2006, p. 90) afirma, Galileu Galilei comprovou experimentalmente que "a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional[31] ao quadrado do tempo que ele esteve caindo". Se a posição (em metros) da pedra no instante t $(0 \leq t \leq 6{,}4)$[32] for chamada de $f(t)$, de acordo com a lei de Galileu temos:

$$f(t) = 4{,}9t^2$$

Assim, podemos calcular a velocidade média V_m entre os instantes[33] t e $t + \Delta t$, onde Δt representa um acréscimo positivo no tempo. Aplicando a definição de velocidade média obtemos:

$$V_m = \frac{4{,}9(t + \Delta t)^2 - 4{,}9t^2}{(t + \Delta t) - t}$$

Ou seja,

$$V_m = \frac{4{,}9t^2 + 9{,}8t\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2 - 4{,}9t^2}{\Delta t}$$

Portanto,

$$V_m = \frac{9{,}8t\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

---

[30] Para mais detalhes sobre o desenvolvimento histórico do Cálculo, o leitor interessado pode consultar Boyer (1959 ; 1996), Eves (2004) e Rêgo (2000).
[31] A constante de proporcionalidade é 4,9 e é numericamente igual à metade da aceleração gravitacional terrestre.
[32] Na situação considerada, a pedra toca o solo aproximadamente 6,4 segundos após o início da queda.
[33] Pelo motivo exposto na nota anterior, temos $0 \leq t < t + \Delta t < 6{,}4$.

Como esta expressão é válida para $\Delta t \neq 0$, podemos dividir o numerador e o denominador do lado direito da igualdade por Δt, encontrando o seguinte resultado:

$$V_m = 9{,}8t + 4{,}9\Delta t$$

Supondo Δt muito pequeno (ou seja, muito próximo de zero), a parcela $4{,}9\Delta t$ também será pequena, e pode ser desprezada. Neste caso, dizemos que tanto Δt quanto $4{,}9\Delta t$ tendem a zero e escrevemos $\Delta t \to 0$ e $4{,}9\Delta t \to 0$, respectivamente. Observemos que assumir que Δt é muito pequeno, é equivalente a assumir que os instantes t e $t + \Delta t$ são muito próximos. Uma boa aproximação para a velocidade no instante t seria dada pela expressão $9{,}8t$ e essa aproximação seria tão melhor quanto mais próximo de zero for o valor de Δt.

Pensando desta maneira, é razoável admitir que a velocidade $V(t)$ de um móvel no instante t é aproximadamente igual à sua velocidade média entre os instantes t e $t + \Delta t$, para Δt muito próximo de zero. Este raciocínio motiva definirmos a velocidade instantânea $V(t)$ como o valor da velocidade média entre os instantes t e $t + \Delta t$, com $\Delta t \to 0$. Voltando ao nosso exemplo, a velocidade da pedra no instante t é $V(t) = 9{,}8t$. No caso geral, podemos usar a seguinte notação:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A notação acima pode ser lida da seguinte maneira: a velocidade instantânea é igual ao limite[34] do quociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero ($\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$ é a variação da posição do móvel entre os instantes t e $t + \Delta t$).

Uma questão importante pode ser colocada neste momento: o método[35] que usamos para calcular a velocidade instantânea da pedra sempre pode ser aplicado ? Embora a resposta seja positiva, quando a função não é polinomial (trigonométrica ou exponencial, por exemplo) necessita-se de técnicas mais específicas[36] que não serão tratadas aqui. O leitor interessado em pode consultar Ávila (2003) ou Stewart (2006).

---

[34] Para um estudo mais aprofundado do conceito de limite, consultar, por exemplo, Lima (2006) e Rezende (1994).

[35] Chamado de "método dos incrementos". (Kline, 1985)

Analogamente ao ocorrido com a velocidade média, quando f é uma que não relaciona posição de um móvel e tempo, não é apropriado falar em velocidade instantânea. Nesses casos, temos a derivada de f ponto x_0, definida por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Conforme D'Ambrosio (1975, p. 32-33) afirma:

> A derivada é um número, obtido como o limite acima. Naturalmente, este número depende não só da função $f(x)$ mas também do ponto x_0, perto do qual se quer aproximar a função. Portanto, para cada x_0 temos um valor $f'(x_0)$, isto é, temos uma função $f'(x)$ com o mesmo campo de definição da $f(x)$ e que chamamos também derivada de $f(x)$. No caso de uma função admitir uma derivada num ponto x_0, como é o caso dos polinômios, por exemplo, diremos que a função é diferenciável no ponto x_0.

Continuando com a analogia em relação à taxa de variação média, a derivada de uma função fornece uma medida da rapidez com a qual f está variando no ponto x_1. Por esta razão, também é comum o uso da expressão "taxa de variação instantânea" para fazer referência à derivada de uma função f. Esta interpretação da derivada como uma medida de variação é de grande importância em diversos ramos da ciência. De fato, para Stewart (2006, p. 206):

> As taxas de variação[37] ocorrem em todas as ciências. Um geólogo se interessa em saber a taxa na qual uma massa de rocha fundida resfria através da condutividade térmica com o meio rochoso que a envolve. Um engenheiro quer saber a taxa segundo a qual a água flui para dentro ou fora de um reservatório; um geógrafo está interessado na taxa de variação da densidade populacional em uma cidade à medida que aumenta a distância de seu centro; um meteorologista está interessado na taxa de variação da pressão atmosférica em relação à altura.

O leitor interessado em mais detalhes pode consultar, por exemplo, Kline (1998), Stewart (ibidem) ou Hughes – Hallett et al (2005).

Consideremos agora o problema que consiste em determinar a reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto P cujas coordenadas são a e $f(a)$. Seja Q outro ponto do gráfico de f, de coordenadas dadas por $a + h$ e $f(a+h)$. Desta forma, o coeficiente angular m_s da reta secante determinada pelos pontos P e Q é:

$$m_s = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

[37] A taxa de variação instantânea às vezes é chamada de taxa de variação.

Suponhamos que o pronto P permanece fixo e o ponto Q vai aproximando-se de P, ocupando as posições Q_1, Q_2, Q_3 e assim sucessivamente, conforme mostra a figura a seguir:

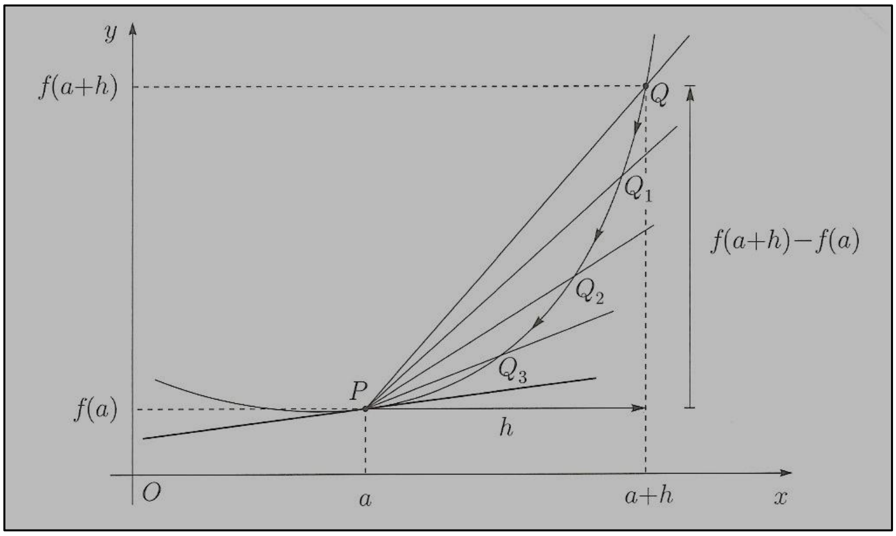


Figura 2: A tangente aproximada por secantes.
Fonte: Ávila (2003)

Não é difícil perceber que à medida que Q se aproxima de P, o número h fica cada vez menor. Dessa forma, a reta secante PQ vai assumindo as posições $PQ1$, $PQ2$, $PQ3$, etc. Para Q muito próximo de P (ou seja, para h muito próximo de zero), é razoável esperar que o coeficiente angular m_s da reta secante fique próximo de um determinado número real que denotaremos por m_t . Nessas condições, temos:

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(h)}{h}$$

Este raciocínio justifica a seguinte definição: A reta tangente ao gráfico de *f* no ponto P é a reta que passa por P e tem o coeficiente angular igual a m_t. Observemos que m_t é a derivada de f no ponto de abscissa a. Notemos ainda que a tangente é a posição limite da reta secante PQ quando Q se aproxima de P.

Como exemplo, vamos determinar a reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ no ponto P(1, 1), temos:

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$

Ou seja,

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} h + 2 = 2$$

De posse do coeficiente angular e de um ponto pertencente à reta tangente, obtemos sua equação:

$$y = 2x - 1$$

A figura abaixo ilustra essa situação:

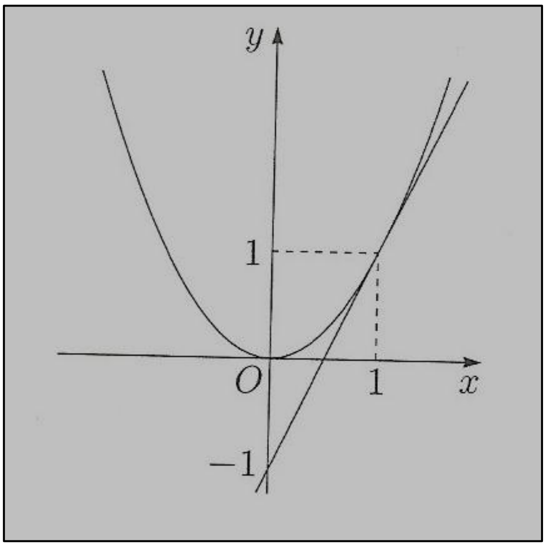


Figura 3: Reta tangente à parábola $y = x^2$ passando por P(1, 1)
Fonte: Ávila (2003).

Observando a figura acima, notemos que o gráfico de f parece "confundir-se" com a reta tangente nas proximidades do ponto P(1, 1). De fato, a função $g(x) = 2x - 1$ é uma aproximação muito boa para a função $f(x) = x^2$ para valores de x próximos de 1. Este fato notável vale em geral: se uma função f admite derivada num ponto de abscissa x_0, então esta função pode ser aproximada nas proximidades de x_0 por uma função linear que é precisamente a reta tangente. Nesse sentido, D'Ambrosio (1975, p. 27) afirma que "uma das técnicas mais importantes em Matemática consiste em linearizar, isto é, substituir umas funções por outras que "aproximem" a dada função e que sejam lineares". Isto evidencia que a derivada pode ser utilizada na resolução de diversos tipos de problemas e possui muitas aplicações na Matemática e nas outras ciências.

CAPÍTULO 3
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 NATUREZA DA PESQUISA

Conforme explicitamos na introdução deste trabalho, inquietações que insurgiram a partir de reflexões que realizamos a respeito da nossa prática docente, despertaram o desejo de compreender com mais profundidade a sala de aula de Matemática do ensino superior. Nesse sentido, direcionamos nossa atenção para o Cálculo Diferencial e elencamos o ensino-aprendizagem do conceito de derivada como nosso objeto de investigação. Assim, nossa pesquisa consistiu na elaboração, aplicação em sala de aula e análise de uma proposta metodológica que permitisse a conceitualização da derivada como uma medida de variação, tomando por referência pesquisas sobre ensino e aprendizagem do Cálculo e princípios da Engenharia Didática.

Optamos por aplicar a proposta metodológica elaborada na nossa própria sala de aula, entendendo que este procedimento poderia ocasionar oportunidades de reflexão (na perspectiva do pesquisador) sobre nossa prática pedagógica. Conhecendo a enorme complexidade da realidade sobre a qual nossa pesquisa se debruçaria, escolhemos uma abordagem investigativa de cunho qualitativo. De acordo com Ludke e André (1986), a pesquisa qualitativa pode proporcionar uma imersão intensa nos processos que ocorrem em determinada realidade, contribuindo para uma compreensão aprofundada de tais processos. Na próxima seção, apresentaremos em detalhes como se deu a construção e análise dos dados, evidenciando o caráter qualitativo do nosso trabalho.

Classificamos nossa investigação como uma Pesquisa Pedagógica no sentido proposto por Lankshear e Knobel (2008). Segundo os mesmos autores, as seguintes características (presentes na nossa pesquisa) configuram uma Pesquisa Pedagógica: 1º A Pesquisa Pedagógica é de natureza qualitativa, porém, existe a possibilidade da utilização de dados quantitativos; 2º A finalidade da Pesquisa Pedagógica é a compreensão de fenômenos ligados à sala de aula em determinado contexto, mas seus métodos podem não ficar restritos apenas a observação direta da sala de aula; 3º Professores-pesquisadores, ou seja, aqueles que investigam sua própria prática ou de outros professores, podem pertencer a programas de Pós-graduação, tornando essa modalidade de pesquisa também acadêmica, contribuindo para o desenvolvimento profissional do professor-pesquisador.

Ainda de acordo com Lankshear e Knobel (2008), essa modalidade de pesquisa também objetiva a melhoria do ensino-aprendizagem, colaborando com a formação do aluno e permitindo uma percepção mais clara do papel do professor enquanto mediador na construção do conhecimento em sala de aula.

3.2 CONTRIBUIÇÕES DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Para Artigue (1996), a Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa[38], é um esquema experimental, baseado em realizações didáticas na sala de aula, tratando da concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino. Douady (1993, apud Machado, 2010, p. 234) observa que o termo Engenharia Didática pode ser entendido como sendo:

> [...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações alunos e em função das escolhas e decisões do professor.

Nesse sentido, a Engenharia Didática consolidou-se dentro da Didática da Matemática de influência francesa, com essas duas funções: Uma produção para o ensino-aprendizagem e uma metodologia de pesquisa. (MACHADO, 2010).

No que diz respeito à metodologia de pesquisa, Almouloud (2007, p. 171), assevera que “a Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito”. Considerando estes pressupostos, entendemos que a Engenharia Didática poderia contribuir para a construção da nossa pesquisa e buscamos inspiração em alguns de seus princípios, os quais serão devidamente especificados a seguir.

[38] Pais (2001) classifica a Engenharia Didática como uma técnica de pesquisa.

Uma Engenharia Didática é composta por quatro fases. Baseando-nos em Almouloud (2007), descreveremos suscintamente[39] cada uma dessas fases, destacando a presença das mesmas no contexto da nossa pesquisa.

1ª Fase: Também chamada de análises preliminares, onde o pesquisador realiza basicamente:

- Estudos da organização matemática e/ou didática do conceito a ser explorado, contemplando as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas;
- Consultas à literatura disponível sobre sua questão de pesquisa
- Uma definição da questão de pesquisa;
- Formulação de hipóteses;
- A escolha dos fundamentos teóricos e metodológicos que nortearão a execução das fases seguintes da pesquisa.

Convém destacar que esta fase pode não se limitar apenas ao momento inicial da pesquisa. Dependendo do andamento da investigação, o pesquisador pode retornar às análises preliminares, aprofundando, alterando ou acrescentando elementos. (MACHADO, 2010 ; PAIS, 2001).

Nas nossas análises preliminares, procurarmos estudar diversos trabalhos (artigos, dissertações, teses e livros) relacionados com o nosso objeto de pesquisa: O ensino e a aprendizagem do conceito de derivada. Conversamos informalmente com alguns professores e alunos sobre dificuldades de aprendizagem, práticas docentes e perspectivas sobre melhorias no ensino do Cálculo e realizamos nossas escolhas teórico-metodológicas. Os dois primeiros capítulos deste trabalho apresentam uma síntese das análises preliminares.

2ª Fase: Construção da sequência de ensino e de uma análise a priori. Neste momento, visando atingir seu objetivo de pesquisa e considerando o quadro teórico-metodológico levantando na fase anterior, o pesquisador desenvolve uma sequência de ensino na qual:

- Os alunos são capazes de compreender facilmente dos dados dos problemas propostos e seus conhecimentos são suficientes para resolver apenas uma parte dos problemas;
- Os conhecimentos, objetos finais de aprendizagem, são as ferramentas utilizadas para a resolução completa das atividades;
- As atividades propostas devem proporcionar condições para que ocorra um aprendizado construtivo e significativo;

[39] O leitor interessado em mais detalhes pode consultar, por exemplo, Almouloud (2007), Artigue (1996) ou Machado (2010).

- As atividades devem auxiliar o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, da capacidade de argumentação e de habilidades como ler, interpretar e utilizar diferentes representações matemáticas.

Na elaboração da análise a priori, o pesquisador descreve as atividades que comporão a sequência de ensino, evidenciando seus objetivos e tenta antecipar alguns comportamentos dos alunos em relação à estratégias de resolução e/ou dificuldades durante a realização da sequência didática. A análise a priori é de fundamental importância para a pesquisa, já que a validação da sequência de ensino decorre como consequência do confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori.

No próximo capítulo, apresentaremos nossa sequência didática, composta por sete atividades, cada uma contendo um conjunto de problemas. A análise a priori também será explicitada.

3ª Fase: Experimentação. O pesquisador vai à sala de aula aplicar a sequência de ensino.

Nossa sequência didática foi aplicada a uma turma de 27 alunos que cursavam a disciplina Cálculo I no terceiro semestre da Licenciatura em Matemática de uma instituição pública de ensino, onde o professor da turma é o próprio pesquisador. Todos os alunos já haviam estudado em semestres anteriores conceitos básicos de Geometria Analítica e funções reais elementares.

A ementa da referida disciplina previa o estudo dos seguintes conceitos: Limites, derivadas, regras de derivação, velocidade instantânea e reta tangente e taxas de variação. Assumimos que o estudo do conceito de limite não necessariamente deve anteceder o estudo do conceito de derivada e iniciamos o semestre letivo 2011.2 aplicando a sequência de ensino.

Esta aplicação aconteceu durante o horário usual de aula, em cinco encontros semanais, cada um durando entre duas horas e duas horas e meia, totalizando dezoito horas-aula. A divisão do tempo se deu como segue:

19/08/2011: Aplicação da atividade 1 e discussão das respostas;
26/ 08/ 2011: Aplicação das atividades 2 e 3 e discussão das respostas;
02/09/2011: Aplicação das atividades 4 e 5 e discussão das respostas da atividade 4;
09/09/2011: Aplicação da atividade 6 e discussão das respostas das atividades 5 e 6;
16/09/2011: Aplicação da atividade 7 e discussão das respostas.

As pesquisas de Dall'Anese (2000) e D'Avloglio (2002) inspiraram a metodologia que adotamos em sala de aula. Com a intenção de proporcionar uma maior interação entre os alunos, optamos pela realização do trabalho em 12 duplas e um trio (cuja formação não sofreu a interferência do pesquisador) que trabalharam isoladamente umas das outras. Um dos alunos eventualmente pode ter assumido a postura de "´líder" da dupla, mas o pesquisador orientou que as respostas das atividades deveriam ser discutidas entre a dupla. Durante a realização das atividades, o pesquisador interagiu com os alunos apenas para dirimir pequenas dúvidas em relação a algumas atividades. Maiores informações sobre essa interação serão apresentados no quinto capítulo do presente trabalho.

O uso de calculadoras não científicas foi permitido. Durante a realização das atividades, cada aluno recebeu duas fichas idênticas, contendo os problemas trabalhados em sala de aula. Orientamos os alunos para que respondessem as duas fichas e nos devolvessem uma delas. A outra ficha ficou com a dupla, para anotações, questionamentos ou correções no momento de discussão das respostas.

As respostas para todos os problemas propostos foram discutidas em sessões plenárias. O pesquisador estimulou a participação dos alunos nas discussões. Durante esse momento, realizamos anotações no nosso diário de campo. Ao final de cada sessão, o pesquisador destacava e organizava os conhecimentos mobilizados. No capítulo cinco, traremos mais detalhes destas sessões.

4ª Fase: Análise a posteriori e validação. Na análise a posteriori, a comparação entre os dados coletados durante a aplicação da sequência didática e a análise a priori é feito. A validação da sequência de ensino decorre justamente desta comparação. Dependendo dos objetivos do pesquisador, outras ferramentas metodológicas (como aplicação de questionários e entrevistas) podem ser usadas nesta fase.

No capítulo cinco, aprestamos nossa análise a priori, a qual indicou que nossa sequência de ensino contribuiu para o aprendizado do conceito de derivada.

CAPÍTULO 4

A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE A PRIORI

Neste capítulo, apresentaremos cada uma das atividades da sequência didática que elaboramos, acompanhadas por uma análise a priori.

ATIVIDADE 1

Durante uma experiência científica, o peso de uma pessoa foi medido em boa parte da sua vida. Os dados obtidos foram organizados na tabela abaixo:

Idade (anos)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Peso(kg)	37,3	56,6	65,2	79,2	75,3	78,3	82,4	75,1	72,7	70	72,2

1) Quantos quilogramas essa pessoa ganhou de peso entre os 15 e 20 anos de idade ?

2) Qual foi a variação do peso dessa pessoa entre seus 25 e 30 anos de idade ?

3) Calcule a variação do peso da pessoa entre 35 e 40 anos e entre 45 e 50 anos.

4) Quantos quilogramas a pessoa perdeu entre os 50 e 55 anos ? Qual a variação do peso entre 50 e 55 anos ?

5) Tente justificar porque a variação de peso entre os 50 e 55 anos foi negativa. Justifique também porque a variação de peso ocorrida entre 15 e 20 anos foi positiva.

6) Calcule a variação do peso entre 10 e 15 anos e entre 20 e 25 anos. Em qual destes períodos você acha que a pessoa ganhou peso mais depressa ? Justifique sua resposta.

7) Considerando cada um dos períodos de 5 anos apresentados na tabela, em qual deles a pessoa emagreceu mais depressa ? Justifique sua resposta.

8) A tabela apresentada mostra uma relação de dependência entre peso e idade. Podemos dizer, neste caso, que o peso é dado em função da idade ? (ou seja, tal relação de dependência é uma função ?) Justifique sua resposta.

ANÁLISE A PRIORI

Nesta atividade, desejamos que os alunos se habituem a situações onde se faz presente a variação de uma determinada grandeza em relação a um dado intervalo de tempo (que neste caso é constante).

Apesar da ausência de gráficos ou fórmulas, esperamos que os alunos percebam a existência de uma função relacionando idade e peso de certo indivíduo. Não descartamos a possibilidade da existência da tal função não ser observada por boa parte dos alunos. Este fato pode ser provocado pela ênfase predominante no ensino tradicional de funções onde a existência de uma função está fortemente vinculada à apresentação de uma fórmula ou um gráfico. Ou seja, existe uma confusão entre a função e suas possíveis representações. Também existe a possibilidade de alguns alunos tentarem esboçar um gráfico a partir da tabela dada.

Também desejamos que os alunos notem que a variação de uma grandeza pode ser positiva (caso haja acréscimo) e negativa (caso haja decréscimo), não sendo necessariamente constante. Outro fato importante que os alunos devem observar é que a ideia de variação pode ser útil para estimar quando uma grandeza está crescendo (ou decrescendo) mais rapidamente, permitindo realizar comparações entre intervalos de tempo de mesma amplitude.

Esperamos ainda que os alunos concluam que a variação de uma grandeza relativa a um determinado intervalo de tempo é obtida fazendo a subtração “valor final” menos “valor inicial”

Passemos agora a análise das questões:

- Na questão 1, esperamos que os alunos não encontrem dificuldades e através da subtração 65,2 kg – 56,6 kg obtenham a reposta correta: 8,6 kg.

- Nas questões 2, 3 e 4 esperamos que os alunos notem a relação entre a variação de peso ser positiva ou negativa e o fato de o peso aumentar ou diminuir, respectivamente. Acreditamos que os cálculos sejam efetuados de modo análogo a questão 1 e não desprezamos a possibilidade de que os valores negativos obtidos para a variação do peso (entre 25 e 30 anos na questão 2 , entre 45 e 50 anos na questão 3 e entre 50 e 55 anos na questão 4) levem os alunos a considerar como resposta correta o módulo da variação, desprezando o significado do sinal negativo.

- Na questão 5, esperamos que os alunos justifiquem suas respostas observado que quando o peso diminui, a variação é negativa e quando o peso aumenta, a variação é positiva.

- Na questão 6, esperamos que os alunos façam os cálculos para determinar as variações pedidas e afirmem que o aumento de peso foi mais rápido entre os 10 e 15 anos, já que nesse intervalo de tempo a variação de peso foi maior e os intervalos de tempo considerados nas duas situações são iguais a 5 anos. É provável também que alguns alunos justifiquem que o aumento de peso entre os 10 e 15 anos foi mais rápido sem fazer observações sobre a igualdade da amplitude dos intervalos de tempo considerados.

- Na questão 7, esperamos obter resultados análogos aos obtidos na questão 6. Caso os alunos não cometam erros ao calcular as variações, a resposta deve ser obtida corretamente (entre 40 e 45 anos) e justificada pelo fato de ter ocorrido nesse período a maior variação negativa do peso.

- Na questão 8, é provável que a maior parte dos alunos responda que se trata sim de uma função mas não apresentem justificativa. Acreditamos também que alguns alunos respondam que a relação apresentada na tabela não é uma função, usando como justificativa o fato de que não foi dada uma fórmula que permita obter o peso a partir da idade. Esperamos que poucos alunos respondam que se trata de uma função e justifiquem observando que a cada valor da idade existe associado um único valor do peso.

ATIVIDADE 2

Considere novamente a tabela que relaciona peso e idade apresentada na atividade anterior:

Idade (anos)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Peso(kg)	37,3	56,6	65,2	79,2	75,3	78,3	82,4	75,1	72,7	70	72,2

Se representarmos o peso por p, podemos representar a variação de peso por Δp. Do mesmo modo, chamando a idade de i, Δi representa a variação da idade.

1) No intervalo de tempo entre i = 10 e i = 25, qual é o valor de Δi ?
2) No intervalo de tempo entre i = 10 e i = 25, qual é o valor de Δp ?
3) Qual unidade de medida deve ser usada para a razão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$?
4) Qual é o valor da razão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$ quando i varia de 10 até 25 anos ?
5) Calcule $\frac{\Delta p}{\Delta i}$ no intervalo de 10 a 15 anos, no intervalo de 15 a 25 anos e no intervalo de 50 a 60 anos.
6) Você acha que houve um ganho de peso mais depressa no intervalo entre 10 e 15 anos ou no intervalo entre 15 e 25 anos ? Justifique sua resposta.
7) Quantos quilogramas a pessoa ganhou por ano, em média, no intervalo entre 10 e 15 anos ?
8) Qual é o significado da razão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$?

ANÁLISE A PRIORI

Esta atividade tem como objetivo introduzir a noção de taxa de variação média de uma função. A partir da taxa de variação média, podemos ter uma ideia de quão rápido cresce ou decresce uma função em determinado intervalo, inclusive permitindo a comparação desta rapidez em intervalos de amplitudes diferentes. Tal comparação não pode ser feita usando apenas a taxa de variação da função. Em diversas situações, esta informação apresenta grande utilidade.

Deste momento em diante, símbolos matemáticos serão usados sistematicamente. Isto não deve provocar dificuldades já que os alunos estão habituados em trabalhar com a simbologia matemática. Além do mais, os símbolos utilizados não são totalmente desconhecidos. Vejamos com mais detalhes os resultados esperados em cada uma das questões:

- Na resolução das questões 1 e 2, esperamos que os alunos não encontrem dificuldades já que o conceito de variação foi abordado anteriormente e a única novidade trazida neste momento o uso de símbolos matemáticos. As respostas esperadas são, respectivamente, 15 anos e 41,9 kg. Possivelmente alguns alunos poderão esquecer as unidades de medida. Acreditamos que a questão 2 pode contribuir para que os alunos observem com mais clareza ainda que a variação do peso acontece sempre em relação a um determinado intervalo de tempo.

- Acreditamos que a resolução da questão 3 não deve provocar dificuldades pois as unidades para o peso e a idade são apresentadas na tabela e a ideia de unidade de medida (por ser fazer parte de muitas situações cotidianas) é familiar a praticamente todos os alunos. A resposta esperada é quilogramas por ano (kg/ano).

- Esperamos que os alunos respondam a questão 4 com facilidade. As duas primeiras questões devem ajuda-los a perceber que a variação do peso deve ser calculada no intervalo entre i = 10 e i = 25 anos e a resolução da terceira questão irá fornecer a unidade de medida adequada para a razão pedida. Sem descartar a possibilidade da não inclusão da unidade de medida ou de eventuais enganos nos cálculos, a resposta esperada para esta questão é aproximadamente 2,8 kg/ano.

- Na questão 5, os alunos devem encontrar as razões pedidas com tranquilidade. A razão obtida no intervalo entre 50 e 60 anos deixará explícito que a taxa de variação média também pode assumir valores negativos. As respostas esperadas são, respectivamente, 3,86 kg/ano, 2,26 kg/ano e -0,05 kg/ano.

- Na questão 6, esperamos que os alunos calculem os valores das taxas de variação média referentes aos intervalos dados e afirmem que o aumento de peso ocorreu mais rapidamente entre 10 e 15 anos, já que a taxa de variação média nesse intervalo é maior. É possível que alguns alunos não observem que os intervalos dados têm amplitudes diferentes e calculem apenas a taxa de variação do peso em cada um dos intervalos. Este caminho muito provavelmente levará os alunos a responderem que o aumento de peso mais rápido aconteceu no intervalo que apresenta a maior taxa de variação do peso (entre 15 e 25 anos). Os alunos que observarem que os intervalos dados têm amplitudes diferentes provavelmente irão notar que não é razoável calcular somente as taxas de variação do peso para obter a resposta procurada. Acreditamos que estes alunos devem proceder de modo análogo ao que foi feito nas questões 6 e 7 da atividade anterior e afirmarão que o intervalo que apresentou a maior taxa de variação média é o mesmo onde ocorreu o ganho de peso mais rápido.

- Esperamos que a resolução da questão 7 auxilie os alunos a refletirem sobre o significado para a taxa de variação média de uma função. Embora o cálculo da razão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$ no intervalo onde i varia entre 10 e 15 anos já tenha sido realizado na questão 5, não desprezamos a possibilidade de alguns alunos não perceberem que é precisamente este cálculo que fornece a resposta desta questão.

- Em relação à questão 8, acreditamos que poucos alunos responderão que a razão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$ pode ser interpretada como a variação média do peso por unidade de tempo no intervalo considerado. Motivados pela questão anterior, é possível que alguns alunos respondam que a razão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$ indica a "rapidez" com a qual o peso cresce (ou decresce) no intervalo considerado. Outras prováveis respostas podem afirmar que a razão dada é a variação do peso por ano no intervalo considerado ou mesmo a variação do peso dividida pela variação da idade.

ATIVIDADE 3

Durante um percurso de 54 km, anotou-se a posição de um carro em função do tempo, a cada 5 minutos. Com os dados obtidos, foi construída a seguinte tabela:

Posição (km)	0	4	11	19	24	30	33	42	52	54
Tempo (min)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45

1) Lembrando que velocidade média é a taxa de variação média da posição de um móvel durante um determinado intervalo de tempo, (isto é, $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, onde v_m é velocidade média, Δs é a variação da posição do móvel e Δté a variação de tempo) calcule a velocidade média do carro entre cada um dos intervalos de 5 minutos.

2) Calcule a velocidade média durante o intervalo de tempo total (45 min).

3) A velocidade média em cada um dos intervalos de 5 minutos foi sempre igual a velocidade média durante o percurso todo ? É correto dizer que em alguns momentos a velocidade do carro foi diferente da velocidade média durante todo o percurso todo ? Justifique sua resposta.

4) Suponha que a velocidade máxima permitida seja de 100 km/h. Durante algum dos intervalos de 5 minutos a velocidade do carro superou a velocidade máxima permitida? Procure justificar sua resposta.

5) Durante quanto tempo você acha que a velocidade foi inferior a 50 km/h ? Justifique sua reposta.

6) Você é capaz de dizer qual é a velocidade do carro quando sua posição é de 15 km ?

7) Qual é a velocidade do carro 32 minutos após o início do percurso ?

ANALISE A PRIORI

Um dos nossos objetivos nesta atividade é introduzir o conceito de velocidade média. Certamente este conceito é não é novidade para os alunos da turma, pois todos estudaram

Física no ensino médio. Além disso, a noção de velocidade média é bastante presente no cotidiano. Apesar destes fatos, acreditamos que a maior parte dos alunos ainda não percebe que velocidade média é a taxa de variação média da posição de um móvel em um determinado intervalo de tempo. Ao final desta atividade, pretendemos que aos alunos entendam a velocidade média de um móvel sob este ponto de vista.

Outro objetivo nosso é que os alunos sintam a necessidade de um conceito que ainda não possuem: a velocidade instantânea (ou seja, taxa de variação instantânea). A velocidade média diz qual a variação média, por unidade de tempo, da posição de um móvel durante um determinado intervalo de tempo. Porém, a velocidade do móvel em um instante específico não pode ser determinada com exatidão quando se conhece apenas a velocidade média. Esperamos que este fato seja notado e a necessidade da criação de uma nova ferramenta matemática para tratar questões dessa natureza seja assim justificada. Eis os resultados esperados:

- O objetivo das questões 1 e 2 é habituar os alunos com o cálculo da velocidade média. Esperamos que estas questões sejam respondidas sem dificuldades. Acreditamos que a maior parte das duplas forneça suas respostas utilizando o quilômetro por minuto (km/min) como unidade de medida para a velocidade média. Poucos alunos devem efetuar uma transformação de unidades e fornecer as respostas em quilômetros por hora (km/h), a unidade de medida de velocidade certamente mais presente no cotidiano.

- Na questão 3, esperamos que os alunos afirmem que a velocidade média durante todo o percurso não foi igual a velocidade média entre cada um dos intervalos de 5 minutos. De modo geral, desejamos que os alunos notem que um intervalo de tempo pode ser dividido em subintervalos (de amplitudes iguais ou não) e que a velocidade média nesses subintervalos não é necessariamente igual à velocidade média no intervalo dado inicialmente.

- Para responder a questão 4, os alunos deverão expressar todas as velocidades médias encontradas na primeira questão em quilômetros por hora ou transformar a velocidade de 100 km/h para quilômetros por minuto. É possível que alguns encontrem dificuldades para transformar as unidades de medida. Também é possível que alguns alunos não percebam a necessidade de transformar as unidades de medida. Esperamos que os alunos respondam que entre 30 e 35 minutos e entre 35 e 40 minutos a velocidade máxima permitida foi ultrapassada, já que a velocidade média nestes intervalos foi de 108 km/h e 120 km/h, respectivamente, e isto garante que, durante algum instante, a velocidade do carro foi superior a 100 km/h.

- Com a questão 5, pretendemos que os alunos comecem a perceber que o conceito de velocidade média não é suficiente para responder a todas as questões que podem ser levantadas sobre a velocidade de um móvel. É muito provável que alguns alunos respondam que a velocidade do carro foi inferior a 50 km/h durante 15 minutos, já que nos intervalos de 0 a 5 minutos, de 25 a 30 minutos e de 40 a 45 minutos a velocidade média foi inferior a 50 km/h. Acreditamos que a questão 3 poderá contribuir para que os alunos notem, por exemplo, que embora a velocidade média no intervalo entre 0 e 5 minutos tenha sido de 48 km/h, isso não significa que durante todo esse intervalo de tempo a velocidade do carro sempre foi de 48 km/h, podendo ter sido superior ou inferior a esse valor e analogamente, a velocidade média no intervalo entre 15 e 20 minutos ter sido igual a 60 km/h não excluía possibilidade de que em algum nenhum momento desse intervalo a velocidade do carro tenha sido inferior a 50 km/h.

- Na questão 6, esperamos que os alunos percebam mais claramente que a velocidade média não pode dizer com exatidão a velocidade do carro num determinado instante. Assim, é possível que os alunos digam que não são capazes de afirmar qual a velocidade do carro quando sua posição é de 15 km. Mas, como a velocidade média entre os instantes 10 e 15 minutos foi de 96 km/h, acreditamos que alguns alunos possam dizer que a velocidade do carro quando sua posição for de 15 km é aproximadamente igual a 96 km/h.

- Na questão 7, esperamos obter resultados semelhantes aos obtidos na questão 6. Desejamos que os alunos fiquem ainda mais convencidos de que a velocidade média não serve para abordar situações desta natureza. Acreditamos que a maior parte dos alunos deve responder que não é possível oferecer uma resposta exata para esta questão.

ATIVIDADE 4

A posição de um corpo, em função do tempo pode ser dada pela função s(t) = 3t + 4, com $0 \leq t \leq 11$, onde *s* denota a posição do corpo em metros e *t* é o tempo em segundos.

1) Esboce no plano cartesiano o gráfico desta função.

2) Calcule a velocidade média desse corpo em cada um dos seguintes intervalos de tempo:
   a) 2 a 3 segundos;
   b) 4 a 6,8 segundos;
   c) 2,5 a 9 segundos;
   d) 5,6 a 10 segundos;
   e) 0 a 11segundos;

3) Qual é o coeficiente angular da reta de equação y = 3x + 4 ?

4) O que você observa de semelhante entre as respostas obtidas nas duas questões anteriores ?

5) Considere uma função f, cujo domínio e a imagem é o conjunto dos números reais, tal que $f(x) = ax + b$, e a e b são números reais. Sendo x_1 e x_2 dois números reais tais que $x_1 \neq x_2$, Determine:
   a) $f(x_1)$;
   b) $f(x_2)$;
   c) A taxa de variação média de f quando x varia de x_1 até x_2 (ou seja, determine $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$);
   d) O que acontece com a taxa de variação média encontrada no item anterior quando *a* = 0.

ANÁLISE A PRIORI

A finalidade principal desta atividade é possibilitar a percepção de que a taxa de variação média de uma função afim é constante em qualquer intervalo considerado. Essa constante é numericamente igual ao coeficiente angular da reta obtida ao representarmos graficamente a função afim. Em particular, destacaremos que o mesmo procedimento utilizado para o cálculo da taxa de variação média de uma função *f* no intervalo de extremos x_1 e x_2, também pode ser utilizado para determinar o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$

Continuaremos trabalhado com o conceito de velocidade média, mas ao final desta atividade institucionalizaremos de modo geral o conceito de taxa de variação média de uma função. Segue nossa análise das questões:

- Na questão 1, acreditamos que os alunos não encontrarão dificuldades para traçar o gráfico da função dada. É possível que alguns alunos não observem que a variável independente assume valores reais entre 0 e 11 e esbocem o gráfico considerando o domínio da função igual ao conjunto dos números reais. O objetivo desta questão é oferecer a possibilidade de uma visualização geométrica para as respostas próximas questões.

- Na questão 2, esperamos que os alunos encontrem sem dificuldades a resposta para todos os intervalos: 3 m/s. Não descartaremos a hipótese de que alguns alunos comentam erros de cálculo ou esqueçam de escrever a unidade de medida da velocidade média.

- Na questão 3, esperamos que os alunos encontrem a resposta correta facilmente, através de uma simples observação (o coeficiente angular da reta é igual a taxa de variação média da função) já que no semestre imediatamente anterior à aplicação desta pesquisa, a Geometria Analítica plana foi estudada, enfatizando o estudo dos diversos tipos de equações da reta.

- Na resolução da questão 4, esperamos que os alunos notem que a taxa de variação média da função dada é constante e igual ao coeficiente angular da reta que representa graficamente a função e que existe uma estreita relação entre um problema de natureza física (o cálculo da velocidade de um corpo quando sua função de posição é uma função afim) e um problema de natureza geométrica (a determinação do coeficiente angular de uma reta).

- No desenvolvimento da questão 5, desejamos que os alunos generalizem os resultados obtidos anteriormente. É possível que alguns alunos encontrem dificuldades com as manipulações algébricas necessárias. Acreditamos que os itens (a) e (b) serão corretamente respondidos sem dificuldades. Se os cálculos forem feitos corretamente no item (c), os alunos perceberão que o coeficiente a é a taxa de variação média (em um intervalo arbitrário) de uma função afim. Em relação ao item (d), É bastante intuitivo notar que a taxa de variação média de uma função constante é igual a zero e acreditamos que isto será percebido com facilidade.

ATIVIDADE 5

A posição *s*, (em metros), de uma bola abandonada em queda livre (desprezando-se a resistência do ar) pode ser modelada pela função $s(t) = 4{,}9t^2$ onde s é dada em metros e representa a posição da bola no instante *t*, dado em segundos, após o início da queda. Considere uma situação onde o tempo total de queda seja de 10 segundos.

1) Esboce o gráfico da função *s* descrita acima, para $0 \leq t \leq 10$.

2) Calcule a velocidade média da bola nos seguintes intervalos de tempo:
   a) Entre 0 e 2 segundos;
   b) Entre 3 e 4 segundos;
   c) Entre 5,5 e 6,8 segundos;
   d) Entre 9 e 9,5 segundos.

3) Observando os resultados obtidos no exercício anterior, o que acontece com a velocidade média quando a bola vai se aproximando do solo ?

4) Considere uma função f, cujo domínio e a imagem é o conjunto dos números reais, tal que $f(x) = ax^2$, onde a é um número real. Qual a taxa de variação média de f, quando x varia de x_1 até x_2?

ANÁLISE A PRIORI

Nesta atividade, esperamos que os alunos percebam que a taxa de variação média de uma função quadrática não é sempre constante, diferentemente que acontece com a função afim, conforme foi visto na atividade anterior. Na conclusão da atividade, pretendemos ressaltar que a natureza da função interfere no comportamento de sua taxa de variação média.

- Na questão 1, esperamos que os alunos não encontrem dificuldades devido a familiaridade que os mesmos têm com a função quadrática. É provável que alguns alunos não observem que a variável independente deve assumir apenas valores entre 0 e 10. O objetivo desta questão é permitir uma visualização geométrica dos seguintes fatos: A medida que o tempo vai passando, a bola aproxima-se do solo percorrendo distâncias cada vez maiores com uma velocidade média cada vez maior e a velocidade média da bola em um determinado intervalo é numericamente igual ao coeficiente angular da reta secante ao gráfico que contém os pontos cujas abscissas são os extremos do intervalo considerado. Esta visualização geométrica será explorada durante o momento de discussão das respostas.

- Na questão 2, acreditamos que as respostas devem sem encontradas com facilidade. Não descartamos a possibilidade de alguns alunos cometerem pequenos erros nos cálculos.

- No desenvolvimento da questão 3, esperamos que os alunos observem que a velocidade média aumenta a medida em que a bola vai se aproximado do solo. Acreditamos que esta questão deverá ser respondida a partir da simples observação dos resultados encontrados na questão anterior e dificuldades não devem ser encontradas. Durante a discussão das respostas, utilizaremos o gráfico esboçado na questão 1 para realçar este fato.

- Na questão 4, caso os cálculos sejam realizados corretamente, os alunos deverão afirmar que o valor da taxa de variação média da função quadrática é igual a $a\ (x_2 + x_1)$, onde x_1 e x_2 são extremos de um dado intervalo, não é constante e depende do coeficiente a e da amplitude do intervalo considerado. Acreditamos que a maioria dos alunos encontrará a resposta esperada, mas não descartamos a possibilidade da ocorrência de erros nas manipulações algébricas.

ATIVIDADE 6

A posição *s*, (em metros), de uma bola abandonada em queda livre (desprezando-se a resistência do ar) pode ser modelada pela função $s(t) = 4{,}9t^2$ onde s é dada em metros e representa a posição da bola no instante *t*, dado em segundos, após o início da queda. Considere uma situação onde o tempo total de queda seja de 10 segundos.

1) Calcule a velocidade média da bola entre os seguintes intervalos de tempo:
   a) 3, 8 e 4 segundos;
   b) 3, 9 e 4 segundos;
   c) 3, 99 e 4 segundos;
   d) 4 e 4, 5 segundos;
   e) 4 e 4, 1 segundos;
   f) 4 e 4, 01 segundos.

2) Analisado os resultados obtidos na questão anterior, a velocidade média da bola parece estar se aproximando de algum valor ? Qual ?

3) Determine:

a) $s(4)$

b) $s(4+\Delta t)$ (Lembre que Δt representa um acréscimo no tempo).

c) $\Delta s = s(4+\Delta t) - s(4)$

d) Se o valor de Δs obtido no item anterior depende do acréscimo Δt.

4) Calcule a velocidade média $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ da bola no intervalo entre t_1 = 4 s e t_2 = 4 + Δt s .

5) Se a variação Δt fosse tão pequena (muito próxima de zero) que pudesse ser desprezada, qual seria o valor da velocidade média obtida na questão anterior ?

6) Considerando os resultados obtidos nas duas questões anteriores, qual deve ser o valor da velocidade instantânea da bola quando o tempo for igual a 4 segundos ?

ANÁLISE A PRIORI

Com esta atividade pretendemos introduzir uma técnica que possibilite o cálculo da velocidade instantânea de um móvel, desde que sua função de posição seja conhecida e seja do tipo afim ou quadrática.

No momento de debate das respostas, destacaremos que existe a possibilidade de generalização do conceito de velocidade instantânea, destacando o fato de que as ideias desenvolvidas até este momento não necessariamente podem ser aplicadas apenas quando temos uma função que relacione posição e tempo. Em diversas outras situações, inclusive com outros tipos de função (exponenciais, trigonométricas, etc), um raciocínio inteiramente análogo pode ser aplicado e diferentes significados poderão ser atribuídos para estas taxas de variação instantâneas. Destacaremos ainda que, em situações onde a função envolvida não é polinomial, outras técnicas precisam ser aplicadas para calcular a taxa de variação instantânea. Passemos agora análise das questões.

- Na resolução da questão 1, acreditamos que os alunos não encontrarão dificuldades para determinar corretamente a velocidade média da bola em cada um dos intervalos de tempo.

- Na questão 2, esperamos que os alunos percebam que quando se fixou um determinado instante (4 segundos) e as amplitudes dos intervalos de tempo foram ficando cada vez menores, a velocidade média parece se aproximar de 39 m/s.

- Na questão 3, esperamos que os alunos encontrem $\Delta s = 39{,}2\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2$. Não descartamos a possibilidade de alguns alunos cometerem erros nas manipulações algébricas. O objetivo desta questão é possibilitar que os alunos percebam que Δs é dado em função de Δt.

- Na questão 4, acreditamos que os alunos que responderam corretamente a questão anterior deverão determinar corretamente a velocidade média entre no intervalo de extremos t_1 e t_2. O valor que esperamos ser obtido para tal velocidade média é $V_m = 39{,}2 + (\Delta t)^2$ m/s. É possível que alguns alunos cometam erros nas manipulações algébricas ou esqueçam a unidade de medida da velocidade média.

- Na questão 5, esperamos que os alunos que responderam corretamente questão anterior, afirmem que a velocidade média deve ser igual a 39,2 m/s.

- Na questão 6, esperamos que a maior parte dos alunos afirmem que a velocidade instantânea deve ser aproximadamente igual a 39,2 m/s. Durante a discussão das respostas, destacaremos que a velocidade instantânea no instante *t* é, por definição, o valor da velocidade média calculada no intervalo $[t, t + \Delta t]$, com Δt muito próximo de zero.

ATIVIDADE 7

1) Seja a função $y = x^2$.

   a) Esboce o gráfico da função dada e marque no gráfico os pontos $A\ (x_a, x_a^2)$ e $P\ (x_a + \Delta x, (x_a + \Delta x)^2)$. Suponha que os pontos pertençam ao primeiro quadrante do plano cartesiano.

b) Determine $\Delta y = (x_a + \Delta x)^2 - x_a^2$.

c) Calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

d) Você é capaz de dizer qual o significado geométrico de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

2) Considere a expressão obtida para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ na questão anterior. Supondo que o acréscimo Δx seja tão pequeno que possa ser desprezado, determine:

a) Como ficará a expressão para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

b) O que acontece com os pontos A e P ?

3) O resultado obtido na questão anterior chama-se derivada da função $y = x^2$ no ponto de abscissa x_a. Usando um raciocínio análogo ao que foi feito nas duas questões anteriores, determine a derivada da função $y = x^3$ no ponto de abscissa x_a.

4) Considere a função afim $y = ax + b$, onde a e b são números reais. Dados os pontos $P\ (x_p, ax_p + \ b)$ e $Q\big(x_p + \Delta x, a\big(x_p + \Delta x\big) + b\big)$ pertencentes ao gráfico de y, calcule:

a) $\Delta y = a\big(x_p + \Delta x\big) + b - (ax_p + b)$

b) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

5) O valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ obtido na questão anterior depende do acréscimo Δx?

6) Considerando os resultados obtidos nas respostas duas questões anteriores, determine a derivada da função afim $y = ax + b$ e da função constante $y = b$ no ponto de abscissa x_p.

ANÁLISE A PRIORI

Nos casos que abordaremos aqui, as funções não representam uma particular relação entre duas grandezas (como tempo e posição, por exemplo). Trabalharemos com funções polinomiais. A função constante será considerada.

Ao final desta atividade pretendemos institucionalizar o conceito de taxa de variação instantânea (derivada) de uma função num ponto**.** Também será destacaremos que a derivada pode ser interpretada geometricamente como o coeficiente angular da reta tangente. Iniciaremos uma breve discussão sobre a noção de limite e definiremos a derivada como um limite. Usaremos este fato para justificar um estudo mais aprofundado dos limites que será feito posteriormente. Algumas notações serão introduzidas e teceremos alguns comentários sobre as inúmeras aplicações da derivada de uma função.

Passemos agora a analisar as questões propostas:

- Na questão 1, acreditamos que os alunos não encontraram dificuldades. Possivelmente, alguns alunos podem se atrapalhar na hora de marcar os pontos no gráfico. Em relação aos itens (b) e (c) não excluímos a possibilidade de que alguns alunos cometam erros nas manipulações algébricas. Se os cálculos forem feitos corretamente, esperamos que as seguintes respostas sejam obtidas:

  b) $\Delta y = 2x_a\Delta x + (\Delta x)^2$

  c) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_a + \Delta x$

  Em relação ao item (d) esperamos que a maior parte dos alunos afirme que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A e P.

- Na questão 2, no item (a), esperamos que os alunos percebam que se Δx for muito pequeno a ponto de poder ser desprezado, teremos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_a$. É possível que no momento de debate das respostas alguns alunos questionem o quão Δx deve ser pequeno para que possa ser desprezado. Caso isto não aconteça, pretendemos provocar tal questionamento. Em relação ao item (b), acreditamos que a maior parte dos alunos afirmará que os pontos A e P ficarão muito próximos. É possível também que alguns alunos afirmem que os pontos coincidirão.

- Na resolução da questão 3, acreditamos que a maior parte dos alunos não deve encontrar dificuldades para determinar a derivada da função $y = x^3$ no ponto de abscissa x_a. Os alunos que não conseguirem encontrar a resposta esperada provavelmente terão cometido erros nas manipulações algébricas.

- Na questão 4, esperamos que a maioria dos alunos encontre corretamente a derivada pedida. Não descartamos a possibilidade de alguns alunos cometerem erros nas manipulações algébricas.

- Na questão 5, acreditamos que os alunos afirmem que Δx não interfere no valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Esse fato não deve causar surpresa, pois uma situação semelhante foi discutida na atividade 4.

- Acreditamos que os alunos que responderam corretamente a questão 5 também devem responder corretamente a questão 6 afirmando que a derivada da função afim $y = ax + b$ é igual a a e a derivada da função constante $y = b$ é igual a zero.

CAPITULO 5

APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE A POSTERIORI

Neste capítulo, realizaremos uma breve descrição de cada um dos encontros nos quais aplicamos nossa sequência didática e faremos uma análise a posteriori do desenvolvimento apresentando pelos alunos em cada uma das atividades realizadas. Serão consideradas a produção escrita dos alunos e as principais interações ocorridas nas aulas.

PRIMEIRO ENCONTRO

O primeiro encontro ocorreu no dia 19 de agosto de 2011, sendo iniciado às 19h10 e concluído às 21h50. Compareceram vinte e sete alunos, formando doze duplas e um trio[40], que foram denominadas arbitrariamente por D1, D2, ... , D13. Inicialmente prestamos esclarecimentos aos alunos sobre como ocorreria nosso trabalho. Explicamos que estávamos iniciando o estudo do Cálculo utilizando uma metodologia um pouco diferente da que eles estavam habituados. Em seguida, comentamos que trabalharíamos com uma sequência de atividades cujo objetivo era introduzir o conceito de derivada de uma função através da noção de variação. Apresentamos o cronograma de realização das atividades e pedimos que os alunos formassem duplas que deveriam ser mantidas até o final das atividades. Destacamos em nossa fala que aquele era um trabalho de pesquisa e seria muito importante a colaboração de todos para que a pesquisa pudesse caminhar de modo satisfatório. Após alguns esclarecimentos sobre como as aulas seriam organizadas, nos colocamos a disposição para auxiliar os alunos, caso fosse necessário. A partir das 19h20 os alunos começaram a trabalhar na primeira atividade e às 20h15 a mesma foi recolhida e iniciamos uma discussão sobre as respostas apresentadas. A discussão foi encerrada às 20h35 e foi dado um intervalo de quinze minutos. Às 20h55 a segunda atividade foi distribuída, sendo recolhida às 21h50, finalizando assim o primeiro encontro. Optamos por apresentar nossa análise a posteriori da segunda atividade quando tratarmos do segundo encontro. Vejamos a primeira atividade seguida de sua análise a posteriori.

[40] Durante esta análise, os grupos de alunos serão denominados de duplas, mesmo neste caso.

ATIVIDADE 1 (Objetivo: Introduzir o conceito de variação de uma grandeza.)

Durante uma experiência científica, o peso de uma pessoa foi medido em boa parte da sua vida. Os dados obtidos foram organizados na tabela abaixo.

Idade (anos)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Peso(kg)	37,3	56,6	65,2	79,2	75,3	78,3	82,4	75,1	72,7	70	72,2

1) Quantos quilogramas essa pessoa ganhou de peso entre os 15 e 20 anos de idade ?

2) Qual foi a variação do peso dessa pessoa entre seus 25 e 30 anos de idade ?

3) Calcule a variação do peso da pessoa entre 35 e 40 anos e entre 45 e 50 anos.

4) Quantos quilogramas a pessoa perdeu entre os 50 e 55 anos ? Qual a variação do peso entre 50 e 55 anos ?

5) Tente justificar porque a variação de peso entre os 50 e 55 anos foi negativa. Justifique também porque a variação de peso ocorrida entre 15 e 20 anos foi positiva.

6) Calcule a variação do peso entre 10 e 15 anos e entre 20 e 25 anos. Em qual destes períodos você acha que a pessoa ganhou peso mais depressa ? Justifique sua resposta.

7) Considerando cada um dos períodos de 5 anos apresentados na tabela, em qual deles a pessoa emagreceu mais depressa ? Justifique sua resposta.

8) A tabela apresentada mostra uma relação de dependência entre peso e idade. Podemos dizer, neste caso, que o peso é dado em função da idade ? (ou seja, tal relação de dependência é uma função ?) Justifique sua resposta.

ANÁLISE A POSTERIORI

Conforme previsto na análise a priori, a maior parte dos alunos não apresentou dificuldades para responder as questões da primeira atividade, com exceção da questão oito. Eis os resultados obtidos:

- Doze duplas responderam a primeira questão corretamente, conforme era esperado. Apenas uma dupla apresentou a resposta 19 300 g. Acreditamos que este erro tenha ocorrido devido a uma falta de atenção na observação dos dados apresentados na tabela.

- Onze duplas procederam de modo análogo ao que foi feito na primeira questão e efetuaram uma subtração para responder a segunda questão. Seis duplas afirmaram que a variação do peso foi de -3,9 kg. Duas destas duplas ainda acrescentaram que houve uma perda de 0,78 kg por ano. Conforme havíamos previsto, quatro duplas apresentaram como resposta 3,9 kg, ou seja, o módulo da variação. Embora estas duplas tenham feito cálculo 75,3 kg – 79,2 kg , desprezaram o sinal negativo na sua resposta. Acreditamos que isto é um reflexo de uma crença na qual números negativos não servem como resposta para um problema matemático. Uma dupla confundiu-se com os dados e apresentou a resposta 7,8 kg. Duas duplas responderam que "o peso oscilou entre 79,2 kg e 75, 3kg.

- Na terceira questão, seis duplas responderam conforme foi previsto na análise a priori e afirmara que 4,1 kg foi a variação do peso entre 35 e 40 anos e -2,4 kg foi a variação do peso entre 45 e 50 anos. Cinco duplas deram a resposta correta para a variação entre 35 e 40 anos e apresentaram 2,4 kg como resposta para a variação entre 45 e 50 anos. Duas duplas encontraram corretamente a variação do peso para cada um dos intervalos pedidos, mas como resposta, apresentaram o valor 1,7 kg, obtido através do seguinte cálculo: 4,1 kg – 2,4 kg.

- Ao responder a quarta questão, as treze duplas apresentaram a resposta prevista na análise a priori: o indivíduo perdeu 2,7 kg. Em relação à variação do peso, quatro duplas afirmaram que seu valor foi de 2, 7 kg e nove duplas responderam corretamente que a variação foi de -2,7 kg. Até este momento, notamos que alguns alunos apresentavam uma certa dificuldade em perceber que quando há perda de peso, tem-se uma variação negativa.

- Na questão de número cinco, esperávamos que os alunos notassem que quando o peso aumenta, a variação é positiva e quando o peso diminui, a variação é negativa. Dez duplas perceberam este fato e três duplas deixaram a resposta em branco. Duas duplas também utilizaram argumentos de natureza biológica para justificar o aumento e a perda de peso. Durante a discussão das respostas, estes alunos afirmaram que não estavam habituados com “esse tipo de questão” e não sabiam como lidar com ela. A discussão desta questão ainda permitiu que os alunos percebessem com mais clareza que é necessário classificar a variação como positiva ou negativa.

- Na sexta questão, doze duplas calcularam a variação do peso entre 10 e 15 anos (19,3 kg) e entre 20 e 25 anos (14 kg) e afirmaram que houve um ganho de peso mais depressa entre os 10 e 15 anos já que nesse intervalo, a variação de peso foi maior. Dentre estas duplas, três consideraram a variação do peso não no intervalo de cinco anos, mas sim no intervalo de um ano (dividindo as variações encontradas por cinco). Uma dupla afirmou que o ganho de peso foi mais rápido entre os 10 e 15 anos pois era nesta fase da vida que o indivíduo “ganha mais massa muscular”. No momento de discussão das respostas, os alunos perceberam facilmente que a noção de variação (relativa a um dado intervalo de tempo) pode dar uma ideia da “rapidez” com a qual uma grandeza está aumentando ou diminuindo com o passar do tempo. Foi observado ainda que quando se trata de intervalos de tempo distintos, uma comparação dessa rapidez não pode ser feita fazendo uso apenas da variação da grandeza nesses intervalos. Encerramos a discussão informando que na próxima atividade iriámos obter uma ferramenta matemática para lidar com este tipo de situação.

- Os resultados obtidos na sétima questão foram bastante semelhantes aos encontrados na questão anterior. Doze duplas basearam-se no valor da variação do peso para afirmar que no entre 40 e 45 anos o emagrecimento foi mais rápido, já que neste intervalo de tempo houve a maior variação negativa. Uma dupla não respondeu a questão por falta de tempo. Na discussão das respostas, foi apresentada a seguinte definição formal: Se uma grandeza apresenta valor v_1 no tempo t_1 e valor v_2 no tempo t_2, com t_2 maior do que t_1, a variação relativa ao intervalo de tempo de extremos t_1 e t_2 é obtida calculando-se $v_2 – v_1$.

- Surpreendentemente, apenas uma dupla respondeu corretamente a oitava questão, justificando de maneira adequada e até explicitando o domínio e o contradomínio da função, conforme pode-se ver na figura 4 mais adiante. Duas duplas afirmaram que o peso é dado em função da idade, mas não apresentaram uma justificativa. Nove duplas responderam que o peso não era dado em função da idade. Foi possível perceber que os alunos apresentavam confusão entre os conceitos de função, função linear, função crescente e função constante, conforme se observa na figura 3. Notamos que os alunos apresentaram dificuldades para justificar suas respostas. Diante dos resultados obtidos, percebemos que a imagem de conceito da maior parte dos estudantes não está suficientemente enriquecida em relação ao conceito de função.

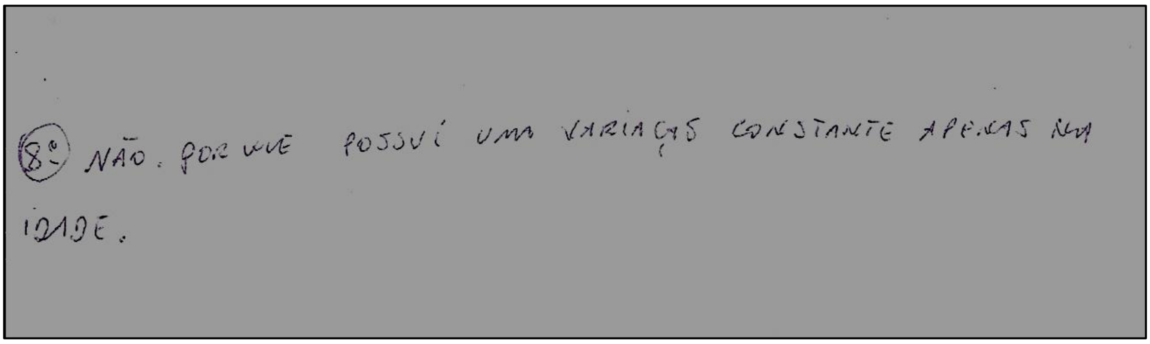
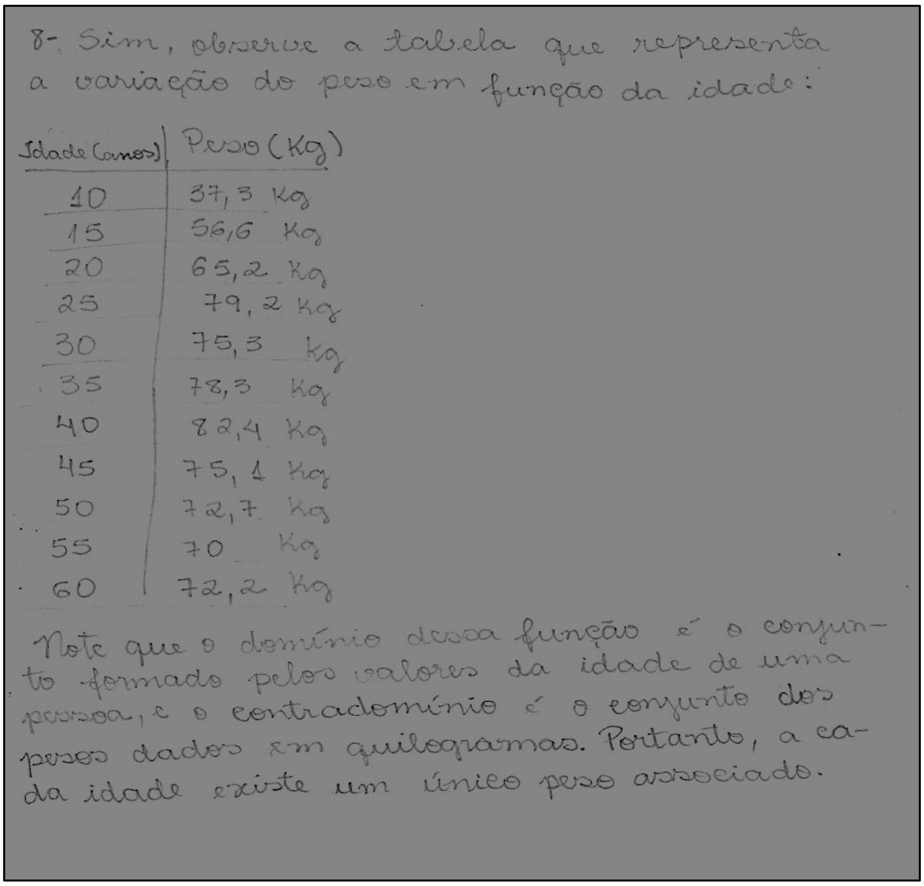

8º NÃO. POR QUE POSSUÍ UMA VARIAÇÃO CONSTANTE APENAS NA IDADE.

Figura 3: Reposta da dupla D4 para a questão 8



8- Sim, observe a tabela que representa a variação do peso em função da idade:

Idade (anos)	Peso (Kg)
10	37,3 Kg
15	56,6 Kg
20	65,2 Kg
25	79,2 Kg
30	75,3 Kg
35	78,3 Kg
40	82,4 Kg
45	75,1 Kg
50	72,7 Kg
55	70 Kg
60	72,2 Kg

Note que o domínio dessa função é o conjunto formado pelos valores da idade de uma pessoa, e o contradomínio é o conjunto dos pesos dados em quilogramas. Portanto, a cada idade existe um único peso associado.

Figura 4: Resposta da dupla D7 para questão 8

Ao discutirmos as respostas desta questão, lembramos que uma função entre dois conjuntos é uma correspondência entre seus elementos de tal modo que a cada elemento de um dos conjuntos (chamado domínio) esteja associado um único elemento do outro conjunto (chamado contradomínio). Neste momento, alguns alunos comentaram que, como não havia uma fórmula relacionando peso e idade, imaginaram que não se podia dizer que o peso era dado em função da idade. Respondemos que uma fórmula é apenas uma das maneiras de se representar uma função, mas a fórmula não deve ser confundida com a própria função e que em diversas situações do mundo real, não é simples encontrar uma fórmula para uma função e outros modos de representação podem ser utilizados, como tabelas ou gráficos, por exemplo.

Gostaríamos de destacar que foi grande o envolvimento e entusiasmo apresentado pelos alunos durante a realização desta atividade. Ao término das discussões das respostas, foi possível perceber que esta atividade atingiu satisfatoriamente seus objetivos, contribuindo para que os alunos pudessem enriquecer sua imagem de conceito relativa a noção de variação de uma grandeza.

SEGUNDO ENCONTRO

O segundo encontro foi iniciado às 19h 15min do dia 26/08/2011 e teve duração de aproximadamente duas horas e quinze minutos. Compareceram as mesmas treze duplas que estiveram presentes no primeiro encontro. Entre 19h 15 e 19h 45 realizamos uma discussão sobre as respostas da segunda atividade (que foi executada no primeiro encontro). Em seguida, foi distribuída a terceira atividade, sendo recolhida após cinquenta minutos. Um intervalo de quinze minutos foi dado e às 21h 05 iniciamos a discussão das repostas desta atividade. Vejamos a segunda atividade, seguida da nossa análise a posteriori.

ATIVIDADE 2 (Objetivo: introduzir o conceito de taxa de variação média de uma função)

Considere novamente a tabela que relaciona peso e idade apresentada na atividade anterior:

Idade (anos)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Peso(kg)	37,3	56,6	65,2	79,2	75,3	78,3	82,4	75,1	72,7	70	72,2

Se representarmos o peso por p, podemos representar a variação de peso por Δp. Do mesmo modo, chamando a idade de i, Δi representa a variação da idade.

1) No intervalo de tempo entre i = 10 e i = 25, qual é o valor de Δi ?
2) No intervalo de tempo entre i = 10 e i = 25, qual é o valor de Δp ?
3) Qual unidade de medida deve ser usada para a razão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$?
4) Qual é o valor da razão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$ quando i varia de 10 até 25 anos ?
5) Calcule $\frac{\Delta p}{\Delta i}$ no intervalo de 10 a 15 anos, no intervalo de 15 a 25 anos e no intervalo de 50 a 60 anos.

6) Você acha que houve um ganho de peso mais depressa no intervalo entre 10 e 15 anos ou no intervalo entre 15 e 25 anos ? Justifique sua resposta.
7) Quantos quilogramas a pessoa ganhou por ano, em média, no intervalo entre 10 e 15 anos ?
8) Qual significado você pode atribuir à razão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$?

ANÁLISE A POSTERIORI

- Conforme havíamos previsto na análise a priori, todas as duplas acertaram os valores numéricos das taxas de variação que foram pedidas nas questões 1 e 2, mas apenas três duplas acrescentaram corretamente as unidades de medida. No momento de discussão das repostas, chamamos a atenção para a importância de sempre usar unidades de medida em situações dessa natureza.

- Na questão 3, apenas três duplas responderam que a unidade de medida adequada é quilograma por ano (kg/ano). Duas duplas responderam que a unidade era o quilograma e uma dupla afirmou que a unidade de medida era "peso por idade". No nosso entendimento, esta última resposta pode ser interpretada como "unidade de medida do peso dividida pela unidade de medida da idade". Duas duplas afirmaram que "não sabiam a resposta" e curiosamente, cinco duplas apresentaram respostas numéricas para esta questão. Este fato parece indicar que estes alunos não compreendem bem a noção de unidade de medida. Ao discutirmos esta questão, os alunos perceberam imediatamente a unidade de medida mais natural para a razão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$ é quilograma por ano (kg/ano).

- Conforme foi previsto, nove duplas afirmaram que a resposta da questão 4 foi de aproximadamente 2,8 e não acrescentaram nenhum tipo de unidade de medida. Três duplas apresentaram 2,8 kg/ano como resposta e uma dupla cometeu um engano nos cálculos e encontrou a resposta 4,2. No momento de discussão das respostas, escrevemos o número 2,8 no quadro e perguntamos aos alunos se faltava algo para que esta resposta fosse considerada completa. Diversos alunos observaram que faltava uma unidade de medida. Lembramos que a questão anterior fornecia tal unidade e encerramos a discussão ressaltando mais uma vez a necessidade da presença de uma unidade de medida adequada.

- Apenas uma dupla se atrapalhou com os dados exibidos na tabela e não respondeu corretamente a questão 5.

- Na questão 6, oito duplas responderam que o intervalo de tempo onde houve um ganho de peso mais depressa foi entre 10 e 15 anos e apresentaram justificativas corretas (todas fazendo uso do fato de que foi neste intervalo que houve o maior aumento de peso por ano). Destacamos que apenas uma destas oito duplas calculou diretamente a taxa de variação de média através da razão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$ (usando inclusive esta notação). Cinco duplas afirmaram que o intervalo onde o peso aumentou mais depressa foi entre 15 e 25 anos, justificado que a maior variação do peso se deu neste intervalo. Na figura abaixo, temos uma das respostas produzidas pelos alunos:

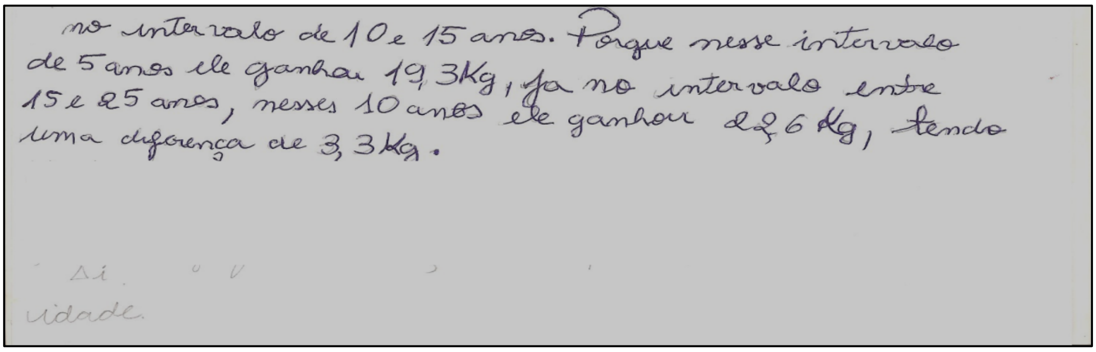

no intervalo de 10 e 15 anos. Porque nesse intervalo de 5 anos ele ganhou 19,3Kg, já no intervalo entre 15 e 25 anos, nesses 10 anos ele ganhou 22,6 Kg, tendo uma diferença de 3,3Kg.

Figura 5: Resposta da dupla D11

Durante a discussão das respostas, os alunos perceberam rapidamente que, em situações semelhantes a essa, como os intervalos têm amplitudes diferentes, não é razoável se basear apenas na variação da grandeza em questão. Em seguida lembramos brevemente o significado da operação de divisão e um dos alunos fez o seguinte comentário: “Professor, quer dizer então que o número encontrado quando fazemos a divisão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$ representa a variação de Δp por cada ano no intervalo Δi ?”. Respondemos de modo afirmativo e encerramos a discussão.

- Na questão 7, cinco duplas apresentaram como resposta 3,86 kg/ano. Três duplas responderam 3,86 e cinco duplas deixaram a resposta em branco. Durante o momento de discussão das respostas, os alunos perceberam sem grandes dificuldades que ao afirmarmos que a variação do peso foi de 3,86 kg/ano, estamos dizendo na verdade que se a variação do peso puder ser considerada constante em cada um dos anos do intervalo considerado, seu valor deve ser de 3,86 kg por ano.

- Na questão 8, de acordo com o que prevemos na análise a priori, apenas uma dupla respondeu que $\frac{\Delta p}{\Delta i}$ pode significar a variação média do peso por ano no intervalo Δi. Cinco duplas deixaram a resposta em branco, e sete duplas deram respostas que podem ser sintetizadas do seguinte modo: "$\frac{\Delta p}{\Delta i}$ significa a variação do peso dividida pela variação da idade". Durante a discussão das respostas, foi observamos que a razão $\frac{\Delta p}{\Delta i}$ chama-se taxa de variação média da grandeza p relativa ao intervalo Δi e tal razão pode ser interpretada como a variação média da grandeza p por unidade de tempo no intervalo considerado. Além disso, a taxa de variação média pode ser usada para estimar a "rapidez" com a qual uma grandeza cresce (ou decresce) num dado intervalo. Finalizamos nossa discussão deixando claro no caso particular que foi abordado, o peso era dado em função da idade e que o conceito de taxa de variação média também pode ser utilizado em outras situações evolvendo diferentes tipos de funções. Nas figuras abaixo, temos algumas respostas para essa questão:

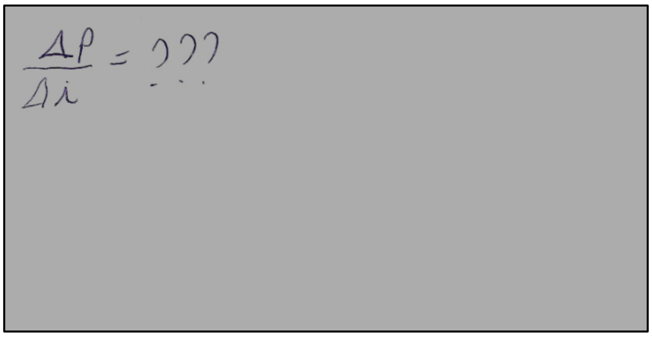


Figura 6: Resposta da dupla D3.

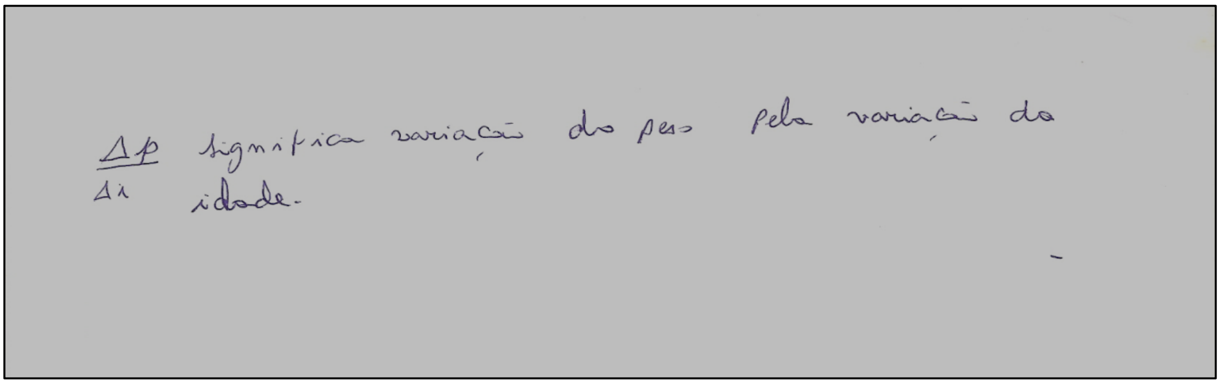


Figura 7: Resposta da dupla D5.

Semelhantemente ao ocorrido na atividade 1, tivemos uma clara percepção de que atingimos nossos objetivos na atividade 2.

ATIVIDADE 3 (Objetivos: introduzir o conceito de velocidade média e provocar a necessidade do conceito de velocidade instantânea)

Durante um percurso de 54 km, anotou-se a posição de um carro em função do tempo, a cada 5 minutos. Com os dados obtidos, foi construída a seguinte tabela:

Posição (km)	0	4	11	19	24	30	33	42	52	54
Tempo (min)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45

1) Lembrando que velocidade média é a taxa de variação média da posição de um móvel durante um determinado intervalo de tempo, (isto é, $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, onde v_m é velocidade média, Δs é a variação da posição do móvel e Δté a variação de tempo) calcule a velocidade média do carro entre cada um dos intervalos de 5 minutos.

2) Calcule a velocidade média durante o intervalo de tempo total (45 min).

3) A velocidade média em cada um dos intervalos de 5 minutos foi sempre igual a velocidade média durante o percurso todo ? É correto dizer que em alguns momentos a velocidade do carro foi diferente da velocidade média durante todo o percurso todo ? Justifique sua resposta.

4) Suponha que a velocidade máxima permitida seja de 100 km/h. Durante algum dos intervalos de 5 minutos a velocidade do carro superou a velocidade máxima permitida? Procure justificar sua resposta.

5) Durante quanto tempo você acha que a velocidade foi inferior a 50 km/h ? Justifique sua reposta.

6) Você é capaz de dizer qual é a velocidade do carro quando sua posição é de 15 km ?

7) Qual é a velocidade do carro 32 minutos após o início do percurso ?

ANÁLISE A POSTERIORI

- De acordo com o previsto na análise a prior, nove duplas responderam corretamente as duas primeiras questões desta atividade, usando o quilômetro por minuto como unidade de medida para a velocidade média do carro. Apenas uma dupla apresentou suas respostas usando o quilômetro por hora como unidade de medida. Três duplas cometeram algum tipo de engano nos cálculos e apresentaram algumas respostas erradas. Apesar disto, ficamos com a convicção que de todos os alunos sabem como calcular a velocidade média de um móvel.

- Na terceira questão, as treze duplas responderam que a velocidade média durante todo o percurso não foi sempre igual a velocidade média em cada um dos intervalos. Apesar de todas as duplas terem afirmado que em alguns momentos a velocidade do carro foi diferente da velocidade média no percurso completo, apenas três duplas justificaram esta afirmação usando o fato de que a velocidade média em diversos intervalos de cinco minutos foi diferente da velocidade média no percurso inteiro. Durante a discussão das respostas, uma dupla fez o seguinte questionamento: “Quer dizer então, que cada móvel tem duas velocidades ? Uma velocidade média e outra velocidade momentânea ?” Respondemos que a velocidade média está sempre relacionada a um determinado intervalo de tempo, ou seja, existe um tempo inicial e um tempo final. Em seguida, foi institucionalizado que a velocidade do móvel num determinado instante chama-se velocidade instantânea. Alguns alunos imediatamente perguntaram se existia uma “fórmula” para a velocidade instantânea e comentamos que em diversos casos é possível sim determinar tal fórmula e em breve voltaríamos a tratar disso.

- A quarta questão foi respondida corretamente por seis duplas. A justificativa utilizada foi a mesma por todos: Nos intervalos entre 30 e 35 minutos e entre 35 e 40 minutos a velocidade média foi superior a 100 km/h e isso garante que em alguns momentos a velocidade máxima foi ultrapassada. Quatro duplas responderam que a velocidade máxima não foi ultrapassada sem apresentar justificativa. Observamos que três destas duplas não calcularam corretamente a velocidade média nos intervalos entre 30 e 35 minutos e entre 35 e 40 minutos. Três duplas deixaram a resposta da questão em branco. Durante a discussão das respostas, foi reforçado o fato de que se a velocidade média é superior a um determinado valor, então certamente a velocidade do móvel em algum instante também foi superior a este valor.

- Na quinta questão, conforme foi previsto, sete duplas afirmaram que durante quinze minutos a velocidade do carro foi inferior a 50 km/h e a justificativa utilizada foi que entre 0 e 5 minutos, 25 e 30 minutos e 40 e 45 minutos a velocidade média foi inferior a 50 km/h. Duas duplas afirmaram que a velocidade média “dava apenas uma ideia aproximada da velocidade do carro” e não era possível responder a questão. Quatro duplas deixaram a reposta em branco. Durante a discussão das respostas, os alunos notaram através de um exame mais detalhado da questão 3 que a velocidade média ter sido inferior a 50 km/h no intervalo entre 0 e 5 minutos não garante que a velocidade do carro sempre foi inferior a 50 km/h, o mesmo ocorrendo com os intervalos entre 25 e 30 minutos e

40 e 45 minutos. Assim, ficou claro que não era possível oferecer uma resposta razoável para esta questão.

- Na sexta questão, seis duplas afirmaram que com os dados disponíveis, não era possível encontrar uma resposta. Duas duplas afirmaram que a resposta deveria ser de aproximadamente 96 km/h, já que esta foi a velocidade média quando a posição do carro variou de 11 km até 19 km. Cinco duplas deixaram a resposta em branco. Durante a realização da atividade, algumas duplas comentaram que faltavam dados na questão. Quando discutimos as respostas, os alunos perceberam rapidamente que os dados e as ferramentas matemáticas que possuíam eram insuficientes para responder esta questão. As figuras abaixo trazem algumas respostas obtidas para as questões 4, 5 e 6:

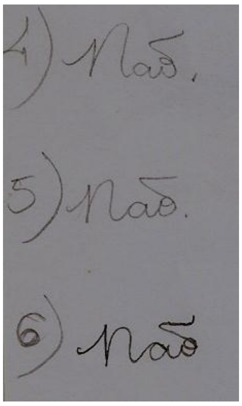


Figura 8: Resposta da dupla D1

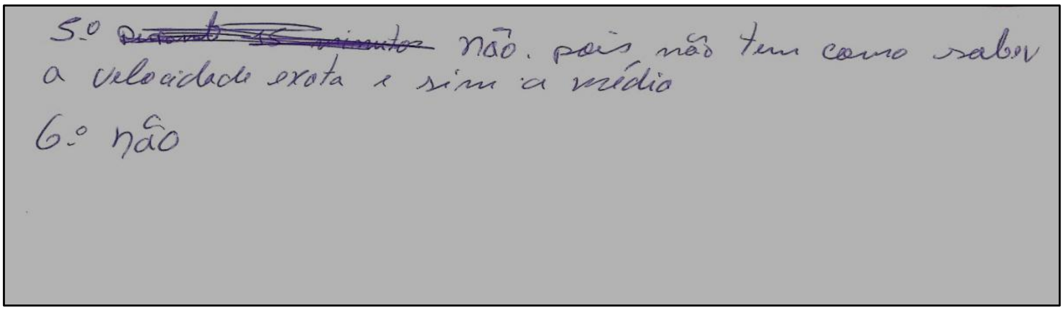


Figura 9: Resposta da dupla D8 para as questões 5 e 6.

- Na sétima questão, cinco duplas deixaram a resposta em branco e sete duplas afirmaram que os dados disponíveis não eram suficientes para que uma resposta

> fosse encontrada. Uma dupla calculou a velocidade média do carro entre 0 e 30 minutos, obtendo 1,1 km/min e afirmou que este deve ser o valor aproximado da velocidade do carro 32 minutos após o início do percurso. Durante a discussão das respostas, alguns alunos se mostraram incomodados com a constatação de que não era possível responder esta questão. Explicamos que a busca de soluções para problemas não resolvidos contribui para o avanço da Matemática e das Ciências em geral e motiva a criação de novos conceitos, teorias, técnicas e etc. Encerramos a discussão comentando que o conceito de velocidade instantânea seria explorado na próxima atividade.

Mais uma vez, percebemos grande envolvimento dos alunos durante a realização desta atividade. Ficamos satisfeitos com a qualidade da participação dos alunos durante a discussão das respostas.

TERCEIRO ENCONTRO

Às 19h 15min do dia 02/09/2011 teve início o terceiro encontro ao qual compareceram as treze duplas do encontro anterior. A quarta atividade foi distribuída e disponibilizamos o tempo de 45 minutos para sua realização. Por volta das 20h 05min iniciamos a discussão desta atividade e às 20h 40min foi dado um intervalo de quinze minutos. A quinta atividade foi distribuída às 21h 00min e recolhida por volta das 21h 30min, quando finalizamos este encontro. No que segue, temos as atividades trabalhadas neste encontro, acompanhadas das respectivas análises a posteriori.

ATIVIDADE 4 (Objetivo: calcular a taxa de variação média de uma função afim)

A posição de um corpo, em função do tempo pode ser dada pela função s(t) = 3t + 4, com $0 \leq t \leq 11$, onde *s* denota a posição do corpo em metros e *t* é o tempo em segundos.

1) Esboce no plano cartesiano o gráfico dessa função.

2) Calcule a velocidade média desse corpo em cada um dos seguintes intervalos de tempo:
   a) 2 a 3 segundos;
   b) 4 a 6,8 segundos;
   c) 2,5 a 9 segundos;
   d) 5,6 a 10 segundos;
   e) 0 a 11segundos;

3) Qual é o coeficiente angular da reta de equação y = 3x + 4 ?

4) O que você observa de semelhante entre os resultados obtidos nas duas questões anteriores ?

5) Considere uma função f, cujo domínio e a imagem é o conjunto dos números reais, tal que $f(x) = ax + b$, e a e b são números reais. Sendo x_1 e x_2 dois números reais tais que $x_1 \neq x_2$, Determine:
   a) $f(x_1)$;
   b) $f(x_2)$;
   c) A taxa de variação média de f quando x varia de x_1 até x_2 (ou seja, determine $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$);

ANÁLISE A POSTERIORI

- Ao contrário do que foi previsto na análise a priori, apenas uma dupla traçou corretamente o gráfico na questão 1, obtendo o segmento de reta cujas extremidades são os pontos P(0,4) e Q(11, 37). Seis duplas não observaram que o domínio da função dada era o intervalo [0, 11] e continuaram o gráfico usando valores de t fora desse intervalo, obtendo uma reta que contem os pontos P e Q dados anteriormente. Duas duplas desenharam curvas e não uma reta (ou um segmento de reta) e uma dupla considerou apenas valores inteiros para t, obtendo um gráfico de traçado não contínuo. Três duplas não responderam a questão. Uma dupla confundiu a variável independente (t) com a variável dependente (s) e obteve o gráfico abaixo:

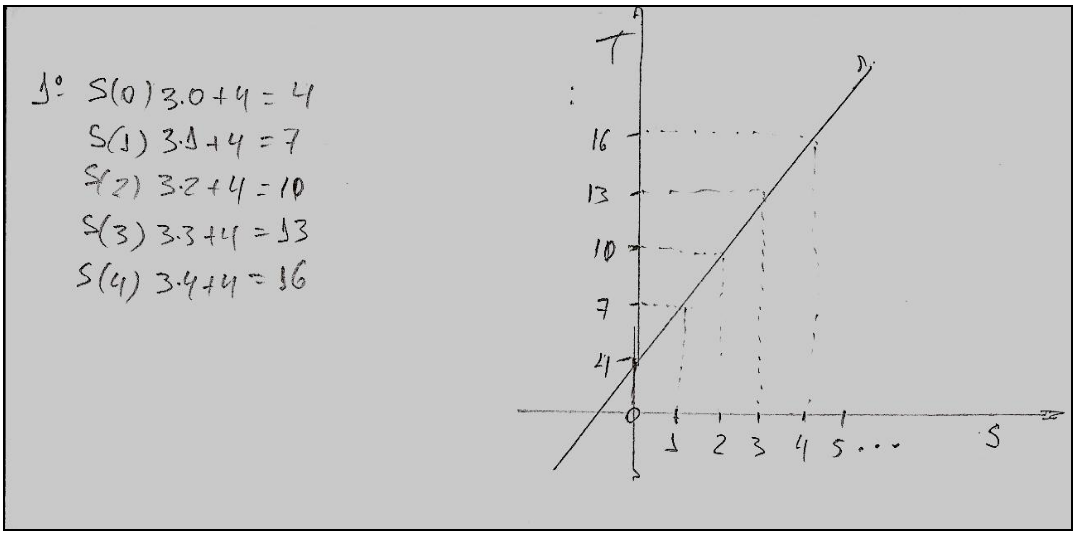


Figura 10: Resposta da dupla D6

Com os resultados encontrados aqui, percebemos que a imagem de conceito da função afim não foi adequadamente formada por estes estudantes. Este é um fato preocupante, pois o estudo da função afim foi realizado por todos eles no ensino básico e no próprio curso de graduação. De acordo com Barufi (1999) e Rezende (2003), diversos alunos que iniciam um curso de Cálculo apresentam alguma deficiência de aprendizagem em conteúdos do ensino básico. Temos aqui mais uma forte evidência deste fato.

Durante a discussão das respostas, alguns alunos comentaram que “sabiam que o gráfico era uma reta, mas não lembravam direito com desenhar”. Finalizamos a discussão destacando a necessidade de ter atenção no trato com o domínio e o contradomínio de uma função.

- Na segunda questão, apenas duas duplas comentaram erros nos cálculos e não conseguiram encontrar a resposta correta. Durante a realização da atividade, uma dupla questionou se o fato de a velocidade média ser sempre igual a 3 m/s era uma mera coincidência ou não. Respondemos que a questão cinco iria esclarecer essa situação. Os alunos se deram por satisfeitos e continuaram trabalhando.

- A terceira questão foi respondida corretamente por nove duplas. Três duplas deixaram a resposta em branco e uma dupla afirmou que o coeficiente angular da reta dada era igual a 4, (provavelmente por terem confundido com o coeficiente linear). Na discussão das respostas, perguntamos aos alunos um significado geométrico para o coeficiente angular de uma reta. Após um silencio de alguns minutos, um aluno afirmou que “havia uma relação entre o coeficiente angular da reta e o ângulo que ela faz com o eixo dos x”. Em seguida, diversos alunos concordaram com a fala do primeiro. Neste momento, lembramos que o coeficiente angular de uma reta é numericamente igual a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta e o eixo das abscissas, no sentido anti-horário.

- Na quarta questão, oito duplas responderam que tanto a velocidade média encontrada em todos os intervalos da questão 2, quanto o coeficiente angular da reta eram iguais a 3. Três duplas afirmaram q a velocidade média e o coeficiente angular da reta eram constantes, sem, no entanto, explicitar qual era o valor dessa constante. Uma dupla respondeu que a velocidade média e a o coeficiente angular eram funções e uma dupla deixou a resposta em branco. Ao discutirmos as repostas, mostramos que o algoritmo para calcular a velocidade média na situação proposta era o mesmo usado para determinar o coeficiente angular de uma reta. Assim, nada mais natural do que encontrar valores numericamente iguais, porém, com significados diferentes. Usamos o fato de que a inclinação de uma reta em relação ao eixo das abscissas ser sempre constante para argumentar que a velocidade média de um corpo cuja posição em função do tempo é dada através de uma função afim é constante.

- Os dois primeiros itens da quinta questão foram respondidos corretamente por nove duplas. Destas, apenas cinco responderam corretamente o terceiro item da questão, ou seja, afirmaram que a taxa de variação média da função dada era igual a a e curiosamente apenas três responderam corretamente o quarto item. Quatro duplas deixaram a reposta em branco, afirmando que não conseguiram entender o enunciado da questão. Na discussão das respostas, percebemos que alguns alunos apresentaram dificuldades para compreender a linguagem e a simbologia matemática utilizada. Efetuamos na lousa os cálculos referentes ao item (c) e em seguida perguntamos qual a reposta para o item (d). De imediato, uma parte dos alunos afirmou que a taxa de variação média também seria igual a zero. Reforçamos este fato, lembrando que se

a = 0, teríamos uma função constante e daí, sua variação seria nula. Finalizamos a discussão definindo a taxa de variação média para uma função qualquer num dado intervalo.

Mais uma vez ficamos satisfeitos com a participação ativa dos alunos durante a realização desta atividade. Apesar de algumas dificuldades não previstas terem ocorrido (principalmente nas questões 1 e 5), tivemos a impressão de que a discussão das respostas contribuiu para a formação e enriquecimento da imagem de conceito relativa ao conceito de taxa de variação média de uma função.

QUARTO ENCONTRO

O quarto encontro foi realizado em 09/09/2011. As treze duplas dos encontros anteriores estavam novamente presentes. Às 19h 20 iniciamos a discussão das respostas da atividade 5. Às 20h 00 os alunos receberam a atividade 6 e após meia hora, a mesma foi recolhida. Em seguida, foi dado um intervalo de quinze minutos e iniciamos a discussão das respostas desta atividade. Por volta das 21h 25, a discussão foi encerrada e o encontro finalizado. Vejamos nossa análise a posteriori referente as atividades 5 e 6.

ATIVIDADE 5 (Objetivo: calcular a taxa de variação média de uma função quadrática)

A posição *s*, (em metros), de uma bola abandonada em queda livre (desprezando-se a resistência do ar) pode ser modelada pela função $s(t) = 4{,}9t^2$ onde s é dada em metros e representa a posição da bola no instante *t*, dado em segundos, após o início da queda. Considere uma situação onde o tempo total de queda seja de 10 segundos.

1) Esboce o gráfico da função *s* descrita acima, para $0 \leq t \leq 10$.

2) Calcule a velocidade média da bola nos seguintes intervalos de tempo:

a) Entre 0 e 2 segundos;
b) Entre 3 e 4 segundos;
c) Entre 5,5 e 6,8 segundos;
d) Entre 9 e 9,5 segundos.

3) Observando os resultados obtidos no exercício anterior, o que acontece com a velocidade média quando a bola vai se aproximando do solo ?

4) Considere uma função f, cujo domínio e a imagem é o conjunto dos números reais, tal que $f(x) = ax^2$, onde a é um número real. Qual a taxa de variação média de f, quando x varia de x_1 até x_2?

ANÁLISE A POSTERIORI

- Diferentemente do que foi previsto, apenas quatro duplas traçaram corretamente o gráfico pedido na questão 1. Cinco duplas reconheceram que o gráfico deveria ser uma parábola (ou uma "parte" de uma parábola), mas cometeram enganos quanto a intersecção do gráfico com os eixos cartesianos e/ou a localização do vértice. Duas duplas traçaram uma reta passando pela origem do plano cartesiano e uma dupla deixou a resposta em branco. Durante a discussão das respostas, alguns alunos comentaram que "tinham esquecido como era o gráfico de uma função quadrática". Percebemos muitos alunos não observaram o domínio da função. As figuras abaixo mostram algumas respostas obtidas.

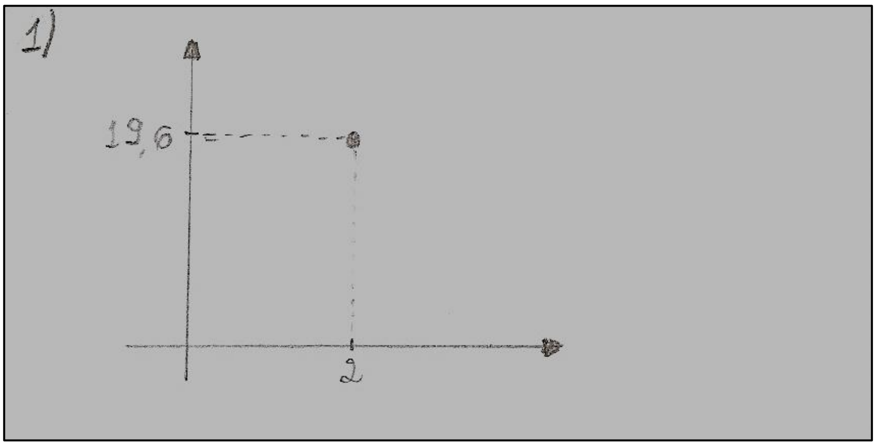


Figura 11: Resposta da dupla D1.

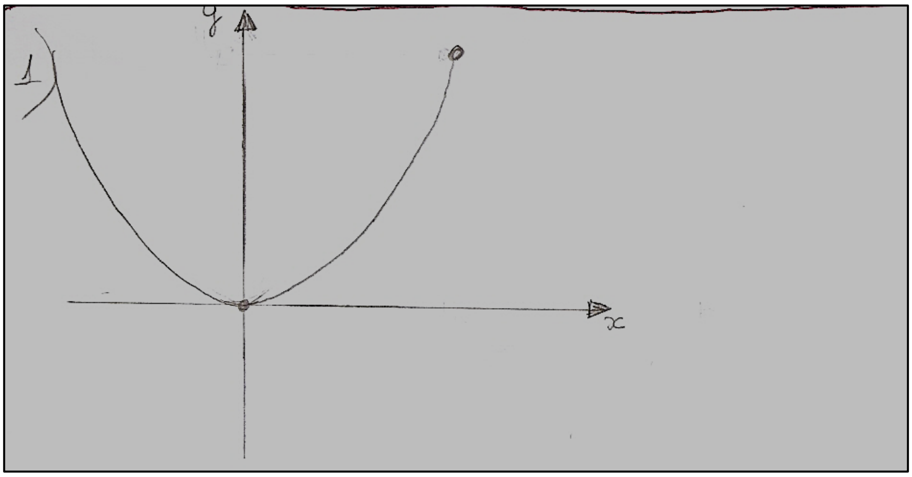


Figura 12: Resposta da dupla D13.

- Dez duplas responderam conforme prevemos na análise a priori a questão 2. Três duplas cometeram pelo menos um pequeno erro de cálculo, mas ficou claro que todos os alunos sabiam como calcular uma velocidade média. Os alunos certamente perceberam que diferentemente do que acontece com a função afim, a taxa de variação média de uma função quadrática não é sempre constante. Durante a discussão das respostas, ponderamos que a natureza da função interfere no comportamento da sua taxa de variação média.

- Na terceira questão, sete duplas responderam que a velocidade da bola deve aumentar a medida que ela vai ficando próxima do solo. Quatro duplas afirmaram que a velocidade da bola diminui a medida que ela se aproxima do chão. Possivelmente, estes alunos imaginaram que a bola está próxima do chão quando o tempo está próximo de zero. Duas duplas não responderam a questão. Durante a discussão das respostas, solicitamos que alunos fizessem uma leitura mais cuidadosa do enunciado fornecido no inicio da atividade. Após esta leitura, ficou mais claro que a bola aproxima-se do chão a medida que o tempo aproxima-se de dez segundos. Construímos o gráfico pedido na questão 1, utilizando-o para argumentar geometricamente que a velocidade média (e portanto a velocidade instantânea) aumenta a medida que a bola aproxima-se do chão e que a velocidade média da bola em um intervalo qualquer é numericamente igual ao coeficiente angular da reta secante ao gráfico que contém os pontos cujas abscissas são os extremos do intervalo considerado.

- Oito duplas conseguiram concluir conforme esperávamos os cálculos e apresentaram a resposta $a(x_1 + x_2)$. As demais duplas cometeram equívocos nas manipulações algébricas e não chegaram na resposta esperada. As figuras abaixo mostram o desenvolvimento da questão executado por duas duplas:

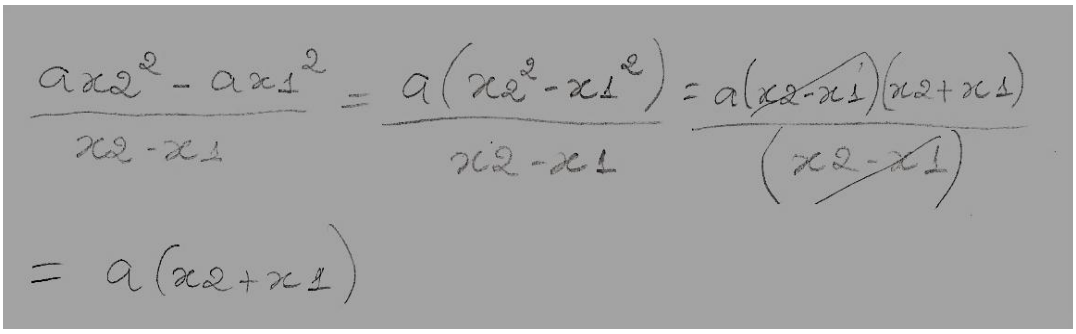


Figura 13: Resposta da dupla D7.

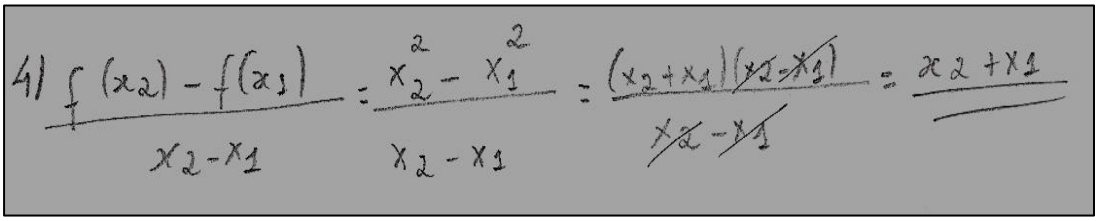


Figura 14: Resposta da dupla D5.

Durante a discussão das respostas, argumentamos que a taxa de variação média de uma função quadrática *f*, do tipo *f(x)* = ax^2, depende do seu coeficiente a e dos extremos do intervalo a ser considerado no cálculo.

A realização desta atividade também transcorreu de modo bastante satisfatório. Passemos agora à próxima atividade.

ATIVIDADE 6 (Objetivo: introduzir uma técnica que possibilite o cálculo da velocidade instantânea de um móvel, desde que sua função de posição seja conhecida e seja do tipo afim ou quadrática.)

A posição s, (em metros), de uma bola abandonada em queda livre (desprezando-se a resistência do ar) pode ser modelada pela função $s(t) = 4{,}9t^2$ onde s é dada em metros e representa a posição da bola no instante *t*, dado em segundos, após o início da queda. Considere uma situação onde o tempo total de queda seja de 10 segundos.

1) Calcule a velocidade média da bola entre os seguintes intervalos de tempo:

   a) 3, 8 e 4 segundos;
   b) 3, 9 e 4 segundos;
   c) 3, 99 e 4 segundos;
   d) 4 e 4, 5 segundos;
   e) 4 e 4, 1 segundos;
   f) 4 e 4, 01 segundos.

2) Analisado os resultados obtidos na questão anterior, a velocidade média da bola parece estar se aproximando de algum valor ? Qual ?

3) Determine:

   a) $s(4)$
   b) $s(4 + \Delta t)$ (Lembre que Δt representa um acréscimo no tempo).
   c) $\Delta s = s(4 + \Delta t) - s(4)$
   d) Se o valor de Δs obtido no item anterior depende do acréscimo Δt.

4) Calcule a velocidade média $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ da bola no intervalo entre t_1 = 4 s e t_2 = (4 + Δt)s .

5) Se a variação Δt fosse tão pequena (muito próxima de zero) que pudesse ser desprezada, qual seria o valor da velocidade média obtida na questão anterior ?

6) Considerando os resultados obtidos nas duas questões anteriores, qual deve ser o valor da velocidade instantânea da bola quando o tempo for igual a 4 segundos ?

ANÁLISE A POSTERIORI

- Na questão 1, nove duplas responderam conforme esperávamos todos os itens. Quatro duplas cometeram pequenos erros de cálculo em pelo menos um dos itens.

- Na segunda questão, dentre as duplas que responderam corretamente a primeira questão, cinco duplas afirmaram que a velocidade média parece se aproximar de 40 m/s, duas duplas afirmaram que a velocidade média se aproximava de 39 m/s, uma dupla calculou a média aritmética de todas as velocidades encontradas e afirmou que a velocidade média era aproximadamente igual a 39,44 m/s e uma dupla afirmou que o valor da velocidade média estava oscilando e não se aproximava de nenhum valor. Durante a discussão das respostas, destacamos que algumas duplas usaram a média aritmética para estimar o valor que a velocidade média aparentava estar se aproximando e observamos que isto era uma boa estratégia para lidar com situações deste tipo. Na figura a seguir, temos a resposta de uma dupla produzida para as questões 1 e 2:

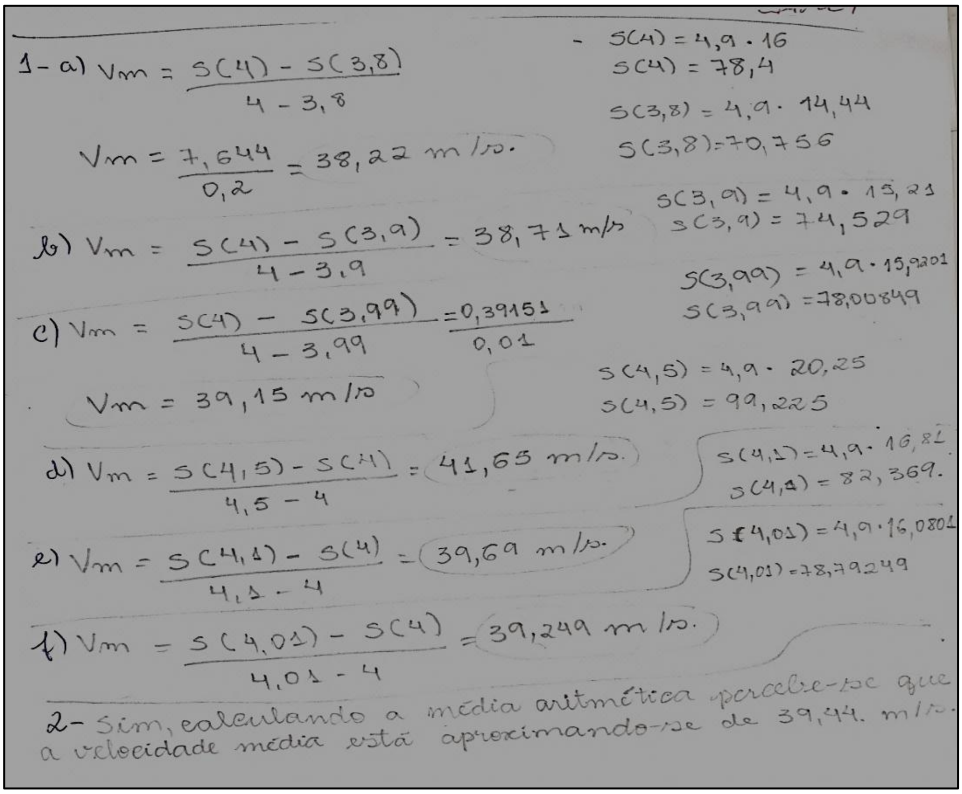


Figura 15: Resposta da dupla D6.

- Na terceira questão, dez duplas responderam conforme foi previsto na análise a priori os dois primeiros itens. As três outras duplas cometeram erros nos cálculos do segundo item. Nove duplas concluíram adequadamente os dois últimos itens. Três duplas não concluíram corretamente o terceiro item e mesmo assim responderam de forma afirmativa o quarto item. Uma dupla não respondeu os dois últimos itens.

- Para responder a quarta questão, alguns alunos solicitaram esclarecimentos sobre o significado de t_1 e t_2. Explicamos para todos os alunos que o que estava sendo pedido era a velocidade média da bola no intervalo de tempo entre 4 segundos e $4 + \Delta t$ segundos, onde Δt representa um acréscimo no tempo. Seis duplas responderam corretamente a questão e quatro duplas se atrapalham com as manipulações algébricas necessárias e não encontraram uma resposta correta. Três duplas não responderam esta questão. Na figura abaixo, temos a reposta de uma das duplas para esta questão:

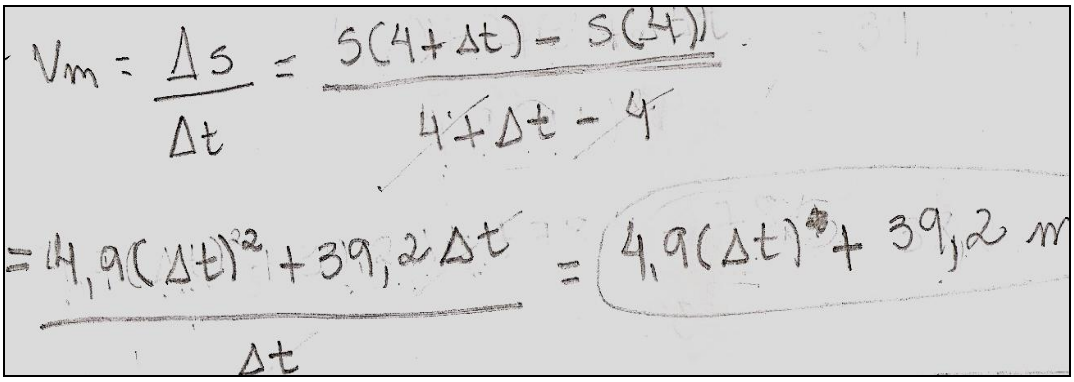


Figura 17: Resposta da dupla D4.

- As seis duplas que responderam corretamente a questão anterior também responderam adequadamente a quinta questão, procedendo do modo como foi previsto na análise a priori. A figura abaixo traz um exemplo desta situação:

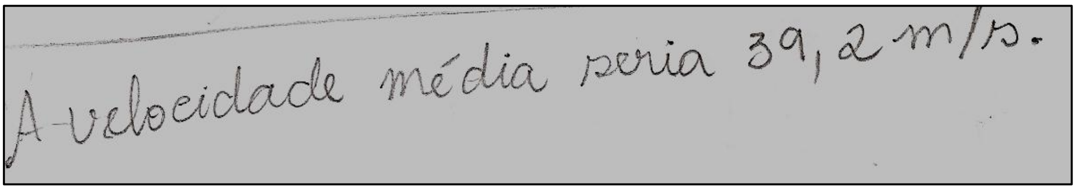


Figura 18: Resposta da dupla D4.

Apesar de não terem encontrado a resposta que esperávamos, quatro duplas desprezaram o termo que continha Δt na expressão que haviam obtido para a velocidade média na resposta da questão anterior e afirmaram que a velocidade média para Δt muito pequeno poderia ser determinada desta forma. Duas duplas deixaram a resposta em branco e uma dupla afirmou (sem apresentar uma justificativa) que se Δt fosse muito pequeno, a velocidade média não poderia ser calculada.

Durante o momento de discussão das respostas, questionamos o tratamento aparentemente ambíguo[41] dado a Δt: Primeiro sendo considerado como um número pequeno (muito próximo de zero) e depois sendo desprezado, o que seria equivalente a considerar $\Delta t = 0$. Alguns alunos afirmaram que "aquilo não podia ser feito com Δt, pois não tinha lógica". Outros estudantes afirmaram que o procedimento era válido, mas não apresentaram

[41] Conforme vimos no capítulo 2 deste trabalho, este fato foi objeto de intenso debate que durou aproximadamente 150 anos e estava relacionado diretamente ao estabelecimento de fundamentos logicamente rigorosos para o Cálculo.

uma justificativa. Um aluno argumentou que “pode desprezar Δt, mas a velocidade média obtida é um valor aproximado”. Em seguida, escrevemos no quadro a expressão:

$$\frac{4{,}9(\Delta t)^2 + 39{,}2\Delta t}{\Delta t} = 4{,}9(\Delta t)^2 + 39{,}2$$

Então, argumentamos da seguinte forma: A igualdade acima é válida sempre que $\Delta t \neq 0$. Assim, quando desprezamos Δt na expressão $4{,}9(\Delta t)^2 + 39{,}2$ realmente estamos obtendo um valor aproximado para a velocidade média. Porém, quanto menor (mais próximo de zero) valor de Δt, melhor será a aproximação. Desta forma, não estamos tomando $\Delta t = 0$. Na realidade, estamos supondo que Δt é um número positivo, suficientemente próximo de zero, a ponto de ser desprezado. Assim, é bastante razoável adotar o valor 39,2 m/s para a velocidade média. Acrescentamos ainda que no final do próximo encontro, falaríamos um pouco sobre rigor matemático.

- Na sexta questão, dez duplas procederam conforme foi previsto na análise a priori. Em síntese, assumiram que a velocidade instantânea para o tempo igual a quatro segundos deve ser aproximadamente a mesma velocidade média obtida na questão anterior. Mas, como apenas seis duplas tinham respondido corretamente a questão cinco, apenas estas duplas chegaram à resposta que esperávamos. Três duplas deixaram a resposta em branco. Na discussão das respostas, apresentamos a definição de velocidade instantânea que explicitamos no capítulo dois deste trabalho. O debate relativo à questão anterior contribuiu para que a maior parte dos alunos compreendesse bem a definição dada.

QUINTO ENCONTRO

O quinto encontro teve início às 19h 10 do dia 16/09/2011. Estavam presentes treze duplas e a atividade 7 foi distribuída, sendo recolhida às 20h 20min. Após um intervalo de quinze minutos iniciamos as discussões sobre as respostas desta atividade. Às 21h 50 finalizamos a discussão e o encontro foi encerrado. No que segue, apresentamos a atividade trabalhada neste encontro seguida da nossa análise a posteriori.

ATIVIDADE 7 (objetivos: institucionalizar o conceito de derivada de uma função e suas interpretações geométrica e física.)

1) Seja a função $y = x^2$.

   a) Esboce o gráfico da função dada e marque no gráfico os pontos A (x_a, x_a^2) e P ($x_a+\Delta x$, $(x_a+\Delta x)^2$), suponha que os pontos pertençam ao primeiro quadrante do plano cartesiano.
   b) Determine $\Delta y = (x_a + \Delta x)^2 - x_a^2$.
   c) Calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
   d) Você é capaz de dizer qual o significado geométrico de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

2) Considere a expressão obtida para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ na questão anterior. Supondo que o acréscimo Δx seja tão pequeno que possa ser desprezado, determine:

a) Como ficará a expressão para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?
b) O que acontece com os pontos A e P ?

3) O resultado obtido na questão anterior chama-se derivada (ou taxa de variação instantânea) da função $y = x^2$ no ponto de abscissa x_a. Usando um raciocínio análogo ao que foi feito nas duas questões anteriores, determine a derivada da função $y = x^3$ no ponto de abscissa x_a .

4) Considere a função afim $y = ax + b$, onde a e b são números reais. Dados os pontos P (x_p, ax_p+ b) e $Q(x_p + \Delta x, a(x_p + \Delta x) + b)$ pertencentes ao gráfico de y, calcule:

a) $\Delta y = a(x_p + \Delta x) + b - (ax_p - b)$
   b) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

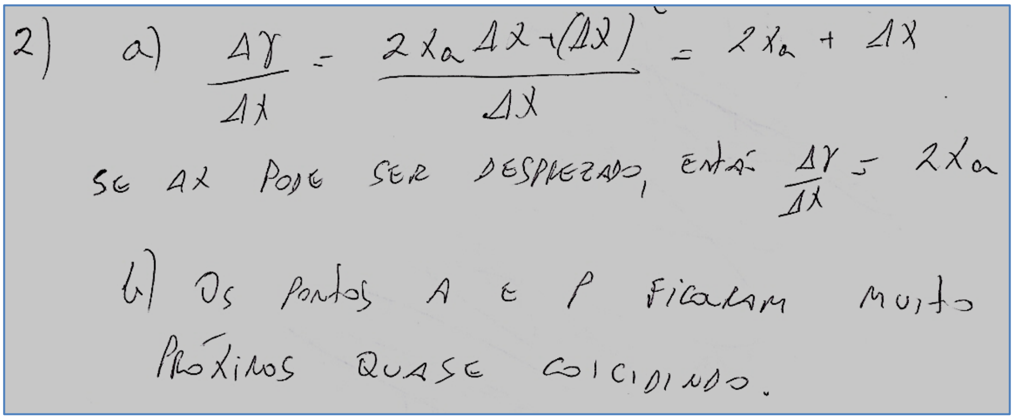
5) O valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ obtido no exercício anterior depende do acréscimo Δx?

6) Considerando os resultados das duas questões anteriores, determine a derivada da função afim $y = ax + b$ e da função constante $y = b$ no ponto de abscissa x_a.

ANÁLISE A POSTERIORI

- Onze duplas esboçaram conforme esperado o gráfico da função $y = x^2$. Uma dupla considerou apenas valores positivos de x ao esboçar o gráfico e uma dupla deixou este item em branco. Durante a realização da atividade, três duplas solicitaram esclarecimentos para marcar os pontos pedidos. Relembramos para todos os alunos que Δx deveria ser interpretado como um acréscimo positivo na abscissa do ponto A. Dez duplas marcaram corretamente os pontos A e P. Uma dupla marcou o ponto P a esquerda do ponto A, e duas duplas não marcaram os pontos A e P. Nos itens (b) e (c), quatro duplas cometeram pequenos erros nas manipulações algébricas e não encontraram a resposta esperada. Os demais alunos responderam conforme era esperado. No item (d), sete duplas afirmaram que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ era o coeficiente angular da reta que passava pelos pontos A e P. Três duplas não entenderam bem a pergunta e afirmaram que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ era a taxa de variação média da função. Três duplas deixaram este item em branco.

- No item (a) da questão dois, as nove duplas que responderam corretamente o item (c) da questão um, afirmaram que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_a$, confirmando nossa análise a priori. Três duplas não encontraram a resposta esperada. No entanto, apresentaram um raciocino correto, simplificando a expressão encontrada para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e depois desprezando Δx. Este fato nos mostra que os alunos compreenderam de modo adequado o procedimento utilizado para determinar a taxa de variação instantânea de uma função quadrática. No item (b) oito duplas afirmaram que os pontos ficariam muito próximos e quatro duplas afirmaram que os pontos iriam coincidir. Uma dupla provavelmente não entendeu o que a questão dizia e afirmou que nada ia acontecer com os pontos. Na figura abaixo vemos a resposta produzida por uma dupla:



2) a) $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{2X_a \Delta X + (\Delta X)}{\Delta X} = 2X_a + \Delta X$

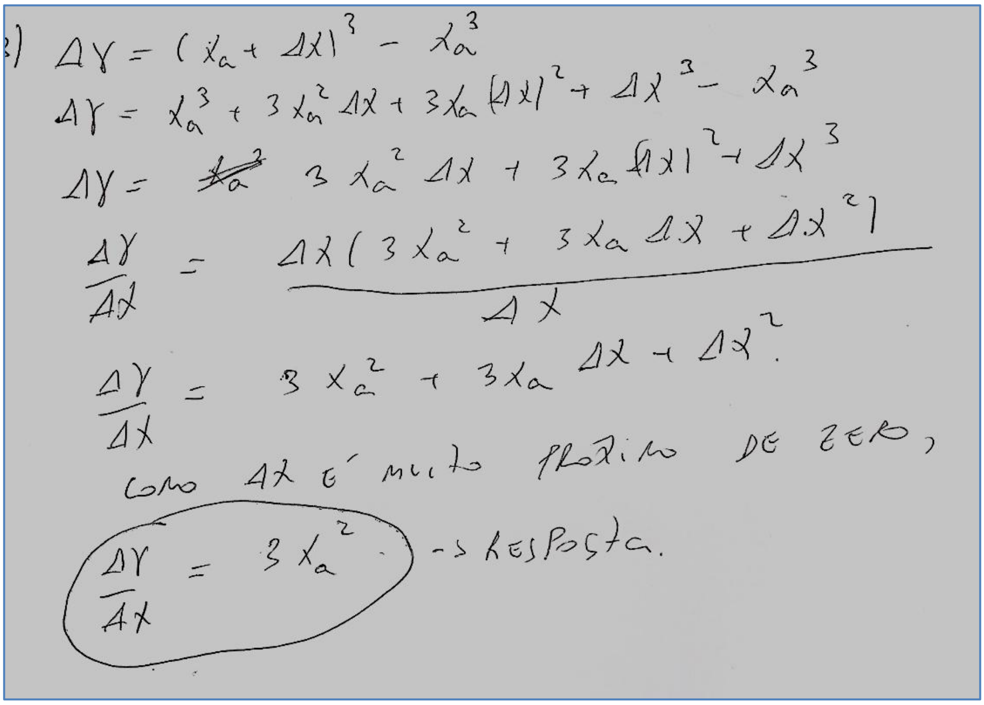
SE ΔX PODE SER DESPREZADO, ENTÃO $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = 2X_a$

b) OS PONTOS A E P FICARAM MUITO PRÓXIMOS QUASE COINCIDINDO.

Figura 19: Resposta da dupla D9.

Ao contrario do que previmos na análise a priori, nenhum aluno questionou o quão pequeno Δx deveria ser pequeno para que pudesse ser desprezado. Durante a discussão das respostas, provocamos uma reflexão sobre isto. Os subsídios teóricos para esta discussão nos foram fornecidos principalmente por Reis (2001). Procuramos evidenciar que a expressão "supondo que o acréscimo Δx seja tão pequeno que possa ser desprezado" pode ser criticada quanto a sua precisão. Comentamos que reflexões semelhantes foram feitas por matemáticos dos séculos XVII e XVIII e apenas no século XIX essas e outras questões de natureza semelhante foram resolvidas de modo definitivo. Finalizando a discussão observando que os pontos A e P "ficariam infinitamente próximos", sem coincidir.

- Na terceira questão, duas duplas solicitaram ajuda para desenvolver a expressão $(x + \Delta x)^3$. Decidimos escrever no quadro a fórmula do cubo da soma de dois termos. Conforme previsto na análise a priori, nove duplas apresentaram o desenvolvimento esperado e encontram como resposta $3(x_a)^2$. Três duplas apresentaram um raciocínio correto, mas cometeram erros nas manipulações algébricas e não encontraram a resposta esperada. Abaixo, temos a resposta de uma dupla:


3) $\Delta y = (x_a + \Delta x)^3 - x_a^3$

$\Delta y = x_a^3 + 3x_a^2 \Delta x + 3x_a (\Delta x)^2 + \Delta x^3 - x_a^3$

$\Delta y = \cancel{x_a^3}\ 3x_a^2 \Delta x + 3x_a (\Delta x)^2 + \Delta x^3$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_a^2 + 3x_a \Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_a^2 + 3x_a \Delta x + \Delta x^2.$

como Δx é muito próximo de zero,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_a^2.$ → resposta.

Figura 20: Resposta da dupla D9.

Durante a discussão das respostas, uma dupla indagou se esse método poderia ser aplicado para determinar a derivada de todos os tipos de funções. Respondemos que este método poderia ser aplicado em funções polinomiais, mas outros tipos de funções como as exponenciais e trigonométricas, por exemplo, necessitavam de um instrumental matemático um pouco mais sofisticado, que seria desenvolvido futuramente. Destacamos ainda que independentemente do processo usado para calcular a derivada, a essência do conceito permanecia a mesma.

- Conforme prevemos na analise a priori, os resultados obtidos na questão 4 foram análogos aos das questões dois e três. Duas duplas cometeram erros nas manipulações algébricas e não chegaram na resposta esperada. Uma dupla deixou a questão em branco e as demais apresentaram o desenvolvimento previsto e chegaram na resposta esperada.

- Novamente, de acordo com o que foi previsto na análise a priori, as dez duplas que responderam corretamente a questão anterior, também apresentaram a resposta esperada na quinta questão. As demais duplas não atingiram a resposta esperada. Durante a discussão das repostas, alguns alunos observaram que “este cálculo já tinha sido feito em atividades anteriores”. Concordamos com a observação, lembrando que neste caso tínhamos uma situação mais geral do que no caso anterior, já que lá (atividade 5) a função relacionava posição e tempo.

- Na questão seis, nove duplas apresentaram o desenvolvimento esperado e chegaram a resposta esperada. Uma dupla afirmou que a derivada da função constante era "igual a a". Sem apresentar nenhum tipo de justificativa, uma dupla respondeu que a derivada da função constante era nula. Duas duplas apresentaram um raciocínio correto, mas cometeram pequenos erros nas manipulações algébricas e não chegaram na resposta esperada. No momento de discussão das respostas, alguns alunos observaram que "se a derivada é uma taxa de variação, então é claro que a derivada da função constante deve ser igual a zero, pois se a função é constante, não há variação". Este fato nos mostra que ao se apropriarem de um significado para um conceito, os alunos podem perceber com maior naturalidade propriedades deste conceito (BALDINO, 1998).

Após a discussão das respostas, voltamos à questão 2 e perguntamos naquela situação, qual significado geométrico poderia ser atribuído a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Após poucos minutos de reflexão, alguns alunos afirmaram que "$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ representava geometricamente o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A e P". Isto nos mostra a interpretação geométrica de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ como coeficiente angular de uma reta faz parte da imagem de conceito (relativa ao conceito de taxa de variação média) destes alunos. Em seguida esboçamos o gráfico da função $y = x^2$ e traçamos uma reta tangente ao gráfico no ponto $A\ (x_a, x_a^2)$. Em seguida, perguntamos aos alunos se eles eram capazes de calcular o coeficiente angular desta reta tangente. Após alguns instantes, duas duplas afirmaram que "acham que o valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ encontrado na questão dois é o valor do coeficiente angular da reta tangente". A maior parte dos alunos concordou com a resposta dada e definimos o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto de abscissa x_a. Posteriormente, explicamos aos alunos que o símbolo $\Delta x \to 0$ pode ser interpretado como "Δx é um número infinitamente próximo de zero". Lembramos ainda que o significado da expressão "infinitamente próximo" seria tornando mais preciso do ponto de vista matemático em estudos posteriores. Explicamos também que a derivada de uma função f no ponto de abscissa x_a pode ser denotada por $f'(x_a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_a + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Continuamos explicando que a derivada admitia interpretações como velocidade instantânea, coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função e de modo geral, significa uma taxa de variação, mas em última essência era um limite, isto é, um número calculado a partir da expressão dada acima. Observamos ainda que a derivada também pode ser vista como uma função.

Finalizamos nossa discussão comentando que nas próximas aulas iríamos discutir um pouco mais sobre a noção e limite e aprofundar nossos estudos sobre a derivada de uma função.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que possibilitasse a introdução do conceito de derivada a partir da ideia de variação.

As considerações que ora apresentamos são fruto da análise dos dados levantados durante a aplicação da sequência didática e de reflexões que ocorreram durante todo o processo de construção da nossa pesquisa.

Ficamos bastante satisfeitos com a participação e o envolvimento dos alunos durante a nossa intervenção em sala de aula. Com exceção de duas duplas que faltaram em algumas aulas (e, embora tenham participado da pesquisa, não tiveram seus dados analisados) a grande maioria dos alunos se mostrou empolgada com a nossa proposta metodológica, chegando inclusive a sugerir que deveríamos conversar com outros professores e "convencê-los" a usar propostas semelhantes em suas disciplinas. Destacamos o bom relacionamento entre os alunos e o professor-pesquisador.

Embora muitas previsões realizadas na nossa análise a priori tenham sido concretizadas, fomos também surpreendidos em alguns momentos. Deparamo-nos com determinadas dificuldades manifestadas por diversos alunos em relação ao aprendizado de conteúdos do ensino básico. Em particular, percebemos a existência de dificuldades para manipular expressões algébricas simples e esboçar gráficos de funções do tipo afim e quadrática.

Verificamos também que, praticamente todos os alunos, apresentavam dificuldades na expressão escrita. Algumas respostas que julgamos inicialmente incompletas ou incorretas foram elucidadas durante a discussão das respostas, evidenciado que a dificuldade não estava na compreensão das ideias matemáticas e sim na escrita da resposta. Acreditamos que redigir justificativas para questões matemáticas não é habitual na escola básica e isto pode explicar, ao menos em parte, tal dificuldade.

Percebemos que muitos alunos acreditam que a resposta para um problema matemático deve ser dada essencialmente através de cálculos. Em alguns momentos, ouvimos coisas como: "Professor, eu não sei qual conta devo fazer pra justificar minha resposta". Nessas ocasiões, ponderamos que um gráfico, uma figura geométrica ou uma argumentação por escrito poderiam ser usados como justificativa.

Constatamos que o fato de não termos adotado a aula predominantemente expositiva incentivou os alunos a saírem de uma postura passiva, dentro da qual a autoridade do professor decreta as “verdades” que são absolutamente inquestionáveis e o papel que lhes cabe resume-se a aceitar tais “verdades”, e assumirem um protagonismo diante da construção/negociação de significados que estava ocorrendo durante as aulas. Neste aspecto, observamos que essa mudança de postura ocorreu de maneira gradual e não atingiu todos os alunos na mesma intensidade.

A realização de sessões plenárias, nas quais discutíamos as respostas e organizávamos os conteúdos estudados foi muito importante na nossa pesquisa. Nesses momentos, os alunos tiveram a oportunidade de debater ideias, problemas e soluções. Apesar de certo receio inicial, no decorrer do trabalho percebemos que uma parcela significativa dos alunos se dispunha a expor oralmente seus argumentos, discutindo ativamente as atividades trabalhadas.

Durante a elaboração e execução da pesquisa, tivemos certa preocupação com o fator tempo. Os motivos eram basicamente dois: O bom andamento da nossa investigação e a necessidade de cobrir a ementa da disciplina. Algo em torno de 25% da carga horária da disciplina foi dedicada à aplicação da nossa sequência didática e foi possível cumprir cerca de 80% da ementa prevista. Consideramos estes números satisfatórios e acreditamos que a nossa sequência didática pode ser aplicada integralmente ou parcialmente em outras turmas.

Na nossa concepção, em um curso inicial de Cálculo Diferencial, os conceitos de limite e derivada devem ser utilizados para aprofundar o estudo do conceito de função. Assim, após introduzirmos o conceito de derivada através da proposta pedagógica que apresentamos neste trabalho, demos prosseguimento a disciplina iniciando um estudo dos seguintes conceitos: Limites, continuidade e regras de derivação, sempre enfatizando a compreensão conceitual e dentro de um nível de rigor matemático que julgávamos adequado. As funções transcendentes foram abordadas, ampliando as possibilidades do uso da derivada na resolução de problemas de diversos tipos.

Em consonância com a teoria da imagem de conceito de Tall e Vinner (1981), as atividades que propomos na nossa sequência didática tinham como objetivo contribuir para que a maior parte dos estudantes formasse uma rica imagem de conceito relativa à derivada. Os dados obtidos através dos protocolos de pesquisa e registros que realizamos durante a experiência em sala de aula corroboram nossa impressão: A maioria dos alunos conseguiu conceitualizar adequadamente a derivada como uma medida de variação, compreendendo alguns dos seus significados, tais como: velocidade instantânea, taxa de variação instantânea e coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função.

A partir da nossa análise a posteriori, nos pareceu evidente que a maior parte dos alunos construiu o conceito de derivada como uma taxa de variação instantânea. Também percebemos que alguns alunos (aproximadamente 15% da turma) apresentaram mais dificuldades de aprendizado do que havíamos previsto. No entanto, avaliamos que os resultados obtidos foram satisfatórios.

Durante as diversas fases da elaboração da nossa pesquisa, realizamos algumas reflexões, sobre as quais passaremos a discorrer.

Um fato indiscutível é a acentuada presença do Cálculo Diferencial e Integral em cursos universitários voltados para a formação de profissionais das mais diversas áreas. No Brasil, sobretudo nas Instituições de Ensino Superior públicas, é bastante comum alunos oriundos de cursos como Engenharia, Computação, Física, Matemática, Química, dentre outros, cursem diversas disciplinas (inclusive o Cálculo) juntos. Assim, considerando as especificidades de cada perfil profissional, e tendo como objetivo o aprendizado efetivo da disciplina, indagamos: Será que o mesmo curso de Cálculo deve ser ministrado para alunos da Licenciatura em Matemática e alunos de Engenharia, por exemplo ? Baldino e Cabral (2004) evidenciam que considerar as particularidades das diferentes áreas de formação é importante quando se deseja a construção de uma prática pedagógica e de um currículo focados em um aprendizado significativo. Assim, como elaborar e executar um curso de Cálculo que atenda as diversas necessidades de alunos provenientes de diferentes áreas de formação ? Ainda nessa perspectiva, quais contribuições e limitações o uso de tecnologias da informação e comunicação podem trazer para o aprendizado do Cálculo ? No nosso entendimento, tais questionamentos merecem estudos mais aprofundados.

Impulsionados pelo desejo de pesquisarmos nossa própria sala de aula, aplicamos a sequência de ensino em uma turma de alunos que cursavam a Licenciatura em Matemática. Durante o desenrolar da pesquisa, refletimos sobre o papel do Cálculo na formação inicial do professor de Matemática da escola básica e, de modo geral, sobre a totalidade da formação matemática do licenciando. No caso específico do Cálculo, constatamos que a interpretação da derivada como uma medida de variação articula-se com conteúdos do ensino médio, especialmente no caso do conceito de velocidade e no estudo de funções, podendo auxiliar o professor em formação a ter uma visão mais ampla dos tópicos que, mais tarde, irá ministrar em sala de aula.

Sobre a presença do Cálculo no ensino médio, alguns pesquisadores têm se debruçado sobre esta temática. Rezende (2003) afirma que uma das principais causas das dificuldades de aprendizagem apresentadas por alunos no ensino superior é ausência, no ensino básico, de problemas construtores dos conceitos centrais do Cálculo. Nessa perspectiva, André (2008) e Pereira (2009) investigaram propostas pedagógicas para o ensino do conceito de derivada no ensino médio, utilizando a ideia de variação. As conclusões de ambos atestam a viabilidade das propostas.

Outra questão sobre a qual refletimos, diz respeito a uma temática que nos parece pouco explorada: A formação pedagógica do professor de Cálculo. Em suma, até que ponto os cursos de pós-graduação oferecidos nas universidades brasileiras fornecem os subsídios teórico-metodológicos necessários para o exercício da prática docente ? Julgamos que a Educação Matemática tem muito a contribuir nesse sentido.

A realização desta pesquisa contribuiu bastante para o nosso crescimento acadêmico, profissional e pessoal. Foi possível perceber com mais clareza a imensa complexidade que permeia a sala de aula. Os fenômenos que lá ocorrem, transcendem os limites de quaisquer teorias. Assim, nosso olhar limitado teve acesso a apenas um recorte da realidade que investigamos. No entanto, esperamos ter contribuído, ainda que timidamente, com a Educação Matemática.

Finalizamos este trabalho convidando os colegas professores de Matemática ao exercício constante da reflexão sobre sua própria prática pedagógica.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ANDRÉ, S. L. C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 2008.

ANTON, H.; Et al. **Cálculo.** v.1. 8ª . Ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. In: BRUN, J. (Dir) **Didática das matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 193-217.

ÁVILA, G. **Cálculo de funções de uma variável real**. v. 1. 7ª ed. São Paulo: LTC, 2003.

BALDINO, R. R. **Desenvolvimento de essências de Cálculo Infinitesimal**. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998.

BALDINO, R.; CABRAL, T. O ensino de matemática em um curso de engenharia de sistemas digitais. In: CURY, H. N. (Org) **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 139-186.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.

BELTRÃO, M. E. P. **Ensino de Cálculo pela modelagem matemática e aplicações** – Teoria e prática. Tese (Doutorado em Educação Matemática), PUC-SP, 2009

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

____________ **The history of the calculus and its conceptual development**. New York: Dover, 1978.

BRITO, A. J.; CARDOSO, V. C. (1997). **Uma abordagem histórico-pedagógica dos fundamentos do Cálculo Diferencial: reflexões metodológicas**. **Revista Zetetiké**, Campinas, ano 5, nº 7, 1997.

CASSOL, A. **Produção de significados para a derivada**: Taxa de variação. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: UNESP, 1998.

CORNU, B. Limits. In: TALL, D. (Ed). **Advanced Mathematical Thinking**, (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991.

COSTA, M. A. **As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios**. São Paulo: Grijalbo/EDUSP, 1971.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática ?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

D’AMBROSIO, U. **Cálculo e introdução à Análise**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

D’AVLOGLIO, A. R. **Derivada de uma função num ponto:** Uma forma significativa de introduzir o conceito. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática: PUC-SP, 2002.

DALL’ANESE, C. **Conceito de derivada:** Uma proposta para seu ensino e aprendizagem. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC-SP, 2000.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking process. In: D. Tall (Ed), **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991.

ESCARLATE, A. C. **Uma investigação sobre a aprendizagem de integral**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal de Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 2008.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos**.** 3ª. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009 – (Coleção formação de professores).

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, Campinas, ano 3, nº 4, 1995.

FRANCHI, R H. O. Cursos de cálculo: uma proposta alternativa. **Temas e Debates**. Blumenau: SBEM, v.7, n.6, abril, 1995. p.39-43.

FRID, S. Three approaches to undergraduate calculus instruction: their nature and potential impact on students’ language use and sources of conviction. **CBMS Issues in Mathematics Education,** Dubinsky, E ; Shoenfeld, A. ; H., Jim Kaput (Orgs). Providence: MAA. v.4, 1994. p. 69–100.

GIRALDO, V. Descrições e Conflitos Computacionais: **O Caso da Derivada**. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – COPPE. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

GODOY, L. F. S. **Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

GRATTAN-GUINESS, I. O que foi e o que deveria ser o Cálculo ? . **Revista Zetetiké**, Campinas, ano 5 nº 7, 1997.

HUGHES – HALLETT; Et al. **Cálculo Aplicado**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

IGLIORI, S. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: Frota, M. ; Nasser, L. (Org) **Educação Matemática no Ensino Superior**: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 2009.

JÚNIOR, A. O. **Compreensões de conceitos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de Matemática – Uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro: UNESP, 2006.

KLINE, M. Calculus**: An Intuitive and Physical Approach**. 2ª. ed. New York: Dover, 1998.

____________ **Mathematics for nonmathematician**. New York: Dover, 1985.

LAKATOS, I. **A Lógica do descobrimento matemático**: Provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa Pedagógica:** Do projeto à implementação. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LEHMANN, M. S. **Proposta de uma sequência didática para conceitualização de derivada como taxa de variação instantânea.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Severino Sombra: Vassouras, 2011.

LIMA, E. L. Análise Real: **Funções de uma variável real**, v. 1. 8ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LÜDKE, M.; ANDRÈ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986. (Temas Básicos de Educação e Ensino).

MACHADO, S.D.A. Engenharia didática**.** In: **Educação matemática: (**uma) nova introdução. São Paulo: Educ, 2010. p. 233-247.

MATEUS, P. **Cálculo Diferencial e Integral em livros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2007.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente:** Imagem Conceitual e Definição Conceitual. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2003.

PAIS, L.C. **Didática da Matemática**: Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte, Editora Autêntica, 2002.

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no ensino médio:** Uma proposta para o problema da variabilidade. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal de Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 2009.

RAMOS. V. V. **Dificuldades e concepções de alunos de um curso de licenciatura em matemática, sobre derivadas e suas aplicações.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2009.

RÊGO, R. M. **Uma abordagem alternativa de ensino de Cálculo usando infinitésimos**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte: Natal, 2000.

REIS, F. da S. **A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise:** A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: UNICAMP, 2001.

REZENDE, W. M. **Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio de Janeiro: IEM-USU, 1994.

_________________. **O Ensino de Cálculo**: Dificuldades de Natureza Epistêmica. Tese (Doutorado em Educação). São Paulo: USP, 2003.

SIERPINSKA, A. **Understanding in Mathematics**. London: The Falmer Press, 1994.

_______________. **Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits**. Educational Studies in Mathematics, 18, 1987.

SILVA, B. A. Contrato Didático. In: **Educação matemática:** uma (nova) introdução. São Paulo: Educ, 2010. p.49-75.

SILVA, B. A., IGLIORI, S. B. C. Um estudo exploratório sobre o conceito de derivada. In: IV ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996. São Paulo. Anais. São Paulo, 1996.

STEWART, J. **Cálculo**. v.1. 5ª. ed. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2006.

TALL, D.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity**. Educational Studies in Mathematics. Amsterdam: North-Holland, v.12, n.2, 1981. p.151-169.

TALL, D. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (**how the computer can support mathematical thinking and learning**). In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5, 2000, Chiang Mai. *Proceedings*... Blackwood: ATCM Inc, 2000.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro: Unesp, 1999.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. In: Tall, D. (Ed), **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991.