UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

JOZAN MEDEIROS

UMA ABORDAGEM DE ENSINO DOS NÚMEROS REAIS

CAMPINA GRANDE – PB
2010

JOZAN MEDEIROS

UMA ABORDAGEM DE ENSINO DOS NÚMEROS REAIS

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Aldo Bezerra Maciel

Co-Orientador: Prof. Dr. Rômulo Marinho do Rêgo

Campina Grande – PB
2010

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na sua forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

M488a Medeiros, Jozan.

Uma abordagem de ensino dos números reais [manuscrito] / Jozan Medeiros. – 2011.

140 f.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática), Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, 2011.

"Orientação: Prof. Dr. Aldo Bezerra Maciel, Departamento de Matemática".

1. Números reais. 2. Ensino de matemática. 3. Aprendizagem. I. Título.

21. ed. CDD 512.7

JOZAN MEDEIROS

UMA ABORDAGEM DE ENSINO DOS NÚMEROS REAIS

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.

Aprovado em 23 de Dezembro de 2010

Banca Examinadora

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Rômulo Marinho do Rêgo - UEPB
(Examinador)

Prof. Dr. Aldo Bezerra Maciel - UEPB
(Orientador)

Campina Grande – PB
2010

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus, que é minha força e luz; a minha mãe Luzia que em seu ventre me embalou ao compasso de seu coração, onde transmitia vibrações de carinho e amor; a minha esposa Edna pelos momentos de paciência, compreensão, esforço e incentivo em minha carreira e a minha filha Mariane.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelos meus familiares (irmãos, sobrinhos e tias) que, com grande amor, incentivaram-me neste tempo de estudo.

Aos amigos pelo apoio que somente eles souberam dar e, sobretudo a preciosidade de cada amizade.

Agradeço a todos os colegas do Mestrado em Ensino de Matemática e em especial a Danielly, Kleber, Eliane e Valber.

Ao secretário da pós-graduação Ricardo Ferreira.

Aos professores Cidoval, Filomena Moita, Abigail e Ana Paula e todos aqueles que contribuíram no mestrado.

Ao meu orientador e amigo Aldo Bezerra Maciel pelas sábias orientações.

Ao meu coorientador e amigo Rômulo Marinho do Rêgo por ensinar-me com seus ilimitados conhecimentos e dedicação, pelo respeito às minhas limitações, pelo seu rigor que me permitiu avançar e crescer e por me fazer entender que a educação humaniza e liberta.

Ao professor da UFCG, Daniel Cordeiro de Morais Filho por participar como examinador externo que com sua capacidade e experiência em Ensino de Matemática trouxe valiosas contribuições para o enriquecimento desta proposta de trabalho.

A instituição UEPB por possibilitar através da pós-graduação a realização deste sonho.

A todos os alunos que participaram desta pesquisa.

A todos vocês o meu eterno respeito e admiração.

“Deus deu ao homem os números naturais o resto o homem fez”.

LOBACHEVSKY

RESUMO

Medeiros, J**. UMA ABORDAGEM DE ENSINO DOS NÚMEROS REAIS.** 2010. 140f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, Campina Grande, 2010.

Esta pesquisa consistiu no desenvolvimento de uma abordagem didática, na sua aplicação e avaliação em uma turma do 3º ano do Ensino Médio, visando à construção dos números reais com o objetivo de possibilitar ao aluno apreender conhecimentos sobre os conjuntos numéricos, tanto formativos como funcionais recomendados pelos documentos oficiais para a educação básica, acrescida de um módulo de ensino, contendo textos, atividades didáticas, metodologia e uma proposta de avaliação. A partir da hipótese de que os alunos apresentam dificuldades em articular os diferentes conjuntos numéricos, tanto no que se refere aos aspectos cognitivos como aos representacionais, esta abordagem foi elaborada seguindo o modelo sugerido por Ulrich Christiansen, que utiliza a reta numérica como contexto articulador, enriquecida por situações problemas e da história da matemática, procurando associar números a geometria e à álgebra. Os resultados da aplicação do módulo didático foram analisados por meio da participação dos alunos nas atividades realizadas durante a intervenção didática, da análise dos dados obtidos a partir de um pré-teste e de um pós-teste sobre o domínio cognitivo e representacional dos alunos, bem como por observações diretas, indicando a sua adequação aos objetivos propostos.

PALAVRAS-CHAVE: Números Reais, Ensino Aprendizagem, Educação Matemática.

ABSTRACT

Medeiros, J. **AN APPROACH TO TEACHING THE REAL NUMBERS**. 2010. 140f. Dissertation (Master) - State University of Paraíba - UEPB, Campina Grande, 2010.

This research was the development of a didactic approach in its implementation and evaluation in a class of 3rd year of high school, the purpose of developing real numbers with the goal of enabling students to acquire knowledge on the sets of numbers, both formative and functional Recommended official documents for basic education, plus a teaching module, containing texts, educational activities, methodology and a proposal for evaluation. From the assumption that students have difficulties in articulating the different sets of numbers, both in relation to cognitive aspects such as the representational, this approach was developed following the model suggested by Ulrich Christiansen, who uses the line number as the context articulator, enriched with situations and problems of mathematical history, seeking to associate numbers to geometry and algebra. The results of the implementation of educational module was analyzed using the students' participation in the activities performed during the didactic analysis of data obtained from a pretest and a posttest on the cognitive domain and representational of the students, as well as by direct observations, indicating its suitability to the proposed objectives.

KEYWORDS: Real Numbers, Learning Teaching, Mathematics Education.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

1. Introdução..... 11

1.1. Problema de Pesquisa..... 11

1.2. Objetivos..... 17

1.3. Metodologia 18

CAPÍTULO II

2. Revisão da literatura..... 24

2.1. Descrição da abordagem de conjuntos numéricos nos livros didáticos..... 24

2.2. Fundamentos para construção do conjunto dos reais..... 26

2.2.1. A construção dos números reais como sequências de 0 e 9..... 29

2.2.2. A construção dos números reais como cortes de Dedekind..... 30

2.2.3. A construção dos números reais como sequências de Cauchy..... 30

2.2.4. As operações nos reais..... 30

CAPITULO III

3. Elaboração da abordagem didática: a Proposta Didática e o Módulo de Ensino..... 34

3.1. Proposta Didática 34

3.2. Modulo de Ensino 36

3.2.1. Os números naturais e o processo de contagem..... 37

3.2.2. A construção do conjunto dos números naturais..... 43

3.2.3. Os números inteiros e sua representação na reta..... 50

3.2.4. Os números racionais..... 55

3.2.5. O conjunto dos números reais..... 65

CAPITULO IV

4.1. Cenário da Pesquisa..... 83

4.2. Aplicação do pré-teste..... 83

4.2.1. Analise e discussão dos resultados dos questionários aplicado em turma do 3º ano do Ensino Médio..... 87

4.2.2. Resultados da avaliação diagnóstica..... 92
4.3. A aplicação da abordagem didática..... 92
4.4. Análise e discussão do pós-teste e comparação com o pré-teste..... 115
CONCLUSÃO..... 122
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 124
APÊNDICE..... 128

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

1.1. PROBLEMA DE PESQUISA

Ao efetuar uma revisão de conjuntos numéricos para alunos do último ano do Ensino Médio, verificamos que estes apresentavam dificuldades em marcar pontos na reta. Por exemplo, quando pedi em uma turma do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública, para marcar em uma reta numerada com os números naturais o ponto correspondente ao número $\sqrt{2}$, a maioria dos alunos acertou, inclusive alguns utilizaram o esquema da diagonal do quadrado de lado 1 medir $\sqrt{2}$. Entretanto quando solicitados a marcar o ponto 1 - $\sqrt{2}$, somente 30% de 37 alunos chegaram a resposta correta, a maioria marcou este ponto a direita do zero. Neste mesmo teste, solicitados a marcar os pontos $\pi/5$ e $\sqrt{2}/2$, mais de 45% dos alunos colocaram o primeiro a direita do segundo, dando a entender que $\pi/5 > \sqrt{2}/2$.

Outra dificuldade observada entre os alunos foi a de intercalar números entre dois números dados. Para esta questão, quando as de um intervalo eram números inteiros, 65% conseguiram intercalar o número associado ao ponto médio. Entretanto, quando solicitados para intercalar números entre 0,387 e 0,388 apenas 45% utilizaram o esquema do ponto médio, 12% o esquema de desenvolver um número racional do tipo 0,3875 por meio da escrita. Para intercalar um número irracional entre 0,387 e 0,388 apenas uma aluna conseguiu fazer, utilizando um número irracional na notação decimal, ou seja, com um desenvolvimento infinito, sem apresentar um desenvolvimento periódico. Ela apresentou o número 0,387101001000100001000001...

Preocupado com o domínio que estes alunos apresentavam sobre os números reais solicitamos que respondessem algumas questões sobre a sua representação e associação com pontos na reta. Questionados se a soma de dois números irracionais

fornece sempre um número irracional, 73% dos alunos responderam que sim. Quando coloquei que poderíamos ter $\sqrt{2}$ - $\sqrt{2}$ = 0 que não é um número irracional, estes justificaram que nunca pensam um número irracional como sendo negativo – sempre imaginam os irracionais como sendo positivos. Pedi para caracterizarem o que é um número racional e o que é um número irracional. A maioria acertou que um número racional é um número escrito sob a forma de fração, ou que pode ser escrito como uma dízima periódica. Entretanto, quando perguntei se 37,4356123 era um número racional, 43% responderam que não. Apresentaram dificuldades em marcar números na reta. Mesmo quando era indicado na reta marcada com os números racionais o ponto correspondente a $\sqrt{2}$ os alunos não souberam marcar os pontos correspondentes a $\frac{\sqrt{2}}{4}$, ou - $\frac{\sqrt{2}}{2}$, mais da metade destes não responderam ou erraram ao responder a questão.

Estes fatos indicam falhas na representação decimal dos números racionais, pouca familiaridade com aproximação dos irracionais por meio de racionais e, ao mesmo tempo desconhecimento do que seja um número irracional. Estas dificuldades nos levaram a questionar se o ensino dos números reais levado a efeito no Ensino Fundamental e Médio fornecia conhecimentos que os habilitassem a cursar as disciplinas introdutórias de nível superior envolvendo conhecimentos de cálculo diferencial ou integral, ou que exijam um maior conhecimento sobre conjuntos numéricos.

A leitura da bibliografia sobre problemas existentes com a disciplina Cálculo Diferencial e Integral revela um alto índice de reprovação e de abandono nesta disciplina entre alunos dos cursos de Engenharia, Administração, Economia, Bacharelados e Licenciatura em Ciências, indicando a existência de problemas na formação matemática básica, merecendo ênfase o pouco domínio dos alunos sobre números reais e de funções. Trabalhos de pesquisa levado a efeito por Rêgo (2000), Rezende (2003), Barbosa (2004), Tall (1981) Sierpinka (1987), Leviatan (2004), Pasquini e Baroni (2005) destacam as falhas no domínio de conteúdos relacionados aos Números Reais.

Rêgo (2000), pesquisando o domínio de conhecimentos matemáticos de alunos de Engenharia Civil, Engenharia Mecânica e de Alimentos, todos recém-ingressos na Universidade Federal da Paraíba, via vestibular, levantou as seguintes deficiências referentes aos números reais:

> 1. A ideia que os alunos têm do *continuum* real é confusa. Solicitados que marcassem os pontos da sucessão numérica $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \ldots$ sobre uma reta, 36% marcaram os pontos $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6$ equidistantes uns dos outros; 40% consideraram $10^{1/2} > 3{,}18$ e 12%, $0 < 10^{1/2} < ½$. Os que concluíram a desigualdade $0 < 10^{1/2} < ½$, partiram do seguinte cálculo equivocado: $10^{1/2} = (1/10^2) = 0{,}01$. 2. A maioria dos alunos (mais de 90%) não sabiam a diferença entre um número racional e irracional. Alguns não conseguiam associar um número irracional a um ponto da reta, não tinham experiência em trabalhar com calculadoras e poucos formaram uma noção mínima de ordem de grandeza. 3. Mesmo dominando a noção de intervalos reais, na definição do domínio de uma função por partes, onde aparecia o intervalo [-2,0), 42% consideravam, ao traçar o gráfico, um intervalo de um dos tipos, [-2,-1], ou [-2, -½], ou ainda [-2,-1/10]. Quando questionados sobre os elementos do intervalo [-2,0), que não foram representados, respondiam que tinham de parar o cálculo do valor da função em um número "conhecido". Todavia, na reta, marcavam corretamente o intervalo [2, 0), o que nos leva a crer na influência do traçado de gráficos de funções via tabela.

Vários autores, entre eles ÁVILA (1994) e PALIS (1995), consideram como pré-requisitos para os cursos tradicionais de cálculo o domínio do conceito de função como variação; domínio da associação entre a reta real e os números reais; domínio de operações algébricas sobre equações; associação entre a forma analítica e o gráfico de funções e equações e a noção de aproximação por sucessões numéricas.

REZENDE (2003) cita que observou situações de ensino dos números reais em livros textos que considera como sendo os irracionais o complemento dos racionais nos reais, e a seguir considera os reais como sendo formado da união dos conjuntos reais com os irracionais.

Por outro lado, nos cursos de Introdução a Análise onde os futuros professores de matemática poderiam ter uma maior preparação sobre a construção dos conjuntos dos números reais, verifica-se que este conjunto numérico é assumido como sendo um corpo ordenado completo e suas propriedades são arbitradas de forma axiomática, muito delas sem terem um significado para o aluno. O mesmo acontece nos cursos de

Geometria Euclidiana, não se trabalhando aspectos que levassem os licenciandos e bacharelandos a terem uma compreensão da riqueza e da complexidade dos números reais, bem como conhecimentos que os habilitem a construir em sala de aula estes conhecimentos com os seus alunos do Ensino Médio. Aspectos como a questão da completude do conjunto dos números reais, envolvendo o conceito de continuidade não são construídos, limitando-se a maioria dos livros e dos cursos a arbitrar as propriedades sem uma base intuitiva, que forneça suporte para o aluno pensar no *continuum* real.

BOFF (2006) afirma que podemos considerar a existência de uma problemática em relação ao ensino e aprendizagem dos números reais, sendo esta, alvo de um grande número de pesquisas, não somente no Brasil, mas também em nível internacional. Segundo esta autora as pesquisas envolvem alunos do Ensino Fundamental, Médio, dos cursos de Licenciaturas no Brasil e da área de Ciências Exatas, citando entre outros, os trabalhos de (SOARES *et al*, 1998; COBIANCHI, 2001; MOREIRA e DAVID, 2005; FISCHBEIN, 1995; IGLIORI, 2001; MALTA 2004).

Para estes autores, números reais e continuidade, tema presente nos sistemas de Ensino Fundamental, Médio e Superior, é uma área que se encontra em aberto quanto ao seu ensino, apresentando uma grande quantidade de questões ainda sem resposta, sendo ainda incipiente o número de trabalhos em Educação Matemática que tratam desses conteúdos. Pesquisas que procuram captar as concepções de alunos, professores da escola básica e de futuros professores sobre números irracionais, incomensurabilidade, representação decimal infinita, continuidade, entre outros foram frutos de pesquisas no final do século passado por TALL, (1994), TALL e SCHWARZENBERGER (1978), ROBINET (1986), FISHBEIN, et al (1979), FISHBEIN, et al (1995), PINTO e TALL (1996) em estudos que levantaram as concepções dos alunos sobre noções subjacentes ao conceito de número real.

Estes artigos contribuíram para o avanço do conhecimento relativo a aprendizagem dos números reais. Entretanto, a partir do final dos anos 90 a ênfase na pesquisa passou para a aprendizagem dos conceitos, procedimentos e atitudes, tirando o enfoque da procura das mudanças conceituais comuns às teorias construtivistas de cunho piagetiano.

Nesta linha de raciocínio, SOARES et al (1999) destacam a importância dos números reais para a formação do professor de Matemática e, se o aluno ao concluir o Ensino Médio “não tem ainda uma visão teórica mais abrangente sobre os números reais, por outro, ele possui uma experiência escolar de vários anos ao longo da qual construiu certas “imagens conceituais” (TALL e VINNER, 1981)”. Estas imagens fazem parte do seu conhecimento prévio sobre conjuntos numéricos e devem ser levadas em conta para qualquer intervenção direcionada para o ensino aprendizagem deste conteúdo. Para SOARES et al (1999) estas imagens são “psicologicamente resistente” (FISHBEIN, JEHIAM e COHEN, 1995) e devem ser consideradas, evitando que se transformem em obstáculos para a aprendizagem.

Christiansen (2003) considera que a maioria dos alunos do sistema escolar dinamarquês não consegue compreender os diferentes conceitos numéricos vistos na educação básica. Para este autor, a escola gasta muita energia ensinando as distintas formas de introduzir números e os utiliza em contextos distintos, realizando aprendizagens situadas que necessitam ser articuladas para uma compreensão unificada, necessária para a construção do conjunto dos números reais. Por exemplo, a fração é introduzida inicialmente como uma relação ou como uma medida, depois por meio da geometria ou por ilustração numérica, em seguida em conexão com %, por uma representação decimal, entre outras formas. Caso estes diversos significados fiquem isolados em contextos diferenciados, dificilmente o aluno conseguirá entender o que seja um número racional com toda a sua riqueza, apresentando dificuldade de realizar a transferência cognitiva de uma situação para outra, necessária para caracterizar um conhecimento como sendo matemático.

Este fato também ocorre no Brasil, onde a articulação entre diferentes conceitos é feita de forma aligeirada para os alunos do Ensino Médio conforme vimos anteriormente. Nos cursos superiores para futuros professores ou pesquisadores de matemática procura-se articular estes conceitos na disciplina de análise por meio de um desenvolvimento axiomático, complementado esta estrutura pela propriedade da completude e utilizando a ideia de sucessor na definição de número natural, que servirá de base para os demais conjuntos, quando se aborda a disciplina denominada de introdução a análise ou é citada na disciplina de geometria analítica. Entretanto, como

toda axiomatização, para que esta faça sentido o aluno deve associar as propriedades do conjunto dos reais àquelas que ele formou a partir dos diferentes conjuntos numéricos que constituem os números reais, identificando relações e diferenças entre eles de forma intuitiva. Isto não acontece para uma grande parte dos alunos.

Christiansen (2003) sugere que a articulação entre os diferentes conceitos de números inteiros, racionais e irracionais sejam trabalhados na reta numérica identificando cada número com um ponto e a cada ponto com um número. Desta forma as diferentes representações de um mesmo número real seriam associadas e identificadas a um ponto, fazendo com que ao ser utilizando em diferentes contextos o símbolo servisse para atribuir o significado especifico. Assim, seria construído um modelo geométrico para os números reais - a reta numérica, no qual as diferentes representações de números seriam articuladas, bem como serviria de modelos para as diferentes operações com números.

Acreditamos que esta construção, além da articulação entre os diferentes conceitos e a sua seriação em classe, levaria o aluno a uma maior facilidade em construir a ideia de continuidade dos números reais, criando um modelo para o axioma da completude. Seria uma forma de relacionar os conhecimentos numéricos desenvolvidos entre o Ensino Fundamental e Médio e o Ensino Superior.

Dessa forma, justifica-se a necessidade de desenvolver uma proposta didática para processar a construção dos números reais no último ano do Nível Fundamental ou no Ensino Médio, tanto como um fechamento para o estudo dos números racionais quanto como uma resolução completa do problema de medição (de segmentos de reta). Este processo de construção dos reais também prepararia o aluno para, no Ensino Médio, estudar na Física os fenômenos que envolvem a continuidade (tempo, distância etc.) e, na Matemática, as funções que ajudam a descrever estes fenômenos. No entanto, tal construção é praticamente inexistente nos livros didáticos de Ensino Fundamental.

A falta de um maior domínio do que seja um número real, provoca problemas também no que se refere aos processos envolvidos nas medições. Observamos em sala de aula de final do Ensino Médio, o desconhecimento dos alunos com medição no mundo físico: para a grande maioria ao medir determinado comprimento de uma

grandeza obtemos como resultado da medida um número exato. Desta forma, seria possível no mundo físico medir uma distância e obter um número irracional.

Esta confusão entre a matemática como um conhecimento formal e como uma ferramenta a ser utilizada para compreender e agir sobre o mundo físico, onde todo resultado de medições de grandezas contínuas, está limitada por representações finitas, ou seja, somente podem dar como resultado um número racional, desta forma envolvendo valores aproximados, necessita também ser trabalhada, pois gera concepções equivocadas da Matemática.

Acreditamos que esta questão, como também a de construir os números reais de forma intuitiva – ou seja, de forma significativa para o aluno enquanto associada aos conhecimentos numéricos anteriormente trabalhados, podem ser abordadas conjuntamente. Assim, nossa proposta de trabalho caminha na direção de abordar a questão de explicitar as relações entre a Matemática considerada como um campo de conhecimentos formal e a de suas aplicações no mundo físico, bem como na de fornecer suporte para o estudo de fenômenos físicos envolvendo grandezas contínuas, servindo de base para as noções de convergência e de limite. Procura desta forma, possibilitar ao aluno o desenvolvimento de conhecimentos numéricos que sejam formativos, funcionais e significativos, fornecendo-lhes assim condições necessárias para o exercício da cidadania, incluindo a de avançar no ensino superior.

1.2. OBJETIVOS

- Objetivo Geral

Esta pesquisa visa o desenvolvimento de uma abordagem didática, contendo uma proposta didática e um módulo de ensino na perspectiva de possibilitar aos alunos do 3º Ano do Ensino Médio uma aprendizagem de números reais que sejam formativos, funcionais e significativos.

- Objetivos Específicos

1. Explicitar os processos de construção e as propostas curriculares sobre o conjunto dos números reais e dos seus subconjuntos nos níveis Fundamental e Médio.
2. Explicitar o desenvolvimento histórico dos conceitos, procedimentos e representações dos conjuntos numéricos;
3. Levantar a abordagem sobre os conjuntos numéricos em coleções didáticas de 6º a 9º Ano e no Ensino Médio.
4. Elaborar uma proposta didática e um módulo de atividades sobre a construção dos números reais, aplicar em sala de aula do 3º Ano do Ensino Médio e avaliar os resultados obtidos.

1.3. METODOLOGIA

Os estudos preliminares sobre o ensino dos números reais em nível fundamental e médio foram efetuados por meio de uma pesquisa bibliográfica em revistas científicas impressas e virtuais por meio da INTERNET; o levantamento de dados sobre o rendimento de alunos neste conteúdo, por meio de resultados desenvolvidos em pesquisas relativas ao ensino de Cálculo em nível superior onde estes conhecimentos são utilizados, bem como pelo levantamento da abordagem utilizada em duas coleções didáticas do 6º ao 9º Ano, verificando quais os conteúdos sobre conjunto numérico e como eles são desenvolvidos.

Para levantar os objetivos a serem alcançados com o estudo dos números reais foram pesquisadas as recomendações curriculares dos Parâmetros Curriculares do 5ª a 8ª Séries - PCNs de 5ª a 8ª (BRASIL, 1998), Parâmetros Curriculares do Ensino Médio de Matemática (Brasil, 2002), bem como as propostas curriculares mais atuais e as demandas dos cursos introdutórios de matemática do ensino superior e da formação matemática recomendada pelos educadores para o Ensino Médio. Consideramos também os conteúdos de conhecimentos sobre conjuntos numéricos que são

demandados pelas disciplinas introdutórias de matemática dos cursos superiores de Licenciaturas em Ciências Exatas, Engenharias e Ciências Sociais Aplicadas, a partir de leituras de artigos da área.

Os dados sobre o desenvolvimento histórico dos conjuntos numéricos foram obtidos por meio de pesquisa bibliográfica em livros e revistas que tratam da História da Matemática e na INTERNET, considerando também a sua associação ao campo algébrico e geométrico.

A partir destes levantamentos foi elaborada uma proposta didática, considerando não somente os objetivos a serem atingidos como também os conhecimentos prévios dos alunos avaliados por meio de um pré-teste, considerando também a linguagem e o grau de rigor adequado ao grau de escolaridade para o qual a proposta foi aplicada.

A proposta foi aplicada aos alunos do 3º Ano do Ensino Médio, ocasião em que geralmente este assunto é revisto na maioria das escolas.

Os seguintes conteúdos constaram do Módulo de Ensino, referentes a conjuntos numéricos: 1. Conjunto dos naturais – histórico, uso, propriedades, representação por meio de polinômio (base 10), representação na reta, alcance e limitações; 2. Conjunto dos inteiros – histórico, uso, propriedades, representação por meio de polinômio (base 10), alcance e limitações; 3. Conjunto dos racionais. histórico, uso, propriedades, alcance e limitações; forma fracionária e forma decimal, medida de segmentos, segmentos comensuráveis e incomensuráveis. 4. Conjunto dos reais.

Para a elaboração do módulo sobre conjuntos numéricos, adotamos para o conjunto dos naturais os aspectos históricos surgidos da necessidade de contagem, bem como a evolução das demandas sobre números cada vez maiores para contar, as diferentes representações, culminado com a representação de números na forma polinomial de base 10, que servirá para todos os demais conjuntos numéricos. Trabalhamos o modelo na reta, tanto para representar geometricamente o número como ponto e para as representações, incluindo as operações.

A construção dos números racionais segue uma série de passos. Inicialmente, os números racionais são associados nas séries iniciais do Ensino Fundamental às necessidades de medições, quando surgem as frações trabalhando-se neste nível, geralmente no final do 1º Ciclo de estudos do Ensino Fundamental, as frações com a ideia de parte e todo. Aqui também introduzimos os aspectos históricos considerando

que uma unidade (todo) é dividida em um número de partes iguais e são tomadas algumas destas partes. Em seguida, no final do 2º Ciclo, associamos as frações a uma divisão indicada, e nesta fase, começamos a associar os racionais com a representação decimal. No terceiro ciclo aparece a ideia de fração como uma razão entre duas grandezas, como operador e como medidas de quantidades contínuas e discretas.

BEHR et al. (APUD FONSECA,1983,), associa que a interpretação de número racional como fração e esta como parte e todo, depende da habilidade de dividir uma quantidade em sub-partes de igual tamanho, enquanto o "subconstructo decimal enfatiza as propriedades associadas com o sistema de numeração na base dez". Já a fração como razão expressa uma relação entre quantidades associadas a grandezas. Como quociente, o número racional indica uma divisão. Como operador, é dada uma interpretação de multiplicador ou de divisor ao número decimal, enquanto a fração como medida considera os pedaços (metade, um quarto, etc....), e nesta situação permite a representação da fração na reta numérica, melhor dizendo, a localização das diferentes frações na reta numérica.

Estes diferentes conceitos de números racionais são constructos vivenciados pelos alunos a partir dos 7 anos de idade e que se estende até os 13 a 14 anos, no início da puberdade, sofrem um processo de constante generalização. De acordo com MOREIRA e DAVID (2005),

> O desenvolvimento e a maturação de uma concepção ampliada de número, através da progressiva integração dos subconstrutos, não se separa do trabalho pedagógico com as relações de ordem, multiplicativa, aditiva etc., em diferentes situações. A introdução de um novo subconstruto aprofunda o processo de construção do conceito de número racional e, ao mesmo tempo, pode desencadear um processo paralelo de reelaboração e ampliação das ideias já estabelecidas no trabalho com os outros subconstrutos. (MOREIRA e DAVID, 2005, p.68)

Como vimos, além de serem variadas as perspectivas do trabalho com números racionais, nelas devem ser consideradas não somente os diferentes conceitos e as relações estabelecidas entre eles, como também o saber desenvolvido pelo aluno.

Na nossa proposta, procuraremos trabalhar estes seis conceitos, alguns como revisão, pois a maioria dos alunos desenvolve a noção de fração como parte e todo, como divisão indicada e como razão. Entretanto, os alunos parecem apresentar uma

grande dificuldade em associar fração a representação como número decimal, bem como trabalhar o conceito de fração e de número decimal como operadores e como medidas. Dessa forma, têm dificuldades em associar números fracionários e decimais a pontos na reta e compreenderem as noções de proximidade e de convergência na reta. Fica comprometida assim a construção dos números irracionais e dos números reais.

Consideraremos também na nossa proposta aspectos intuitivos, envolvendo a ação de medir e de visualizar por meio da ampliação da figura utilizando o processo de zoom, simulando assim o que ocorre na vizinhança de um ponto.

O processo de ampliação consiste na observação da vizinhança por meio de "microscópios de alta resolução" que nos possibilitam, por exemplo, visualizar a reta tangente como uma aproximação local da curva.

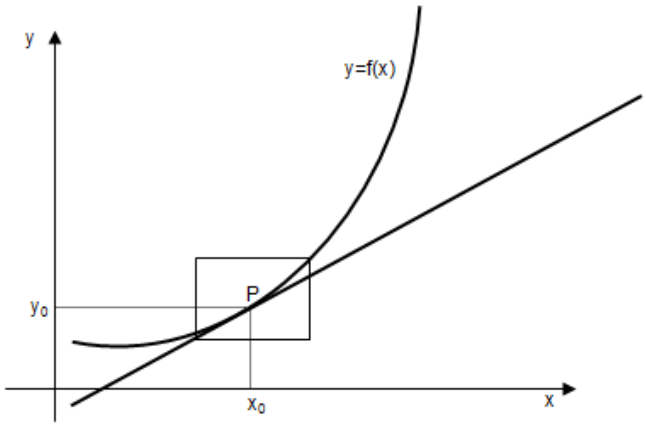


FIGURA 01: A reta tangente à curva no ponto P
FONTE: Rêgo, 2002

Pode-se observar por meio de *zoons*, cada vez mais potentes, o que ocorre próximo do ponto onde se está calculando a reta tangente ao gráfico. Por exemplo, ampliando o retângulo da Fig. 11, vemos que a reta tangente ao gráfico da função no ponto P é a reta que passa por P e que mais se aproxima do gráfico da função, como podemos observar na Fig. 2.

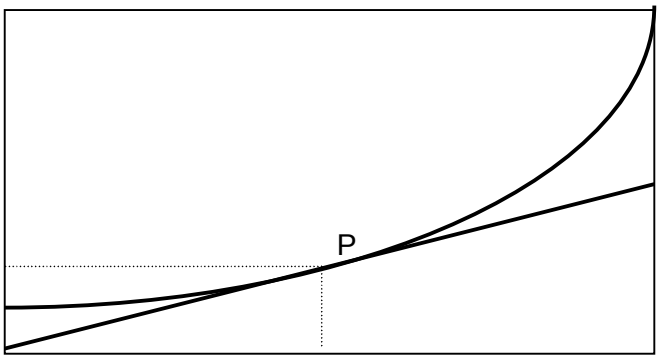


FIGURA 02: A reta tangente como aproximação local da curva.
FONTE: Rego, 2002

Recorremos ao processo de construção dos racionais denominado por BOFF (2006) de “medição de segmentos” e utilizando a representação de números decimais, complementados pelo processo de ampliação de zoom, procurando desta forma tornar mais intuitivo a construção e assim, esperamos possibilitar ao aluno uma melhor visão dos números reais.

Trabalhamos também a construção de irracionais, no caso $\sqrt{2}$ utilizando aproximações por meio de potencias e esboçaremos este processo também para o número π, considerando o quociente entre o comprimento da circunferência e o raio. Estes dois exemplos servirão também, para mostrar que todo irracional pode ser aproximado por um número decimal, com um erro tão pequeno quanto queiramos.

Para avaliar o impacto da abordagem será verificado por meio de um pré-teste e de um pós-teste qual é o domínio que o aluno tem do conjunto dos números reais, testando se o aluno:

1. e capaz de marcar pontos na reta associados a números racionais e irracionais em diferentes formas. (fracionária, decimal, raízes quadradas e π).
2. qual é o domínio conceitual que o mesmo possui de números racionais, se ele os vê como parte e todo, quociente, razão, operador e medida.
3. domina as definições de números nas diferentes representações (fracionário e decimal).
4. qual é o domínio do mesmo sobre continuidade, proximidade, intercalação e aproximação nos números reais associada ao principio arquimediano.

Para analisar os resultados obtidos no pós-teste, consideramos se ocorreu um aumento significativo do número de acertos, se houve um maior domínio de conceitos e

procedimentos, bem como relatos dos alunos, participações em sala de aula, aumento do domínio de registros escritos, uma maior interação e realização de atividades cooperativas entre os alunos, dentro de uma perspectiva de que estes indicadores revelam que ocorreu aprendizagem.

Usaremos na elaboração do módulo didático a perspectiva de ENTWISTLE (1988) que caracteriza dois tipos distintos de enfoques de aprendizagem:

1. Enfoque profundo: intenção de compreender; forte interação com o conteúdo; relação de novas ideias com o conhecimento anterior; relação do conceito com a experiência cotidiana; relação de dados com conclusões; exame da lógica dos argumentos;
2. Enfoque superficial: intenção de cumprir os requisitos da matéria; memorização da informação necessária para provas ou exames; tarefa encarada como uma imposição externa; ausência de reflexão sobre as propostas ou estratégias; foco em elementos sem integração; os princípios não são distinguidos a partir dos exemplos.

Além dos testes serão utilizadas observações diretas, realizadas durante a aplicação da proposta didática, dando especial ênfase aos relatos dos alunos.

O esquema que seguiremos no nosso trabalho é o seguinte:

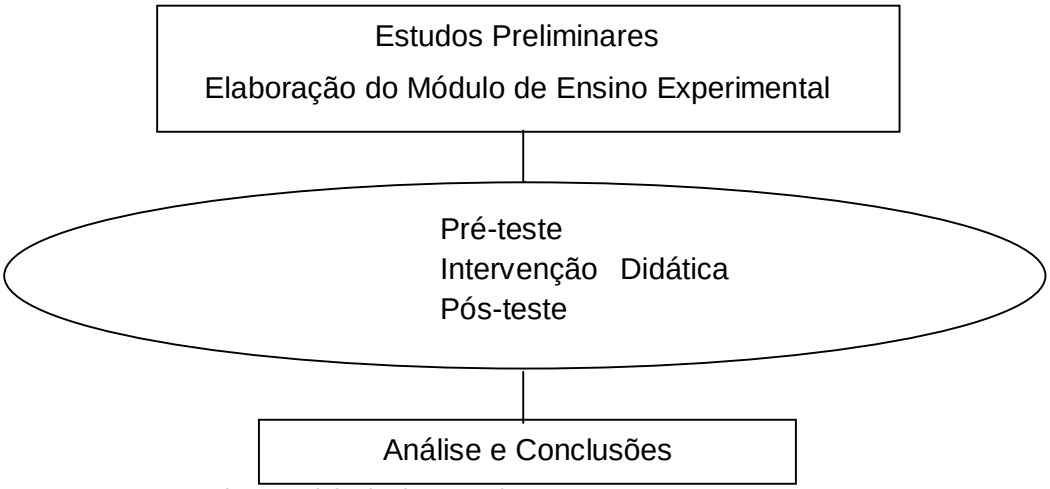


FIGURA 03: Esquema da Metodologia da Pesquisa.
FONTE: Elaborada pelo autor

CAPÍTULO 2

2. REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo apresentaremos o resultado das leituras efetuadas sobre a abordagem dos conjuntos numéricos nos livros textos, mais utilizados no Ensino Fundamental da região polarizada por Campina Grande. São observações colhidas *em passant*, sem a preocupação de análise mais profunda. Recorremos, entre outros autores a Bonjorne & Airton (2006) e Bianchini (2006) referente aos estudos sobre a construção do conjunto dos números reais na perspectiva de fornecerem subsídios a elaboração do módulo didático, bem como para dar uma ideia de como está se processando o ensino de conjuntos numéricos na nossa região, pois o livro texto constitui para a maioria dos professores um currículo a ser seguido.

2.1. DESCRIÇÃO DA ABORDAGEM DE CONJUNTOS NUMÉRICOS NOS LIVROS DIDÁTICOS

A partir de uma leitura de livros didáticos de matemática de 6º a 9º Ano do ensino Fundamental, observamos que estes apresentam muitos pontos em comuns. De uma maneira geral:

Os livros textos estudados no 6º Ano geralmente começam a abordagem de conjuntos numéricos com o estudo de sistemas de numerações antigos e atuais, fazendo um apanhado histórico no qual procuram explicitar as ideias centrais utilizadas no sistema de numeração decimal que empregamos para comparar com os sistemas de numerações antigos. Assim, abordam o sistema dos números naturais, a sua escrita, comparação e ordem, bem como a noção de sucessor e antecessor. Em seguida, fazem uma revisão do estudo dos racionais na forma de fração, a inclusão dos

naturais nos racionais, sua representação na forma de números decimais finitos e a passagem das frações para os decimais finitos e vice-versa. Utiliza-se da notação decimal para reduzir a multiplicação e a divisão dos racionais a uma multiplicação e divisão de inteiros – já dominadas pelo aluno. Pouco se observa casos de representação das operações de multiplicação e de divisão na reta numérica, mesmo tendo sido explorado este aspecto de forma exaustiva nas operações nos naturais.

Os livros textos do 7º Ano começam introduzindo o conjunto dos números inteiros, aplicações em vários contextos, representação na reta, módulo e a ordem. Fazem então, uma sistematização dos naturais, dos racionais e dos inteiros por meio de uma abordagem histórica onde trata da criação e da aceitação dos números inteiros. Em seguida retomam o estudo dos números racionais, representação na reta, oposto, módulo e comparação utilizando a representação na reta real. Passam a abordar os racionais como razão, proporção e porcentagem, trabalhando o seu uso, por exemplo, em escalas e as suas propriedades. Quando trabalham o produto e a divisão dos números racionais, utilizam estes números como operadores – multiplicador e divisor – e em medidas utilizam as frações nesta forma.

Os livro textos do 8º ano trabalham com os números irracionais como sendo aqueles que têm uma representação decimal infinita não periódica, afirmam que a raiz quadrada de dois é não racional, mas a desenvolvem só até décimos, alguns calculam um valor aproximado por meio de elevar ao quadrado e intercalar entre dois intervalos, processo que apresentamos no nosso módulo de ensino, definem o número pi, usam de forma aproximada e introduzem o conjunto I dos números irracionais. Foi observada em um dos textos, uma apresentação da espiral de Arquimedes. Consta também o estudo de conjuntos numéricos neste volume com a comparação de números decimais, o seu uso e as dízimas periódicas. Define-se o conjunto dos reais como sendo a união dos racionais com irracionais, faz-se a representação dos reais na reta, podendo assim comparar dois números reais e elabora-se um diagrama de Venn dos conjuntos numéricos.

Livros textos do 9º Ano. Trabalham os números na forma de radicais dentro de uma abordagem mais tradicional de como introduzir números em radicando, radiciação e simplificação de radicando. Alguns textos dedicam mais de 20 páginas para este fim. Foi observado em um dos textos um problema abordando a espiral de Arquimedes.

- Aspectos qualitativos:

Observamos nos textos pesquisados que geralmente os números racionais são inicialmente trabalhados como fração e como número decimal, a representação de fração na forma decimal finita ou periódica e vice versa, os números irracionais como aqueles que possuem uma representação decimal infinita não periódica, mas o sigificado de número real fica comprometido pois raramente se explora a forma polinomial dos números decimais (base 10), nos textos mais avançados, bem como explora pouco o trabalho com aproximações, limitando-se ao cálculo do valor aproximado do comprimento da circunferência.

A forma polinomial dos números inteiros e racionais não é explorada na forma algébrica, limitando-se a escrita na notação científica, como também não se explora processos envolvendo ampliação e contração de figuras, limitando-se este estudo a poucos casos sem enfatizar a explicitação dos números racionais como operadores. Um outro problema observado na construção dos reais, é que a passagem dos racionais na forma fracionária para a forma decimal é efetuada, como também a passagem da dízima para a fração geradora. Mas não observamos a identificação dos racionais nas duas formas. Os textos abordam como encontrar a fração geradora da dízima, mas não fazem a correspondência fração – dízima. Também não definem claramente os números irracionais na representação decimal, deixando muito a desejar quanto à construção dos números reais. O maior problema nos textos observados é a falta de articulação entre os diferentes números, seus significados e representações.

2.2. Fundamentos para construção do conjunto dos reais

Esta seção trata da construção do conjunto dos números reais por meio de duas abordagens distintas: por cortes de Dedekind e por sequências de Cauchy. Inclui-se aqui uma transposição didática sobre a construção que efetuaremos.

Este estudo se faz relevante no sentido de fornecer subsídios para elaborar a proposta de ensino e o módulo didático. Observamos que as abordagens de Dedekind

e de Cantor não foram feitas para se *ensinar* números reais, e sim para *resolver um problema puramente matemático*, qual seja, a prova da existência de um corpo ordenado arquimediano completo. Este trabalho busca efetuar uma transposição didática que adeque algumas das ideias ali desenvolvidas, tendo como objetivo levar os nossos alunos a dominarem os reais de modo a responderem as demandas relativas a formação básica explicitadas na proposta didática, bem como leve em conta realidade dos alunos e os seus interesses.

A construção

As análises iniciais e as leituras efetuadas indicaram que os alunos concluintes do Ensino Médio mostram um domínio de conhecimentos sobre o tema Números Reais, no entanto apresentam deficiências no que se refere aos seguintes aspectos: domínio conceitual, domínio de representação e domínio das aplicações. A análise dos livros didáticos de matemática mostrou também problemas na apresentação dos conjuntos numéricos.

Seguiremos as indicações de Christiansen (2003) sobre a necessidade de desenvolvermos formas de ensino que partam dos conhecimentos prévios dos alunos e os articule. Para isto, utilizaremos o modelo da reta real. Mas antes precisamos abordar o problema da definição dos números irracionais e para isto desenvolveremos aqui as ideias presentes na matemática que iremos transpor didaticamente para a nossa proposta.

Definição. Um ***corpo*** é um conjunto K, munido de duas operações, adição e multiplicação, que satisfazem os seguintes axiomas:

1. a adição é associativa, comutativa, tem elemento neutro e simétrico.
2. a multiplicação é associativa, comutativa, tem elemento neutro e inverso multiplicativo.
3. Vale o axioma da distributividade.

Definição: Um <u>corpo ordenado</u> é um corpo K, que possui um subconjunto P, chamado o conjunto dos números positivos de K, tal que:

A soma e o produto de elementos positivos são positivos;

Se $x \in K$, vale uma e apenas uma das seguintes alternativas: ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

Definição: **Um corpo ordenado K é completo** quando todo subconjunto não vazio de elementos de K limitado superiormente, possui supremo em K.

<u>Axioma</u>: Existe um corpo ordenado completo, IR, chamado o corpo dos números Reais.

A abordagem axiomática dos reais como um corpo axiomático completo somente faz sentido para a maioria dos alunos se estes desenvolverem até então conhecimentos que dêem suporte intuitivo – e assim construir significado para os números reais e para as suas diferentes representações.

Historicamente, as abordagens formais surgem a partir da concepção formalista da matemática. Esta abordagem afirma que a Matemática é essencialmente um jogo de símbolos sem significado, reunidos em estruturas formais. Foi muito popular no início do século XX, com o logicismo de Gottlob Frege e Bertrand Russell e o formalismo de David Hilbert, tendo predominado na matemática até meados da segunda metade do Sec. XX, principalmente, devido a influência do Grupo Bourbaky e do movimento denominado Matemática Moderna.

É uma abordagem adequada a um curso de análise, de filosofia (fundamentos de matemática) ou de história da matemática onde se trabalha com um alto grau de abstração ou de rigor. Entretanto sua abordagem neste grau de rigor gera problemas se utilizada para servir de ponte entre a Matemática mais avançada e a Educação Básica. Ela apresenta um grau de formalização em que o apelo a intuição foi reduzido ao máximo, e neste contexto torna-se irrelevante a natureza dos números, importando, somente a relação entre eles. Desta forma, pouco importa que os números reais possam ser expressos por uma coleção de números racionais. O importante para esta abordagem formal é que os números reais formam um corpo ordenado completo.

Coloca-se então a questão: que abordagem dos números reais seria mais adequada aos conhecimentos dos alunos que concluem o Ensino Médio? Vamos mostrar as construções formais mais usuais dos números reais. Uma delas considera um número real como uma sequência de racionais.

Vamos apresentar um rápida visão das construções formais mais usuais dos números reais. Uma delas considera um número real como uma sequência de racionais (sequências consistindo de números naturais de 0 a 9).

2.2.1. A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS COMO UMA SEQUÊNCIA FORMADA DE DÍGITOS DE 0 A 9

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto formado das classes de equivalências das sequências decimais onde duas sequências decimais são equivalentes quando são idênticas ou se uma delas é formada a partir de um certo índice k apenas de 9 e a outra apenas de 0, e antes do índice k a sequência formada de noves apresenta algarismos que formam um número racional uma unidade menor que a formada de zero.

Por esta relação o número 4,5999... é equivalente ao número 4,6.

A partir desta relação de equivalência podemos representar cada número real como uma destas sequências. Assim:

a) 352,456 = 352,4560000000...
b) 2010 = 2010,000000000...
c) 389,392192192...
c) 32,4310100100010000...
d) 1 = 0,9999...

Reciprocamente, dada uma sequência formada apenas de dígitos de 0 a 9, se definimos uma forma de determinar um índice k, a partir do qual todos os demais índices representam a parte fracionária do números (décimos, centésimos, milésimos, etc, ...) teremos uma associação entre números reais e sequências formadas de algarismos 0 e 9. Esta representação será desenvolvida no módulo de ensino.

2.2.2. A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS COMO UM CORTE DE DEDEKIND

Definição: Os cortes são subconjuntos S de números racionais com a propriedade de que se a$\in$S e *b*<*a*, então *b* $\in$ *S*.

Definição: Seja $\mathbb{R}$ o conjunto formado pelos cortes de Dedekind de números racionais.

<u>Exemplo 1</u>: Se $S = \{x \in \mathbb{Q} / x < 2\}$. Então identificamos S com o número 2.

<u>Exemplo 2</u>. Se $S = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\}$. Então identificamos o S com o real $\sqrt{2}$.

2.2.3. A construção dos números reais como sequências de Cauchy

Definição: Definição: Uma sequência $\{x_i\}$ é de Cauchy se dado um $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que, para todos os números naturais n,m>N, o valor absoluto $|x_n - x_m|$ satisfaz $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Definição: O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é formado das classes de equivalências das sequências de Cauchy de números racionais sob a seguinte relação: $\{x_i\} \sim \{y_j\}$ se a sequência definida intercalando alternativamente elementos das duas sequências, ou seja, $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, ...$ é ela mesma uma sequência de Cauchy.

Por este processo identificamos toda sequência de Cauchy de números racionais com o número para o qual ela converge.

2.2.4. AS OPERAÇÕES NOS REAIS

Todas estas três definições dos números reais induzem relações e operações no conjunto destes números.

Por exemplo, a relação de ordem em $\mathbb{R}$**,** definida da forma $\{x_i\} \ll \{y_j\}$ se ou para todo j, $x_i \ll y_j$ ou existe um número natural n $\in \mathbb{N}$ tal que $x_n \ll y_m$, *mas* $x_i = y_j$ para todo j < *n*.

Esta definição é bem definida e não depende da escolha da sequência de Cauchy usada para representar a classe de equivalência. Também podemos definir as operações de adição e de multiplicação a partir das adições e multiplicações racionais dos termos pertencentes as sequências de Cauchy.

Assim:

1. $\{x_i\} + \{y_j\}$ corresponde a sequência $\{x_i + y_j\}$,

2. $\{x_i\} \cdot \{y_j\}$ corresponde a sequência $\{x_i \cdot y_j\}$.

É necessário mostrar que estas operações são bem definidas, decorrendo as suas propriedades dos resultados sobre convergência de sequência nos reais.

Dessa forma, podemos provar nas três definições dos números reais que estes formam um corpo ordenado e que satisfaz a propriedade de ser completo.

Os primeiros números naturais são:

0 (zero)
1 = 0´(o sucessor do 0)
2 = 1´(o sucessor de 1)
3 = 2´(o sucessor de 2)
...
n+1 = n´(o sucessor de n)
...

(n' indica o sucessor de n, ou seja, n' = n + 1).

A partir do 0 (zero) e da noção de sucessor podemos construir os números naturais e as operações neste conjunto.

A adição dos números naturais é definida indutivamente por:

- *a* + 0 = *a* par todo a natural.
- *a* + *b´* = (*a* + *b*)´ para todo a, b naturais.

A multiplicação dos números naturais é definida indutivamente por:

- *a* .0 = 0 para todo a natural.
- *a b´* = (*ab*) + *a* para todo *a, b* naturais.

A partir dos naturais constrói-se o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}, definidos como sendo formado das classes de equivalência dos pares dos números naturais, sob a relação de equivalência ~ definida em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ = {(a, b), a e b pertencentes a $\mathbb{N}$} por (*a, b*) ~ (*c,d*) se *a* + *d* = *b* + *c*.

Exemplos:

0= classe de equivalência de (0, 0)= classe de equivalência de (1, 1)= ...

1= classe de equivalência de (1, 0)= classe de equivalência de (2, 1)= ...

−1= classe de equivalência de (0, 1)= classe de equivalência de (1, 2)=...

- A adição e multiplicação dos inteiros são definidas por:
- (*a, b*) + (*c, d*) = (*a* + *c, b* + *d*)
- (*a, b*).(*c, d*) = (*ac* + *bd, ad* + *bc*)

Os números racionais constituem o corpo das frações do anel dos inteiros. Em termos mais elementares um número racional é o quociente a/b de dois inteiros *a e b* onde *b* é não nulo. Duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes vale a seguinte igualdade $ad = bc$.

A adição e multiplicação de frações são dadas pelas fórmulas:

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$

2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{bd}$

Os esboços das construções dos conjuntos numéricos aqui apresentados são todos formais. Dentro da realidade vivenciada pelos nossos alunos elas necessitam de adaptação antes de serem trabalhadas em sala de aula.

Dieudonné (1975) sugere a utilização das sequências decimais como sendo capazes de, ao mesmo tempo em que permitem definir bem os reais, são de grande utilidade em aplicações e segundo ele, mais intuitiva. Este ponto de vista será seguido neste trabalho. Esta construção segue a tendência atual de utilização cada vez maior da escrita decimal dos racionais, reduzindo a utilização da forma fracionária destes números para representar os racionais.

CAPITULO III

3. ELABORAÇÃO DA ABORDAGEM DIDÁTICA: A PROPOSTA DIDÁTICA E O MÓDULO DE ENSINO

Este capítulo trata da elaboração da abordagem didática, apresentando de forma sucinta a proposta didática que foi utilizada para subsidiar a elaboração do módulo de ensino, bem como sua aplicação em sala de aula. Outra questão abordada neste capítulo foi à construção gradual da linguagem matemática necessária para trabalhar alguns processos envolvendo mudanças, pensando algumas operações numéricas como ações de operadores.

3.1. PROPOSTA DIDÁTICA

Unidade Didática 1 - Apresentação do curso, estabelecimento do contrato didático e aplicação do pré-teste.

Apresentação e estabelecimento do contrato didático – a apresentação da proposta de curso. Após ouvir o que os alunos esperam do curso foi discutida:

a) a metodologia a ser aplicada em sala de aula, como o estudo em grupos de três ou quatro alunos, bem como o que se espera de cada aluno, um cronograma de atividades;
b) as obrigações e os direitos de cada um dos envolvidos;
c) o sistema de avaliação por meio de pré-teste, de um pós-teste, de uma avaliação continua com base na participação dos alunos e na realização de atividades.
d) o esquema de distribuição do módulo de ensino, a necessidade de leitura do aluno e o processo de trabalhar questões problemas em sala de aula.
e) Em seguida foi aplicado um pré-teste.

Unidade Didática 2 – Os números naturais e o processo de contagem.

Conteúdos de fatos e conceitos: Revisão das demandas históricas que motivaram a criação do conjunto dos números naturais. Contagem. O conceito de número. Representação de números – a base 10 e o valor posicional. Contagem e o conjunto dos naturais. Sistema de numeração: historia e desenvolvimento. A representação dos números naturais na forma polinomial.

As habilidades, os conteúdos e atitudes serão explicitadas nos planos de aulas.

Unidade didática 3 - A construção do conjunto dos números naturais.

Conteúdos de fatos e conceitos: A construção do conjunto dos números naturais. A representação dos números naturais na reta. A ordem dos números naturais. As operações com números naturais e sua representação na reta.

Unidade Didática 4 – Os números inteiros e os processos naturais e sociais.

Conteúdos de fatos e conceitos: A necessidade do conjunto dos inteiros e sua representação na reta. Operações nos números inteiros e representação na reta. A ordem entre os números inteiros.

As habilidades, os conteúdos e atitudes serão explicitadas nos planos de aulas.

Unidade Didática 5 - O conjunto dos números racionais e o processo de medição.

Conteúdos de fatos e conceitos: A necessidade de criação dos diferentes conjuntos de numéricos. Conjunto dos racionais e as medições. Significados assumidos pela fração. A passagem da forma fracionária para a representação decimal. A representação polinomial de um número racional.

As habilidades, os conteúdos e atitudes serão explicitadas nos planos de aulas.

Unidade Didática 6 – Os números reais.

Conteúdos de fatos e conceitos: UNIDADE DIDÁTICA 5. O conjunto dos números irracionais. Exemplo de números irracionais. A representação de $\sqrt{2}$ na forma decimal. A construção do conjunto dos reais. A representação dos números reais na reta – O *continuum* real. O problema da medição de segmentos de reta.

3.2. MÓDULO DE ENSINO.

O Módulo Didático foi dividido em unidades didáticas que não necessariamente coincidem com as aulas. Direcionamos o Módulo de Ensino para a construção da noção do *continuum real,* apresentando a reta real como modelo para os diversos conjuntos numéricos que compõem os reais, de forma a articular os diversos tipos de números, suas diferentes representações e as propriedades de suas operações. As atividades aqui propostas pretendem também possibilitar ao aluno um maior domínio das representações e da linguagem de modo a justificar e a compreender a simbologia empregada e justificar alguns resultados mais elementares. Ao relacionar os números reais com pontos na reta, e *vice-versa*, esperamos criar condições para levar o aluno a aceitar com naturalidade novos tipos de números e assim superar deficiências sobre os conhecimentos relativos a números e operações numéricas.

Esperamos com as atividades aqui propostas possibilitar aos alunos desenvolverem habilidades e aptidões na direção de que vejam a Matemática como uma ferramenta para estudar o mundo, ao mesmo tempo em que as atividades propostas no módulo, ao considerar os conhecimentos prévios dos alunos, procura criar condições para aumentarem a sua autoestima, construir a ideia de que, para aprender Matemática é necessário a motivação, esforço e crença na sua capacidade de aprendizagem.

3.2.1. OS NÚMEROS NATURAIS E O PROCESSO DE CONTAGEM.

SENSO NUMÉRICO

Questão: Podemos observar se houve mudanças na quantidade de elementos de uma coleção sem efetuar a sua contagem?

Povos antigos que viviam de colher frutas, caçar pequenos animais, larvas de insetos e de comer raízes, somente precisavam contar pequenas quantidades. Eles necessitavam de um conhecimento numérico semelhante àquele de uma criança com 4 ou 5 anos de idade, que sabe contar até 5 ou 6 ou aos indígenas brasileiros que ainda vivem como os povos da Idade da Pedra. Entretanto, estas comunidades desenvolvem o *senso numérico*: sabem reconhecer que alguma coisa mudou em uma coleção de objetos ou de pessoas, quando se retira ou se acrescenta algo à coleção. Por exemplo, eles sabiam quando faltava um dos membros da comunidade mais próxima.

Certos animais desenvolvem o senso numérico. Por exemplo, a galinha d´angola (guiné) põe ovos em um ninho comunitário geralmente escondido no mato. Quando alguém retira certa quantidade de ovos, ela percebe e abandona o ninho. Os fazendeiros, ao descobrirem um ninho desta ave, passam a retirar diariamente apenas uma pequena quantidade de ovos e assim as aves não notam e continuam a postura no mesmo ninho.

Atualmente, em algumas situações onde não podemos contar é importante usar o senso numérico para fazer alguma estimativa.

CONTAGEM

Questão: O que é contar?

O desenvolvimento de números para contar objetos de coleções está associado às necessidades do homem quando passou a criar animais, a negociar, a realizar construções, por exemplo.

Quando as crianças começam a contar, eles associam inicialmente o que está sendo contado aos dedos das mãos, a traços no papel e depois a palavras indicando

os números. Assim, eles comparam inicialmente os objetos que estão sendo contados com os objetos de outras coleções (os dedos das mãos, ou os traços no papel) e depois desenvolvem com auxílio dos adultos nomes para os números um, dois, três, ..., *n* elementos e os utilizam na contagem.

Contar os objetos de uma coleção é estabelecer uma correspondência entre os seus elementos e os de outro conjunto do qual sabemos a quantidade, de forma que a cada elemento contado corresponda a um único elemento do outro conjunto, tomado como padrão.

Exemplo 1: Para um criador contar quantos bodes dispõe no seu curral, ele explicita quais são os bodes, associa de forma ordenada a cada bode um número da coleção $\{1, 2, 3, 4, ...\}$, ou seja, enumera-os um a um e quando o último bode for associado, digamos ao número 9, então diremos que existem nove bodes na coleção.

Imagine esta contagem sendo feita: primeiro ele escolhe um bode e atribui o número 1, depois, outro diferente e atribui a ele o número 2, depois um terceiro que não é um dos dois anteriores e atribui o números 3, ..., continuando o processo até considerar o último bode. Se ao último bode foi atribuído o número 9 então este será o número de bodes da criação (coleção). Observe que para contagem é necessário desenvolver os objetos matemáticos denominados de números e a associação que faz corresponder a cada bode um número e a cada número um bode.

Exemplo 2: Em uma sociedade monogâmica a cada marido corresponde uma esposa e a cada esposa corresponde um marido. Existe uma correspondência *um a um* entre marido e esposa e entre esposa e marido. Dizemos que esta correspondência é biunívoca ou $1 \leftrightarrow 1$.

Desta forma, no Exemplo 1, ocorre uma relação biunívoca entre o conjunto de bodes e o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Exemplo 3: Imagine a relação que a cada jogador faz corresponder um nome próprio. Temos então uma correspondência *uma pessoa – um nome próprio.* Esta é uma correspondência $1 \rightarrow 1$ (lê-se *um para um)*. Por outro lado se pensarmos na correspondência que a cada nome próprio faz corresponder uma pessoa temos uma correspondência *um nome próprio – várias pessoas*, ou seja, uma correspondência *um*

→ *vários* (lê-se *um para vários).* A correspondência que faz associar *um nome próprio a pessoas* não é biunívoca, ou seja, não é 1↔1.

Definição: O processo que a cada elemento de uma coleção faz corresponder de forma biunívoca um número natural tomado de forma ordenada da coleção {1, 2, 3, 4, ..., *n-1*, *n*} chama-se *enumeração*. O número *n* é o *número de elementos da coleção*. A enumeração *ordena* os elementos da coleção, dizendo qual é o primeiro, o segundo, o terceiro, ... e o último. Ao mesmo tempo permite contar, pois o número correspondente ao último é o número de elementos da coleção.

Dessa forma, para se proceder a contagem de elementos de uma coleção é necessário:

1. que se explicite os objetos a serem contados;
2. que se enumere estes objetos da coleção estabelecendo uma correspondência biunívoca entre os seus elementos e uma coleção do tipo {1, 2, 3, 4, ..., *n-1*, *n*}, até se esgotar os objetos da coleção.
3. que se atribua o último número n a coleção.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Como representamos as contagens de coleções com uma grande quantidade de elementos?

Os primeiros instrumentos para a contagem foram as mãos, monte de pedras, entalhes e pintura no corpo, os quais tinham como base os princípios ordinal e cardinal. O *princípio ordinal* serve para explicitar a posição dos elementos em uma sequência e exige uma correspondência biunívoca. Já o princípio cardinal, cada número tinha um símbolo próprio, respeitando os princípios do emparelhamento e da sucessão natural.

Para simplificar a representação de números elevados o ser humano escolheu agrupar os elementos em dezena, dúzia, vintena, sessentena ou outros, e organizou uma sequência regular de números. Esta ideia facilitou o registro de quantidades e fez surgir os Sistemas de Numeração, (SND) por nós utilizados. O Sistema de Numeração Decimal (SND) data do século III a.C. e resulta de uma evolução histórica demorada,

merecendo destaque os seguintes aspectos: 1. utiliza apenas nove algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, para representar qualquer número natural por meio do princípio do valor posicional decimal e da utilização do conceito do zero.

Em resumo, o SND é baseado:

- Na utilização da base é dez, trabalhando com agrupamentos dez em dez.

Assim começa-se com as unidades simples: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Para o próximo número utilizamos o 10, com a ideia de termos 1 dezena (dez unidades simples + zero unidades).

Assim 11 = 10 + 1, o primeiro 1 representa um agrupamento de 1 dezena e o segundo 1 unidade.

93 = 9.10 + 3 (ou seja 9 dezenas + 3 unidades).

Dessa forma:

- É posicional, pois um mesmo símbolo representa valores diferentes dependendo da posição que ocupa. Por exemplo: o número 544 = 5.100 + 4.10 + 5 e assim, o numeral 5 representa 500 = 5.100 = 5 centenas, o primeiro numeral 4 tem valor posicional 40 e o último valor posicional 40.
- O sistema utiliza o zero.
- É multiplicativo, pois cada algarismo representa o produto dele mesmo pelo valor da posição que ocupa. Por exemplo, o número 245

$$245 = 2.100 + 4.10 + 5$$

- É aditivo: $245 = 200 + 40 + 5$
- É econômico em relação aos símbolos que utiliza, pois com apenas dez símbolos, (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0), escreve-se qualquer número.

A facilidade do uso do sistema de numeração decimal tanto para contar como para efetuar operações proporcionou a sua expansão para todo o mundo. O grande salto dado pela Matemática a partir do Séc. XVI ocorreu devido à aceitação pelos povos daquele continente do sistema numérico decimal.

REPRESENTAÇÃO DE UM NÚMERO NATURAL NA FORMA POLINOMIAL

Este sistema numérico permite a representação de um número natural na forma de um polinômio, e desta forma possibilita algoritmos para efetuar as operações tradicionais de adição, multiplicação, divisão e subtração, potenciação e radiciação.

Com efeito, seja cada a_i um dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Podemos representar um número natural por $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_3 a_2 a_1 a_0$ o número $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + a_{n-2}.10^{n-2} + a_{n-3}.10^{n-3} + ... + a_3.10^3 + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$.

<u>Exemplo 1</u>: $230675 = 2.10^5 + 3.10^4 + 0.10^3 + 6.10^2 + 7.10 + 5$.

Temos: $a_5 = 2$, $a_4 = 3$, $a_3 = 0$, $a_2 = 6$, $a_1 = 7$ e $a_0 = 5$

<u>Exemplo 2</u>: $2010 = 2.\ 10^3 + 0.10^2 + 1.10 + 0$

Temos: $a_3 = 2$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$

<u>Exemplo 3</u>: $33 = 3.10 + 3$

Temos: $a_1 = 3$, $a_0 = 3$

Dessa forma podemos escrever:

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_3 a_2 a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$$

Observe que a_0 é o algarismo das unidades; a_1 é o algarismo das dezenas; a_2 é o algarismo das centenas; a_3 é o algarismo das milhares; ... e assim por diante.

1ª Lista de Atividades

1. Escreva os seguintes números naturais na forma de um polinômio:

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_3 a_2 a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$$

a) 7341
b) 20065
c) 103002
d) 14302
e) 701
f) 15

2. Achar o número escrito na forma polinomial.

a) $7.10^5 + 0.10^4 + 0.10^3 + 2.10^2 + 3.10 + 8$

b) $5.10^6 + 0.10^5 + 1.10^4 + 0.10^3 + 6.10^2 + 4.10 + 3$

c) $3.10^4 + 0.10^3 + 0.10^2 + 0.10 + 9$

d) $9.10^5 + 3.10^4 + 0.10^3 + 6.10^2 + 0.10 + 4$

e) $2.10^3 + 0.10^2 + 0.10 + 5$

f) $8.10^4 + 2.10^3 + 0.10^2 + 0.10 + 5$

3. Mostre que se ab é um número natural com dois algarismos então ab – ba é um múltiplo de 9. (Sugestão: ab = 10a + b).

4. Estenda o resultado da atividade 03 para um número com 3 algarismos: abc.
5. Considere dois números naturais ab e cd em que a, b, c e d são seus algarismos. Demonstre que, se ab.cd = ba.dc, então a.c = b.d
6. Sophie Germain introduziu em seus cálculos matemáticos um tipo especial de número primo descrito abaixo.

Se p é um número primo e se 2p + 1 também é um número primo, então o número primo p é denominado primo de Germain. Pode-se afirmar que é primo de Germain o número:

a) 7
b) 17
c) 18
d) 19
e) 41

7. Sejam N um número natural de dois algarismos não-nulos e M o número obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de N. Sabe-se que N - M = 45. Então, quantos são os possíveis valores de N ?

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

8. Quantos fatores primos distintos tem o número N=19992-19972-1998?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

3.2.2. A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Vimos que o homem criou para responder às necessidades de efetuar contagem o conjunto dos números naturais e a estabelecer formas de representar e de operar com eles, e um processo de se contar uns poucos elementos evoluiu para a contagem de centenas, milhares, milhões. Pouco a pouco, fomos desenvolvendo procedimentos e instrumentos de contagem, até chegarmos ao conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Observe que a maneira de escrever fornece uma ideia de como podemos construir $\mathbb{N}$. Os três pontos que indicam as reticências (...) significam "e assim por diante", mostram que partindo do número 1 e tomando o seu sucessor, 2 = 1 +1; depois o sucessor de 2, 3 = 2 + 1; o sucessor de 3, 4 = 3 + 1; e continuando este processo, teremos construído todos os números naturais.

1
2 = 1 + 1 (sucessor de 1)
3 = 2 + 1 (sucessor de 2)
4 = 3 + 1 (sucessor de 3)
...

Desta forma podemos construir os números naturais a partir do 0 (zero), de uma unidade e da operação de tomar o sucessor. Como, o processo de tomar o sucessor pode ser continuado indefinidamente, existem infinitos números naturais. Vale também:

a) Todo número natural tem um único sucessor;
b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

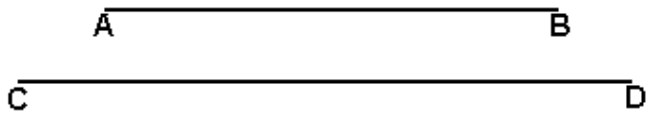
c) Existe um único número natural, chamado **um** e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.

d) Se A é um conjunto dos números naturais e se 1 $\in$ A e se, se A contem o sucessor de todos os seus elementos, então A = $\mathbb{N}$.

Vamos mostrar como representar estes números como pontos na reta.

A REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS NA RETA

Dados dois segmentos de reta e utilizando um compasso podemos comparar o comprimento de dois segmentos de reta, AB e CD.

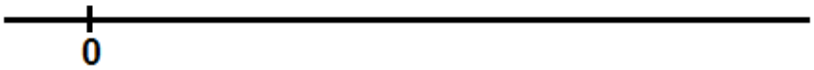


Para isto, basta abrir o compasso com uma das extremidades em A e a outra sobre B. Com esta abertura e com uma extremidade em C, verificar se o ponto determinado pela outra extremidade em CD: 1) está entre C e D, ou 2) está sobre D, ou 3) não está entre C e D. No caso 1) temos que o segmento AB é menor que o segmento CD, no caso 2) AD é congruente a CD e no caso 3) o segmento AB é maior que CD.

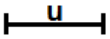
Atribuindo o comprimento 1 a um segmento AB, podemos verificar quantas vezes este segmento cabe em outro. Chamando este segmento de $\bar{u}$, podemos considerá-lo como unidade de medida e a partir dele traçar todos os pontos correspondentes aos números naturais.

Para representar os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, fazemos o seguinte:

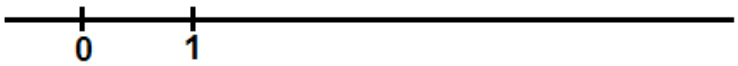
1. Em uma reta r marcamos um ponto, que denominamos de 0 (zero) – também recebe o nome de *origem*.



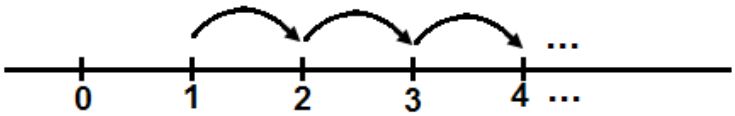
2. Em seguida arbitramos um segmento de reta $\overline{u}$ e consideramos o seu comprimento como unidade.



3. Com o compasso, marque para a direita o comprimento de $\overline{u}$, obtendo um ponto onde marcaremos o ponto 1.



4. Com o mesmo comprimento, marcamos o dois como sucessor de 1, o 3 como sucessor de 2, o 4 como sucessor de 3, e assim por diante. Podemos imaginar a seta como sendo a operação de marcar o sucessor, e a partir do 1 (um) marcamos o seu sucessor 2, a partir do 2 marcamos o seu sucessor 3, e assim por diante.



Dessa forma o segmento começado em 0 (origem) e terminado em 4, por exemplo, contem quatro vezes o comprimento do segmento $\overline{u}$.

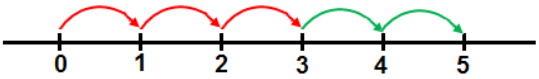
A REPRESENTAÇÃO DAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS NA RETA.

<u>Adição de números naturais</u>

A operação de adição pode ser representada na reta real. A adição faz corresponder aos números naturais n e m, soma n + m.

Observando que a soma n + 1 é o número natural que se obtém tomando o sucessor de n. Enquanto, n + 2, corresponde a tomar o sucessor de n duas vezes e n + m, a tomar o sucessor de n, m vezes. Por exemplo, tem-se 3 + 2 = 5, pois tomando o sucessor de 3 duas vezes obtemos 5.

Na reta dos números naturais, isto corresponde a tomar o ponto correspondente ao 3, e aplicar o sucessor duas vezes, no primeiro passo obtemos o 4 e no segundo o 5.

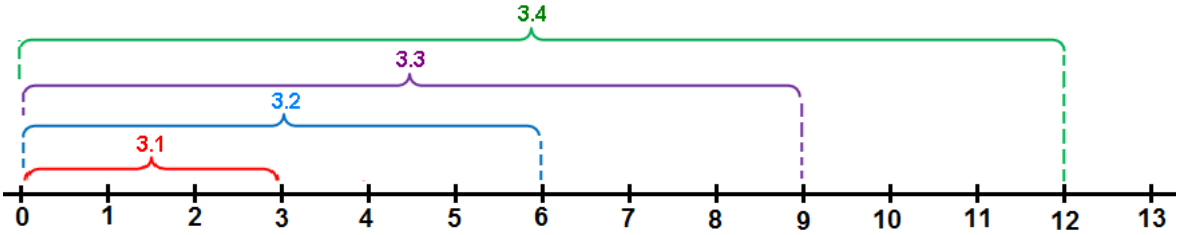


Podemos pensar geometricamente que a adição 3 + 2 consiste em partindo do ponto 3 caminhar duas unidades para direita, obtendo o ponto referente ao 5.

Multiplicação de números naturais

A multiplicação de dois números naturais representa uma adição de parcelas iguais. Assim, 4.3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12.

Dessa forma para representar o produto 4.3 na reta, somamos a parcela 3, 4 vezes, conforme figura abaixo.



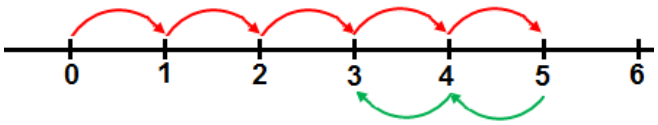
Observe que 3.1 = 3, 3.2 = 6, 3.3 = 9 e 3.4 = 12.

Vale ainda: 3.4 = 4 + 4 + 4 = 4.3, conforme figura abaixo.

Ou seja, o produto 4.3, consistiria em “adicionar” o comprimento de um segmento medindo 3, tomado 4 vezes.

Subtração de números naturais

Podemos pensar a subtração como sendo o processo inverso da adição. Assim se $5+2$ significa o acréscimo de duas unidades a 5, 5 – 2 significa que de 5 vamos retirar duas unidades. Na reta, adicionar 2 significa caminhar duas casas para a direita e subtrair 2, significa caminhar duas casas para a esquerda.

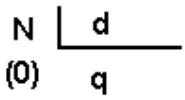


Podemos pensar geometricamente que a subtração 5 – 2, consiste em partindo de 5, caminhar duas unidades para a esquerda. Ou seja, partindo do adicionar a um segmento de comprimento 3, um de comprimento 2, obtendo um segmento de comprimento 5.

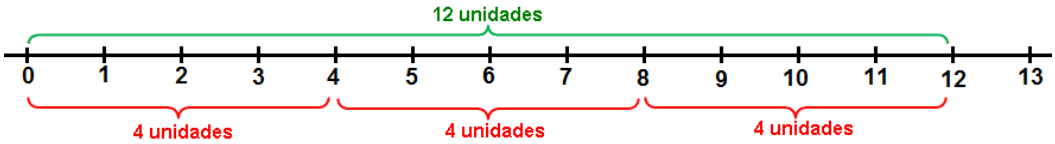
Divisão de números naturais

Quando efetuamos a divisão de dois números naturais, pode acontecer os seguintes casos:

a) A divisão é exata. Dado dois números n e d, se existe um número q tal que $n = d.q$, dizemos que d divide n, ou ainda que d é um divisor de n.



Por exemplo, dados 12 e 4, como 12 = 4.3; 4 é um divisor de 12, que 12 é um múltiplo de 4. Dizemos ainda que 12:4 = 3. Se imaginarmos estes pontos na reta, podemos então pensar a divisão 12 por 4 como um processo onde a partir de 12, se subtrai 4, até restar zero. Como posso retirar o 4 exatamente 3 vezes, dizemos que 12 contem 4, 3 vezes, ou que 12 : 4 = 3.



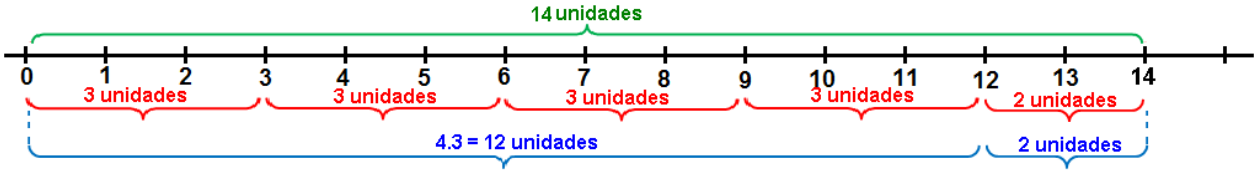
b) <u>Divisão não exata</u> – o algoritmo de Euclides.

Dados números n e d, o Algoritmo de Euclides afirma que existem números q e r, com d > r ≥ 0. Este algoritmo é usado quando efetuamos uma divisão

$$\begin{array}{l|l} N & d \\ \cline{2-2} (r) & q \end{array}$$

Vamos representar este algoritmo na reta utilizando um exemplo.

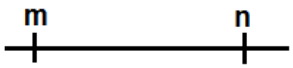
<u>Exemplo</u>: Representar na reta a divisão de 14 por 3.



Observe que inicialmente verificamos quantas vezes 14 contem 4. Obtemos então 3 vezes e resta 2. Observe que 2 < 3. E, portanto 14 = 4.3 + 2.

A ORDEM ENTRE OS NÚMEROS NATURAIS

Dados n, m números naturais, dizemos que n é maior que m se n está à direita de m. Representamos por $n > m$ (n é maior que m) ou por $m < n$ (m é menor que n)



Valem as seguintes propriedades:

a) Transitividade: Se $n < m$ e $m < p$, então $n < p$.

b) Tricotomia: Dados m e n naturais, vale uma, e somente uma, das alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $m > n$.

c) Monotonicidade: Se $n < m$, então, para qualquer número natural p, vale $n + p < m + p$ e $np < mp$.

Observe que se n > m então *n* está a direita de *m* e dista mais da origem.

2ª Lista de Atividades

1. Represente na reta as seguintes operações (adição, subtração, produto e divisão de naturais):

a) $4 + 5$

b) $9 + 3$

c) $12 – 5$

d) $10 – 4$

e) 3×6

f) 4×4

g) $16 \div 4$

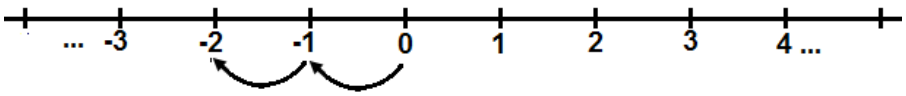
h) $17 \div 3$

3.2.3. OS NÚMEROS INTEIROS E SUA REPRESENTAÇÃO NA RETA.

A partir dos números naturais podemos construir o conjunto dos números inteiros. Estes números surgiram historicamente a partir do estudo das raízes negativas de equações algébricas, para representar dividas e determinados fenômenos da natureza, como por exemplo, temperaturas abaixo de zero, alturas abaixo do nível do mar, etc.

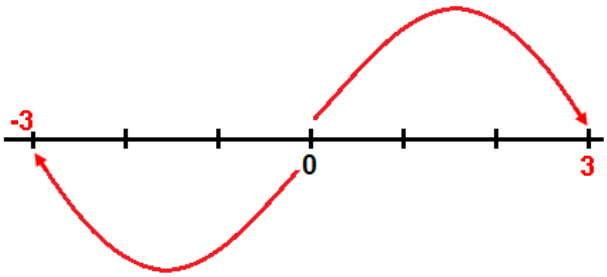
O conjunto dos inteiros, representado por $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, é constituído pelos inteiros positivos (que coincide com os naturais), com o 0 (zero) e com os inteiros negativos.

Os números negativos podem ser representados na reta, a partir da representação dos naturais da seguinte forma: a partir do zero, tomando uma unidade e marcando à esquerda temos o número -1, a partir do -1, tomando uma unidade à esquerda marcamos o número -2, e assim sucessivamente.



Geometricamente, para representar um número negativo – n, onde $n \in N$, corresponde a escrever n, e tomar o ponto simétrico a n com relação à origem 0.

<u>Exemplo</u>: A partir do 3, representamos o ponto – 3, como sendo aquele que é simétrico ao ponto 3 com relação a origem. Assim o -3 é obtido tomando 3 unidades a esquerda do 0 (zero).

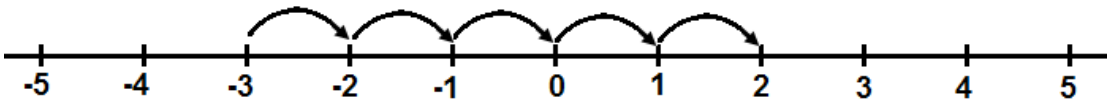


OPERAÇÕES NOS NÚMEROS INTEIROS E SUA REPRESENTAÇÃO NA RETA

Adição e subtração

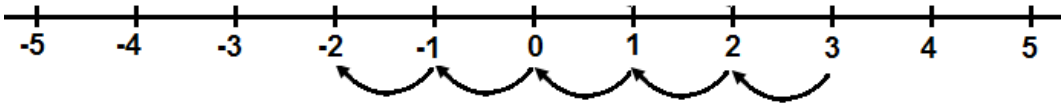
A operação de adição se processa verificando se o número que vai se adicionar é positivo ou negativo. Se for positivo, fazemos de forma semelhante aos números naturais.

Exemplo: -3 + 5. Partimos do – 3 e percorremos 5 casas para a direita.
Dessa forma, - 3 + 5 = 2



Quando estávamos trabalhando com o conjunto dos números naturais N, a operação de subtração m – n somente tinha sentido se m > n. Agora podemos estender a subtração para quaisquer pares de números inteiros m, n.

Para representar a subtração na reta podemos considerar esta operação como: m – n = m + (-n). Assim para calcular 3 – 5 procedemos da seguinte maneira: $3-5=3+(-5)$ e assim, a partir do ponto correspondente ao 3, caminhamos 5 casas para esquerda.



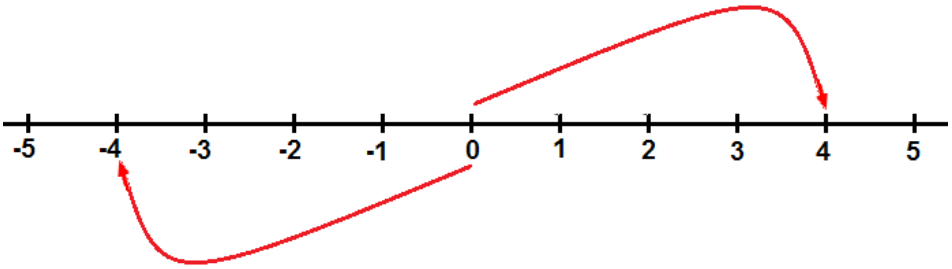
Ou seja, 3 – 5 = 2 que corresponde a partir do três, percorrer 5 unidades para a esquerda.

Já - 2 – 3 = - 5, pois corresponde, partindo do -2, a percorrer 3 casas para esquerda.

Quanto seria, $3-(-4)$?

Nesta direção fazemos 3 – (-4) = 3 + (-(-4)). Quanto vale – (-4)? Já vimos que – 4 representa o ponto simétrico de 4 na reta. Logo:

- (-4) simétrico de – 4 com relação a origem



Como, -4 simétrico de 4 com relação a origem. Podemos concluir que – (- 4) = 4. Daí, $3-(-4)=3+4=7$.

<u>Multiplicação de inteiros</u>

Dados dois inteiros m e n, como representar o seu produto? Se forem inteiros positivos, usamos a mesma representação na reta dos naturais. Se um deles for zero, o resultado é zero.

Vamos examinar o caso em que m > 0 e n < 0. Por exemplo: 3 . (-4). Neste caso, temos uma adição de 3 parcelas iguais a – 4. Ou seja, 3 . (-4) = (-4) + (-4) + (-4) cujo valor sabemos ser -12. Logo, 3 . (-4) = - 12.

E (– 4). 3? Neste caso, podemos pensar – 4.3 como sendo o simétrico em torno da origem de 4.3, ou seja – 12. Assim, (-4).3 = -12.

E para (-4)(-3)? Fazendo (-4)(-3) = - 4(-3), temos que (-4)(-3) como sendo o simétrico em relação a origem de 4.(-3). Como 4.(-3) = -12, temos que o seu simétrico em relação a origem é 12. Logo (-4).(-3) = 12.

Esta é uma justificativa para a famosa regra dos sinais.

+.+ = +

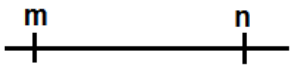
+.- = -

-.+ = -

-.- = +

A ORDEM ENTRE OS NÚMEROS INTEIROS

Dados n, m números inteiros, dizemos que n é maior que m se n está à direita de m. Representamos por $n > m$ (n é maior que m) ou por $m < n$ (m é menor que n)



Observe que – 3 < – 2 , embora 3 seja maior que 2 .

Valem em as propriedades de transitividade, tricotomia e monoticidade.

3ª Lista de Atividades

1. Represente na reta as seguintes operações (adição, subtração, produto e divisão de inteiros):

a) -8 + 5

b) -3 + 10

c) 8 – 10

d) 7 – 5

e) 4 – (-2)

f) $6 - (-8)$

g) $3 \times (-2)$

h) $(-4) \times (-5)$

i) $(-7) \times 2$

j) $(-12) \div 3$

k) $(-15) \div 4$

l) $(12) \div (-5)$

m) $(-15) \div (-3)$

3.2.4. OS NÚMEROS RACIONAIS

A NECESSIDADE DE CRIAÇÃO DOS DIFERENTES CONJUNTOS DE NUMÉRICOS

A construção do conjunto dos números reais tem início com o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, utilizado para contar. Depois surgem os números racionais positivos $\mathbb{Q}$ utilizados para medir, o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ e os números racionais negativos para representar quantidades negativas, e finalmente, com o acréscimo dos números irracionais foi criado o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. É um processo que tem início quando o homem começou a contar e se estende até o século XIX. É uma construção histórica demorada e que representa uma ferramenta de muita utilidade no desenvolvimento científico e tecnológico da nossa sociedade.

O objetivo deste módulo é apresentar o conceito de número real e as principais operações com o mesmo, motivado pela ideia de associar números com pontos na reta.

Esta ideia está expressa nos postulados da geometria euclidiana, um dos quais atribui um número positivo (distância) a dois pontos. O outro, estabelece que os pontos de uma reta estão em correspondência biunívoca com os números reais. Assim, na reta abaixo, o número *r*, corresponde a um ponto da reta. *r* é denominado a *abscissa* do ponto. O ponto A correspondente ao número real *r* é denominado de *imagem geométrica de r.* Assim a cada ponto da reta corresponde um número (a sua abcissa) e a cada número real corresponde um ponto – e desta forma se estabelece uma relação $1 \leftrightarrow 1$ entre pontos da reta e números reais. Mostraremos como estabelecer esta associação.

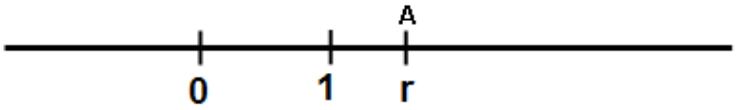


FIGURA 04: A reta real
FONTE: Elaborada pelo autor

CONJUNTO DOS RACIONAIS E AS MEDIÇÕES

Os números racionais surgiram da necessidade de representar partes de um inteiro. Quando trabalhamos com a medição de comprimentos, de área, de volume, de capacidade, de tempo, de ângulos, ou seja, quando medimos uma grandeza, nem sempre obtemos um número inteiro.

4ª lista de atividades

1. Separe a turma em grupos de 4 alunos. Distribua tiras de cartolina com 0,5 cm, 1cm, 3cm, 6 cm, de 12 cm, de 18 cm e de 24 cm. Solicite para que cada grupo meça todos os comprimentos com a tira de 12cm e registrar o resultados obtidos.
2. Peça para traçarem três segmentos com tamanhos variáveis e para medirem os comprimentos com a tira de 12cm, registrando o resultados obtidos.

Quando efetuamos a medição de um comprimento, nem sempre a unidade de medida utilizada cabe um número inteiro de vezes no segmento medido. Isso levava a utilização das frações.

Definição: O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é formado de todas as frações da forma $\frac{n}{m}$, onde n,m são números inteiros, com m ≠ 0. Ou seja:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m};\ n, m \in \mathbb{Z};\ b \neq 0 \right\}.$$

O conjunto dos números racionais é uma ampliação do conjunto dos números inteiros, sendo formados pelos números racionais positivos, os números racionais negativos e o zero. Com efeito todo número inteiro pode ser escrito como uma fração. Por exemplo, $7 = \frac{7}{1}$, $-9 = \frac{-9}{1} = \frac{-18}{2} = \frac{-27}{3}$, por exemplo.

O diagrama abaixo, mostra como o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ se relaciona com o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e com o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$:

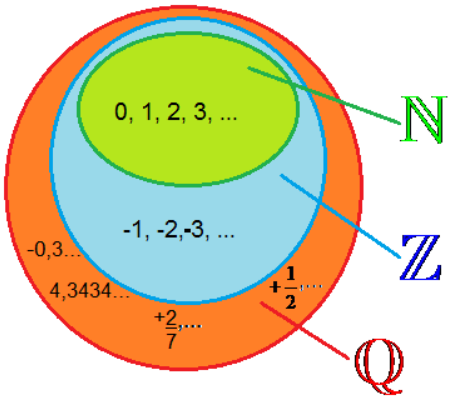


FIGURA 05: Diagrama de Venn
FONTE: Elaborada pelo autor

- O conjunto de $\mathbb{Q}$ é uma ampliação do conjunto $\mathbb{Z}$.
- Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são subconjuntos de Q.
- $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ está contido em Q. Indicamos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

SIGNIFICADOS ASSUMIDOS PELA FRAÇÃO

A fração $\frac{n}{m}$, onde *n* e m são inteiros positivos, assume vários significados que são construídos pelos alunos do inicio até o final do Ensino Fundamental:

1. *A fração* $\frac{n}{m}$ *como uma relação parte/todo*. A fração $\frac{n}{m}$ pode ser pensada como resultado de tomarmos uma unidade 1, dividi-la em *m* partes iguais de comprimento $\frac{1}{m}$ e destas tomarmos *n* partes. Assim $\frac{2}{5} = 2.\frac{1}{5}$ equivale a tomarmos duas partes de uma unidade dividida por 5.

2. *A fração* $\frac{n}{m}$ *como uma divisão indicada.* Esta ideia da fração n/m como indicando a divisão de *n* por *m,* ou seja, o numerador *n* indica o dividendo e o

denominador *m* indica o divisor é trabalhada com dois significados: $\frac{2}{5}$ significa "dois dividido por cinco" ou ainda "quantas vezes dois contém cinco";

3. *A fração* $\frac{n}{m}$ *como uma razão.* A fração $\frac{n}{m}$ como uma razão indica uma *"relação entre quantidades".* O numerador *n* indica uma quantidade de uma certa grandeza e o denominador *m* uma quantidade de uma outra grandeza.

<u>Exemplos</u>:

a) $\frac{2}{5}$ poderia indicar a "a razão de dois para cinco entre quantidade de café e de açúcar". Dessa forma, representaria 2 unidades de café e 5 unidades de açúcar.

b) Ao preparar uma receita um farmacêutico pode dissolver duas partes de um antibiótico em 5 partes de água. A relação entre a quantidade de antibiótico e de água seria de $\frac{2}{5}$.

c) Ao ler a escala de uma mapa a razão $\frac{2}{5}$ pode indicar que cada 2 centímetros no mapa representa 5 quilômetros na realidade.

4. *A fração* $\frac{n}{m}$ *como um operador.* Como um operador a fração é interpretada como algo que multiplica ou divide. Por exemplo, $\frac{2}{5}$ de uma quantia de R$ 60,00 significa $\frac{2}{5}.60$ que pode ser pensado como 60 multiplicado por 2 e dividido por 5.

5. *O número racional como um ponto na reta real.* Com este significado identificamos o número racional – seja na forma de fração, seja na forma decimal - como um ponto na reta que o representa.

Para pensar um número racional como um ponto da reta o aluno deve desenvolver a noção do número racional como um número associado à medida de um segmento de reta, ou seja, como uma *medida.* Nesta concepção, a fração deve ser pensada como parte de um todo (metade, um terço, um quarto, etc...).

Em muitas situações práticas a fração aparece escrita como uma porcentagem. Neste caso se subtende que o seu denominador é 100. Por exemplo, 30% indica uma fração do tipo $\frac{30}{100}$. Assim, se na gasolina vendida nos postos de combustível, 25% corresponde a etanol, isto significa que para cada 100 litros da gasolina, 25 litros corresponde a etanol.

A PASSAGEM DA FORMA FRACIONÁRIA PARA A REPRESENTAÇÃO DECIMAL

A ideia de uma fração como uma divisão indicada faz com que toda fração possa ser escrita na *representação decimal*. Nesta direção, devemos pensar a fração como uma divisão a ser realizada.

Por exemplo, $\frac{1}{8} = 0{,}125;$ pois

```
10      | 8
 20       0,125
  40
   (0)
```

De maneira análoga

$$\frac{36}{4} = 9\,,\ \frac{3}{8} = 0{,}75;\ \frac{12}{8} = 1{,}5;\ \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots;\ \frac{24}{7} = 3{,}428571428571428571\ldots$$

Quando efetuamos a divisão indicada pela fração o resultado pode dar:

a) um número contendo uma quantidade finita de algarismos, por exemplo $\frac{3}{8} = 0{,}75;$ ou seja, se pensarmos na reta existe um segmento de reta medindo 0,75, que cabe exatamente 8 vezes n segmento medindo 3. O mesmo acontece com $\frac{36}{4} = 9$, caso em que um segmento medindo 9, cabe exatamente 4 vezes no segmento medindo 36.

b) uma ***dízima periódica***, por exemplo, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, que tem como período 3, ou seja há um padrão numérico que se repete indefinidamente. Neste caso, não existe um segmento cuja medida tenha um representação decimal finita que caiba 3 vezes em um segmento medindo 1.

<u>Exemplo</u>: $\frac{10}{7} = 1{,}428571428571428571\ldots$, que tem como período, o padrão 428571 que se repete indefinidamente. Também se escreve $\frac{10}{7} = 1{,}\overline{428571}$

Definição: Uma dízima periódica é uma expressão da forma $m, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ onde m é um número natural e os a_i são algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, para os índices $i = 1, 2, 3, \ldots$, na qual, após um número finito de termos, aparece um bloco de termos (chamado período) com a propriedade que, a partir deste, os algarismo restantes são formados exclusivamente de repetições sucessivas deste bloco.

A REPRESENTAÇÃO POLINOMIAL DE UM NÚMERO RACIONAL.

O grande salto dado pela Matemática a partir do Séc. XVI ocorreu devido à aceitação do sistema numérico decimal. Este sistema numérico usa a representação polinomial, que permitiu a introdução dos algoritmos tradicionais de adição, multiplicação, divisão e subtração. Assim, se tivermos o número

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-3} \ldots a_3\, a_2\, a_1 a_0, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots b_{m-3}\, b_{m-2}\, b_{m-1}\, b_m \ldots,$$

este representa na notação polinomial:

$$a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + ... + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 + b_1 10^{-1} + b_2 10^{-2} + ... + b_{m-1}10^{m-1} + b_m 10^m + ...,$$

<u>Exemplo 1</u>:

230675, 4771 = $2.10^5 + 3.10^4 + 0.10^3 + 6.10^2 + 7.10 + 5 + 4.10^{-1} + 7.10^{-2} + 7.10^{-3} + 1.10^{-4}$

= $2.10^5 + 3.10^4 + 6.10^2 + 7.10 + 5 + 4/10 + 7/100 + 7/1000 + 1/10000$.

0,32323232 ... = $0 + 3.10^{-1} + 2.10^{-2} + 3.10^{-3} + 2.10^{-4} + 3.10^{-5} + 2.10^{-6} + 3.10^{-7} + 2.10^{-8} + ...$

3,1416 ... = $3 + 1.10^{-1} + 4.10^{-2} + 1.10^{-3} + 6.10^{-4} + ...$

Por outro lado, dado um número escrito na forma decimal, pode acontecer um dos seguintes casos:

a) O número apresenta uma expansão decimal finita.

<u>Exemplos</u>: 23,167; 2020; 3425,0651

Neste caso, o número na forma decimal tem uma expansão finita, ou seja, tem uma representação decimal que "termina". Assim sendo, ele pode ser escrito como uma fração cujo denominador é uma potencia de 10.

<u>Exemplo</u>: 23,167 = $\frac{23167}{1000}$.

<u>Exemplo</u>: O número 21,34563452678005 tem uma representação finita. Logo é um número racional. Corresponde a fração $\frac{2134563452678005}{100000000000000}$.

b) O número apresenta uma expansão decimal infinita onde aparecem algarismos que se repetem periodicamente em blocos, ou seja, é uma dízima periódica.

Neste caso, ele pode ser escrito na forma de uma fração. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo: Ache a fração que corresponde a dízima 23,1266666...

Solução: Vamos resolver esta questão algebricamente. Seja x = 23,1266666...

Observe que o período tem um único algarismo que é o 6.

Multiplicamos os dois membros de x = 23,1266666... por 10 pois o período tem um único algarismo,

$$10x = 231,266666...$$

Calculamos então a diferença: 10x – x = 231,266666...- 23,1266666... Observe que podemos com esta subtração eliminar a parte infinita de 10x – x = 9x.

```
-   231,2666666...
     23,1266666...
    208,140000
```

Assim, 9x = 208,14. Daí $x = \frac{208,14}{9}$

Multiplicando numerador e denominador por 100, obtemos $x = \frac{20814}{900}$.

Portanto, 23,1266666...= $\frac{20814}{900}$ que está na forma de uma fração.

Exemplo: Colocar a dízima periódica 0,452452452 . . . na forma de uma fração.

Solução: Tomando x = 0,452452 . . . e observando que o período 452 tem três dígitos, multiplicamos ambos os membros por 1.000.

Multiplique x por 1.000 (3 zeros), obtendo:

$$1000.x = 452,452452 . . .$$

Subtraindo x no primeiro membro e 0,452452 . . . no segundo, obtemos:

$$1000x – x = 452,452452 . . . – 0,452452452 . . . = 452,00000 . . . = 452$$

Donde 999 x = 452 e daí, $x = \frac{452}{999}$. Portanto, 0,452452452 . . . = $\frac{452}{999}$, que é uma fração.

c) Finalmente, quando o número tem uma expansão infinita, onde não existe um grupo de algarismos que se repete, ou seja, quando não é uma dízima periódica, então este não pode ser representado na forma de fração.

Exemplo: O número decimal 4,101001000100001000001 . . . , escrito acrescentando sempre um zero entre os algarismos 1, não é uma dízima periódica. Com efeito, não há um período formado de 0 (zero) e de algarismo 1 (hum) que se repita. Como tem uma expansão infinita é um número irracional.

Exemplo: O número 5,1211212312341234512345612345 67 . . . que se obtém pela sequência 5,1 12 123 1234 12345 123456 1234567 . . . e assim por diante. Esta sequência não um período que se repete, logo não é uma dízima periódica. Como tem uma expansão infinita é um número irracional.

Vamos definir de forma mais simples uma dízima periódica:

Definição: Uma *dízima periódica* de período k é um número que tem expansão decimal da seguinte forma: $a,b_1b_2...b_kb_1b_2...b_kb_1b_2...b_k... = a,\overline{b_1b_2...b_k}$ **,** a barra acima dos algarismos indica o bloco de números repetidos.

Por exemplo, $0,\overline{27}$ é uma dízima periódica de período 2, pois é igual a 0,272727..., o bloco repetido tem dois algarismos, enquanto $3,\overline{1345}$ tem período 4.

Algumas vezes o período não ocorre imediatamente após a vírgula, como no exemplo abaixo:

Em síntese:

Dado um número racional sabemos que este é uma fração e daí todo número racional pode ser escrito com uma representação decimal finita ou como uma representação decimal infinita periódica.

Por outro lado, se um número está escrito na forma decimal finita ou infinita periódica então ele pode ser escrito como uma fração e daí ele é um número racional.

Temos: número racional ↔ é uma fração ↔ pode ser escrito na forma decimal finita ou infinita periódica.

5ª Lista de Atividades

1. Represente na reta as seguintes operações (adição, subtração, produto e divisão de racionais):

a) $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$

b) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{5}+\frac{3}{2}$

d) $3\times\frac{1}{4}$

e) $5\times\frac{2}{3}$

f) $\frac{2}{5}\div\frac{2}{3}$

2. Passar da forma de fração para decimal.

a) $\frac{18}{7}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{7}{4}$

d) $\frac{8}{15}$

3. Escreva os números na forma de fração:

a) 3,12

b) 0,003

c) 12,5

d) 0,4444...

e) 15,232323...

f) 1,25555...

g) $3,\overline{134}$

h) $0,5\overline{74}$

i) 25%

j) 3%

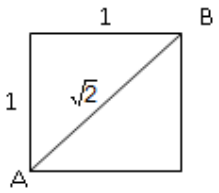
k) 3,5%

4. Seja $r = 0,\overline{b_1 b_2 ... b_k}$ a representação decimal de um número racional. Encontre a forma fracionária desse número.
5. Escreva o número $r = a,\overline{b_1 b_2 ... b_k}$ na forma fracionária.
6. Finalmente, se $r = 0, c_1 c_2 ... c_n \overline{b_1 b_2 ... b_k}$ for uma dízima periódica composta, então escreva a representação fracionária de r.
7. Trabalhar a questão de ampliar e de reduzir segmentos.
8. Passar da forma de dízima para a forma fracionária e vice versa.

3.2.5. O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

EXEMPLO DE NÚMEROS IRRACIONAIS

Um dos problemas da matemática vivenciado pelos gregos diz respeito a medir o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1. Sabemos do teorema de Pitágoras que a diagonal AB mede $\sqrt{2}$, pois $AB^2 = 1^2 + 1^2$. Donde $AB^2 = 2$ e daí AB = $\sqrt{2}$.



Os matemáticos gregos descobriram que esta diagonal não era um número racional. Eles provaram o seguinte teorema.

Teorema: $\sqrt{2}$ não é um número racional

Prova. Se $\sqrt{2}$ fosse um número racional então pela definição de número racional ele seria uma fração. Neste caso, existe números inteiros, *p* e *q*, $q \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (i), e neste caso podemos tomar *p* e *q* primos entre si, ou seja, sem divisores primos. Elevando ao quadrado ambos os membros de (i)

obtemos $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \rightarrow 2p^2 = q^2$ (ii). Portanto q^2 é par. Ora q^2 sendo par implica que q é par e daí q é par e, portanto $q = 2k$ para algum k pertencente a Z. Daí, $q^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Substituído $q^2 = 4k^2$ em $2p^2 = q^2$ (ii), obtemos $4k^2 = 2p^2$. Cancelando, chegamos a $2k^2 = p^2$. Logo, p^2 é par e daí p também é par. Mas aqui chegamos a um absurdo, pois supomos p e q primos entre si, e encontramos p *e* q pares e, portanto são divisíveis por 2. Logo não podemos supor $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Dessa forma chegamos a conclusão de que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

REPRESENTAÇÃO DE $\sqrt{2}$ NA FORMA DECIMAL

Qual será a representação decimal de $\sqrt{2}$ na forma decimal? Nesta direção, vamos mostrar que podemos calcular este número com quantas casas decimais quisermos.

Seja x = $\sqrt{2}$.

Sabemos da definição de raiz quadrada que $x^2 = 2$. Daí, $1 < x^2 < 4$ e extraindo a raiz quadrada, $\sqrt{1} < \sqrt{x^2} < \sqrt{4}$. Donde, $1 < x < 2$.

Como, $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 2{,}25 = 1{,}5^2$, vale $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$ extraindo a raiz quadrada obtemos $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

A partir de $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$, obtemos $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

De $1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$, obtemos $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$. Continuando este processo obtemos uma sequência 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... Este processo nunca pára e esta sucessão de números se aproxima de $\sqrt{2}$.

Vamos determinar a posição de $\sqrt{2}$ sobre a reta numérica determinando intervalos de aproximação.

$\sqrt{2}$ *pertence ao intervalo*	*por que*
$[1;2]$	$1^2 < 2 < 2^2$
$[1,4;\ 1,5]$	$1,4^2 < 2 < 1,5^2$
$[1,41;\ 1,42]$	$1,41^2 < 2 < 1,42^2$
$[1,414;\ 1,415]$	$1,414^2 < 2 < 1,415^2$
$[1,4142;\ 1,4143]$	$1,4142^2 < 2 < 1,4143^2$
. . .	. . .

QUADRO 01: Intervalos encaixantes
FONTE: Rêgo, 2002

Pela tabela conseguimos encaixar 2 em um intervalo cada vez menor, isto é:

- cada intervalo está contido no anterior;
- os comprimentos dos intervalos são cada vez menores;
- 2 pertence a cada intervalo.

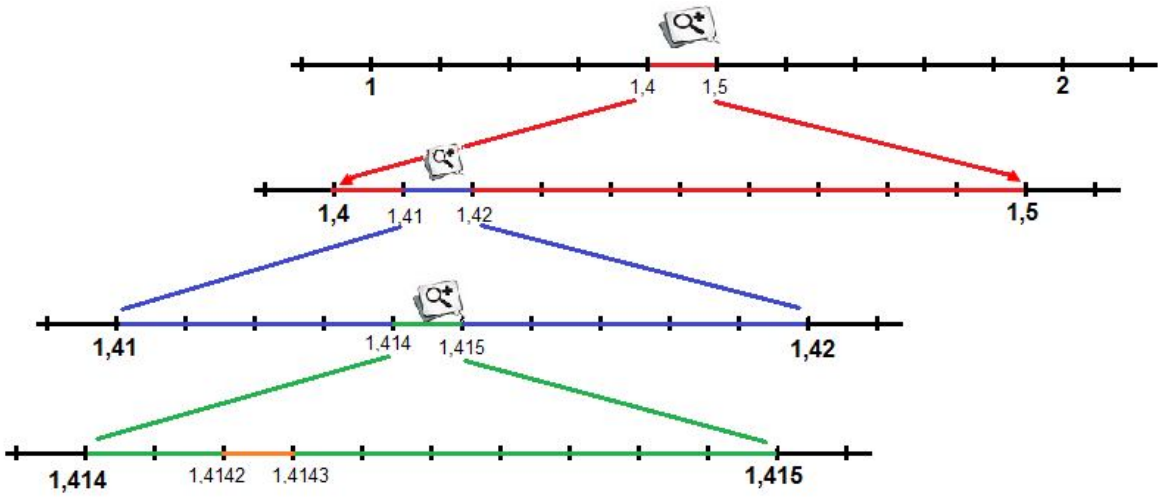


Figura 06: Sequência de intervalos encaixantes
FONTE: Elabora pelo autor

Tal seqüência de intervalos é denominada **sequência de intervalos encaixantes,** pois em cada passo o intervalo seguinte está contido no anterior, e caso continuemos este processo, os comprimentos dos intervalos se tornam

"arbitrariamente pequenos", ou seja, fica tão pequeno quanto se queira. Na realidade, entre o intervalo obtido em relação a um certo passo e o seguinte, ou seja, entre o passo n e o passo n +1, é dez vezes menor.

Observe que se aproximarmos a $\sqrt{2}$ pelo valor 1,4, estamos cometendo um erro menor do que 0,1 (um décimo); se aproximarmos por 1,41 o erro que cometemos é menor que 0,01 (um centésimo); se aproximarmos por 1,412 o erro que cometemos é menor que 0,001 (um milésimo); ... e assim por diante.

O desenvolvimento de $\sqrt{2}$ na forma decimal não pode levar a uma representação finita, ou seja, “não termina” nem pode ter uma representação decimal por uma dízima periódica, pois neste caso, $\sqrt{2}$ seria racional. Portanto é uma representação decimal infinita e não periódica. Já se desenvolveu uma representação decimal de $\sqrt{2}$ com milhões de casas decimais usando processos computacionais. Os números que tem uma representação decimal infinita não periódica são denominados de *irracionais.* Juntando os números racionais com os irracionais temos os números reais.

6ª Lista de atividades

1. Representar números irracionais $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$ na reta.
2. Representar números irracionais $3\sqrt{2}, -2\sqrt{3}, -\sqrt{5}$ e $\frac{\sqrt{7}}{3}$ na reta.
3. Quem é maior: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{\pi}{5}$?
4. Soma e produto de racionais dá racional? E de irracionais?

A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS.

Definição: Chamamos de *sequência decimal* a uma sequência do tipo

$$m,\ a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ a_{m-3}\, a_{m-2}\, a_{m-1}\, a_m \ldots$$

onde m é um número inteiro e a_i são algarismos do tipo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9. Com esta notação o número acima representa:

$$m,\ a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ a_{m-3}\, a_{m-2}\, a_{m-1}\, a_m \ldots = m + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} + \ldots\ a_{m-1} 10^{m-1} + a_m 10^{m} + \ldots$$

Observe que a sequência decimal tem uma vírgula entre a *parte inteira m* – que pode ser positiva ou negativa e os algarismos a_i colocados depois da vírgula – que alguns autores denominam de *parte fracionária* do número decimal representada por $a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ a_{m-3}\, a_{m-2}\, a_{m-1}\, a_m \ldots$

Podemos agora definir os números decimais:

Definição: Definimos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como sendo o conjunto formado de todas as sequências decimais.

<u>Exemplos</u>:

a) 352,456 = $3.10^2 + 5.10 + 2 + 4.10^{-1} + 5.10^{-2} + 6.10^{-3}$

b) 2010 = $2.10^3 + 0.10^2 + 1.10 + 0$

c) $389,3921921921 \ldots = 389 + 3.10^{-1} + 9.10^{-2} + 2.10^{-3} + 1.10^{-4} + \ldots =$

$$= 389 + \frac{3}{10} + \frac{9}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{2}{100000} + \ldots$$

d) 32,43101001000100001...

e) 12,375000...

f) 12,374999....

g) 1

h) 0,9999...

Assim, as sequências decimais podem:

1. "ter um fim", ou seja, ter um número finito de algarismos, como no caso a), b) e f) ou então ser dízimas periódicas, caso c), d), e) e g). Neste caso elas podem ser representadas como frações e, portanto são racionais.
2. ou também "nunca terminar", ou seja ter um número infinito de algarismos, mas estes não apresentarem padrões repetidos. Neste caso são números irracionais.

Observe que toda sequência decimal que “termina”, pode ser escrita como uma sequência decimal que “nunca termina”, a exemplo de 352,456 = 352,4560000...; 2010 = 2010,0000... e de 1 = 1,00000.... bastando para isto colocar zeros depois da virgula.

Por outro lado, as sequências decimais dos exemplos f) e g), ou seja, a sequência decimal finita 1 = 1,00000... e a sequência decimal 0,999 ... são escritas de forma distintas. Entretanto eles representam o mesmo número, pois, calculando o valor de 0,9999... ao passarmos da forma de dízima para a forma de fração, encontramos:

x = 0,9999... $\rightarrow$ 10 x = 9,9999.... $\rightarrow$ 10x – x = 9,9999 – 0,9999... $\rightarrow$ 9x = 9. Daí x = 1.

Logo estas duas sequências representam o mesmo número, o 1.

De maneira análoga 12,375000... = 12,374999....

Podemos agora definir número reais de forma que cada representação escrita corresponda a um único número.

Definição: Dizemos que duas sequências decimais

$$m,\ a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{m-3}\, a_{m-2}\, a_{m-1}\, a_m \ldots \text{ e,}$$

$$M,\ b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_{m-3}\, b_{m-2}\, b_{m-1}\, b_m \ldots$$

são semelhantes se:

I. são iguais, ou seja, m = M e $a_i = b_i$ para todo i = 1, 2, 3, 4, 5, ... ou

II. se uma delas apresenta do índice k, o algarismo a_k e todos os seguintes iguais a 9 e todos os algarismos seguintes iguais a 9, enquanto a outra apresenta o algarismo $b_{k+1} = a_{k-1} + 1$ e os algarismos seguintes sendo todos iguais a zero. Quando k =1, consideramos $b_{k-1} = b_0$ como sendo a parte inteira.

Assim, teremos 0,99999999.... = 1.

Dessa forma, sequências semelhantes representam o mesmo número real.

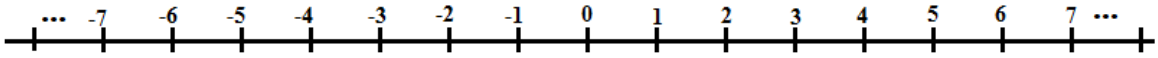
REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NA RETA – O CONTINUUM REAL

Identificando as sequências semelhantes temos que a cada sequência decimal (número real) corresponde um único ponto na reta. Com efeito:

a) A sequência decimal "termina", ou seja, sua representação decimal é finita ou então é uma dízima periódica.

Neste caso, a sequência decimal pode ser escrita como uma fração, ou seja, é um número racional. O problema consiste então em mostrar como marcar o ponto na reta como correspondente a uma fração.

Se esta fração for um número inteiro, ou seja, se a parte fracionária for zero então pode ser representada na reta numérica dos inteiros.



Se não for um número inteiro, a exemplo de 0,3333... então colocamos na forma de fração obtendo 0,333...= $\frac{1}{3}$. Para representar este número na reta o ponto correspondente a $\frac{1}{3}$ observe que este número equivale a dividir a unidade 1 por 3. Utilizamos o seguinte procedimento:

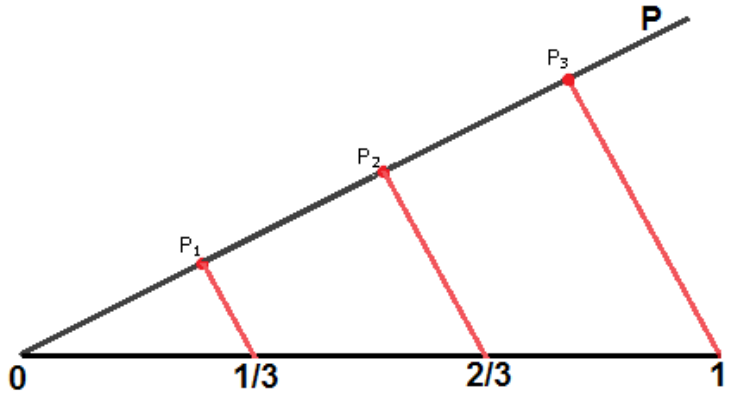


FIGURA 07: Divisão de um segmento em três partes iguais
FONTE: Elaborada pelo autor

Tomamos uma reta auxiliar, OP, dividimos a mesma por 3 partes $0P_1$, P_1P_2, P_2P_3 de mesmo comprimento, com um compasso. Ligamos o ponto P_3 ao ponto 1, e traçamos por P_1 e P_2 paralelas a P_31. Os pontos, obtidos destas interseções com 01 representam $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

Podemos agora marcar o ponto na reta; tomamos a unidade $\overline{AB}$ (vide figura abaixo), dividimos em 3 partes iguais e consideramos uma dessas partes a partir do ponto *A*, para a direita.

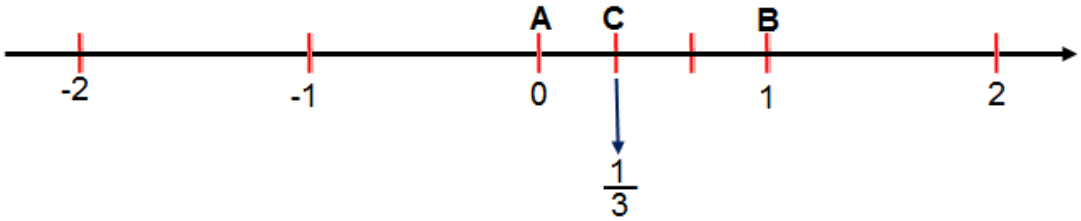


FIGURA 08: Representação de um número racional na reta
FONTE: Elaborada pelo autor

Definimos o ponto *C,* como sendo a imagem geométrica do número racional $\frac{1}{3}$, ou seja, número $\frac{1}{3}$ é a abscissa do ponto *C*.

<u>Exemplo</u>: Vamos generalizar o exemplo acima para uma fração $\frac{m}{n}$, que correspondente ao número racional $\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$, pode ser representada na reta (Vide Fig. 1.2) pelo seguinte processo:

I. Toma-se o segmento de reta OM de comprimento m e a reta auxiliar OP na qual com um compasso marca-se n distâncias iguais, $OP_1, P_1P_2, P_2P_3, ..., P_{n-1}P$.

II. Traça-se então o segmento de reta ligando P a M, e por P_1, P_2, $P_{3,..,}$ P_{n-1}, as paralelas a este segmento.

III. O primeiro ponto onde a paralela passando por $P_{1,}$ intersecta a reta OM, equivale ao ponto m/n, a paralela passando por P_2, intersecta a reta OM no ponto $\frac{2m}{n}$, e assim por diante. Estas paralelas intersectam a reta

OM representa o ponto $\frac{m}{n}$. O segundo representa o ponto $\frac{2m}{n}$ e assim por diante.

<u>Exemplo</u>: Dividir um segmento medindo doze unidades em 7 partes iguais.

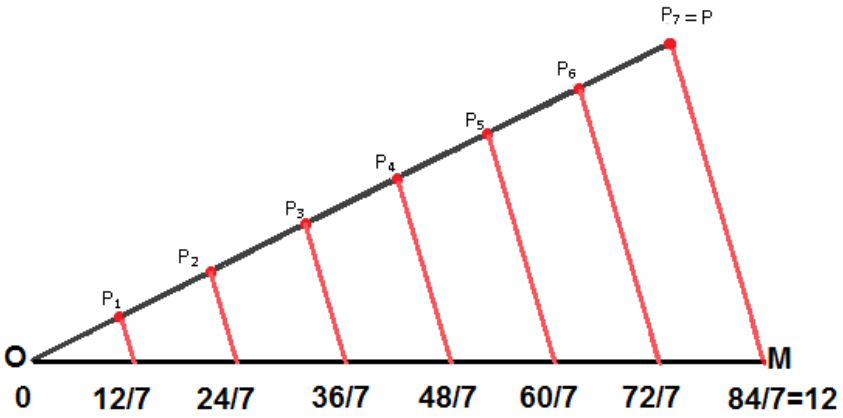
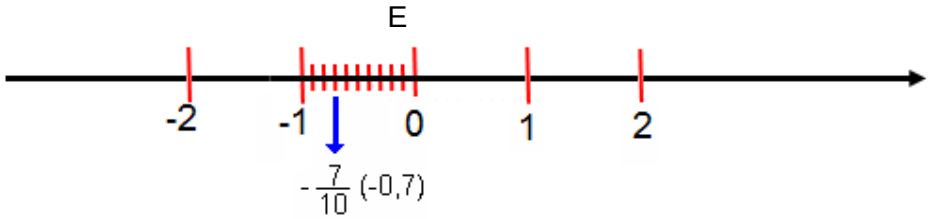


FIGURA 09: Divisão do segmento medindo 12 unidades em 7 partes iguais
FONTE: Elaborada pelo autor

<u>Exemplo</u>: Representar na reta numérica o número racional $-0,7$.

Vamos considerar que $-0,7 = -\frac{7}{10}$ (forma fracionária).

O número $-\frac{7}{10}$ está localizado entre os números −1 e 0. Então, vamos dividir o segmento $\overline{AD}$, que vai de −1 até 0, em 10 partes iguais:

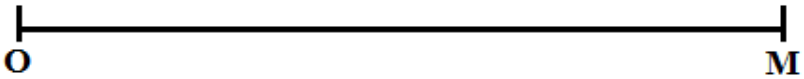


O ponto *E* é a imagem geométrica do número racional $-0,7$. O número $-0,7$ é a abscissa do ponto *E*.

7ª Lista de atividades

1. Divida o segmento medindo 1 em:
   a) duas partes iguais. b) três partes iguais, c) quatro partes iguais, d) cinco partes iguais. Explique por que isto corresponde a marcar os pontos $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ respectivamente.
2. Represente na reta os números $\frac{3}{5}, 1\frac{3}{5}$ e $2\frac{2}{5}$.
3. Se o desenho abaixo representa $\frac{2}{3}$ da unidade, qual é a unidade?

4. Dado o segmento OM, de comprimento 5.



   a) Marque os pontos que correspondem a $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ e $\frac{5}{5}$ de OM.

   b) Ache os pontos que correspondem a $\frac{1}{7}$ e $\frac{4}{7}$ de OM.

   c) Qual o ponto que corresponde a $\frac{3}{2}$ de OM? E $-\frac{3}{2}$ de OM?

5. Trace na reta real os pontos correspondentes aos seguintes números: $\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{3}$ e $-\frac{5}{4}$.

b) A sequência decimal tem uma representação infinita, mas não periódica.

Neste caso, podemos representar o número na reta como uma aproximação. Como ocorre a representação? Semelhante ao que efetuado no caso do de $\sqrt{2}$ utilizando os intervalos encaixantes.

Exemplo: π = 3,1416... Para representar este número na reta, utilizamos o seguinte procedimento:

- **Passo 1**. Representamos a parte inteira de π, o número 3, na reta.
- **Passo 2**. Representamos 3,1 – para isto dividimos o intervalo entre 3 e 4 em 10 partes, e tomamos o ponto correspondente a primeira parte, ou seja ao primeiro décimo depois de 3.
- **Passo 3**. Representamos 3,14. Nesta direção, dividimos o intervalo 3,1 e 3,2 em 10 partes e tomamos o ponto correspondente a 4ª parte, obtendo o ponto correspondente ao 4º centésimo após 3,1.
- **Passo 4**. Representamos 3,141 - nesta direção, dividimos o intervalo 3,14 e 3,15 em 10 partes e tomamos o ponto correspondente a 1ª parte, obtendo o ponto correspondente ao 1º milésimo após 3,14.

  E assim por diante ...

Por métodos numéricos o número π = 3,1416... foi calculado com mais de um milhão de casas decimais, mas com este processo, somente podemos determinar o ponto a ele correspondente na reta, de forma aproximada.

Entretanto, existem alguns números racionais que podemos determinar por meio geométricos a imagem geométrica a ele correspondente de maneira exata. Por exemplo, o próprio $\sqrt{2}$.

<u>Exemplo</u>: Ache o ponto na reta correspondente a $\sqrt{2}$.

Solução: Na reta dos inteiros, tome a partir do ponto o segmento perpendicular de comprimento 1. Podemos observar na figura que a diagonal AC mede $\sqrt{2}$. Com o compasso com centro em A e abertura AC transportamos o comprimento AC = $\sqrt{2}$ sobre a reta, obtendo o ponto cuja abscissa é $\sqrt{2}$.

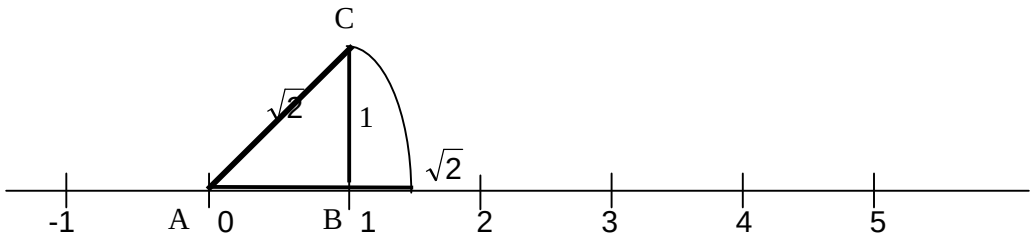


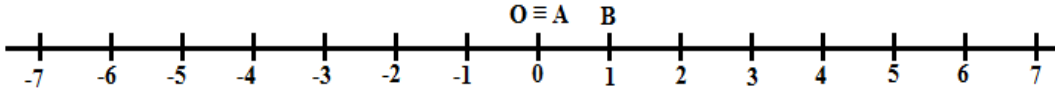
FIGURA 10: Representação de um número irracional na reta
FONTE: Elaborada pelo autor

Vamos colocar agora o problema contrário: será que dado um ponto na reta existe uma sequência decimal, ou seja um número real x que o represente?

A resposta é positiva. Considere uma reta r e um ponto A $\in$ **r.**

Tome um ponto qualquer O como origem e um segmento $\overline{AB}$

como unidade. Trace o segmento $\overline{AB}$ na reta fazendo A confundir com o 0 (zero) e tome o B à direita. Ao ponto correspondente ao B atribuímos o número 1. Repita esta operação marcando o 3, o 4, o 5, etc, obtendo os inteiros positivos. Repita a operação para a esquerda e marque os pontos correspondentes aos inteiros negativos -1, -2, -3, ... Desta forma, marcamos todos os pontos que correspondem as abscissas que são números inteiros.



Se A coincidir com um destes pontos então sua abscissa é um número inteiro. Caso não coincida, dividimos o intervalo ao qual ele pertence em, no caso 3 < x < 4, em dez parte e obtemos uma divisão deste intervalo em dez partes iguais, cada um medindo $\frac{\overline{AB}}{10}$. Isto fornece o valor de x com uma aproximação decimal. Digamos que 3,4 < x < 3,5. Dividimos então este intervalo em dez partes obtemos dez divisões iguais no intervalo 3,4 < x < 3,5. Cada uma delas mede $\frac{\overline{AB}}{100}$. Imaginemos que 3,41 < x < 3,42. Dividimos este intervalo em 10 parte medindo $\frac{\overline{AB}}{1000}$ e assim por diante. Se x coincidir com uma das divisões então o número é um racional. Se não coincide, x é uma sequência infinita, que pode ser periódica, dando um número racional, ou não periódica, e neste caso, x é um número irracional.

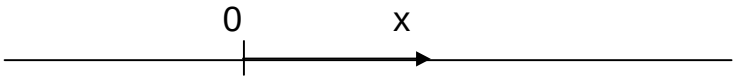
Este procedimento leva ao que se denomina uma sequência de intervalos encaixantes: em cada passo a sequência decimal obtida está em um

intervalo que é $\frac{1}{n}$ menor que o anterior. Este fato faz com que determinem um único ponto na reta que está em todos eles. Este é justamente o ponto dado. Podemos agora afirmar que a todo ponto da reta corresponde uma sequência decimal e a toda sequência decimal corresponde um ponto da reta. Temos então uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números reais. Podemos então identificar um número real com um ponto na reta e vice-versa.

O PROBLEMA DA MEDIÇÃO DE SEGMENTOS DE RETA.

Agora podemos responder a questão: como medir a distância de dois pontos na reta? Primeiro vamos definir o módulo de um número real x.

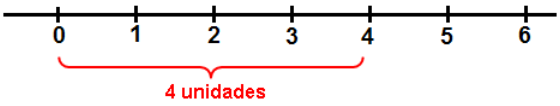
O fato de podermos identificar cada ponto da reta com um número real, faz com que possamos identificar o número real s, com o segmento de reta tendo origem no 0(zero) e ponto final em x. Assim, cada número real pode ser pensado como um segmento orientado. Vamos agora interpretar as operações em $\mathbb{R}$.



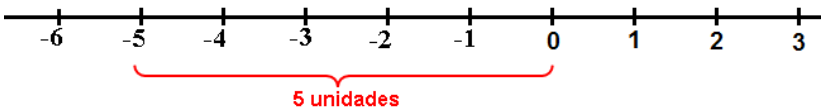
Definição: geometricamente, o valor absoluto de um número real **x**, é distância de **x** até 0 (zero);

Exemplos:

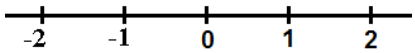
1. $|4| = 4$, pois a distância do número 4 na reta até 0 é igual a 4 unidades de comprimento.



2. $|-5| = 5$, pois a distância do número -5 na reta até 0 é igual a 5 unidades de comprimento.



3. $|0|=0$, pois não houve deslocamento na reta.

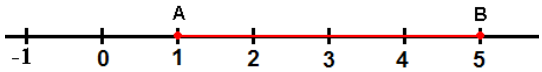


Definição: O módulo de um número real x é definido por: $|x|=\begin{cases} x\, se\, x>0 \\ 0\, se\, x=0 \\ -x\, se\, x<0 \end{cases}$.

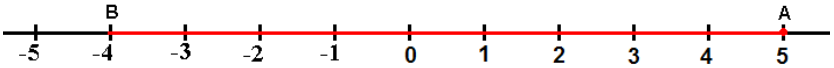
Definição: Dados dois números A e B, respectivamente de abscissas x e y, a **distância entre dois pontos A e B** é a medida do segmento de $\overline{AB}$, que é dada por |x – y|, onde |x – y|= x – y se x > y e |x – y|= – (x –y) se x< y. Vamos denotar a distância de A até B por: $d(A,B)=|x-y|$.

<u>Exemplos</u>:

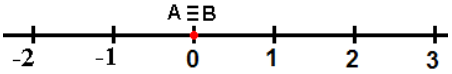
1. $d(A,B)=|5-1|=|4|=4$



2. $d(A,B)=|5-(-4)|=|5+4|=|9|=9$



3. $d(A,B)=|0|=0$, pois o ponto A coincide com o ponto B, isto é: $A\equiv B$.



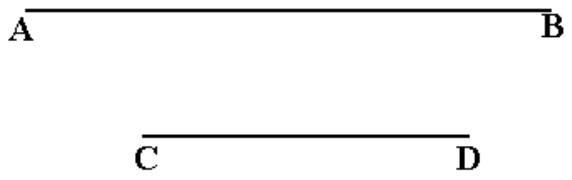
Portanto, medir um segmento de reta consiste em colocar uma extremidade na origem e a outra extremidade ver o real correspondente. Ele será a medida.

Quando escrevemos AB sem o traço estamos falando da medida de AB, ou seja de um comprimento, e quando escrevemos $\overline{AB}$ teremos um segmento.

Assim a medida do segmento $\overline{AB}$, denotada por AB, é sempre positiva ou zero. Só se anula se A= B.

A COMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS DE RETAS E OS NÚMEROS IRRACIONAIS.

Quando comparamos os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, o que fazemos?



Aplicamos um sobre o outro, fazendo coincidir dois extremos A e C. Vemos que o ponto D cai entre A e B e o resultado da comparação exprimimos dizendo que o comprimento de $\overline{AB}$ é maior que o de $\overline{CD}$ ou que o comprimento de $\overline{CD}$ é menor que o de $\overline{AB}$.

Verificarmos que um comprimento é "maior que", muitas vezes não é suficiente. Às vezes necessitamos saber quantas vezes cabe um comprimento no outro.

Precisamos de um termo de comparação para todas as grandezas de uma mesma espécie, as operações de troca que a vida social de hoje nos exige, seriam extremamente complicadas.

É necessário:

1. Estabelecer um termo único de comparação para todas as grandezas da mesma espécie, a este termo chamamos unidade de medida. No caso da medida de segmentos, a unidade pode ser centímetros, metros, pés, jardas, etc.
2. Responder à pergunta: Quantas vezes? A resposta consiste em achar um número que exprime o resultado da comparação com a unidade. Chamamos este número de: "A medida da grandeza em relação a essa unidade".

Ao medir um segmento $\overline{AB}$, temos um outro segmento $\overline{CD}$, que representa a unidade de medida escolhida, digamos u.

Às vezes, $\overline{CD}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento $\overline{AB}$, neste caso, dizemos que a medida $\overline{AB}$ = n u, sendo n um número inteiro e positivo.

Mas, frequentemente, $\overline{CD}$ não cabe um número inteiro de vezes no segmento $\overline{AB}$.

Nestes casos, procuramos uma unidade de medida menor, subdividindo $\overline{CD}$ em segmentos iguais e menores. O processo de subdivisão termina ao encontrarmos um segmento menor cuja medida é v e que cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e em $\overline{CD}$.

Escolhemos v como unidade de medida e temos as seguintes igualdades:

1. $\overline{AB}$ = m v
2. $\overline{CD}$ = u = nv onde m, n são números inteiros positivos. Logo $\overline{AB} = \frac{m}{n}.u$

O número $\frac{m}{n}$ é uma razão entre as medidas dos dois segmentos, é um número racional.

Dois quaisquer segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ que tenham esta relação são ditos comensuráveis, isto é, existe uma mesma unidade de medida que aplicada a ambos resulta em números inteiros. De outro modo, um segmento-padrão, chamado *segmento unitário*, cuja medida é v, que cabe um número exato de vezes em $\overline{AB}$ e em $\overline{CD}$.

Dizemos que $\overline{AB}$ = m.u e $\overline{CD}$ = n.u, onde m e n são números inteiros positivos e que a razão entre estas medidas é o número racional, $\frac{m}{n}$.

Por muito tempo se pensou que dois segmentos quaisquer eram sempre comensuráveis. A ilusão da comensurabilidade durou até o quarto século antes de Cristo. Naquela época, em Crotona, sul da Itália, havia uma seita filosófico-religiosa, liderada por Pitágoras. Um dos pontos fundamentais de sua doutrina era o lema "Os números governam o mundo", sendo que, para eles, números eram números naturais sobre os quais se podia estabelecer relações, tomar razões e, consequentemente, formar as frações.

Estudando geometria, Pitágoras conseguiu demonstrar que, para qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos

quadrados dos dois catetos. A partir deste resultado, surgiu um número que corresponde à medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, isósceles, com catetos unitários, ou seja, a medida da diagonal do quadrado de lado: $\sqrt{2}$.

Na época, a crença na comensurabilidade de qualquer par de segmentos, fez pensar que o lado $\overline{AB}$ e a diagonal $\overline{CD}$ de um quadrado qualquer também seriam segmentos comensuráveis, e portanto, dado um segmento de reta como unidade de medida, qualquer outro segmento de reta conteria este primeiro um número racional de vezes. Ou seja, considerando o primeiro segmento como tendo medida 1u.c., o segundo segmento teria o comprimento de um múltiplo racional do primeiro. Desse modo, a medida de qualquer segmento seria um número racional.

Porém, buscando a razão entre estes segmentos, um dos próprios discípulos de Pitágoras, observou que eles não são comensuráveis. Este foi um momento de ruptura, de crise entre os estudiosos da época. Aparecia pela primeira vez na história da Matemática, a possibilidade da existência de segmentos incomensuráveis e, conseqüentemente, segmentos cuja razão entre as medidas não resulta em números racionais, abrindo-se também a possibilidade da existência de números irracionais.

A existência de segmentos incomensuráveis implica na insuficiência dos sistemas numéricos conhecidos – números naturais e racionais - para efetuar medidas dos objetos geométricos mais simples, como o quadrado e o círculo.

A solução que se impôs, na época, e que levou séculos para ser adotada, era a de ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados *números irracionais,* de tal modo que, fixando uma unidade de comprimento arbitrária, qualquer segmento de reta pudesse ter uma medida numérica.

Quando o segmento considerado é comensurável com o segmento unitário correspondente à unidade escolhida, sua medida é um número *racional* (inteiro ou fracionário). Os números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade. Número irracional, portanto, é um número obtido das medidas de segmentos e que não pode ser expresso como uma razão entre dois números inteiros.

Demonstra-se que a diagonal e o lado do quadrado são segmentos incomensuráveis e também que o número $\sqrt{2}$ obtido pela razão entre suas medidas não é racional.

Conseqüência da crise da comensurabilidade: define-se o conjunto dos números reais, reunindo o maior sistema numérico conhecido – números racionais – aos novos números irracionais.

CAPITULO IV

4.1. CENÁRIO DA PESQUISA

Neste capítulo vamos apresentar como se desenvolveu o levantamento de dados da pesquisa efetuado por meio da aplicação de um pré-teste que também teve como objetivo avaliar diagnosticamente as turmas; descrevemos a aplicação da abordagem didática em sala de aula e o os resultados obtidos com a observação participante utilizada para verificar como os alunos se manifestaram diante das atividades propostas e da forma como foram apresentadas.

4.2. APLICAÇÃO DO PRÉ-TESTE

A aplicação do pré-teste foi realizada numa Instituição de Ensino Estadual que funciona os três turnos: manhã: Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e Ensino Médio (1º ao 3º ano); tarde: Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e Ensino Médio (1º ao 3º ano) e noite: Ensino Médio (1º ao 3º ano) na modalidade Educação de Jovens e Adultos - EJA. Essa Escola está localizada na cidade de São Mamede – Paraíba. Os questionários foram aplicados em turmas que estão em fase de conclusão da Escola Básica (3º ano do Ensino Médio).

Com os objetivos de testar as hipóteses sobre as deficiências de aprendizagem de números reais e de obter uma radiografia dos conhecimentos dos alunos do 3º Ano do Ensino Médio sobre este conteúdo, aplicamos um pré-teste. Nesta direção, consideramos os objetivos didáticos a serem alcançados com o ensino dos números reais para os níveis Fundamental e Médio constantes nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática de 5ª a 8ª Séries (BRASIL. 1998) e do Ensino Médio (BRASIL, 2000) Foi aplicado a 32 alunos do 3º ano do Ensino Médio, sendo 20 alunos da turma A (turno Manhã)

e, 12 alunos da turma B (turno tarde) com os quais fizemos também a aplicação da abordagem didática.

Após selecionar os participantes conversei com os alunos de uma das turmas da 3ª série do Ensino Médio em que lecionava, no término de uma das aulas. Informei que esse trabalho fazia parte da minha pesquisa de mestrado, e que seria realizado em horário contrário às aulas, na sala de informática. Também disse que a participação nesse trabalho era voluntária e não implicaria em nenhum benefício direto, como notas ou pontos positivos. Informei também que a participação dependeria da autorização dos pais e da disponibilidade de horários. Alguns alunos demonstraram interesse em participar, então combinamos de marcar os encontros. Sendo assim, os critérios iniciais para selecionar os participantes foram apenas que os mesmos se comprometessem em participar de todo o projeto e que tivessem disponibilidade de horários compatíveis com o pesquisador/professor.

A seguir, apresentamos o pré-teste (incluindo abaixo de cada questão, os objetivos da mesma, para que estes fiquem claros ao leitor deste trabalho). Este questionário foi desenvolvido e testado por BOFF (2006) em sua dissertação de mestrado quando investigava as dificuldades dos alunos no Ensino Básico sobre os números reais e consiste das seguintes questões:

1. Escreva a representação decimal dos seguintes números:

   a) $\frac{15}{20}$
   b) $\frac{70}{33}$
   c) $\frac{4}{7}$

Objetivo: Detectar se o aluno sabe que deve encontrar expansão finita ou infinita periódica, expressando isto com clareza: chegando até o período zero em (a), chegando até o período 12 em (b) e chegando até o período 571428 em (c), que só aparece na sexta casa decimal.

2. Escreva os seguintes números sob a forma de fração:

   a) 2,75
   b) 1,111...
   c) 0,5252...

Objetivo: Detectar se o aluno sabe transformar: no item (a) não temos dízima periódica, mas nos outros dois sim, no item (b) existe, inclusive, uma parte inteira.

3. Quais dos seguintes números podemos garantir que são racionais?

a) $\frac{2}{3}$

b) $0,12345678910111213141516171819 20...$

c) $0,32$

d) π

e) $0,0101010101...$

f) $0,0101001000100001...$

g) $0,01001$

Objetivo: Até aqui, detectar se o aluno sabe que racional tem expansão infinita periódica.

h) $\sqrt{3}$

Objetivo: Detectar se o aluno tem a informação ou consegue intuir ou até calcular e concluir que é irracional.

i) $1+\sqrt{3}$

j) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Objetivo dos dois últimos itens: Detectar se o aluno sabe concluir sobre operações envolvendo irracionais.

4. Que raciocínio você usou para responder os itens da questão 3 ?

Objetivo: Detectar se o aluno tem algum conhecimento ou se tudo foi chute.

5. Usando uma calculadora que pode apresentar no máximo 21 caracteres em seu visor e efetuando as operações abaixo, obtivemos os seguintes resultados.

a) $\frac{1}{3} = 0,3333333333333333333$

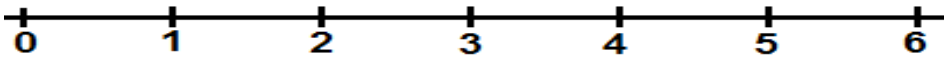
b) $\frac{16}{17} = 0,94117664705882352941$

c) $\sqrt{6} = 2,4494897427831780981$

Observando os resultados obtidos, podemos concluir que todos estes números são racionais? Podemos concluir que todos estes números são irracionais? Justifique.

Objetivo: Detectar se o aluno tem a noção das deficiências de uma calculadora e da impotência da mesma em decidir por nós, na grande maioria dos casos, se um número é ou não irracional.

6. Localize aproximadamente na reta numerada abaixo os números $1+\sqrt{6}$ e $2\sqrt{6}$.



Objetivo: Detectar se o aluno sabe operar com irracionais (o valor de $\sqrt{6}$ já foi talvez calculado em questão anterior)

7. Podemos garantir que a diagonal de um retângulo que tem para medidas do seu comprimento e largura números inteiros é sempre um número inteiro? É sempre um número racional? (Estamos aqui considerando sempre a mesma unidade de medida)

Objetivo: Detectar se o aluno tem ideia de que raiz quadrada de inteiros que não são quadrados perfeitos são números irracionais. Espera-se aqui que ele não tenha dificuldades de aplicar o Teorema de Pitágoras.

8. Você conhece outros números que não sejam nem racionais nem irracionais? Em caso afirmativo apresente um (ou alguns) exemplo(s).

Objetivo: Verificar se o aluno conhece números complexos e sabe, entre eles, identificar que os imaginários não são reais.

4.2.1. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DOS QUESTIONÁRIOS APLICADOS EM TURMAS DE 3º ANO DO ENSINO MÉDIO.

Desempenho 32 dos alunos de uma escola pública

Questão	Item	Número de acertos	Número de alunos que não responderam
01	a	$\frac{13}{32}$	$\frac{3}{32}$
	b	$\frac{9}{32}$	$\frac{5}{32}$
	c	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{32}$
02	a	$\frac{12}{32}$	$\frac{12}{32}$
	b	$\frac{4}{32}$	$\frac{10}{32}$
	c	$\frac{3}{32}$	$\frac{16}{32}$

QUADRO 02: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Comentários:

- Na questão 01 os erros mais frequentes foram nas representações decimais de frações próprias, pois os mesmos apresentaram em suas respostas grandes dificuldades em efetuar a divisão na qual o dividendo é menor que o divisor.
- Apenas 9,38%, ou seja, $\frac{3}{32}$ dos alunos acertaram toda a questão 01. Erram ou deixaram de responder 37,5%, isto é, $\frac{12}{32}$ toda a questão 01.
- Na questão 2, não souberam recuperar a fração geratriz da dízima e os que tentaram fazê-la, em alguns questionários, repetiram a regra usada para um

número cuja representação decimal é finita. Nesta questão, 50% dos alunos erram ou deixaram de responder toda essa questão.

- Apenas 3,13 %, ou seja, $\frac{1}{32}$ dos alunos acertaram toda a questão 02.
- Somente 1 aluno conseguiu responder corretamente as duas primeiras questões

Questão	Item	Número de acertos	Número de alunos que não responderam
03	a	$\frac{25}{32}$	$\frac{3}{32}$
	b	$\frac{19}{32}$	$\frac{3}{32}$
	c	$\frac{19}{32}$	$\frac{3}{32}$
	d	$\frac{15}{32}$	$\frac{5}{32}$
	e	$\frac{9}{32}$	$\frac{5}{32}$
	f	$\frac{9}{32}$	$\frac{8}{32}$
	g	$\frac{19}{32}$	$\frac{8}{32}$
	h	$\frac{15}{32}$	$\frac{8}{32}$
	i	$\frac{13}{32}$	$\frac{8}{32}$
	j	$\frac{14}{32}$	$\frac{8}{32}$

QUADRO 03: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Comentários:

- Nenhum aluno acertou corretamente toda a questão 3. A maioria dos alunos cometeu erros do tipo:

- ✓ Assinalou só os números com expansão decimal finita.
- ✓ Assinalou só fração.
- ✓ Assinalou somente as dízimas periódicas.
- ✓ Só não assinalou π.
- ✓ Assinalou todos.
- ✓ Assinalou somente os números decimais.
- ✓ Assinalou só os números que tinha raiz.

- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.
- O item 3a foi o que apresentou o maior número de acertos chegando a 78,13%,enquanto os itens 3e e 3f apresentaram menor número de acertos totalizando 28% em cada questão.

Questão	Número de acertos	Número de alunos que não responderam
04 e 05 (anotações relevantes)	$\frac{5}{32}$	$\frac{18}{32}$

QUADRO 04: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

As questões 04 e 05 foram agrupadas pelo fato de, neste nível, não apresentarem diferença. Isto possivelmente mostra que os alunos:

- ✓ Não reconheceram a diferença entre as duas questões;
- ✓ Não atingiram o objetivo proposto para a questão 5 a respeito da calculadora.
- ✓ Possuem uma ideia muito vaga sobre os números reais e suas formas de representação.

Comentários:

- Na questão 04, as respostas mais comuns, foram:
  - ✓ Racionais são finitos e infinitos periódicos;
  - ✓ Fazendo as contas;

- ✓ Irracionais são dízimas;
- ✓ Racionais são os que têm fim;
- ✓ Racionais são os números decimais;
- ✓ Os números decimais são racionais;
- ✓ Irracional não existe raiz;
- ✓ Os números decimais são racionais;
- ✓ Irracionais são decimais infinitos e que não tem período;
- ✓ Racional são os números naturais, inteiros e as frações;
- ✓ Racional tem representação decimal finita e infinita periódica e irracional infinita não periódica;
- ✓ Não sei o que é racional nem irracional;
- ✓ Racional tem expansão decimal finita e infinita periódica;
- ✓ Irracional são os mais difíceis de representar na reta e os racionais são os mais fáceis de representar na reta.

- 56,25% dos alunos não tiveram muito interesse em responder as questões 04 e 05.
- Na questão 05 os alunos não perceberam a deficiência das calculadoras.

Questão	Item	Número de acertos	Número de alunos que não responderam
06 (anotações relevantes)	$1+\sqrt{6}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{20}{32}$
	$2\sqrt{6}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{23}{32}$

QUADRO 05: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Comentários:

- Apenas 12,50% dos alunos acertaram a questão 06.
- O mesmo grupo de alunos acertou os dois itens da questão 06.

- Usaram como procedimento para localizar esses números na reta a representação decimal de $\sqrt{6}$ que tinha em uma questão anterior e calcularam aproximadamente os valores de $1+\sqrt{6}$ e $2\sqrt{6}$.
- Não tiveram muito interesse em respondê-la, pois 62,50% deixaram de responder o item 6a e aproximadamente 72% não responderam o item 6b.

Apenas 2 alunos responderam a questão 07 e aproximadamente 94% dos alunos não tiveram interesse em tentar respondê-la.

Comentários:

- O aluno nº 01 afirmou que pode ser racional ou irracional, em seguida apresentou dois exemplos, em ambos utilizou um retângulo. No primeiro exemplo, o retângulo tem dimensões 6 e 3 (não especificou a unidade de comprimento) e usou o teorema de Pitágoras para concluir que a diagonal é $d=\sqrt{45}$ (irracional). No segundo exemplo o retângulo tem dimensões 6 e 8 (não especificou a unidade de comprimento) e novamente usou Pitágoras para afirmar que a diagonal $d=10$ (racional). Ver resposta detalhada no Apêndice.
- O aluno 03 afirmou que pode ser irracional e, em seguida apresentou um exemplo de um retângulo de dimensões 1 e 2 no qual a diagonal mede $d=\sqrt{5}$ comprovando o fato de que um retângulo cujas dimensões são inteiras sua diagonal pode ser um número irracional. Ver resposta detalhada no Apêndice.

Apenas 3 alunos responderam a questão 08 e aproximadamente 90,6% dos alunos não tiveram interesse em tentar respondê-la.

Comentários:

- O aluno nº 01 deu como resposta: $\sqrt{-25}$ e os números que não são reais.
- O aluno nº 03 deu como resposta: $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-10}$ e outros.
- O aluno nº 15 afirmou: os números complexos. Em seguida apresentou como exemplo de números que não são reais os números: $1+i$ e $\sqrt{-6}$.

- Observa-se ainda, que o mesmo grupo de alunos que responderam a questão 06, responderam a questão 07. Ver resposta detalhada no Apêndice.

4.2.2. RESULTADOS DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Analisando os questionários em geral, comprova-se o problema exposto na introdução: *a dificuldade dos alunos frente à compreensão e emprego do número real.*

Poucos alunos sabem representar na forma decimal um número racional nem mesmo selecionar dentre uma lista de números quais são racionais e quais não são racionais.

Comprovamos isto na tabulação dos resultados dos questionários aplicados: apenas 9,38 % dos alunos da escola pública que cursavam a 3ª série do Ensino Médio, souberam fazer a representação decimal de um número racional. Na questão 02 para recuperar a fração geratriz da dízima, apenas um aluno, isto é 3,13% dos alunos, conseguiram recuperar a fração geratriz nos três itens propostos para essa questão. A questão 3, classificar corretamente **todos** os números apresentados em racionais ou irracionais, nenhum aluno conseguiu acertar todos os itens da questão 03, comprovando-se a falta de habilidade desses alunos em identificar e classificar corretamente um número racional ou irracional. Esse mesmo problema foi constatado nas questões 04 e 05 que se baseiam nos critérios utilizados pelos alunos para classificar e identificar os números racionais e irracionais. Na questão 06, apenas 12,50% dos alunos conseguiram localizar corretamente na reta real os números irracionais $1+\sqrt{6}$ e $2\sqrt{6}$. Esses alunos utilizaram como procedimento a representação decimal desses irracionais por meio de aproximação dos racionais.

4.3. A APLICAÇÃO DA ABORDAGEM DIDÁTICA

Apresentaremos agora o plano de aula detalhado seguido na aplicação da proposta para a construção dos números reais no Ensino Médio, onde poderá ser

observada a sequência didática da aplicação da nossa proposta pedagógica para a construção dos números reais no Ensino Médio. Foi necessário 25 aulas de 50 minutos, em uma turma da 3ª série do Ensino Médio de uma Escola Pública Estadual de São Mamede, Paraíba.

Aula 01: 24 de agosto de 2010
(2 períodos)

Unidade Didática 1.0: A apresentação, o contrato didático do curso e aplicação do pré-teste.

Apresentação e estabelecimento do contrato didático – apresentação do professor, de cada aluno e da proposta de trabalho e os objetivos do curso. Após ouvir o que os alunos esperam do curso foi discutido com os alunos:

a) a metodologia aplicada em sala de aula, (estudo em grupos de três alunos), bem como o que se espera de cada aluno e um cronograma de atividades;
b) as obrigações e os direitos de cada um dos envolvidos;
c) o sistema de avaliação por meio de pré-teste, de um pós-teste, de uma avaliação continua com base na participação dos alunos e na realização de atividades.
d) o esquema de distribuição do módulo de ensino, a necessidade de leitura do aluno e o processo de trabalhar questões problemas em sala de aula.
e) Em seguida foi aplicado um pré-teste.

Aula 02: 26 de agosto de 2010
(2 períodos)

Unidade Didática 1.1 – Os conjuntos numéricos e o processo de contagem.

- **Conteúdos de fatos e conceitos:**

Revisão sobre senso numérico (concepção intuitiva de número) e das demandas históricas que motivaram a criação do conjunto dos números naturais. Contagem.

- **Expectativas de aprendizagem**

Que o aluno seja capaz de:

1. conhecer e compreender a origem dos números e relacionar sua invenção com as necessidades da civilização humana, bem como que os algarismos são símbolos criados pelo homem para representar quantidades;
2. reconhecer o senso numérico em situações cotidianas;
3. compreender e dar exemplos das diferentes formas de contagem.

- **Orientações Didáticas**

1. Dividir a turma em grupo de três.
2. Sondar para ver o que os alunos pensam sobre senso numérico. É importante insistir, desde já, que **o senso numérico é uma capacidade independente da de efetuar contagem**. Quando olhamos para uma mesa e dizemos que sobre a mesma existem três livros, podemos fazer isso sem contar um, dois e três. Além disso, também é importante enfatizar que o senso numérico é atributo inato de muitos animais, enquanto que apenas no homem o cérebro atingiu uma complexidade suficiente para lhe permitir aprender a contar. Também temos bastante evidência experimental para achar que apenas humanos são capazes de fazer multiplicações e divisões.
3. Efetuar questionamentos do tipo:
   3.1 Podemos observar se houve mudanças na quantidade de elementos de uma coleção sem efetuar a sua contagem?
   3.2 O que é senso numérico?
   3.3 Você pode citar algum exemplo do dia a dia que envolva senso numérico.
   3.4 O que é contar?
   3.5 Por que surgiu a necessidade de contar?

- **Habilidades e Competências**

1. Compreender que senso numérico é a capacidade de reconhecer, comparar, somar e subtrair elementos de uma coleção com uma quantidade pequena de elementos.
2. Reconhecer que contar é um processo mental associado a número e que é um atributo exclusivo do ser humano.
3. Observar, comparar e classificar a estrutura da ideia de número e à formação do conceito de medida por meio de registros de contagem, evidenciando assim, a importância da Matemática em vários momentos de nossa vida.

- **Avaliação**

Estabelecer conexões entre os conhecimentos já construídos em relação aos que precisa aprender.

- **Observações do professor**

1. A princípio alguns alunos mostraram-se inibidos e outros mais ansiosos com o início do desenvolvimento da proposta.
2. Após lançar as questões descritas nas orientações didáticas, os alunos começaram a participar e interagindo entre eles. Muitos alunos fizeram questão de contar experiências na qual utilizavam o senso numérico e que até então muitos afirmaram que não sabiam da uma definição para senso numérico.
3. No final da aula, dois alunos um de cada grupo formado, voluntariamente afirmaram, que estavam gostando do conteúdo que estava sendo estudado, pois era uma oportunidade de rever um conteúdo que antes não tinha importância para eles e agora estavam descobrindo a importância desse conteúdo no dia a dia.

Aula 03: 31 de agosto de 2010

(3 períodos)

Continuação da Unidade Didática 1.1 – Os conjuntos numéricos e o processo de contagem.

- **Conteúdos de fatos e conceitos**

Representação de números – a base 10 e o valor posicional. Contagem e o conjunto dos naturais. Sistema de numeração: historia e desenvolvimento. A representação dos números naturais na forma polinomial.

- **Expectativas de aprendizagem**

Que o aluno seja capaz de:

1. realizar a contagem dos elementos de um grupo e representá-la simbolicamente (de 0 a 9);
2. reconhecer que para compreender a estrutura de qualquer sistema de numeração é conveniente começar revendo o sistema decimal que é usado, normalmente, em todas as atividades humanas;
3. compreender que o Sistema de Numeração Decimal (SND); ou sistema de base 10 utiliza os 10 algarismos que são: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 e 9.
4. reconhecer as características do sistema de numeração decimal como base e valor posicional;
5. formular hipóteses sobre a escrita numérica pela identificação da posição ocupada pelos algarismos;
6. escrever um número na forma polinomial e vice versa.

- **Orientações didáticas**

1. Lançar a questão: Como representamos as contagens de coleções com uma grande quantidade de elementos?

2. Os primeiros instrumentos de contagem
3. Lançar a questão: Será possível representar um número natural como um polinômio?
4. Reconhecer as características do sistema de numeração decimal como base e valor posicional;
5. Resolução de lista de exercícios em grupo de três alunos.

- **Habilidades e Competências**

1. Reconhecer que um número decimal é formado por uma combinação de algarismos e para determinar a quantidade representada por um número decimal é necessário multiplicar cada um dos algarismos por uma potência de 10 de acordo com a posição que o algarismo ocupa dentro do número e somar os resultados.
2. Constatar e reconhecer a importância do sistema de numeração decimal tanto para contar como para efetuar operações.
3. Reconhecer e constatar por meio de exercícios realizados em sala que saber escrever um número na forma polinomial, facilitara a realização e compreensão de muitas demonstrações envolvendo conjuntos numéricos.

- **Avaliação**

1. Resolução de lista de exercícios.
2. Segue algumas respostas da lista de atividades usada para avaliar esse momento. Lembrando que toda a proposta foi desenvolvida utilizado o estudo em grupo de três alunos.

1. Escrever um natural na forma de um polinômio:

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$$

a) 7341 $7.1000+300+4.10+1$
$7.10^3+3.10^2+4.10^1+1$

b) 20065 $2.10000+0.1000+0.100+6.10+5$
$2.10^4+0.10^3+0.10^2+6.10^1+5$

c) 103002 $1.100000+0.10000+3.1000+0.100+0.10+2$
$1.10^5+0.10^4+3.10^3+0.10^2+0.10^1+2$

d) 14302 $1.10000+4.1000+3.100+0.10+2$
$1.10^4+4.10^3+3.10^2+0.10^1+2$

e) 701 $7.100+0.10^1+1$
$7.10^2+0.10^1+1$

f) 15
1.10^1+5
$1.10^1+5.10^0$

FIGURA 10: Resolução da lista de atividades
FONTE: Dados da pesquisa

3. Mostre que se ab é um número natural com dois algarismos então ab – ba é um múltiplo de 9.
(Sugestão: ab = 10a + b) .

$ab = a.10+b$
$ba = b.10+a$
$\Rightarrow \begin{cases} ab = 10a+b \\ ba = 10b+a \end{cases}$

$ab - ba = 10a+b-(10b+a) =$
$= 10a+b-10b-a =$
$= 9a - 9b =$
$= 9(a-b)$ que é múltiplo de 9.

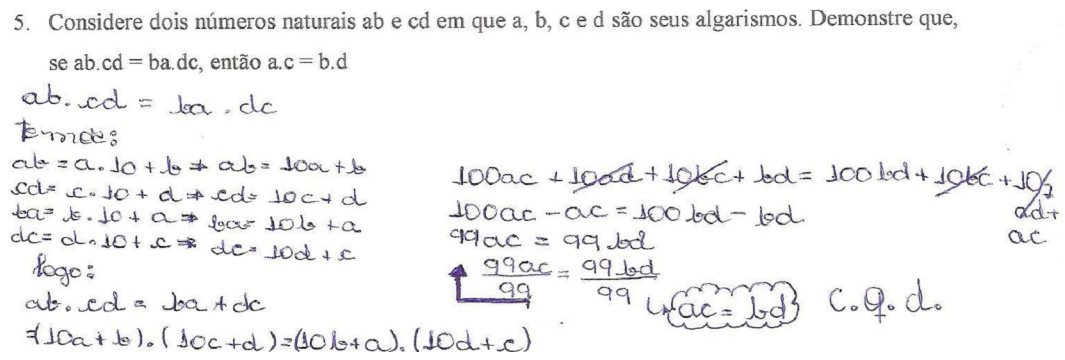
FIGURA 11: Resolução da lista de atividades
FONTE: Dados da pesquisa

4. Estenda o resultado para um número com 3 algarismos: abc.

$\begin{cases} abc = a.100+b.10+c \\ cba = c.100+b.10+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abc = 100a+10b+c \\ cba = 100c+10b+a. \end{cases}$

$abc - cba = 100a+10b+c-(100c+10b+a) =$
$= 100a+\cancel{10b}+c-100c-\cancel{10b}-a =$
$= 99a-99c =$
$= 99(a-c) =$
$= 9.11(a-c) \rightarrow$ que é múltiplo de 9.

FIGURA 12: Resolução da lista de atividades
FONTE: Dados da pesquisa



5. Considere dois números naturais ab e cd em que a, b, c e d são seus algarismos. Demonstre que, se ab.cd = ba.dc, então a.c = b.d

$ab.cd = ba.dc$

Temos:

$ab = a.10 + b \Rightarrow ab = 10a + b$

$cd = c.10 + d \Rightarrow cd = 10c + d$

$ba = b.10 + a \Rightarrow ba = 10b + a$

$dc = d.10 + c \Rightarrow dc = 10d + c$

Logo:

$ab.cd = ba + dc$

$(10a + b).(10c + d) = (10b + a).(10d + c)$

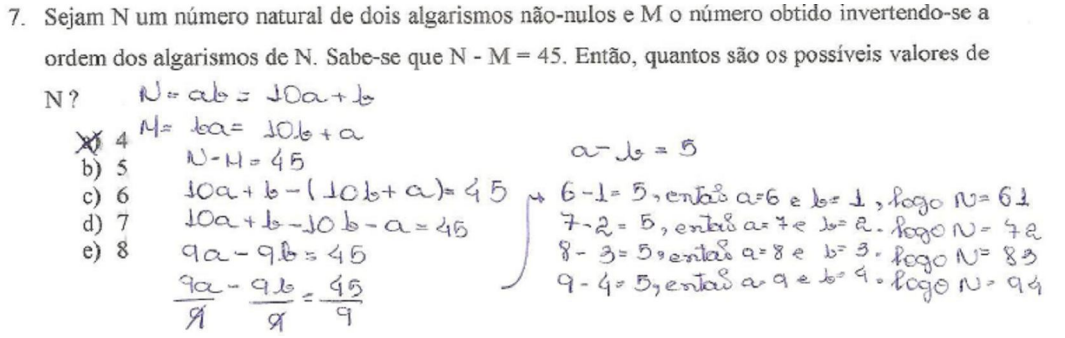
$100ac + \cancel{10ad} + \cancel{10bc} + bd = 100bd + \cancel{10bc} + \cancel{10ad} + ac$

$100ac - ac = 100bd - bd$

$99ac = 99bd$

$\frac{99ac}{99} = \frac{99bd}{99} \rightarrow ac = bd$ C.q.d.

FIGURA 13: Resolução da lista de atividades
FONTE: Dados da pesquisa



7. Sejam N um número natural de dois algarismos não-nulos e M o número obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de N. Sabe-se que N - M = 45. Então, quantos são os possíveis valores de N?

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

$N = ab = 10a + b$

$M = ba = 10b + a$

$N - M = 45$

$10a + b - (10b + a) = 45$

$10a + b - 10b - a = 45$

$9a - 9b = 45$

$\frac{9a}{9} - \frac{9b}{9} = \frac{45}{9}$

$a - b = 5$

$6 - 1 = 5$, então $a = 6$ e $b = 1$, logo $N = 61$

$7 - 2 = 5$, então $a = 7$ e $b = 2$. logo $N = 72$

$8 - 3 = 5$, então $a = 8$ e $b = 3$. logo $N = 83$

$9 - 4 = 5$, então $a = 9$ e $b = 4$. logo $N = 94$

FIGURA 14: Resolução da lista de atividades
FONTE: Dados da pesquisa

- **Observações do professor**

1. Essa parte da nossa proposta a princípio foi planejada para duas aulas e, só foi possível em três aulas. O professor da terceira aula gentilmente nos cedeu o seu tempo com a finalidade de não prejudicar o andamento da nossa proposta.
2. Desde o início da aplicação da proposta, este dia foi o mais especial. Fiquei orgulhoso, como professor de matemática, em constatar a satisfação e a motivação dos alunos nas demonstrações da lista de atividades realizadas durante a aula.
3. Apesar de ter sido utilizado quatro aulas, os alunos não demonstraram cansaço e mantiveram-se sempre motivados durante todas as aulas.

4. Um aluno **a** relatou “que não imaginava a importância da forma polinomial de um número em auxiliar a demonstração de questões envolvendo o sistema de numeração decimal”.
5. Relato de um aluno **b** durante a aula “se não souber passar um número para a forma polinomial não dá para saber resolver as questões”.
6. O aluno c relatou “fica difícil entender matemática se o professor não mostrar de onde vêm as coisas”. O aluno se referia a utilização da forma polinomial para auxiliar as demonstrações.
7. Alguns alunos chegaram a pedir para resolver alguma questão no quadro e pedi que eles ajudassem os colegas dos grupos vizinhos.
8. No decorrer das aulas alguns alunos tiravam as dúvidas dos colegas do grupo e a aprendizagem passou a fluir de forma colaborativa.
9. No final da quarta aula, após todos entregarem a lista de atividades respondida, permiti que os alunos fizessem três questões da lista no quadro e quase todos tiveram interesse em apresentar suas respostas, então fiz um sorteio e três alunos apresentaram suas respostas no quadro e dois deles ainda explicaram todo o procedimento.

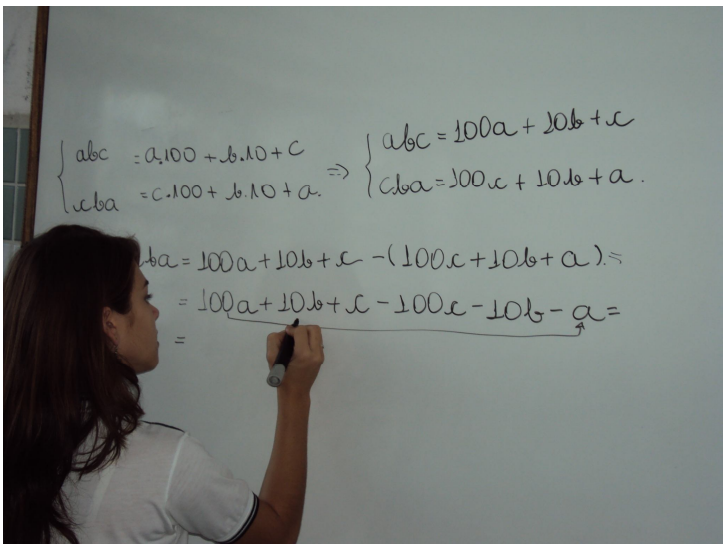


FIGURA 15: Resolução da lista de atividades
FONTE: Dados da pesquisa

Aula 04: 02 de setembro de 2010

(3 Períodos)

Continuação da Unidade Didática 1.1 – Os conjuntos numéricos e o processo de contagem.

- **Conteúdos de fatos e conceitos:**

A construção dos números naturais. A representação dos naturais na reta. A representação das operações com números naturais na reta. A ordem entre os naturais.

- **Expectativas de aprendizagem**

Que o aluno seja capaz de:

1. reconhecer que por meio da necessidade de desenvolver procedimentos e instrumentos de contagem chegamos ao conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$;
2. compreender que os números naturais podem ser construídos a partir do 0 (zero), de uma unidade e da operação de tomar o sucessor;
3. identificar, comparar e representar corretamente os números naturais na reta numérica;
4. construir e compreender o significado das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais na reta numérica;

- **Orientações Didáticas**

1. No início da aula agradeci a todos os alunos pela colaboração e importância que todos estão dando a nossa proposta de construção dos números reais.
2. Dividi a turma em grupos de três e distribui com cada aluno uma régua e um compasso. Quando comecei a distribui os objetos eles me comunicaram que não sabiam usar o compasso corretamente, então antes de iniciar as atividades mostrei aos alunos a importância e como utilizar o compasso.

3. Com relação aos grupos formados, a cada encontro cada grupo era refeito com pelo menos um dos membros diferentes com a finalidade de socializar mais o conhecimento.
4. Revisar com os alunos a forma correta de usar o compasso e a régua.
5. Esclarecer aos alunos que a partir de agora iremos construir geometricamente na reta dos naturais as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) e que eles deixem um pouco de lado o processo algébrico para que possam entender corretamente essa construção.
6. Construir a reta numérica, utilizando régua e compasso e, associar a cada número natural um ponto na reta utilizando a ideia de sucessor de um número.
7. Utilizar a ideia de sucessor para efetuar a adição de dois ou mais números na reta dos naturais, compreendendo o significado geométrico desta operação.
8. Mostrar que o significado geométrico da expressão m + n na reta dos naturais é partir do número m e caminhar n unidades para direita.
9. Mostrar que a operação da multiplicação na reta dos naturais consiste em somar parcelas iguais.
10. Empregar a operação da subtração na reta dos naturais como sendo o processo inverso para adição e que o significado geométrico da expressão m – n, com m > n, é o mesmo que partindo de m o aluno deverá caminhar n unidades para esquerda.
11. Utilizar os conhecimentos já adquiridos pelos alunos nas operações de adição, multiplicação e subtração e mostrar geometricamente na reta dos naturais como se processa a operação da divisão (exata e não exata).

- **Habilidades e Competências**

1. Que o aluno compreenda o significado geométrico das operações com naturais e que possam utilizar esse conhecimento, mais adiante, para facilitar essas mesmas operações na reta dos inteiros.
2. Desenvolver hábito no aluno de comparar os números utilizando a reta numérica e desta forma ele possa compreender corretamente a relação de ordem existente entre os conjuntos numéricos.

3. Associar que com os números naturais medimos quantidades discretas, isto é, aquelas em que podemos contar objetos um a um.
4. Reconhecer que os números naturais são representados por símbolos - designados por algarismos ou dígitos - e que constituem uma sequência ordenada onde cada elemento é mais um do que o anterior e menos um que o seguinte.
5. A partir deste encontro os alunos deverão concluir que os números naturais surgiram da necessidade de se representar quantidades inteiras e relacioná-los em ordem crescente.

- **Avaliação**

1. Estabelecer conexões entre os conhecimentos já construídos em relação aos que precisam aprender.
2. Resolução de lista de atividades na qual o aluno utilizará a construção geométrica das operações estudadas.

- **Observações do professor**

1. Os alunos mostraram-se motivados do início ao fim do encontro com a ideia de efetuar operações com os naturais na reta.
2. Durante esse encontro foi observado também o espírito de colaboração que essa proposta didática estava trazendo a turma.
3. No final da aula, observei uma aprendizagem significativa e colaborativa dos alunos e todas as expectativas foram atingidas.
4. Essa parte da proposta estava programada para apenas dois períodos porém foram necessários três.

Aula 05: 03 de setembro de 2010

(3 Períodos)

Unidade Didática 1.3 – Os números inteiros e os processos naturais e sociais.

- **Conteúdos de fatos e conceitos:**

A necessidade do conjunto dos inteiros e sua representação na reta. Operações nos números inteiros e representação na reta. A ordem entre os números inteiros.

- **Expectativas de aprendizagem**

Que o aluno seja capaz de:

1. admitir a deficiência dos naturais e a necessidade de construir um conjunto mais abrangente – O conjunto dos números inteiros.
2. reconhecer que os números inteiros são uma extensão dos números naturais que incluem os números inteiros negativos.
3. construir a reta numérica inteira utilizando régua e compasso.
4. identificar números opostos ou simétricos na reta como àqueles números que estão à mesma distância da origem na reta.
5. utilizar os conhecimentos adquiridos com os números naturais e expandir para calcular geometricamente a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão de números inteiros.
6. expandir a relação de ordem dos naturais para os números inteiros.

- **Orientações Didáticas**

1. Dividir a turma em grupos de três.
2. Construir com a turma a reta numérica inteira e nela identificar números opostos.

3. Mostrar o significado geométrico das quatro operações com números inteiros na reta numérica, levando em consideração os conhecimentos acumulados pelos alunos para as mesmas operações com números naturais na reta.
4. Solicitar aos grupos, alunos voluntários para resolver no quadro alguns exemplos que possam ilustrar as operações com números inteiros na reta.

- **Habilidades e Competências:**

1. Compreender o significado de número negativo e sua representação.
2. Comparar dois números inteiros utilizando corretamente os símbolos: >, <, =.
3. Ordenar corretamente uma sequência de números inteiros.
4. Compreender módulo ou valor absoluto de um número inteiro relativo como a distância do referido número até o zero.
5. Resolver corretamente as operações com números inteiros na reta numérica.

- **Avaliação**

1. Estabelecer conexões entre os conhecimentos já construídos em relação aos que precisa aprender.
2. Resolução de lista de atividades na qual o aluno utilizará a construção geométrica das operações estudadas.

- **Observações do professor**

1. Os alunos corresponderam muito bem às minhas expectativas; identificam os inteiros como um instrumento para contar e medir.
2. Os alunos mostraram-se motivados do início ao fim do encontro com a ideia de ampliar os conhecimentos adquiridos nas operações com números naturais na reta para operações com os inteiros na reta.
3. Os alunos corresponderam muito bem às minhas expectativas; identificando os inteiros como um instrumento para contar.

4. Muitos alunos se dispuseram a fazer a representação das operações estudadas com os inteiros na reta no quadro.
5. Mais uma vez foi observada a aprendizagem colaborativa entre os membros dos grupos.
6. Os alunos descobrem o prazer pela aprendizagem em matemática.
7. Relato de alguns alunos na aula nos chamou atenção:
    - ✓ “se o professor construísse os conteúdos com a turma, matemática não era muito difícil”;
    - ✓ “é importante saber essa construção porque estudei números inteiros na sexta série de forma muito complicada e fui para a prova final”;
    - ✓ “muitas vezes eu errava quando ia somar números inteiros porque eu fazia relação de sinal e dessa forma não precisa se preocupar com relação de sinal”;
    - ✓ “dava para aprender matemática mais se todas as aulas fossem assim”;
    - ✓ “os assuntos são mais demorados mais é bom aprender assim”;
    - ✓ “essa maneira de ensinar com régua é melhor do que fazendo as contas”;
    - ✓ “estou aprendendo mais assim porque não nunca fui bom em matemática”;
    - ✓ “essa forma de ensinar complica menos e eu estou aprendendo assim”.
8. Todas as expectativas foram atingidas durante esse encontro.
9. Essa parte da proposta foi programada e realizada em três aulas ou períodos.
10. Nas fotos abaixo se constata alunos resolvendo questões no quadro e na lista de exercícios.

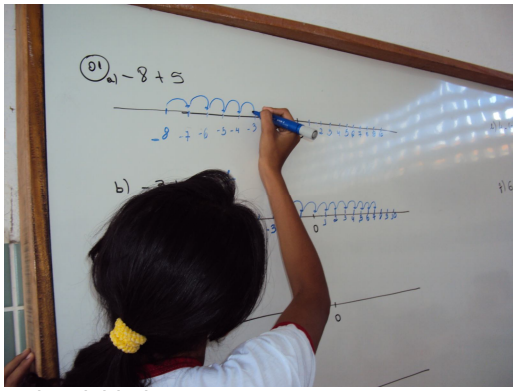


FIGURA 16: Resolução da lista de atividades
FONTE: Dados da pesquisa

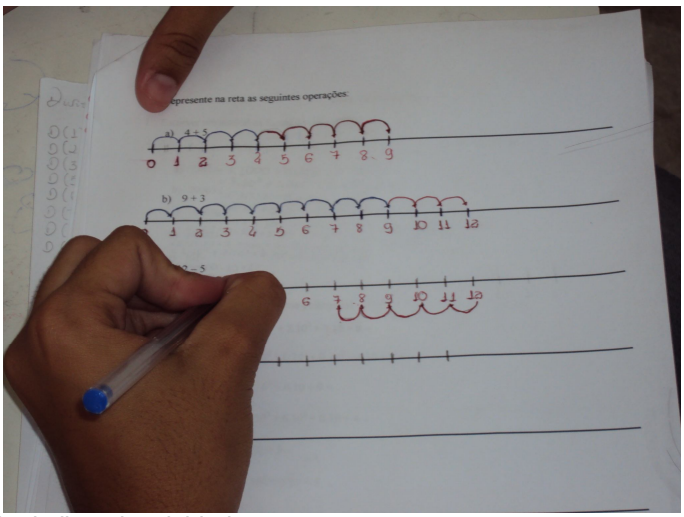


FIGURA 17: Resolução da lista de atividades
FONTE: Dados da pesquisa

Aula 06: 08 de setembro de 2010

(4 Períodos)

Unidade Didática 1.4 - O conjunto dos números racionais e o processo de medição.

- **Conteúdos de fatos e conceitos:**

A necessidade de criação dos diferentes conjuntos de numéricos. Conjunto dos racionais e as medições. Significados assumidos pela fração. A passagem da forma fracionária para a representação decimal. A representação polinomial de um número racional.

- **Expectativas de aprendizagem**

Que o aluno seja capaz de:

1. admitir a deficiência dos inteiros e a necessidade de construir um conjunto mais abrangente – O conjunto dos números racionais;
2. reconhecer que os números racionais surgiram da necessidade de representar partes de um inteiro;

3. identificar o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ como o conjunto formado por todas as frações da forma $\frac{n}{m}$, com m ≠ 0;
4. interpretar geometricamente os significados assumidos por uma fração;
5. provar a insuficiência geométrica dos racionais;
6. representar corretamente os números racionais através de sua expansão decimal;
7. escrever um número racional através de sua representação polinomial;
8. identificar dízimas periódicas, representá-las por frações e determinar sua geratriz.

- **Orientações Didáticas**

1. Dividir a turma em grupos de três.
2. Identificar corretamente um número racional e o seu significado;
3. Lançar a questão: como podemos representar quantidades não inteiras?
4. Utilizar situações problemas que levem ao estudo das frações e representar essas frações por meio da representação decimal.
5. Lançar as questões:
   - ✓ Como operar com frações?
   - ✓ Como representar uma fração geometricamente?
   - ✓ Como comparamos duas frações?
6. Solicitar aos grupos, que elaborem três números com representação infinita periódica e troquem entre os demais grupos com a finalidade de encontrar a fração geratriz da dízima.

- **Habilidades e Competências:**

1. Compreender o significado de número racional e sua representação.
2. Demonstrar autonomia frente aos novos desafios.
3. Ser um multiplicador dos conhecimentos que buscou sobre os números racionais.

4. Reconhecer uma dízima periódica como uma representação de um número racional.
5. Recuperar a fração gerada por um número racional com representação decimal finita ou infinita periódica e generalizar esse processo através na lista de atividades.
6. Valorizar a troca de ideias entre os grupos como forma de aprendizagem.
7. Desenvolver a capacidade de investigação na busca dos resultados.
8. Compreender que número racional tem expansão decimal finita ou infinita periódica.

- **Avaliação**

1. Estabelecer conexões entre os conhecimentos já construídos em relação aos que precisam aprender.
2. Resolução de lista de atividades.

- **Observações do professor**

1. Os alunos tiveram um pouco de dificuldade na representação decimal dos racionais devido ao algoritmo da divisão.
2. A colaboração entre os alunos do mesmo grupo e entre grupos foi à forma mais eficaz de superar as dificuldades com o algoritmo da divisão.
3. Muitos alunos tornaram-se referência dentro e fora de seu grupo se dispondo a ajudar os colegas para uma compreensão do conteúdo.
4. As aulas foram marcadas por uma aprendizagem colaborativa entre os membros dos grupos.
5. Relato de alguns alunos durante as aulas:
    - ✓ “hoje eu tive um pouco de dificuldade porque não sou muito bom de contas, mas se os professores deixassem os colegas ajudar a gente aprendia mais”;
    - ✓ “eu nunca estudei essa maneira de escrever a fração de uma dízima”;

- ✓ “tem alguma fórmula para escrever a fração correspondente a dízima periódica”?;
- ✓ “essa aula de hoje foi cansativa porque teve muitas contas”;
- ✓ “essas aulas são boas porque estamos fazendo revisão de assuntos que eu já estava esquecido e cai no vestibular”;
- ✓ “nós vamos estudar a reta dos racionais?”;

11. As expectativas foram atingidas durante esse encontro.
12. Essa parte da proposta foi programada para três aulas, mas foi realizada em quatro aulas ou períodos.

Aula 07: 15 de setembro de 2010
(4 Períodos)

Unidade Didática 1.5 – Os números irracionais.

- **Conteúdos de fatos e conceitos:**

Exemplo de números irracionais. A Representação de $\sqrt{2}$ na forma decimal. A representação dos números irracionais. O problema da medição de segmentos de reta.

- **Expectativas de aprendizagem**

Que o aluno seja capaz de:

1. admitir que existem números que têm representação decimal infinita não periódica e que esses números são chamados de irracionais;
2. reconhecer uma dízima não periódica como uma representação de um número irracional;
3. compreender corretamente a representação decimal de $\sqrt{2}$ utilizando o processo de ampliação de segmentos;
4. entender a prova de que $\sqrt{2}$ não é racional;
5. compreender o significado geométrico de $\sqrt{2}$;

6. calcular $\sqrt{2}$ através de intervalos encaixantes, utilizando como motivação a ampliação de segmentos;
7. calcular corretamente o valor de $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ através de intervalos encaixantes;
8. comparar números irracionais;
9. constatar que os irracionais também servem para medir;
10. utilizar números racionais para obter aproximações de números irracionais;
11. reconhecer que um número irracional tem representação decimal infinita não periódica.

- **Orientações Didáticas**

1. Dividir a turma em grupos de três.
2. Identificar corretamente um número irracional e o seu significado;
3. Utilizar situações problemas que levem a representações de números irracionais.
4. Utilizar o método de intervalos encaixantes para encontrar a representação aproximada de um número racional.

- **Habilidades e Competências:**

1. Compreender o significado de número irracional e sua representação.
2. Desenvolver a autoconfiança acreditando, sempre, na capacidade de aprender novos conceitos.
3. Ser um multiplicador dos conhecimentos que buscou sobre os números irracionais.
4. Valorizar a troca de ideias entre os grupos como forma de aprendizagem.
5. Perceber que o que aprendeu tem significado na sua vida.

- **Avaliação**

1. Estabelecer conexões entre os conhecimentos já construídos em relação aos que precisa aprender.
2. Resolução de lista de atividades.

- **Observações do professor**

1. Os alunos sentiram-se motivados com o método dos intervalos encaixantes para calcular a raiz quadrada de números que não são quadrados perfeitos.
2. A socialização do conhecimento através da troca de ideias entre os alunos e os grupos foi um sucesso.
3. A troca de ideias entre os grupos ajuda aos alunos atingirem a zona de desenvolvimento proximal.
4. Hoje em cada grupo, existe pelo menos um aluno monitor, que foi criado através do conhecimento construído durante a realização da nossa proposta.
5. Muitos alunos desenvolveram o gosto pela matemática.
6. Relato de alguns alunos durante as aulas:
   - ✓ “as aulas são boas, mas cansativas”;
   - ✓ “essas irracionais não é tão difícil como sugere o nome”;
   - ✓ “utilizar a ampliação ajuda a gente perceber que existe infinitos números entre dois números irracionais e racionais”;
   - ✓ “esse método de ampliar e dar zoom facilita bastante as contas”
   - ✓ “eu gostei desse método do zoom. Nunca tinha percebido esses infinitos números antes”;
   - ✓ “quer dizer que entre dois números existem infinitos números?”
7. As expectativas foram atingidas durante esse encontro.
8. Essa parte da proposta foi programada para três aulas, mas foi realizada em quatro aulas ou períodos.

Aula 08: 28 de setembro de 2010

(4 Períodos)

Unidade Didática 1.6 – Os números reais

- **Conteúdos de fatos e conceitos:**

A construção do conjunto dos reais. A representação dos números reais na reta – O *continuum* real.

- **Expectativas de aprendizagem**

Que o aluno seja capaz de:

1. reconhecer a ampliação dos conjuntos numéricos;
2. identificar, representar e comparar números naturais, números inteiros, números racionais e números reais;
3. calcular e representar na reta numérica a raiz quadrada de um número real não negativo;
4. dividir um segmento em partes iguais e representar os números reais na reta real;
5. efetuar operações com números reais;
6. compreender, identificar e reconhecer π (pi) como um número irracional especial.

- **Orientações Didáticas**

1. Dividir a turma em grupos de três.
2. Utilizar a ideia de divisão de um segmento em partes iguais para representar os números racionais na reta real.
3. Representar os números reais na reta.
4. Representar um número racional entre dois racionais.
5. Representar um número irracional entre dois racionais.

- **Habilidades e Competências:**

1. Ter a iniciativa e motivação para buscar novos conhecimentos.
2. Desenvolver a autoconfiança acreditando, sempre, na capacidade de aprender novos conceitos.
3. Ser um multiplicador dos conhecimentos que buscou sobre os números reais.
4. Valorizar a troca de ideias entre os grupos como forma de aprendizagem.
5. Perceber que o que aprendeu tem significado na sua vida.

- **Avaliação**

1. Estabelecer conexões entre os conhecimentos já construídos em relação aos que precisa aprender.
2. Resolução de lista de atividades.

- **Observações do professor**

1. Os alunos sentiram-se motivados com a maneira usada para representar os números reais na reta, principalmente quando o número apresentado na forma de raiz.
2. O uso do recurso do zoom para compreender a densidade dos reais mostrou-se adequada.
3. A valorização da troca de ideias entre os alunos e os grupos facilitou a compreensão do conteúdo e aumentou a autonomia dos alunos na realização de atividades propostas.
4. Os alunos demonstraram prazer em aprender matemática.
5. Na realização das atividades em grupo muitos houve uma contribuição muito grande dos colegas mais experientes. Há indícios que estes contribuíram para levar os demais a realizarem avanços na zona de desenvolvimento proximal – ZDP segundo Vigostsky, aumentando sua capacidade de resolver problemas auxiliados por outras pessoas.
6. Relato de alguns alunos durante as aulas:

- ✓ “foi boa essa aula, pois aprendemos também um pouco de geometria e isso me ajudou bastante”;
- ✓ “Agora eu sei como representar esses irracionais na reta. É só lembrar do Teorema de Pitágoras”;
- ✓ “se o professor usasse mais a geometria nas aulas de matemática facilitava mais aprendizagem”;
- ✓ “Agora eu sei diferenciar os racionais dos irracionais e também representar na reta real, pois teve um ano que eu errei uma questão de representação na OBMEP”.

7. As expectativas foram atingidas durante esse encontro.
8. Essa parte da proposta foi programada e realizada em quatro aulas.

Passaremos agora a analisar os dados obtidos a partir da realização do pós-teste pelos alunos que cursaram a abordagem didática. Em seguida, faremos uma comparação com os resultados obtidos no pré-teste. O pós-teste consistiu no mesmo questionário aplicado no pré-teste quando efetuamos a avaliação diagnóstica.

4.4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DO PÓS-TESTE E COMPARAÇÃO COM O PRÉ-TESTE.

Quadro de desempenho obtido no pós-teste pelos 12(doze) alunos que realizaram a abordagem didática.

Questão	Item	Número de acertos	Número de alunos que não responderam
01	a	$\frac{11}{12}$	$\frac{0}{12}$
	b	$\frac{12}{12}$	$\frac{0}{12}$
	c	$\frac{9}{12}$	$\frac{0}{12}$
02	a	$\frac{12}{12}$	$\frac{0}{12}$
	b	$\frac{11}{12}$	$\frac{0}{12}$
	c	$\frac{10}{12}$	$\frac{0}{12}$

QUADRO 06: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Comentários:

- Na questão 01, constatou-se que os alunos superaram as dificuldades que tinha com o algoritmo da divisão com 92% de acertos, 100% de acertos e 75 % de acertos para os itens 1a, 1b, e 1c, respectivamente.
- Todos os alunos tiveram perseverança em resolver os problemas tentando resolver todos os itens da questão 01, pois 75% dos alunos acertaram os três itens dessa questão.
- Na questão 2 todos os da turma conseguiu recuperar a fração geratriz da dízima, pois o item 2b teve 92% de acertos e o item 2c 83% de acertos. Já para uma representação decimal finita (item 2a) todos os alunos conseguiram representar sua forma.
- 75% dos alunos acertaram toda a questão 02.

Questão	Item	Número de acertos	Número de alunos que não responderam
03	a	$\frac{12}{12}$	$\frac{0}{12}$
	b	$\frac{9}{12}$	$\frac{0}{12}$
	c	$\frac{12}{12}$	$\frac{0}{12}$
	d	$\frac{11}{12}$	$\frac{0}{12}$
	e	$\frac{8}{12}$	$\frac{0}{12}$
	f	$\frac{11}{12}$	$\frac{0}{12}$
	g	$\frac{12}{12}$	$\frac{0}{12}$
	h	$\frac{12}{12}$	$\frac{0}{12}$
	i	$\frac{12}{12}$	$\frac{0}{12}$
	j	$\frac{12}{12}$	$\frac{0}{12}$

QUADRO 07: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Comentários:

- 42% dos alunos, isto é $\frac{5}{12}$, acertaram toda a questão 03.
- 50% dos alunos garantiram os mesmos acertos nas questões.
- Na questão 03, comprova-se que os alunos construíram um subconstruto dos números reais.
- A proposta possibilitou o aluno a reconhecer um número real e suas diferentes formas de representação.

Questão	Número de acertos	Número de alunos que não responderam
04 e 05 (anotações relevantes)	$\frac{11}{12}$	$\frac{0}{12}$

QUADRO 08: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

As questões 04 e 05 foram agrupadas pelo fato de, neste nível, não apresentarem diferença. Isto possivelmente mostra que os alunos:

- ✓ Atingiram o objetivo proposto para a questão 5 a respeito da calculadora.
- ✓ Construíram uma abordagem concreta acerca dos números reais e suas formas de representação.

Comentários:

- Na questão 04, as respostas, foram:
  - ✓ Racional: representação decimal é finita e infinita periódica. Irracional: representação infinita e não tem período.
  - ✓ Irracional a representação é infinita não periódica. Racional é um número com representação decimal finita ou infinita periódica.
  - ✓ Irracionais são os que quando transformados em número decimal a representação é infinita e não tem período e se for finita ou infinita com período é racional;
  - ✓ Se a representação for infinita periódica ou finita é racional, caso contrário é irracional como $\sqrt{2}$, π e outros.
  - ✓ Se for uma raiz quadrada não exata ou o número pi é irracional. Racional tem a representação finita ou infinita desde que tenha período.
  - ✓ Racional é todo número finito ou infinito que tem período, , como as frações e os outros são irracionais como $\sqrt{3}, \sqrt{5}$, π porque existe infinitos desse tipo.

- ✓ Irracional os infinitos que não possuem período ou aperiódicos e racional são os finitos e infinitos que tem período.
- ✓ Se a representação for aperiódica é racional senão é racional.
- ✓ Racionais: as frações, os inteiros e os números decimal desde que seja finito ou infinito com período. Agora as raízes quadradas e pi são irracionais.
- ✓ Irracional são os números reais que não são racionais. E o resto eu acho que são os Racionais.
- ✓ Representação aperiódica – irracional. Representação finita ou infinita periódica – racional.
- ✓ Infinitos periódicos forma um número irracional ex: $\pi, 2\sqrt{6}$ e outros. Racional é finito e em período.

Questão	Item	Número de acertos	Número de alunos que não responderam
06 (anotações relevantes)	$1+\sqrt{6}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{0}{12}$
	$2\sqrt{6}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{0}{12}$

QUADRO 09: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Comentários:

- O total de acertos do item a chegou a 92%.
- Todos os alunos (100%) acertaram o item 6b.
- O mesmo grupo de alunos que acertou os dois itens da questão 06 chegou a 92%.
- Usaram como procedimento para localizar esses números na reta a representação decimal de $\sqrt{6}$ que tinha em uma questão anterior e utilizaram a ideia de representação dos irracionais através de aproximações dos racionais.
- Nenhum aluno deixou de responder a questão 06.

Na questão 07, os alunos responderam que tanto pode ser racional como pode ser irracional. Alguns alunos usaram como justificativa o quadrado de lado 1 unidade de comprimento e concluíram que utilizando Pitágoras é possível provar que sua diagonal é um número irracional. Todos os alunos conseguiram responder a esse questionamento e apresentaram exemplos justificando sua resposta.

Todos os alunos afirmaram na questão 08 conhecer números que não são reais e deram como exemplos os números complexos.

Comparando os resultados obtidos nos questionários aplicados observamos que a realização da abordagem didática possibilitou aos alunos uma melhora significativa no rendimento (número de acertos das questões propostas) bem como na aprendizagem de conceitos e procedimentos entre os alunos do 3º ano do Ensino Médio acerca dos números reais.

O percentual de acertos aumentou consideravelmente em relação ao tabulamento pré-implementação: na questão 1ª passou de 40,6% para 92**%; 1b, de 28** % para 100% **e 1c, de 9,4**% para 75%;

Na questão 2, também houve um aumento muito significativo. Na questão 2ª, passou de 37,5% para 100%; 2b 12,5% para 92 % e 2c de 9,4% para 84%.

Na questão 03, o percentual de acertos aumentou significativamente em todos os itens conforme tabela abaixo:

Questão	Item	Acertos no pré teste (%)	Acertos no pós teste (%)
03	a	78	100
	b	59	75
	c	59	100
	d	47	92
	e	28	67
	f	28	92
	g	59	100
	h	47	100
	i	41	100
	j	44	100

QUADRO 10: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Este mesmo fato também ocorreu nas questões 04 e 05 que o percentual de acertos aumentou consideravelmente de 16% para 92%; na questão 6ª, de 12,5% para 92% e na questão 6b de 12,50% pra 100%.

Nas questões 06 passou no item 6a de 12,50% para 92% e no item 6b de 12,50% para 100%.

Esse aumento no percentual de acertos também foi observado nas questões 07 que passou de 6,2% para 100% e na questão 08 de 9,4% para 100%.

Observou-se também que todos os alunos que foram submetidos ao pós-teste tentaram responder todas as questões, indicando uma maior capacidade de enfrentar questões, bem como uma maior motivação dos alunos.

CONCLUSÃO

Neste trabalho elaboramos uma proposta de construção dos números reais para o Ensino Médio que julgamos seguir mais próximo dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Usamos a avaliação diagnóstica na concepção de evidenciar indicadores de conhecimentos adquiridos ao longo do processo de ensino aprendizagem e de identificar algumas dificuldades com relação a conceitos e operações com números reais.

Conforme mostra o resultado da avaliação diagnóstica realizada por meio de um pré-teste aplicado na turma de 3º ano do Ensino Médio de uma Escola Pública Estadual de São Mamede, as principais dificuldades dos alunos são reconhecer as diferentes representações e significados; relacionar conjuntos numéricos; localizar na reta numérica um número real.

Após identificadas as dificuldades que os alunos apresentavam com os números reais, fizemos um planejamento para implementação da proposta tentando diminuir nossas inquietações como professor de matemática, quando falávamos sobre os números reais em nossas aulas. Ao desenvolver este estudo, obtivemos, sim, uma melhora significativa, comprovada não somente por meio da avaliação diagnóstica e do pós-teste, como também pelo grau de participação e pelas observações dos alunos emitidas durante a realização das atividades previstas no módulo didático.

Vamos relatar algumas situações que enriqueceram nossa proposta durante sua implementação:

1. o primeiro encontro com os alunos foi muito importante pois firmamos um contrato didático e isso contribuiu para uma participação satisfatória dos alunos em todos os encontros e 100% de frequência;
2. relatos dos próprios alunos durante as aulas, demonstrando o prazer em ser o sujeito na construção do seu conhecimento;
3. a aprendizagem colaborativa, onde os alunos participavam ativamente discutindo em grupo e intermediando os processos de aprendizagem dos colegas;

4. o desenvolvimento da autonomia e da perseverança dos alunos em algumas demonstrações realizadas por eles nas listas de atividades;
5. a valorização dos conhecimentos prévios trazidos pelos alunos nas séries finais do Ensino Fundamental, onde ao buscarmos relembrar conhecimentos escolares anteriores, permitiu-se que os alunos articulassem conhecimentos sobre números antes dispersos.
6. Na realização das atividades em grupo houve uma contribuição muito grande dos colegas mais experientes. Há indícios que estes contribuíram para levar os demais a realizarem avanços na zona de desenvolvimento proximal – ZDP segundo Vigostsky, aumentando sua capacidade de resolver problemas auxiliados por outras pessoas.

O tempo foi uma variável importante, pois em algumas situações utilizamos mais tempo que o planejado para realizações de algumas atividades.

Esperamos com este trabalho despertar outros professores de Matemática da Escola Básica para a problemática existente sobre o ensino de números, dando um passo à frente na direção do cumprimento dos objetivos listados nos Parâmetros Curriculares Nacionais no que diz respeito a este assunto.

Desta forma esperamos com o material aqui desenvolvido, contribuir com conhecimentos sobre a construção dos reais que ajudem nosso aluno a pensar sobre os números reais, compreendendo sua riqueza e na visão dos processos e fenômenos envolvendo contagem, medida, convergência e continuidade (aspectos formativos), suas aplicações na compreensão da realidade que nos rodeia (aspectos funcionais) e o desenvolvimento de conhecimentos significativos (que tenham um sentido associado aos conhecimentos trazidos pelos alunos).

Este trabalho também nos levou a ver a sala de aula como um laboratório, onde ao mesmo tempo em que ensinamos, também aprendemos a ver os nossos alunos como seres que pensam e elaboram hipóteses, que depois geram formas de pensar e de agir baseados na Matemática, e comuns a todos que participam do desenvolvimento desta área do conhecimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

ÁVILA, G. **Cálculo de funções de uma variável real***.* 6 ed. São Paulo: LTC, 1994.

AZEVEDO, C.J; NOHARA, J.J – **Monografia no Curso de Administração**: Guia completo de conteúdo e forma. Editora: Atlas, São Paulo, 2004.

BARBOSA, M. A. **O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de cálculo diferencial e integral**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba.

BIANCHINI, E. **Componente Curricular Matemática**. 6º Ano. 6. Ed, São Paulo, Editora: Moderna, 2006.

BIANCHINI, E. **Componente Curricular Matemática**. 7º Ano. 6. Ed, São Paulo, Editora: Moderna, 2006.

BIANCHINI, E. **Componente Curricular Matemática**. 8º Ano. 6. Ed, São Paulo, Editora: Moderna, 2006.

BIANCHINI, E. **Componente Curricular Matemática**. 9º Ano. 6. Ed, São Paulo, Editora: Moderna, 2006.

BOFF, D. Sl. **A construção dos números reais na escola básica**. 2006. 254f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

BONJORNO, J.; BONJORNO, R. e AYRTON, O. **Matemática**: Fazendo a Diferença. 6º Ano. 1. Ed. São Paulo, Editora: FTD, 2006.

BONJORNO, J.; BONJORNO, R. e AYRTON, O. **Matemática**: Fazendo a Diferença. 7º Ano. 1. Ed. São Paulo, Editora: FTD, 2006.

BONJORNO, J.; BONJORNO, R. e AYRTON, O. **Matemática**: Fazendo a Diferença. 8º Ano. 1. Ed. São Paulo, Editora: FTD, 2006.

BONJORNO, J.; BONJORNO, R. e AYRTON, O. **Matemática**: Fazendo a Diferença. 9º Ano. 1. Ed. São Paulo, Editora: FTD, 2006.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgar Bücher, 2003. 488p.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: 2000.

BURGROV, Y. S.; NIKOLSKI, S. M. **Matemáticas Superiores. Cálculo Diferencial e Integral**. Editorial Mir Moscú. 1984. 408p.

COBIANCHI, A. S. **Estudos de Continuidade e Números Reais***:* Matemática, Descobertas e Justificativas de Professores, Tese de Doutorado em Educação Matemática, Departamento de Matemática, UNESP – Rio Claro, 2001.

Dieudonné, J. Some mathematical objects, like the Peano curve, are totally non intuitive..., extravagant, 1975

DOMINGUES, H. H.; Iezzi, G. **Álgebra Moderna***.* 4ª ed. São Paulo: Atual, 2003.

ENTWISTLE, N. J. *La* ***Comprension del aprendizagem em el aula****.* Madrid: Paidos/MEC, 1988.

FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C.; SOARES, E. F. **Algumas Concepções de Licenciandos em Matemática sobre o Sistema dos Números Reais.** Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/Textos22/moreira.pdf, acessado em 08/09/2010.

FISHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. **The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. Educational Studies in Mathematics**, vol. 29,pp. 29-44,1995.

FISHBEIN, E.; TIROSH, D.; HESS, P. **The Intuition of Infinity. Educational Studies in Mathematics**, vol. 10, pp. 3-40,1979.

IGLIORI, S.; Silva, B. **Concepções dos alunos sobre Números Reais**. In: LAUDARES, J. B. & LACHINI, J.(Org.) *Educação Matemática:* a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, p. 39-67, 2001.

LEVIATAN, T. **Introducing real numbers: When and how. Proceedings of ICME10, Copenhagen**, 1-13. (2004). Disponível em: www.icme-organisers. dk/tsg12/ papers/leviatan-tsg12.pdf

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Vol. 01.12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

MACIEL, A. B.; LIMA, O. A. **Introdução à Análise Real**. Campina Grande: Editora EDUEP, 2005. 277p.

MALTA, I. **Linguagem, leitura e matemática in CURY, H. N. Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p.41-62.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática na licenciatura e três questões sobre os números**. *In*: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004. **Anais.** Recife, 2004. FURB 1 CD-ROM.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. A formação Matemática do professor: Licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte Autêntica, 2005.

OLIVEIRA, M. K. Vygotsky – **Aprendizado e desenvolvimento um processo sócio-histórico.** Editora: Scipione, São Paulo,1993 e 2008.

OLIVEIRA. S. L. de. **Tratado de Metodologia Científica: projetos de pesquisas, TGI, TCC monografias, dissertações e teses.** São Paulo : Pioneira Thompson Learning, 2002.

PALIS, G. L. R. Proposta de um curso de introdução ao cálculo. fundamentos didático-pedagógicos. A Utilização de tecnologia computacional com ferramenta didática. Rio de Janeiro, Relatório Interno de Pesquisa, n. 01. PUC-Rio, 1994.

PASQUINI, R. C. G.; BARONI, R. S. L. Estudo sobre um tratamento para os números reais. 2004. Disponível em: www.ufrrj.br/emanped/.../algumas_concepcoes_licenciandos.pdf, acessado em 08/09/2009.

PIAGET, J.; CHOMSKY, N. **Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem**. Lisboa: Edições 70, 1987.

PINTO, M.; TALL, D. Student Teachers' Conceptions of the Rational Numbers. Proceedings of PME XX, Valencia, IV, pp139-146, 1996.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS. Pró – Reitoria de Graduação. Sistema de Bibliotecas. **Padrão PUC Minas de normalização**: normas da ABNT para apresentação de trabalhos científicos, teses, dissertações e monografias. Belo Horizonte, 2010. Disponível em:<http://www.pucminas.br/bibliotecas>. Acesso em: 15 de set. 2010.

REZENDE, W. M. *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. Anais do II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 29 a 1º de novembro de 2003. Santos, SP. (CD-ROM)

RÊGO, R. M. **Uma abordagem do ensino de Cálculo utilizando infinitésimos**. 2002. 313f. Tese de doutorado – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN.

ROBINET, J. **Les Réels: quels modèles en ont les élèves?** Educational Studies in Mathematics, vol. 17, pp. 359-386, 1986.

SANTOS, J. P de. O. **Introdução à teoria dos Números**. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

SKEMP, R. **Relational and instrumental understanding**. USA: *Arithmetic Teacher,* n^0 26, 1978.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. **Algumas Concepções de licenciandos em Matemática sobre o sistema dos números reais**. *In*: XXII Reunião Anual da ANPED, 1999, Caxambu. **Anais**. Caxambu: Atas da XXII Reunião Anual da ANPED, 1999. 1 CD-ROM.

SOARES, E. F. E.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números Reais: concepção dos licenciandos e formação Matemática na licenciatura. Revista Zetetiké, VOL. 7. No. 12. Julho/Dezembro de 1999.

Tall, D, Juan Pablo Mejia Ramos (2004). Reflecting on Post-Calculus-Reform. Plenary for Topic Group 12: Calculus, International Congress of Mathematics Education, Copenhagen, Denmark.

TALL, D. Cognitive Difficulties in Learning Analysis - Mathematics Educational Research Centre, Warwick University, England, 1994.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, vol. 12, pp151-169, 1981.

TALL, D; SCHWARZENBERGER, R. L. E. Conflicts in the learning of real numbers and limits. Mathematics Teaching, vol. 82, pp. 44-49, 1978.

VARBERG, D.; VARBERG, T. D. **Precalculus:** a graphing approach.

VYGOTSKY, L. S. – **Pensamento e Linguagem**. (trad. Jefferson Luiz Camargo). São Paulo; Martins Fortes, 1993.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 6ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

M. POTÁPOV.; V. ALEXÁNDROV.; P. PASICHENKO. Álgebra y análisis de funciones elementales. Editorial Mir Moscú. 1986. 592p.

APÊNDICE

1. Tabulação dos resultados dos questionários aplicados em turmas de 3º ano do Ensino Médio

Questão → Aluno ↓	1a	1b	1c	Nº de acertos	2a	2b	2c	Nº de acertos
01	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	C	C	$\frac{3}{3}$
02	C	E	E	$\frac{1}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
03	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	C	E	$\frac{2}{3}$
04	E	E	-	$\frac{0}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
05	-	E	E	$\frac{0}{3}$	-	C	C	$\frac{2}{3}$
06	E	-	E	$\frac{0}{3}$	C	E	-	$\frac{1}{3}$
07	E	-	E	$\frac{0}{3}$	E	-	-	$\frac{0}{3}$
08	C	E	E	$\frac{1}{3}$	-	-	E	$\frac{0}{3}$
09	E	C	E	$\frac{1}{3}$	-	E	-	$\frac{0}{3}$
10	C	E	E	$\frac{1}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
11	E	-	-	$\frac{0}{3}$	-	-	E	$\frac{0}{3}$
12	E	E	E	$\frac{0}{3}$	C	E	-	$\frac{1}{3}$
13	C	E	E	$\frac{1}{3}$	C	E	-	$\frac{1}{3}$
14	C	E	E	$\frac{1}{3}$	-	E	-	$\frac{0}{3}$
15	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	C	E	$\frac{2}{3}$
16	C	E	-	$\frac{1}{3}$	C	E	-	$\frac{1}{3}$

17	E	C	E	$\frac{1}{3}$	-	E	-	$\frac{0}{3}$
18	C	C	E	$\frac{2}{3}$	-	E	E	$\frac{0}{3}$
19	E	E	-	$\frac{0}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
20	E	E	-	$\frac{0}{3}$	E	E	-	$\frac{0}{3}$
21	E	E	E	$\frac{0}{3}$	C	E	-	$\frac{1}{3}$
22	E	C	E	$\frac{1}{3}$	-	-	E	$\frac{0}{3}$
23	E	C	E	$\frac{1}{3}$	E	C	-	$\frac{1}{3}$
24	C	E	E	$\frac{1}{3}$	-	-	E	$\frac{0}{3}$
25	-	E	E	$\frac{0}{3}$	C	E	-	$\frac{1}{3}$
26	C	-	E	$\frac{1}{3}$	-	-	E	$\frac{0}{3}$
27	E	E	-	$\frac{0}{3}$	E	E	E	$\frac{0}{3}$
28	-	E	E	$\frac{0}{3}$	-	E	E	$\frac{0}{3}$
29	E	-	E	$\frac{0}{3}$	E	E	E	$\frac{0}{3}$
30	E	C	E	$\frac{1}{3}$	-	E	E	$\frac{0}{3}$
31	E	C	E	$\frac{1}{3}$	E	E	C	$\frac{1}{3}$
32	C	E	-	$\frac{1}{3}$	-	E	E	$\frac{0}{3}$
Número de acertos na questão	$\frac{13}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{3}{32}$		$\frac{12}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{3}{32}$	
Número de alunos que não Responderam	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{32}$		$\frac{12}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{16}{32}$	

QUADRO 11: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Questão → Aluno ↓	3a	3b	3c	3d	3e	3f	3g	3h	3i	3j	Nº de acertos
01	C	E	C	C	C	C	C	C	C	C	$\frac{9}{10}$
02	C	C	E	C	E	C	C	C	C	C	$\frac{8}{10}$
03	C	E	C	C	C	C	C	C	C	C	$\frac{9}{10}$
04	C	E	C	-	-	-	-	-	E	-	$\frac{2}{10}$
05	-	C	C	E	C	E	C	E	E	-	$\frac{4}{10}$
06	C	E	E	E	-	-	-	E	E	-	$\frac{1}{10}$
07	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$\frac{9}{10}$
08	-	C	E	C	C	E	C	C	C	C	$\frac{7}{10}$
09	-	C	E	E	-	-	-	E	E	E	$\frac{1}{10}$
10	C	C	E	C	E	E	C	C	C	C	$\frac{7}{10}$
11	C	C	C	E	E	E	C	E	E	E	$\frac{4}{10}$
12	C	C	E	C	C	C	C	C	C	C	$\frac{9}{10}$
13	C	E	C	E	E	E	-	E	E	E	$\frac{2}{10}$
14	C	E	C	E	-	E	E	E	E	E	$\frac{2}{10}$
15	C	C	C	-	C	C	C	C	C	C	$\frac{9}{10}$
16	C	C	C	E	C	C	C	C	C	C	$\frac{9}{10}$
17	C	C	C	-	E	E	E	E	E	-	$\frac{3}{10}$
18	C	C	E	E	E	-	E	E	-	-	$\frac{2}{10}$
19	C	C	E	-	E	-	-	-	-	-	$\frac{2}{10}$

20	E	C	-	E	-	-	-	-	-	-	$\frac{1}{10}$
21	E	E	E	C	E	-	-	-	-	-	$\frac{1}{10}$
22	C	E	C	E	E	E	E	-	-	E	$\frac{2}{10}$
23	E	C	-	E	E	-	-	-	-	E	$\frac{1}{10}$
24	E	C	C	-	E	E	E	-	-	E	$\frac{2}{10}$
25	C	C	C	E	C	C	C	C	C	C	$\frac{9}{10}$
26	C	E	C	C	E	E	C	C	C	C	$\frac{7}{10}$
27	C	E	C	C	E	E	C	C	C	E	$\frac{6}{10}$
28	C	-	C	C	E	E	C	C	E	E	$\frac{5}{10}$
29	C	-	E	C	E	E	C	-	-	E	$\frac{3}{10}$
30	C	C	-	C	E	E	C	C	E	C	$\frac{6}{10}$
31	C	-	C	C	E	E	C	C	E	C	$\frac{6}{10}$
32	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C	$\frac{9}{10}$
Número de acertos na questão	$\frac{25}{32}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{14}{32}$	
Número de alunos que não responderam	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{8}{32}$	

QUADRO 12: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Questão → Aluno ↓	**04 e 05**
01	Racional tem expansão decimal finita e infinita periódica;
02	Irracionais são dízimas;
03	Irracionais são decimais infinitos e que não tem período;
04	-
05	-
06	Não sei o que é racional nem irracional;
07	-
08	-
09	Irracional são os mais difíceis de representar na reta e os racionais são os mais fáceis de representar na reta;
10	-
11	-
12	-
13	Fazendo as contas;
14	-
15	Racionais são finitos e infinitos periódicos;
16	-
17	-
18	-
19	Racional são os números naturais, inteiros e as frações;
20	-
21	Racionais são os números decimais;
22	-
23	Os números decimais são racionais;
24	Racionais são os que têm fim;
25	-
26	Não sei o que é racional nem irracional;
27	-
28	Irracional não existe raiz;
29	-
30	-
31	-
32	Racional tem representação decimal finita e infinita periódica e irracional infinita não periódica;
Número de acertos na questão	$\frac{5}{32}$
Número de alunos que não responderam	$\frac{18}{32}$

QUADRO 13: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

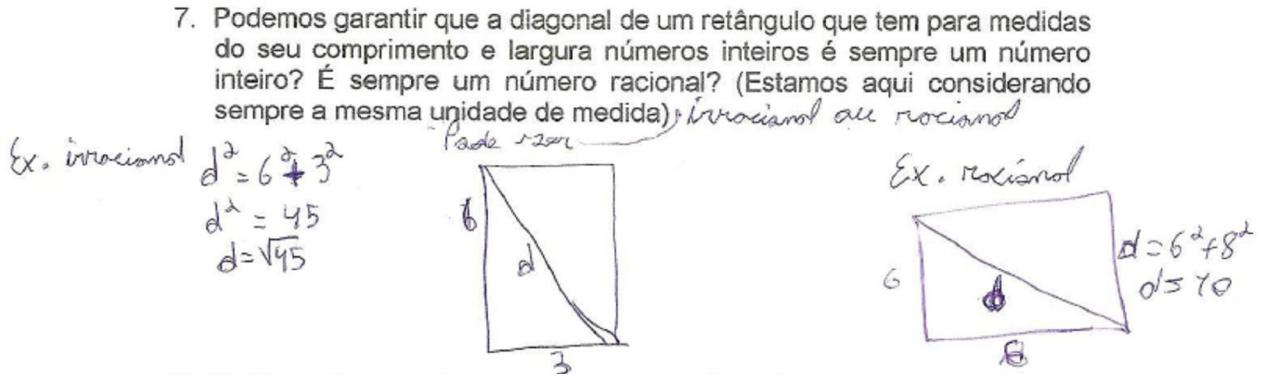
Questão → Aluno ↓	06 $1+\sqrt{6}$	06 $2\sqrt{6}$
01	C	C
02	C	C
03	E	-
04	-	-
05	E	E
06	-	-
07	-	-
08	E	E
09	-	-
10	-	-
11	-	-
12	-	-
13	-	-
14	-	-
15	C	C
16	-	-
17	-	-
18	E	-
19	-	-
20	E	-
21	-	-
22	-	-
23	-	-
24	-	-
25	-	-
26	E	E
27	-	-
28	E	E
29	-	-
30	E	E
31	-	-
32	C	C
Número de acertos na questão	$\frac{4}{32}$	$\frac{20}{32}$
Número de alunos que não responderam	$\frac{4}{32}$	$\frac{23}{32}$

QUADRO 14: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Questão 7

Apenas os alunos de números 01 e 03 responderam a questão 07.

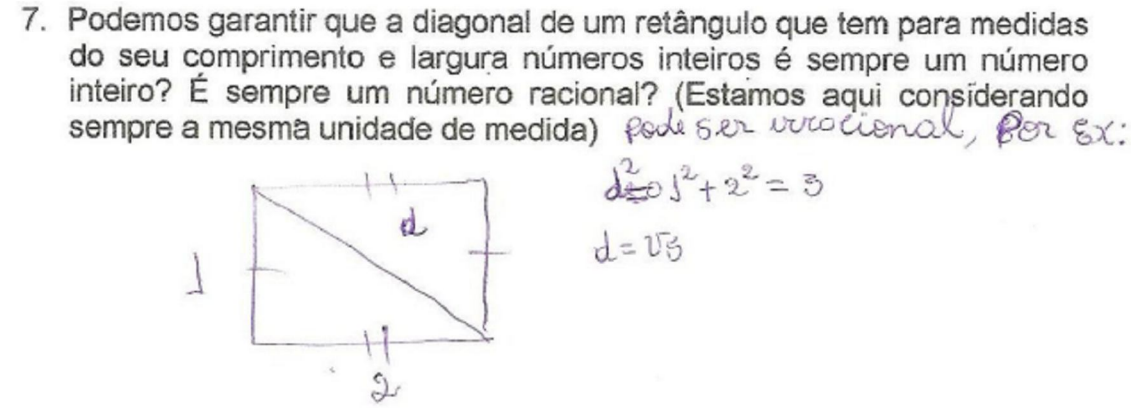
- **Resposta do aluno nº 01**


7. Podemos garantir que a diagonal de um retângulo que tem para medidas do seu comprimento e largura números inteiros é sempre um número inteiro? É sempre um número racional? (Estamos aqui considerando sempre a mesma unidade de medida) Pode ser irracional ou racional

Ex. irracional $d^2 = 6^2 + 3^2$
$d^2 = 45$
$d = \sqrt{45}$

Ex. racional
$d = 6^2 + 8^2$
$d = 10$

- **Resposta do aluno nº 03**

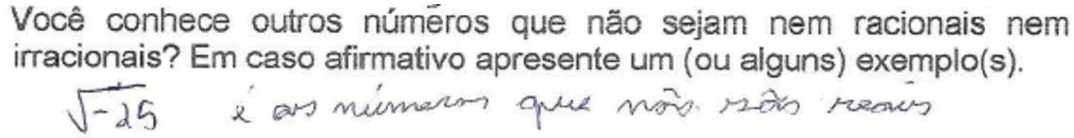

7. Podemos garantir que a diagonal de um retângulo que tem para medidas do seu comprimento e largura números inteiros é sempre um número inteiro? É sempre um número racional? (Estamos aqui considerando sempre a mesma unidade de medida) Pode ser irracional, Por Ex:

$d^2 = 1^2 + 2^2 = 3$
$d = \sqrt{3}$

Questão 8

Apenas os alunos de números 01, 03 e 15 responderam a questão 08.

- **Resposta do aluno nº 01**


8. Você conhece outros números que não sejam nem racionais nem irracionais? Em caso afirmativo apresente um (ou alguns) exemplo(s).

$\sqrt{-25}$ é os números que não são reais

- **Resposta do aluno nº 03**

8. Você conhece outros números que não sejam nem racionais nem irracionais? Em caso afirmativo apresente um (ou alguns) exemplo(s).

$\sqrt{-4}$, $\sqrt{-50}$ e outros

- **Resposta do aluno nº 15**

Os números complexos. Ex: 1 + i e $\sqrt{-6}$.

2. Tabulação dos resultados do questionário de avaliação aplicado pós proposta em uma turma de 3º ano do Ensino Médio de uma Escola pública.

Questão → Aluno ↓	1ª	1b	1c	Nº de acertos	2a	2b	2c	Nº de acertos
01	C	C	E	$\frac{2}{3}$	C	C	C	$\frac{3}{3}$
02	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	C	E	$\frac{2}{3}$
03	E	C	E	$\frac{1}{3}$	C	C	C	$\frac{3}{3}$
04	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	C	C	$\frac{3}{3}$
05	C	C	E	$\frac{2}{3}$	C	E	C	$\frac{2}{3}$
06	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	C	C	$\frac{3}{3}$
07	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	C	C	$\frac{3}{3}$
08	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	C	C	$\frac{3}{3}$
09	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	C	E	$\frac{2}{3}$
10	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	C	C	$\frac{3}{3}$
11	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	C	C	$\frac{3}{3}$
12	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	C	C	$\frac{3}{3}$
Número de acertos na questão	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{9}{12}$		$\frac{12}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{10}{12}$	
Número de alunos que não Responderam	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$		$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	

QUADRO 15: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Questão→ Aluno ↓	**3a**	**3b**	**3c**	**3d**	**3e**	**3f**	**3g**	**3h**	**3i**	**3j**	**Nº de acertos**
01	C	E	C	C	C	C	C	C	C	C	$\frac{9}{10}$
02	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	$\frac{8}{10}$
03	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$\frac{9}{10}$
04	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$\frac{2}{10}$
05	C	E	C	C	C	C	C	C	C	C	$\frac{4}{10}$
06	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$\frac{1}{10}$
07	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	$\frac{9}{10}$
08	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	$\frac{7}{10}$
09	C	E	C	E	C	C	C	C	C	C	$\frac{1}{10}$
10	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	$\frac{7}{10}$
11	C	C	C	C	E	E	C	C	C	C	$\frac{4}{10}$
12	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	$\frac{9}{10}$
Número de acertos na questão	$\frac{12}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{12}{12}$	
Número de alunos que não responderam	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	

QUADRO 16: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Questão → Aluno ↓	04 e 05
01	Racional: representação decimal é finita e infinita periódica. Irracional: representação infinita e não tem período.
02	Irracional a representação é infinita não periódica. Racional é um número com representação decimal finita ou infinita periódica.
03	Irracionais são os que quando transformados em número decimal a representação é infinita e não tem período e se for finita ou infinita com período é racional;
04	Se a representação for infinita periódica ou finita é racional, caso contrário é irracional como $\sqrt{2}$, π e outros.
05	Se for uma raiz quadrada não exata ou o número pi é irracional. Racional tem a representação finita ou infinita desde que tenha período.
06	Racional é todo número finito ou infinito que tem período, , como as frações e os outros são irracionais como $\sqrt{3}, \sqrt{5}$, π porque existe infinitos desse tipo..
07	Irracional os infinitos que não possuem período ou aperiódicos e racional são os finitos e infinitos que tem período.
08	Se a representação for aperiódica é racional senão é racional.
09	Racionais: as frações, os inteiros e os números decimal desde que seja finito ou infinito com período. Agora as raízes quadradas e pi são irracionais.
10	Irracional são os números reais que não são racionais. E o resto eu acho que são os Racionais.
11	Representação aperiódica – irracional. Representação finita ou infinita periódica – racional.
12	Infinitos periódicos forma um número irracional ex: $\pi, 2\sqrt{6}$ e outros. Racional é finito e em período.
Número de acertos na questão	$\frac{11}{12}$
Número de alunos que não responderam	$\frac{0}{12}$

QUADRO 17: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Questão → Aluno ↓	06 $1+\sqrt{6}$	06 $2\sqrt{6}$
01	C	C
02	C	C
03	C	C
04	C	C
05	E	C
06	C	C
07	C	C
08	C	C
09	C	C
10	C	C
11	C	C
12	C	C
Número de acertos na questão	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{12}$
Número de alunos que não responderam	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$

QUADRO 15: Dados da pesquisa
FONTE: Produzido pelo autor

Corpo

Definição: Um corpo é um conjunto K, munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem a certas condições, chamadas os axiomas de corpo.

Sejam $x, y \in K$, então: $x + y \in K$ e, $x \,.\, y \in K$. Os axiomas de um corpo são os seguintes:

A. Axiomas da adição:

A1) Associatividade – quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A2) Comutatividade – quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x + y = y + x$.

A3) Elemento Neutro – existe $0 \in K$ tal que $x + 0 = x$, seja qual for $x \in K$. O elemento 0 chama-se zero.

A4) Simétrico – todo elemento $x \in K$ possui um simétrico $-x \in K$ tal que $x + (-x) = 0$.

M. Axiomas da Multiplicação:

M1) Associatividade – quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $(x \,.\, y).z = x.(y.z)$.

M2) Comutatividade – quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x \,.\, y = y.x$.

M3) Elemento Neutro – existe $1 \in K$ tal que $1 \neq 0$ e $x.1 = x$, qualquer que seja $x \in K$. O elemento 1 chama-se um.

M4) Inverso multiplicativo – todo $x \neq 0$ em K possui um inverso x^{-1} tal que $x.x^{-1} = 1$.

Por fim, as propriedades de adição e multiplicação num corpo K acham-se relacionadas por um axioma, com o qual fica completa a definição de corpo.

D1) Axioma da distributividade. Dados $x, y, z \in K$, tem –se: $x.(y + z) = xy + xz$.