UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

CONSTRUINDO ERGONOMIAS COGNITIVAS PARA O ENSINO DA DINÂMICA

LEONARDO DIEGO LINS

Campina Grande – Paraíba

Outubro de 2010

LEONARDO DIEGO LINS

CONSTRUINDO ERGONOMIAS COGNITIVAS PARA O ENSINO DA DINÂMICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências com habilitação em Física.

Orientador: Dr. Eládio José de Góes Brennand

Leonardo Diego Lins

Campina Grande – Paraíba
Outubro de 2010

FICHA CATALOGRAFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

L759c Lins, Leonardo Diego.

Construindo ergonomias cognitivas para o ensino de Física [manuscrito] / Leonardo Diego Lins. – 2010.

69 f. : il.

Digitado

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, 2010.

"Orientacão: Prof. Dr. Eládio José de Góes Brennand, Departamento de Física".

1. Ensino de Física. 2. Aprendizagem. 3. Álgebra de Clifford. I. Título.

22. ed. CDD 372.35

CONSTRUINDO ERGONOMIAS COGNITIVAS PARA O ENSINO DA DINÂMICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências com habilitação em Física.

Aprovada em 14/10/2010.

____

Prof. Dr. Eládio José de Góes Brennand – Orientador – UEPB

Morgana Ligia de Farias Freire

____

Prof. Drª. Morgana Ligia de Farias Freire – UEPB (Examinadora Interna)

____

Prof. Dr. Aercio Ferreira de Lima – UFCG (Examinadora Externa)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradecer a todos que me ajudaram e apoiaram ao longo de toda essa trajetória. Ratifico a todos que colaboraram que devo a vocês a realização de um sonho. Só sei que chegar até aqui não foi fácil, mas como diz a minha mãe “nada fácil agente dá valor”.

Agradeço a Deus por ter me guiado e por ter me dado forças que foi tão importante nos momentos finais da dissertação. A meus pais por confiar e acreditar em mim na realização desse grande sonho.

Agradeço a minha noiva Natanna pelo carinho, compreensão, por ter feito tantas coisas que deviam ser feitas por mim para que eu pudesse me dedicar ao curso e por ter me acompanhado sempre que possível nas minhas viagens para orientação.

Agradeço a meu orientador por me orientar e por ter dedicado tantas horas e finais de semana no desenvolvimento desta dissertação.

Por fim, aos professores Morgana Lígia, Eládio Brennand e o Professor Rômulo. Pois todos contribuíram para a minha formação.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

O papel desempenhado pelo ensino de física no avanço do conhecimento científico e tecnológico na nossa sociedade é de suma importância. No Brasil esse ensino é reconhecido como deficiente tanto no que se refere à formação docente como discente traduzido na débil aprendizagem dos conceitos físicos e do aparato matemático. De maneira geral ele é caracterizado pelo excesso de atenção dada a exercícios repetitivos, problemas resolvidos, mecanicamente, pela utilização de uma sucessão de "fórmulas", muitas vezes decoradas de forma literal e arbitrária, em detrimento de uma análise mais profunda visando à compreensão dos fenômenos físicos envolvidos. Particularmente, gostaríamos de destacar que um grave problema tem sido o uso inadequado e desvinculado do ferramental matemático com relação à formulação e uso dos conceitos físicos. Isso gera uma dicotomia conceitual físico-matemática que prejudica a compreensão da profunda conexão entre estas duas ciências. Tendo em vista esses problemas de ordem matemática no processo de aprendizagem dos conceitos físicos, esta pesquisa pretende partir da crítica construtiva da linguagem matemática usada em física, introduzir uma abordagem metodológica físico-matemática conceitual utilizando os principais conceitos da dinâmica. Isto significa que ao apresentarmos um conceito matemático adequado a sua representação. Escolhemos a álgebra de Clifford como a linguagem matemática apropriada a esta abordagem físico-matemática conceitual. A operacionalização didática dos conteúdos é batizada pelo modelo cognitivista ausubeliano. Entendemos que o mesmo é o mais adaptável à concepção de material didático em ciências, pois, permite a exploração de forma hierárquica do universo cognitivo do aprendiz como também possibilita a manipulação deliberada deste universo para propiciar uma aprendizagem significativa.

Palavras chave: Aprendizagem Significativa, Álgebra de Clifford, Ensino de Física.

ABSTRACT

The role of physics education in the advancement of scientific and technological knowledge in our society is paramount. In Brazil, this teaching is recognized as inadequate both in regard to training students and professors translated into weak learning of physical concepts and mathematical apparatus. In general it is characterized by excessive attention given the repetitive exercises, problems solved, mechanically, by using a succession of "formulas" are often decorated literal and arbitrary, rather than a deeper analysis in order to understand the physical phenomena involved. Particularly, we wish to emphasize that a major problem has been the inappropriate use of mathematical tools and disconnected from the formulation and use of physical concepts. This creates a conceptual mathematical-physical dichotomy that undermines the understanding of the profound connection between these two sciences. Considering these problems of mathematical order in the learning process of physical concepts, this research aims to constructive criticism from the language used in mathematical physics, to introduce a methodological approach physical-mathematical concept using the core concepts of dynamics. This means that as we present a mathematical concept suitable for their representation. We chose the Clifford algebra as the mathematical language appropriate to this approach physical-mathematical concepts. The operationalization of the teaching content is baptized by the cognitive model Subsumption. We understand that it is more adaptable to the design of courseware in science, therefore, allows the exploration of a hierarchical cognitive universe of the learner but also allows for the deliberate manipulation of this universe to provide a meaningful learning.

Keywords: Meaningful Learning, Clifford Algebra**,** Physics Education.

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, a humanidade se depara com avanços científicos como nunca se viu na história, tais avanços são imprescindíveis na construção da sociedade. As exigências na formação dos indivíduos a cada dia relacionam-se estreitamente com a qualidade do acesso à informação e ao conhecimento. Neste contexto, a formação científica dos jovens se coloca como estratégia fundamental. Educar para a sociedade do conhecimento implica intensificar e explorar novas oportunidades bem como ampliar a dimensão estratégica das atividades em ciência e tecnologia. Neste contexto, o ensino de Física de qualidade coloca-se como uma ação estratégica. (DE GÓES BRENNAND, 2007).

É fato notório que precisamos aplicar, em nossas escolas, uma constante ruptura de paradigmas, pois no nosso sistema de ensino os problemas existentes expressam a saturação do paradigma educacional, que não atende mais ao momento em que vivemos. Novas ideias, recursos tecnológicos e valores estão emergindo pelos vários segmentos da sociedade. Na procura do novo, muitos docentes buscam novos meios para se atualizarem na sua jornada em sala de aula. Para muitos deles, falar de planejamento, de objetivos, de conteúdo e de avaliação em Física é considerado utopia educacional; atividades que só funcionam na teoria, mas não na prática. No caso específico da Física, aparentemente o status de "disciplina difícil" é aceitável pelo docente, pois explica os baixos resultados no rendimento escolar dos alunos, já previsível e que nada se pode fazer.

Tarefa difícil tem sido ensinar Física. As dificuldades intrínsecas somam-se aos problemas causados por uma visão distorcida da matéria, que se arrasta desde os primeiros momentos de contato. O problema mais relevante é o incessante desinteresse dos alunos, pois a Física, da forma que vem sendo tratada, só visando os vestibulares torna-se entediante, uma mesmice, um "*decoreba*" e, o pior, o aluno não vê aplicação do assunto em seu cotidiano.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio de Física (Brasil, 2006) procuram dar um novo sentido para o Ensino da Física, bem como construir uma visão voltada para a formação de um cidadão contemporâneo, atuante, solidário, crítico e reflexivo com instrumentos para compreender, intervir e participar de sua sociedade. Também mostram a necessidade de adaptação de novas metodologias para a melhoria da qualidade de ensino ofertado nas escolas. O surgimento dessas novas tecnologias, baseadas no uso do computador e softwares, associadas a aparatos pedagógicos fundamentados em paradigmas educacionais, tornam-se poderosos contribuintes ao processo ensino/aprendizagem, pois dinamizam e implementam os conteúdos dados em sala de aula.

O processo ensino-aprendizagem da Física, no Brasil, tem sido reconhecido em diversos estudos (BRASIL, 2003; FÁVERO, et al, 2000; MOREIRA, M. A. e GRECA, I. M 2003; SOUZA 2001; MATHEUS, et al, 2005) como deficiente tanto no que se refere à formação docente como ao discente, traduzido na débil aprendizagem dos conceitos físicos e do aparato matemático. Além disso, existem problemas estruturais, tais como os deficientes ou inexistentes laboratórios didáticos, e a possibilidade de formação continuada dos professores. Ensinar Física, em todos os níveis, tem sido, via de regra, uma tarefa difícil. Os alunos parecem aprender muito cedo a desenvolverem uma atitude negativa em relação a ela, estudando-a mais por uma imposição curricular do que por satisfação pessoal. (DE GÓES BRENNAND, 2007).

Em geral, o ensino de Física ainda caracteriza-se pelo excesso de atenção dada a exercícios repetitivos, problemas resolvidos mecanicamente, pela utilização de uma sucessão de “fórmulas”, muitas vezes decoradas de forma literal e arbitrária, em detrimento de uma análise mais profunda visando à compreensão dos fenômenos físicos envolvidos. Esta questão, amplamente discutida em diversos estudos (op. cit.), justifica e necessidade de refletir esta problemática na tentativa de buscar soluções que venham se traduzir em novas possibilidades de estratégias para o ensino de Física. (MOREIRA, 2001)

Particularmente, gostaríamos de destacar que um dos graves problemas no ensino de Física tem sido o uso de uma linguagem matemática fragmentada, inadequada e dissociada dos conceitos físicos que ela representa. A fragmentação deve-se ao uso de diversas estruturas matemáticas nos diferentes domínios da Física, dificultando a conexão e passagem de uma para a outra. Muitas delas não proporcionam uma fácil intuição das propriedades físicas dos sistemas tratados. Pesquisas neste domínio (HESTENES, 2003a; 2003b; 1999; 1971; 1968; 1966; HESTENES, & SOBCZYK,1999) apontam para um sistema matemático composto pela álgebra de Clifford e o cálculo infinitesimal desenvolvido sobre ela, denominado cálculo geométrico, e apresentam características para ser uma boa candidata a uma linguagem unificada para a Física. Esta estrutura matemática aplicada à Física proporciona uma fácil exploração intuitiva das propriedades dos sistemas estudados, da qual destacamos como principais características:

- Possibilita uma máxima codificação algébrica dos conceitos geométricos básicos, tais como magnitude, direção, sentido (ou orientação) e dimensão;
- Estabelece um método livre de coordenadas para formular e resolver equações básicas da física;
- Proporciona um método que uniformiza o tratamento da Física clássica, quântica e relativística evidenciando as estruturas comuns;
- Permite uma fácil articulação com os sistemas matemáticos que estão amplamente em uso na Física;
- Apresenta uma máxima eficiência computacional com relação aos sistemas matemáticos de uso corrente na Física.

Dentro desse contexto, propomos como trabalho dessa dissertação a adaptação desse novo aparato matemático para representar as principais grandezas estudadas em mecânica, tais como massa, momento linear, momento angular, força e torque, em nível do ensino médio.

Organização do trabalho

No Capítulo I, é apresentada uma visão histórica das ideias dos principais autores que contribuíram no desenvolvimento da álgebra Clifford. Trataremos, também, em detalhes, do desenvolvimento que conduz a ampliação do conceito de vetor e suas operações, incluindo o produto de Clifford.

No Capítulo II, foram abordados os conceitos fundamentais do modelo cognitivista ausubeliano de aprendizagem. Destacamos as principais categorias deste modelo que nortearam a construção de mapas conceituais.

No Capítulo III, desenvolvemos e representamos, segundo o sistema matemático apresentado no Capítulo I, os principais conceitos da dinâmica, tais como: massa, momento linear, momento angular, força, torque, trabalho e energia.

No Capítulo IV, desenvolvemos, segundo a perspectiva Ausubeliana, um mapa conceitual que norteou a modelação dos conceitos trabalhados no Capítulo III e, consequentemente, a confecção de materiais didáticos para o ensino da dinâmica ao nível do primeiro ano do Ensino Médio.

Para finalizar, apresentamos nossas considerações finais, as conclusões a que chegamos nesse trabalho.

Procedimento metodológico

Este trabalho de dissertação trata-se de uma pesquisa de cunho teórico-exploratório que objetiva construir estratégias para introduzir a álgebra de Clifford como modelador dos conceitos de uso na dinâmica na primeira série do Ensino Médio, balizadas por uma concepção ausubeliana da aprendizagem, organizamos esse trabalho, no que concerne a sua execução, em dois momentos distintos: Momento Teórico-hermenêutico e o Momento de Exploração Cognitiva. Na execução da pesquisa, os momentos acima salientados não estão organizados em uma ordem temporal, sendo, portanto, diferenciados por sua natureza. Assim, os mesmos podem ser explorados paralelamente.

No momento teórico-hermenêutico, foram realizados estudos bibliográficos sistemáticos para caracterizar os conceitos fundamentais presentes no domínio da dinâmica em contextos diversos de abordagem epistemológica, bem como o estudo detalhado das propriedades da álgebra de Clifford, tendo como propósito a aplicação deste novo formalismo na modelagem dos conceitos estudados.

No momento de exploração cognitiva, os estudos concentram-se na exploração conceitual e na utilização da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel para organizar os conceitos dentro de um modelo cognitivo. Trata-se de compatibilizar de forma pedagógica os conceitos modelados às características e às necessidades de aprendizagem dos alunos, levando em conta os níveis de ensino em questão. Para tanto, buscaremos entender o cognitivismo ausubeliano de forma finalística, ou seja, dentro de um contexto específico de ação voltado para alcançar um objetivo. Visa analisar os processos cognitivos implicados na organização dos conteúdos, compreendendo estes aspectos como sendo constituídos de modos operatórios, de sequências de ação, de sucessões de busca e de tratamento de informações, além de criação de etapas e desenvolvimento temporal das atividades a serem propostas e as estratégias a serem utilizadas.

Foi buscada uma engenharia didática em que os conteúdos do domínio da dinâmica foram organizados a partir dos seguintes parâmetros: subsunçores, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. A partir destes parâmetros, foram construídos mapas conceituais dos conteúdos e a produção do material didático adequado ao nível de ensino da primeira série do Ensino Médio.

CAPÍTULO 1

Os Fundamentos da Álgebra de Clifford

1.1– Um pouco da história

Segundo Hestenes (1999), há uma tendência entre os físicos de usar a matemática para a concessão, no que diz respeito ao desenvolvimento da matemática para os fins matemáticos. No entanto, a história mostra que a maioria do uso da matemática tem se mostrado com sucesso quando utilizadas na resolução de problemas físicos. O avanço da Física passou de mãos dadas com o desenvolvimento de uma linguagem matemática para expressar e explorar as teorias. A matemática hoje é enorme e imponente, mas não há razão para supor que a evolução de uma linguagem matemática para a Física esteja completa.

Entretanto, a tarefa de melhorar a linguagem da Física requer um conhecimento profundo da linguagem matemática atual no que se refere e como se utiliza no mundo físico, de modo que envolve mais do que expressões matemáticas. É uma das tarefas fundamentais da física teórica. O melhoramento de uma linguagem alternativa tem como objetivo é a de identificar princípios para a construção de representações simbólicas das relações geométricas. Para isso, faremos um sucinto apanhado histórico do desenvolvimento da álgebra para podermos entender a álgebra nos dias atuais.

A ideia de estabelecer um conjunto de relações matemáticas a partir de algumas hipóteses sobre os objetos do mundo físico e a relação entre eles começou com Euclides de Alexandria (325 – 265 a c.) (Fig.1) na Grécia Antiga. Euclides mostrou que, através de alguns postulados (cinco), era possível estabelecer um grande número de relações geométricas que, uma vez demonstradas, poderiam ser sempre utilizadas.

Começaremos com um fator presente no nosso cotidiano na sala de aula, mas que se desenvolveu há muitos anos, porque sempre dizemos "xis ao quadrado" para x^2 e "xis ao cubo" para x^3? Claro, isto é simples: porque dado um quadrado de lados x a sua área é dada por x^2, enquanto o volume de um cubo de lados x é dado por x^3. Entretanto, por detrás deste simples fato, existe uma ideia muito profunda, que remonta aos gregos, em particular Euclides (Fig.1): representar os objetos geométricos através de objetos algébricos e as operações geométricas por meio de operações algébricas. Então ele resolveu segmentos de linha, em vez de números. Assim, ele representou o produto como um quadrado com um lado de grandeza x. De fato, é por isso que usamos o nome "x quadrado" hoje. O produto xy foi representado por um retângulo e chamado o "retângulo" dos dois lados. O termo "x ao cubo" utilizado até hoje originado a partir da representação por um cubo com faces de grandeza x. Mas não há representações dos maiores poderes de geometria grega, de modo que a geometria grega trazia distinções entre álgebra e geometria. Esta distinção impediu os progressos matemáticos da Antiguidade até o século XVII, e sua importância é raramente reconhecida até hoje. Nesse caso, a ideia era representar os lados do quadrado por um número x, e a operação geométrica formando pelo quadrado a partir de seus lados pelo produto $x \cdot x = x^2$.

Fig. 1 - Euclides 325 – 265 ac.

Apesar de tentadora, essa ideia foi abandonada pelos gregos, pois nem todos os segmentos de reta podiam ser representados por números (assim como os gregos os conheciam). Por exemplo: dado um quadrado de lado unitário, a sua diagonal é justamente a raiz quadrada de 2, e o que hoje chamamos números irracionais não era conhecido pelos gregos. Além disso, como poderiam os gregos interpretar x^4, x^5, e assim por diante? De qualquer forma, o que relatamos é uma tentativa de representar elementos algébricos (números neste caso) por elementos geométricos e as operações algébricas por operações geométricas. Esta é a ideia que denominamos álgebra geométrica.

Os problemas levantados acima impediram que os gregos levassem adiante esta ideia; atualmente estes problemas já não seriam mais considerados "problemas". O verdadeiro problema que estava detrás desta ideia é a noção de congruência que os gregos tinham. Em outras palavras, o problema consiste em definir quando dois segmentos de reta podem ser vistos como equivalentes. Para os gregos bastava que eles tivessem o mesmo comprimento. Mas isso não basta!

A busca das álgebras geométricas se fez novamente presente já nos tempos modernos através de Descartes (Fig.3). Essa tentativa também não logrou êxito, e o motivo principal foi o mesmo dos gregos: a noção de congruência usada por Descartes era a mesma de Euclides.

Fig. 2 - Gottfried W. Leibniz 1646 – 1716.

Fig. 3 - René Descartes 1594 – 1650.

O mesmo problema preocupou Leibniz (Fig.2), um dos criadores do cálculo diferencial e integral. Do ponto de vista conceitual, Leibniz teve bem claro a ideia de uma álgebra geométrica e da sua necessidade. Ele a denominou uma geometria de *situs*, que podemos traduzir como uma geometria de posição. Leibniz escreveu sobre esse assunto um ensaio que ficou esquecido por muito tempo.

Quando redescoberto e publicado (em torno de 1833), foi instituído um prêmio para quem desenvolvesse as ideias de Leibniz. Apenas um matemático se inscreveu: Grassmann (Fig.5). O que permitiu a Grassmann desenvolver com êxito a ideia de uma álgebra geométrica foi o fato de ele não usar a noção de congruência de Euclides, mas sim uma outra relacionada com o conceito que hoje conhecemos como vetores.

Fig. 4 - Hermann Grassmann 1809 – 1879.

Fig. 5 - Elie J. Cartan 1869 – 1951.

Foi, portanto, H. Grassmann, em 1844, quem finalmente conseguiu tornar realidade a ideia geral anteriormente descrita. Primeiro, sabemos que duas retas concorrentes determinam um plano, e queremos definir um produto de "coisas" que representem retas (ou segmentos de reta), de tal forma que o resultado desse produto seja uma outra "coisa" que represente um plano (ou um fragmento de plano). Essa é a ideia de uma álgebra geométrica.

O grande passo de Grassmann foi não representar segmentos de reta por números, mas sim por objetos matemáticos chamados vetores. A observação nesse caso é que podemos atribuir a um segmento de reta não apenas um número (dado pelo seu comprimento), mas também uma orientação e uma direção (que por sua vez depende da noção de paralelismo). Grassmann então foi capaz de definir um produto destes vetores, chamado produto exterior, cujo resultado é um objeto chamado bivetor, que descreve fragmentos de plano.

Salvo raras exceções, o trabalho de Grassmann passou praticamente despercebido, tendo sido retomado quase um século depois pelo grande matemático E. Cartan (Fig.4). Hoje chamamos a estrutura desenvolvida por Grassmann de álgebra exterior ou álgebra de Grassmann. É oportuno salientarmos que o sistema de Grassmann não se limita apenas a um espaço tridimensional, sendo aplicável a espaços de um número arbitrário de dimensões.

Fig.6 - Willian R. Hamilton 1805 – 1865.

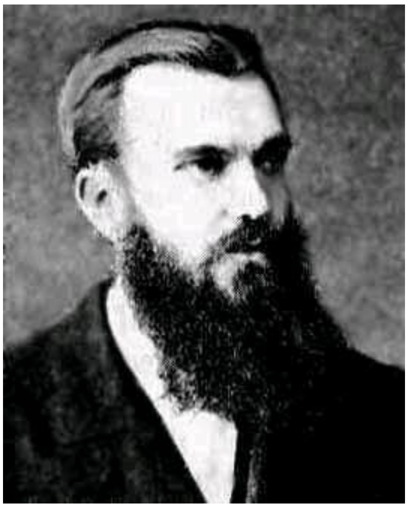


Fig. 7 - Willian K. Clifford 1845 – 1879.

Dentre as raras exceções para quem o trabalho de Grassmann não passou despercebido na sua época foi W. Clifford (Fig.7). Antes de mencionarmos o trabalho de Clifford, devemos observar que também no ano de 1844 o então W. Hamilton (Fig.6) havia publicado um sistema que denominou quatérnions, o qual consiste em uma generalização dos números complexos, que por sua vez são um generalização do conceito de números reais. Os quatérnions mostraram ser objetos extremamente adequados para descrevermos operações no espaço tridimensional, tais como rotações. Em 1878, Clifford publicou um trabalho em que ele mostrou como unificar em uma única estrutura os sistemas de Grassmann e de Hamilton. Mais ainda, aproveitando a estrutura muito geral da álgebra de Grassmann, o sistema de Clifford permite generalizarmos o sistema dos quatérnions de Hamilton. A denominação original de Clifford para esta estrutura foi álgebra geométrica, mas hoje a denominamos álgebra de Clifford.

Assim, em 1886, Gibbs tentou unificar esses sistemas naquele hoje denominado álgebra vetorial, porem não conseguiu, além de ter produzido uma álgebra que, além de não ser uma generalização dos sistemas de Hamilton e Grassmann, uma vez que só funciona no espaço tridimensional, também sofre deficiências internas, pois, em uma estrutura fechada, o resultado de qualquer operação sobre elementos dados deve gerar um elemento da mesma estrutura. No entanto, a álgebra de Clifford não apresentava as incoerências da álgebra vetorial de Gibbs. Mas, infelizmente, por ironia do destino, dois acontecimentos foram cruciais para a não divulgação desse sistema algébrico. A primeira foi a morte prematura de Clifford com a idade de apenas 33 anos, no auge da sua carreira. A segunda foi que a álgebra de Gibbs foi bem familiarizada, sendo bem adaptada para a teoria do eletromagnetismo, qual teve seu esplendor no final do século 19 (DORAN, 2003).

1.2 – A Reta Real

No tópico anterior, foi introduzida uma visão histórica das ideias dos principais autores que contribuíram no desenvolvimento da álgebra Clifford. Agora, veremos que o processo de medição das grandezas ditas contínuas nos conduz a ideia de um número real. Usaremos como protótipo a determinação do comprimento de um segmento de reta, pois este tipo de medição é tão significativo que o conjunto dos números reais é também conhecido como a reta real, ou simplesmente, a reta.

Imaginemos uma reta, no qual foram fixados um ponto O chamado de origem, e um ponto A, diferente de O. Tomaremos o segmento AO, como unidade de comprimento. A origem O divide a reta em duas semirretas. A que contém **A** chama-se semirreta positiva e a outra é a semirreta negativa. Diremos que os pontos da semirreta positiva serão à direita de O e os da semirreta negativa à esquerda de O.

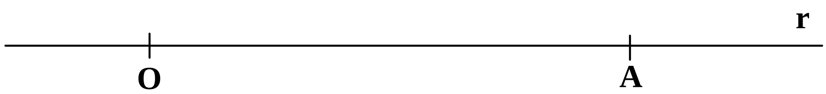


Figura 8 – Representação da reta real r.

O conjunto dos números reais, denotado por **R**, será representado geometricamente pelos pontos da reta r, a qual será chamada de reta real ou, simplesmente, reta. Além das operações usuais de adição e multiplicação, em **R** está definida a relação de ordem $\leq$ que, por ser uma relação de ordem, goza das seguintes propriedades:

1) Se **a** $\leq$ **b, b** $\leq$ **a,** então **a = b. (antissimétrica)**

2) Se a $\leq$ **b, b** $\leq$ **c,** então **a** $\leq$ **c. (transitiva)**

3) Se a $\leq$ **b** e **c** $\leq$ **d,** então **a + c** $\leq$ **b + d.**

4) Dado um numero real **c** $\neq$ **0, se a** $\leq$ b, temos:

$$\begin{cases} \mathbf{ca} \leq \mathbf{cb}, \text{ quando } c > 0 \\ \end{cases}$$

cb $\leq$ **ca**, quando c < 0

Além dos números reais, consideramos dois símbolos, $+\infty$ (abreviado por ∞) e $-\infty$, que não são números, e consideramos também a reta estendida **R***: = **R** $\cup \{-\infty,+\infty\}$ de modo que qualquer x $\in$ **R** satisfaz $-\infty <$ x $< \infty$. Se **a, b** $\in$ **R**, **a** $\leq$ **b,** os seguintes subconjuntos de **R** são chamados intervalos:

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in R \mid a < x < b\} \\
[a,b] &= \{x \in R \mid a \leq x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in R \mid a \leq x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in R \mid a < x \leq b\} \\
(-\infty,a] &= \{x \in R \mid x \leq a\} \\
(-\infty,a) &= \{x \in R \mid x < a\} \\
[a,\infty) &= R \setminus (-\infty,a) \\
(a,\infty) &= R \setminus (-\infty,a]
\end{aligned}
$$

Portanto, a própria reta **R** também é considerada um intervalo, podendo ser denotada por $(-\infty,\infty)$.

1.3- Vetor como um Número

O que é um vetor? Esta pergunta parece trivial, mas a sua resposta, adequadamente formulada, pode esclarecer vários enganos apresentados pelos educadores e educandos. De uma maneira mais geral possível, pode-se dizer que um vetor é uma espécie de número. Mas um número que não expressa somente uma magnitude, como os números reais. Isto é, os números que usamos em nosso dia-a-dia, como aquele que expressa o saldo de nossa conta bancária, a massa do nosso corpo quando subimos na balança da farmácia ou ainda a temperatura do nosso corpo para sabermos se estamos com febre. Ele expressa também direção! Então, de forma mais sofisticada, podemos dizer que um vetor é um número com direção. Uma pergunta que surge imediatamente é: como representar esses números?

Para melhor visualização desses objetos matemáticos, vamos partir do nosso espaço físico tridimensional, o qual denotaremos E^3. É o espaço no qual vivemos e vivenciamos nossas experiências. Na verdade, normalmente não experimentamos toda a liberdade que esse espaço nos oferece, a menos quando estamos voando (em asa delta, por exemplo) ou fazendo mergulho. Vamos imaginar o E^3 formador de pontos tais que todos eles sejam equivalentes, isto é, não haja pontos privilegiados. A Fig. 09 mostra um "pedaço" do E^3 com alguns pontos destacados. (DE GÓES BRENNAND, 2008).

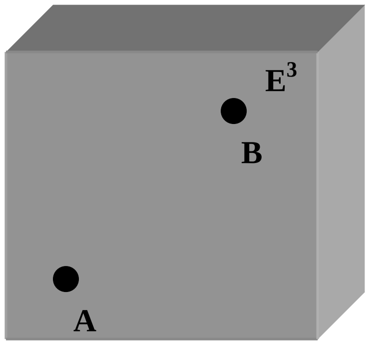


Fig. 09 – Destaque de pontos em um pedaço no espaço físico.

Representaremos esse espaço físico tridimensional por um conjunto de pontos definidos da seguinte forma: $\mathbf{E^3} = \{(x,y,z), \text{ tal que } x,y,z \in \mathbf{R}\}$, ou seja, o conjunto formado pelo produto cartesiano ExExE. Os números x, y e z são chamados de coordenadas canônicas de um ponto qualquer desse espaço. Denominaremos respectivamente abscissa, ordenada e cota. Para indicar as coordenadas canônicas, ou simplesmente coordenadas do ponto P, usaremos a notação $P = (x, y, z)$. Dois pontos desse espaço são considerados iguais se satisfizerem a seguinte condição:

$$A = B \Leftrightarrow (x_A = x_B, y_A = y_B, z_A = z_B) \qquad \textbf{(01)}$$

Vamos ligar os dois pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ por um segmento de reta orientado de origem em A e extremidade em B.

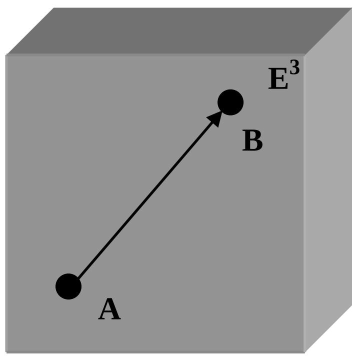


Fig. 10 – Vetor Ligado $\overrightarrow{AB}$

Chama-se vetor ligado de origem A e extremidade B, que denotaremos por $\overrightarrow{AB}$, ao par ordenado (A, B) de pontos do espaço E^3, representado na Fig.10.

Uma relação muito importante que expressa "a igualdade" entre vetores ligados é a relação de equipolência. Dizemos que dois vetores ligados são equipolentes se apresentarem as mesmas coordenadas canônicas. A relação de equipolência será representada por $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. (DE GÓES BRENNAND, 2008). Ou seja,

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_b - x_a = x_d - x_c \\ y_b - y_a = y_d - y_c \\ z_b - z_a = z_d - z_c \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(02)}$$

A representação geométrica da relação de equipolência $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ entre os vetores ligados pode ser vista na Fig. 11, onde os postos ABCD do espaço físico tri-dimensional formam um paralelogramo, ou seja, a relação de equipolência mostra que os vetores ligados são coplanares e paralelos entre si.

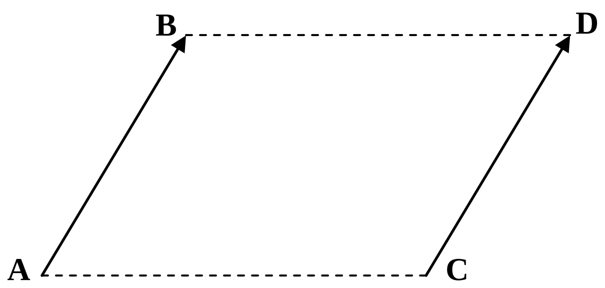


Fig. 11 - Representação da relação de equipolência de dois vetores ligados

Um fato importante é que a equipolência é uma relação de equivalência no conjunto dos vetores ligados. De fato, pela definição da relação de equipolência entre vetores ligados, verificamos facilmente, que as seguintes propriedades são satisfeitas:

- **Reflexiva:** $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$**.**
- **Simétrica:** $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$
- **Transitiva:** $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$

Isto permite definirmos um objeto matemático denominado vetor livre, o qual representa uma classe de equivalência de vetores ligados equipolentes. Em outras palavras, o vetor livre é o conjunto de todos os vetores ligados que têm as mesmas coordenadas. O vetor livre é perfeitamente representado por qualquer um dos representantes da classe. Denotaremos um vetor livre por $\vec{v}$. Observe que o conjunto de todos os vetores livres define uma nova estrutura matemática denominada de espaço vetorial. Denotaremos esse espaço por V^3. (DE GÓES BRENNAND, 2008)

É conveniente observar a distinção entre E^3 e V^3. Para melhor visualização dessa estrutura matemática, vamos partir do nosso espaço físico tridimensional E^3. Inicialmente escolhemos um ponto particular em E^3. Chamaremos este ponto de origem**,** isto é, O = (0,0,0). Evidentemente que este espaço não é mais nosso espaço físico, já que existe um ponto privilegiado. Passando pelo ponto O, podemos traçar uma infinidade de retas. Consideremos três dessas retas. Tomemos pontos dessas retas de coordenadas P = (x_p, y_p, z_p), Q = (x_q, y_q, z_q), R = (x_r, y_r, z_r) e S = (x_s, y_s, z_s). Assim podemos definir os seguintes vetores livres:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= (x_p - o,\ y_p - o,\ z_p - o) = (x_p, y_p, z_p) = \vec{v}_1 \\
\overrightarrow{OQ} &= (x_q - o,\ y_q - o,\ z_q - o) = (x_q, y_q, z_q) = \vec{v}_2 \\
\overrightarrow{OR} &= (x_r - o,\ y_r - o,\ z_r - o) = (x_r, y_r, z_r) = \vec{v}_3 \\
\overrightarrow{OS} &= (x_s - o,\ y_s - o,\ z_s - o) = (x_s, y_s, z_s) = \vec{v}_4
\end{aligned} \qquad \textbf{(03)}$$

Então, a imagem geométrica de V^3 representa o conjunto de todos os vetores livres com origem no ponto O, conforme a Fig. 12. (DE GÓES BRENNAND, 2008).

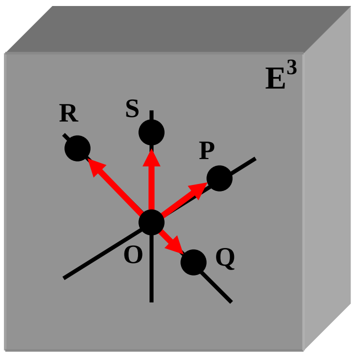


Fig. 12 – representação gráfica do espaço V^3

1.4 – Operação com vetores: produto de Clifford

As literaturas usadas pelos alunos do Ensino Médio trazem de forma inflexível e não interdisciplinar os conceitos que fundamentam a matemática dos vetores, pois nos levam a crer que o vetor é uma propriedade física e não matemática. Com isso, acreditamos que, se essas propriedades forem expostas de forma hierárquica e interdisciplinar, tornarão as operações com os vetores bem mais intuitivas, facilitando assim suas aplicações no cotidiano do nosso aluno. Na sequência mostraremos a soma, o produto por escalar e o produto entre dois vetores, em que enfatizaremos o ponto de vista geométrico e geométrico.

Adição

A adição de dois vetores $\vec{u}+\vec{v}$ é definida como o vetor que vai do final do vetor $\vec{u}$ para o inicio do vetor $\vec{v}$, isto é, quando o início de $\vec{u}$ encontra o final de $\vec{v}$. Fazendo a construção para $\vec{v}+\vec{u}$, isto é, colocando o final de $\vec{u}$ no início de $\vec{v}$**, o**bservamos que a adição do vetor é mesma. Portanto, a adição do vetor tem a propriedade comutativa, no qual podemos observar na Fig. 13, e representado por:

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \qquad \textbf{(04)}$$

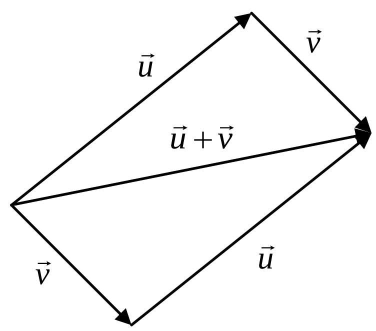


Fig. 13 – Representação da propriedade comutativa

Com isso, podemos dizer que a propriedade comutativa nós dará o artifício da regra do paralelogramo, que é a adição de dois vetores e que a diagonal do paralelogramo é formada por ambos os vetores. (CALVET,2001)

Entretanto podemos também encontrar outra propriedade muito importante, que é a propriedade associativa (Fig.14), definida da seguinte forma:

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} \text{ ou } \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \qquad \textbf{(05)}$$

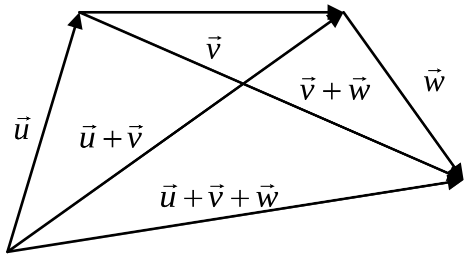


Fig. 14 – Representação da propriedade associativa

Outra característica importante é o elemento neutro da adição do vetor que é vetor nulo, ou seja, que possui o comprimento igual a zero. Com isso, o vetor oposto a $\vec{u}$ é definido como o vetor $-\vec{u}$ com a mesma direção, mas sentido oposto. Ou seja:

$$\vec{u}=(-\vec{u})=0 \qquad \textbf{(06)}$$

Produto de um vetor com um número real

Por definição, o produto de um vetor $\vec{u}$ por um número real k, no qual gera um vetor com a mesma direção, mas um comprimento aumentado k vezes. Lembrando que se o número real é negativo, então o sentido do vetor é oposto. Com isso, a definição geométrica sugere a propriedade comutativa (CALVET,2001):

$$k.\vec{u}=\vec{u}.k \qquad \textbf{(07)}$$

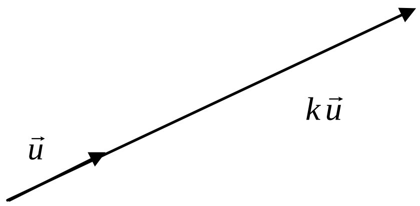


Fig. 15 – Representação do produto de um vetor por um escalar

Ou seja, dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma direção são proporcionais, porque existe sempre um numero real k como $\vec{v} = k.\vec{u}$, isto é, k é o quociente de ambos os vetores, o qual podemos representar como:

$$k = \vec{u}^{-1}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}^{-1} \qquad \textbf{(08)}$$

Produto de dois vetores

Para a definição do produto de dois vetores exige-se que o mesmo satisfaça as seguintes propriedades:

1) Ser distributiva que se refere à adição de vetores:

$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,\vec{v} + \vec{u}\,\vec{w} \qquad \textbf{(09)}$$

2) O quadrado de um vetor deve ser igual ao quadrado do seu comprimento; pela definição, o comprimento (ou módulo) de um vetor é um numero positivo e é representado por:

$$u^2 = |u|^2 . \qquad \textbf{(10)}$$

3) A associação da propriedade associativa deve existir entre o produto dos vetores e o produto de um vetor e um número real.

$$\begin{aligned} k\,(\vec{u}\,\vec{v}) &= (k\,\vec{u})\vec{v} = k\,\vec{u}\,\vec{v} \\ k\,(l\,\vec{u}) &= (k\,l)\vec{u} = k\,l\,\vec{u} \end{aligned} \qquad \textbf{(11)}$$

Onde k e l são números reais e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores. Portanto, os parênteses não são necessários. Então, a partir destas propriedades, podemos deduzir o produto de dois vetores.

Vamos supor que $\vec{w}$ é adição de dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$, ou seja, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Em que, calculando seus quadrados, no qual aplicando a propriedade distributiva, teremos (CALVET, 2001):

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{w}^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u}\,\vec{v} + \vec{u}\,\vec{v} + \vec{v}^2 \qquad \textbf{(12)}$$

É importante prestarmos atenção, pois teremos que preservar a ordem dos fatores, porque nós não sabemos se o produto é comutativo ou não. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores ortogonais, o teorema pitagórico aplica-se. Então teremos:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{w}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \Rightarrow \vec{u}\,\vec{v} + \vec{u}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}\,\vec{v} = -\vec{v}\,\vec{u} \qquad \textbf{(13)}$$

Isto é, o produto de dois vetores perpendiculares é anticomutativo. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores proporcionais, então:

$$\vec{u} \,//\, \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = k\,\vec{u},\; k = real \Rightarrow \vec{u}\,\vec{v} = \vec{u}\,k\,\vec{u} = k\,\vec{u}\,\vec{u} = \vec{v}\,\vec{u} \qquad \textbf{(14)}$$

Onde aplicamos a propriedade comutativa e associativa do produto de um vetor é um número real. Portanto, o produto de dois vetores proporcionais é comutativo. Se $\vec{\mathbf{w}}$ é a adição de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma direção, nós teremos:

$$\begin{aligned} |\vec{w}| &= |\vec{u}| + |\vec{v}| \\ \vec{w}^2 &= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| \\ \vec{u}\,\vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}| \end{aligned} \qquad \textbf{(15)}$$

No caso o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual a 0. Mas se os vetores tiverem sentidos opostos:

$$\begin{aligned} |\vec{w}| &= |\vec{u}| - |\vec{v}| \\ \vec{w}^2 &= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \\ \vec{u}\,\vec{v} &= -|\vec{u}||\vec{v}| \end{aligned} \qquad \textbf{(16)}$$

No caso o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual a π.

Poderíamos perguntar qual seria o produto de dois vetores com qualquer direção. Considerando a componente perpendicular e paralela $\vec{v}$ em relação à $\vec{u}$ (Fig. 16) e utilizando a propriedade distributiva, podemos escrever (CALVET,2001):

$$\vec{u}\,\vec{v} = \vec{u}\,(\vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}) = \vec{u}\,\vec{v}_{//} + \vec{u}\,\vec{v}_{\perp} \qquad \textbf{(17)}$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. 17, isto é, $\vec{u}\,\vec{v}_{//}$ é chamado produto interno ou produto escalar o qual representaremos por um ponto. Considerando que a projeção de $\vec{v}_{//}$ em $\vec{u}$ é proporcional ao cosseno do ângulo entre os vetores, podemos escrever:

$$\vec{u}\ \vec{v} = \vec{u}\,\vec{v}_{//} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha \qquad \textbf{(18)}$$

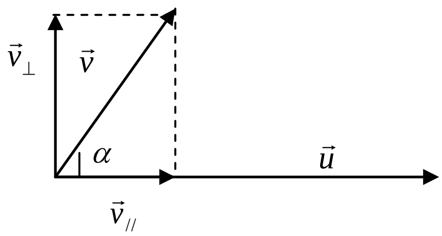


Fig. 16 – Representação gráfica do produto interno de um vetor

É interessante observar que o produto interno é sempre um número real. Por exemplo, o trabalho feito por uma força acionando um corpo é o produto interno da força e o espaço percorrido. Desde que a propriedade comutativa tenha sido deduzida pelo produto dos vetores com a mesma direção, no qual também se aplica para o produto interno:

$$\vec{u}\ \vec{v} = \vec{v}\ \vec{u} \qquad \textbf{(19)}$$

O segundo termo da Eq. 17, isto é, $\vec{u}\,\vec{v}_{\perp}$, é o produto de um vetor pela componente ortogonal do outro, o qual chamamos de produto externo ou produto de Grassman e é denotado com o símbolo $\wedge$ (cunha):

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u}\ \vec{v}_{\perp} \qquad \textbf{(20)}$$

O produto externo é representado pela área do paralelogramo formando ambos os vetores, como mostrado na Fig. 17. (CALVET, 2001)

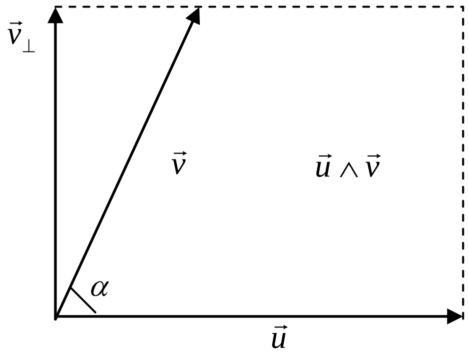


Fig. 17 – Representação gráfica do produto Externo

Então, podemos escrever:

$$\left| \vec{u} \wedge \vec{v} \right| = \left| \vec{u} \ \vec{v}_{\perp} \right| = \left| \vec{u} \right| \left| \vec{v} \right| \left| sen\alpha \right| \qquad \textbf{(21)}$$

Visto que o produto externo é o produto de vetores ortogonais, ele é anticomutativo:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \qquad \textbf{(22)}$$

É importante observamos que este produto $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é representado pela área orientada que denominaremos de bivetor, exposto na Fig.17.

Podemos observar que o produto externo assemelha-se muito ao produto vetorial. De fato, o produto vetorial de dois vetores é escrito como $\vec{u}\, x \vec{v}$ cujo módulo será dado por:

$$\left| \vec{u}\, x \vec{v} \right| = \left| \vec{u} \right| \left| \vec{v} \right| \left| sen\alpha \right| \qquad \textbf{(23)}$$

Onde α é a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (0° ≤ α ≤ 180°) no plano definido pelos dois vetores. O resultado de um produto vetorial é sempre perpendicular a ambos os vetores originais. Portanto, só está definido em um espaço tridimensional. Isto é um inconveniente, pois não temos um conceito semelhante em dimensão inferior ou superior a esta. A representação gráfica do produto vetorial pode ser vista na figura abaixo:

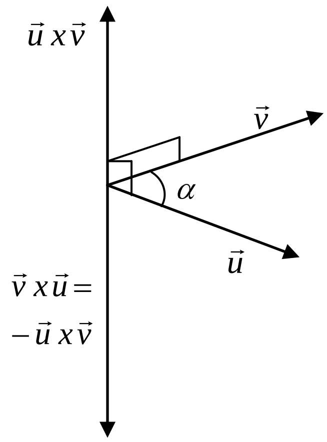


Fig. 18. Representação gráfica do Produto vetorial

Observa-se que o produto vetorial e o produto de Grassmann definem uma área de mesma magnitude (eqs. 21 e 23). Porém o produto vetorial ($\vec{u}\,x\vec{v}$) é um vetor e representa o mapeamento de uma área neste vetor. Já o produto de Grassmann é um bivetor, isto é, uma área com características vetoriais! Portanto, um bom candidato para substituir o produto vetorial em problemas que envolva espaços de dimensão diferente de três.

Finalmente, podemos definir o produto entre dois vetores, no qual denominaremos de produto de Clifford, como soma de ambos os produtos apresentados anteriormente, ou seja:

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v} \qquad \textbf{(24)}$$

É interessante salientarmos que, se partimos da definição de produto de Clifford, podemos construir os produtos interno e externo da seguinte forma: (CALVET, 2001)

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{\vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u}}{2} \quad ; \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{\vec{u}\vec{v} - \vec{v}\vec{u}}{2} \qquad \textbf{(25)}$$

O que nos indica que o produto interno é a parte simétrica do produto de Clifford, enquanto que o produto externo representa a parte antissimétrica.

Os produtos externo, interno e de Clifford apenas dependem do módulo dos vetores e do ângulo entre eles. Quando ambos os vetores são rotacionados, preservam o ângulo que eles formam e os produtos também são preservados (Fig. 19).

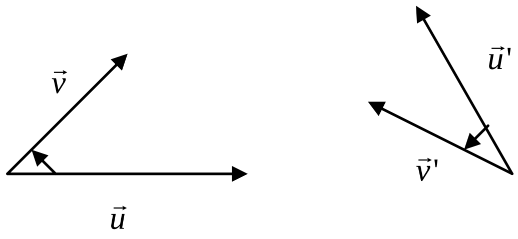


Fig. 19 – Representação gráfica da rotação dos vetores

Contudo, podemos questionar qual é o modulo do produto de dois vetores? Visto que o produto interno e externo são linearmente independentes e ortogonais, o módulo do produto de Clifford deve ser calculado através de uma generalização do teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} &\vec{u}\,\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{v} \Rightarrow \left|\vec{u}\;\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}.\vec{v}\right|^2 + \left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|^2 \\ &\left|\vec{u}.\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2(\cos^2\theta + sen^2\theta) = \left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2 \end{aligned} \tag{26}$$

Portanto, os módulos do produto de Clifford são o produto dos módulos de cada vetor:

$$\left|\vec{u}\,\vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| \tag{27}$$

1.5 - Álgebra de Clifford no plano

No espaço euclidiano bidimensional, podemos apresentar três objetos orientados. Primeiramente, podemos representar um ponto em uma reta pertencente a um determinado plano como um objeto orientado, o qual chamaremos de escalar ou 0-vetor. A orientação é definida por um sinal associado a um número. Se o ponto “caminhar” para a esquerda, a orientação será negativa e para a direita positiva, como representado na Fig. 20. (DORAN, 1994)

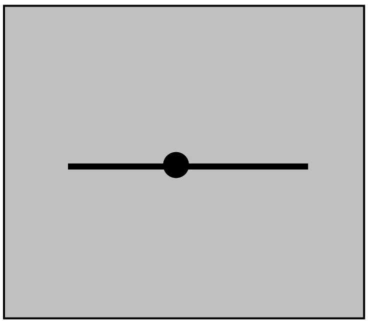


Fig. 20 – Representação do 0-vetor

O segundo objeto é um segmento de reta orientado, no qual será chamado de 1-vetor. Qualquer 1-vetor no plano pode ser gerado pela soma dos elementos do conjunto $\{e_1, e_2\}$, como exposto na Fig. 21.

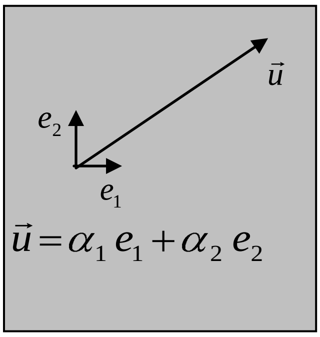


Fig. 21 – Representação do 1-vetor

Por fim, o último objeto orientado é uma área no plano que chamaremos de 2-vetor. O 2-vetor apresenta uma magnitude, uma direção e um sentido, que poderá ser horário ou anti-horário. As orientações do 2-vetor estão representadas em termos dos elementos do conjunto $\{e_1, e_2\}$ na figura abaixo:

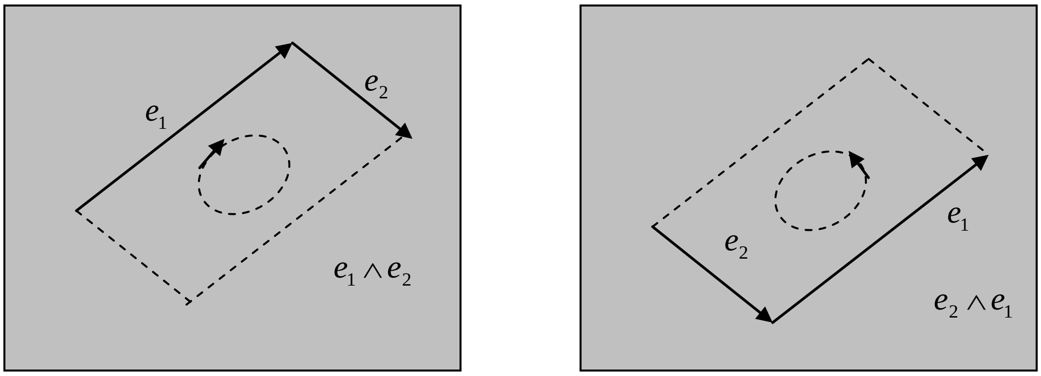


Fig. 22 - Representação do 2-vetor

Podemos observar que a área delimitada pelo paralelogramo corresponde ao módulo do 2-vetor formado pelos vetores e_1 e e_2. É importante ratificar que o símbolo $\wedge$ (cunha) representa o produto externo ou produto de Grassman entre os vetores e_1 e e_2, que o resultado em um bivetor $e_1 \wedge e_2$.

Para entendermos melhor as propriedades do 2-vetor, devemos primeiramente nos lembrar que, para vetores ortogonais, o produto de Clifford é um bivetor, ou seja,

$$e_1 e_2 = e_1 . e_2 + e_1 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2 \quad \textbf{(28)}$$

Lembremos que os vetores ortogonais são anticomutativos:

$$e_2 e_1 = e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2 = -e_1 e_2 \quad \textbf{(29)}$$

Podemos formar produtos entre um vetor e um 2-vetor de duas formas diferentes. Ou seja, se multiplicarmos o 2-vetor a esquerda de um vetor: (DORAN, 1994)

$$(e_1 \wedge e_2) e_1 = (-e_2 e_1) e_1 = e_2 e_1 e_1 = -e_2 \quad \textbf{(30)}$$

$$(e_1 \wedge e_2) e_2 = (-e_2 e_1) e_2 = e_1 e_2 e_2 = e_1 \quad \textbf{(31)}$$

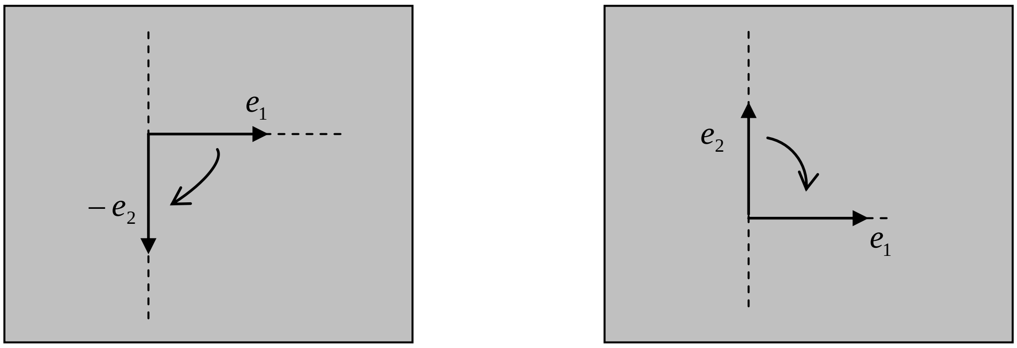


Fig. 23 – Multiplicação do bivetor à esquerda do 1-vetor

Como podemos observar, ocorrerá uma rotação de 90° graus no sentido horário nos vetores e_1 e e_2, como exposto na Fig. 23. Já se multiplicarmos o 2-vetor à direita dos vetores e_1 e e_2 teremos uma rotação de 90° no sentido anti-horário do vetor, como na Fig. 24.

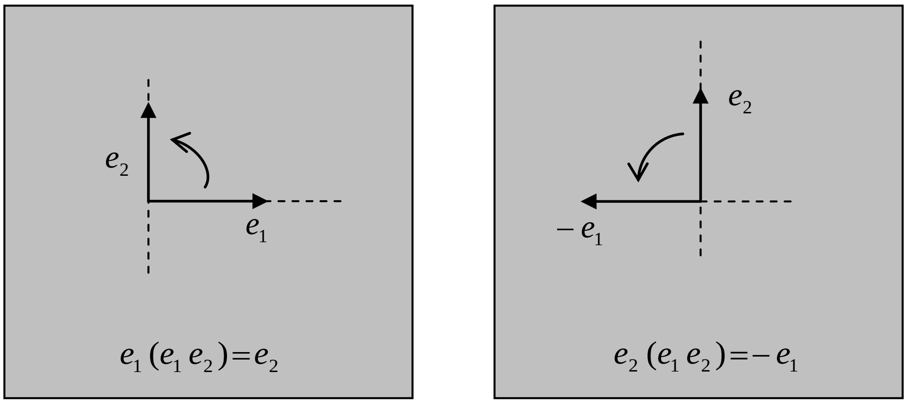


Fig. 24 – Multiplicação do bivetor a direita do 1-vetor

Uma propriedade interessante dos bivetores se manifesta pelo seu quadrado, isto é,

$$(e_1 \wedge e_2)^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_1 e_1 e_2 e_2 = -1 \qquad \textbf{(32)}$$

Isso mostra que o bivetor tem a mesma propriedade que a unidade imaginária dos números complexos. Do ponto de vista geométrico, realiza-se uma rotação de 180^0.

Vamos definir um conjunto formado por todas as possíveis combinações desses objetos orientados (0-vetor, 1-vetores e 2-vetor) e sobre esse conjunto definir uma operação de soma e de produto. Denominaremos de multivetor um elemento desse conjunto, no qual o escreveremos como: (DORAN, 1994)

$$A=\alpha_o+\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_1\wedge e_2 \tag{33}$$

Ou seja,

$$A=0-vetor+1-vetor+2-vetor \tag{34}$$

Dado dois multivetores A e B:

(35)

$$A=\alpha_o+\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_1\wedge e_2$$

$$B=\beta_o+\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\beta_3 e_1\wedge e_2 \tag{36}$$

A sua soma será definida como:

$$S=A+B=(\alpha_o+\beta_o)+(\alpha_1+\beta_1)e_1+(\alpha_2+\beta_2)e_2+(\alpha_3+\beta_3)e_1\wedge e_2 \tag{37}$$

Como podemos observar, o resultado da adição de multivetores é de fácil intuição algébrica, e o seu resultado gera outro multivetor, que satisfazia a propriedades aditivas de um corpo algébrico.

Vamos agora definir o produto de dois multivetores A e B:

$$AB=[\alpha_o+\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3(e_1\wedge e_2)][\beta_o+\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\beta_3(e_1\wedge e_2)]. \tag{38}$$

$$AB = \alpha_o\beta_o + \alpha_o\beta_1 e_1 + \alpha_o\beta_2 e_2 + \alpha_o\beta_3(e_1e_2) +$$
$$+ \alpha_1\beta_o e_1 + \alpha_1\beta_1 e_1 e_1 + \alpha_1\beta_2 e_1 e_2 + \alpha_1\beta_3 e_1(e_1e_2) +$$
$$+ \alpha_2\beta_o e_2 + \alpha_2\beta_1 e_2 e_1 + \alpha_2\beta_2 e_2 e_2 + \alpha_2\beta_3 e_2(e_1e_2) +$$
$$+ \alpha_3\beta_o(e_1e_2) + \alpha_3\beta_1(e_1e_2)e_1 + \alpha_3\beta_2(e_1e_2)e_2 + \alpha_3\beta_3(e_1e_2)(e_1e_2) \quad \textbf{(39)}$$

Utilizando os resultados das operações entre 1-vetor e 2-vetor anteriormente tratadas obtemos:

$$\begin{aligned} AB = {} & \alpha_o\beta_o + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 + (\alpha_o\beta_1 + \alpha_1\beta_o + \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)e_1 + \\ & (\alpha_o\beta_2 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_o - \alpha_3\beta_1)e_2 + (\alpha_o\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_3\beta_o - \alpha_2\beta_1)(e_1e_2). \end{aligned} \quad \textbf{(40)}$$

Como podemos observar o produto entre multivetores também gera um outro multivetor.

Capítulo 2

Modelo Ausubeliana de Aprendizagem e Mapas Conceituais

2.1 - Aprendizagem Significativa

Em meados de 1960, David Ausubel propôs a sua Teoria da Aprendizagem significativa, no qual procura explicar os mecanismos internos que ocorrem na mente humana com relação ao aprendizado e à estruturação do conhecimento. Ausubel na sua teoria concentrou-se numa questão que nenhum pesquisador até aquele momento tinha se preocupado, que era a aprendizagem que ocorria na sala de aula, pois Ausubel acreditava no valor da aprendizagem por descoberta, no qual valorizava a aula do tipo expositiva, que foi o grande foco da sua pesquisa. (MOREIRA, 2001)

Neste sentido, o maior legado deixado por Ausubel foi justamente o de técnicas e reflexões acerca da aula do tipo “tradicional”, e do tipo de enfoque, o cuidado e trabalho de ideais que um professor deveria ter neste contexto, no sentido de propiciar o melhor aprendizado possível para seus alunos. Uma de suas contribuições foi a distinção das diferenças entre a aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica. Em sua teoria, existem três requisitos básicos para que ocorra uma aprendizagem significativa por parte do aluno: a oferta de um novo conhecimento estruturado de maneira lógica; a existência de conhecimentos na estrutura cognitiva que possibilite a sua conexão com o novo conhecimento; a atitude explícita de apreender e conectar o seu conhecimento com aquela que pretende absorver. (MOREIRA, 2001)

Segundo Ausubel (2003), os principais conceitos relativos à aprendizagem se articulam esquematicamente da seguinte forma:

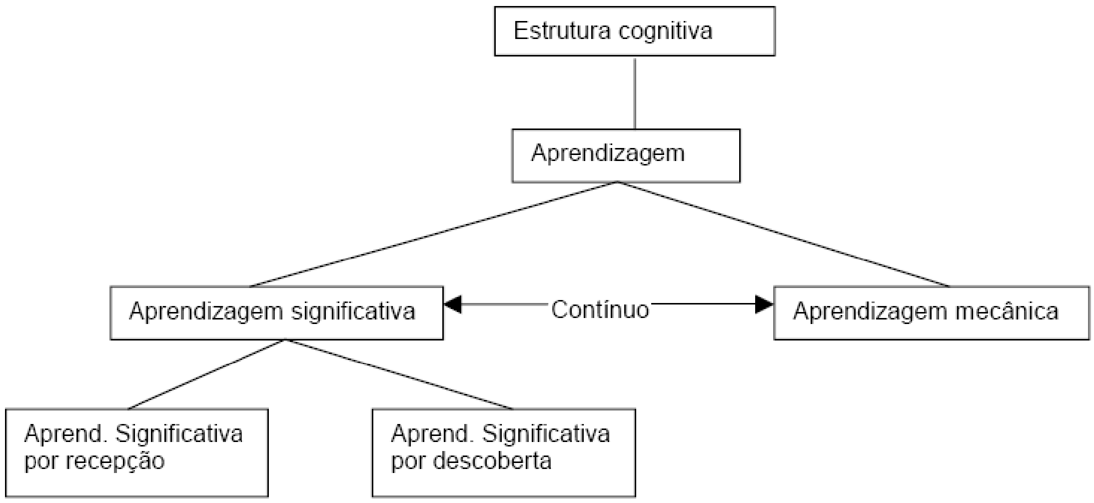


Fig. 25 – Mapa conceitual sobre aprendizagem

A estrutura cognitiva para Ausubel (apud Faria, 1989, p 08) é o conteúdo total e organizado de ideias de um dado indivíduo; ou, no contexto da aprendizagem de certos assuntos, refere-se ao conteúdo e à organização de suas ideias naquela área particular de conhecimento. Ou seja, a ênfase que se dá é na aquisição, armazenamento e organização das ideias no cérebro do indivíduo. Com isso, podemos perceber que, para Ausubel, a estrutura cognitiva de cada indivíduo é extremamente organizada e hierarquizada, no sentido que as várias ideias se encadeiam de acordo com a relação que se estabelece entre elas. Além disso, é nesta estrutura que se ancoram e se reordenam novos conceitos e ideias que o indivíduo vai progressivamente internalizando, isto é, aprendendo.

Para David Ausubel (MOREIRA, 2001), a aprendizagem consiste na modificação da estrutura cognitiva, através da incorporação de novas ideias a ela. Dependendo do tipo de relação que se tem entre as ideias, já existentes “conhecimentos prévios” nesta estrutura e as novas que se estão internalizando, pode ocorrer um aprendizado que varia do mecânico ao significativo.

Com isso, a aprendizagem significativa tem lugar quando as novas ideias vão se relacionando de forma não-arbitrária e substantiva com as ideias já existentes. Por “não-arbitriedade”, entende-se que existe uma relação lógica e explícita entre a nova ideia e alguma(s) outra(s) já existente(s) na estrutura cognitiva do indivíduo. Assim, por exemplo, entender o conceito do dinamômetro só será de fato significativo para o indivíduo, se de alguma forma houver uma clara relação entre este e o conceito de força.

Além de não ser arbitrária a aprendizagem, para ser significativa, precisa ser também substantiva, ou seja, uma vez aprendido determinado conteúdo desta forma, o indivíduo conseguirá explicá-lo com as suas próprias palavras. Assim, um mesmo conceito pode ser expresso em linguagem sinônima e transmitir o mesmo significado (ARAGÃO, 1976, p 21).

Como exemplo, quando o aluno aprende significativamente que o conceito de peso é diferente do conceito de massa, isto é, que a massa é a quantidade de matéria de um objeto, pois é uma característica intrínseca do corpo, e que peso de um corpo é a força de atração gravitacional entre ele e a Terra, que imprime ao mesmo tempo uma aceleração da gravidade "g", ele deverá ser capaz de expressar isso de diversas formas. Como: "que independentemente do planeta, por exemplo, um astronauta tem sua massa constante e o que varia é o seu peso, devido à aceleração da gravidade ser diferente em planetas distintos", "ao ir a uma farmácia o aluno ao se pesar observa a sua massa na balança e não o seu peso" ou "que a unidade de massa é em quilograma (kg) e a unidade do peso é em Newton ($kg.m/s^2 = N$)". A "substantividade" do aprendizado significa, então, que o aluno apreendeu o sentido, o significado daquilo que se ensinou, de modo que pode expressar com as mais diversas palavras e sentidos.

Para Ausubel (2003), o objetivo maior do ensino acadêmico é que todas as ideias sejam aprendidas de forma significativa. Isso porque é somente deste jeito que estas novas ideias serão "armazenadas" por bastante tempo e de maneira estável. Além disso, a aprendizagem significativa permite ao aluno o uso do novo conceito de forma inédita, independentemente do contexto em que este conteúdo foi primeiramente aprendido.

Como podemos observar, não podemos falar da aprendizagem significativa sem comentar a mecânica, pois é o extremo oposto e está muito presente em nossas escolas. Neste caso, as novas ideias não se relacionam de forma lógica e clara com nenhuma ideia já existente na estrutura cognitiva do sujeito, são simplesmente "decoradas". Desta maneira, elas são armazenadas de forma arbitrária, o que não garante flexibilidade no seu uso, nem longevidade. Como consequência, não ocorre a flexibilidade (o aprendizado não é substantivo), o indivíduo não é capaz de expressar o novo conteúdo com linguagem diferente daquela com que este material foi primeiramente aprendido. De fato, ele não aprendeu o significado, o sentido do novo material, mas tão-somente decorou a sequência de palavras que o definia. Por conta disso, ele será incapaz de utilizar este conhecimento em contexto diferente daquele no qual fora primeiramente apresentado. No exemplo dado acima – do peso e da massa - o indivíduo será incapaz de fazer a relação entre o peso e a massa, ou mesmo com o fato de que o peso varia de localidade devido à aceleração da gravidade.

Contudo, é importante ratificar que, apesar de Ausubel, em sua teoria de aprendizagem, ter enfatizado a soberania da aprendizagem significativa, ele compreendia que no processo de ensino-aprendizagem existem circunstâncias em que a aprendizagem mecânica era inevitável. No ensino de História das Ciências, por exemplo, conhecer e entender os eventos que se sucederam no surgimento e desenvolvimento da mecânica clássica requer, muitas vezes, que se saibam os nomes dos principais filósofos e as diversas datas que serviram de subsunçores para a Física que conhecemos hoje, o que é tipicamente um aprendizado mecânico. (MOREIRA, 2001)

Fatores Substantivos da Facilitação Pedagógica

Os fatores substantivos da facilitação pedagógica, como o próprio nome diz, são aqueles fatores que facilitam a ação pedagógica e estão relacionados com seleção dos temas mais relevantes que são trabalhados com os alunos. Com isso, é importante selecionar as ideias básicas para não sobrecarregar o aluno de informações desnecessárias, dificultando a aquisição de uma estrutura cognitiva adequada. (MOREIRA, et al 2001)

Ausubel (2003) acredita que a aprendizagem por subordinação é mais fácil para o ser humano do que a por superordenação. Ou seja, ele acredita que os conceitos devem ser sempre estudados a partir de ideias mais gerais para as mais específicas. Por conseguinte, o que se propõe é que se ofereça ao aluno preferencialmente os conceitos ditos mais inclusivos, ou seja, os conceitos mais amplos aos quais os conceitos mais restritos, quando forem trabalhados, poderão se ligar de maneira subordinada. Quando a aprendizagem se dá por subordinação, os conceitos âncoras necessários para propiciar a aprendizagem significativa são denominados de subsunçores.

Neste sentido, quando da seleção dos aspectos mais relevantes de um determinado conteúdo, devem ser privilegiados os conceitos/ideias mais gerais, que poderão servir como âncora para futuras aprendizagens. Se for feito de outra forma, optando-se por conceitos mais específicos, pode acontecer que eles não sejam potencialmente significativos para os alunos, uma vez que estariam faltando ideias de esteio mais relevantes, que estão justamente associadas com os conceitos mais amplos/inclusivos.

Como princípios programáticos para a sequenciação do conteúdo de ensino, Ausubel propõe a diferenciação progressiva e reconciliação integrativa.

Diferenciação Progressiva

A diferenciação progressiva corresponde exatamente ao princípio segundo o qual as ideias mais gerais e inclusivas são apresentadas antes, criando as condições necessárias para a posterior diferenciação das mesmas, conformando uma tendência natural da consciência humana quando exposta a um campo de conhecimento inteiramente novo. Isso Ausubel (1989) justifica através de dois motivos:

- É mais fácil para o ser humano compreender os aspectos diferenciados de um todo (mais inclusivo) previamente aprendido, (...) do que formular o todo mais inclusivo a partir das suas partes diferenciadas previamente aprendidas (Ausubel apud Faria, 1989, p 28). Ou seja, generalizar a partir de conceitos mais específicos é mais difícil do que aprender conceitos particulares a partir de um mais geral.

- Este tipo de hierarquia é a que acontece na mente de cada pessoa: a ideias mais gerais/inclusivas ocupam o topo da estrutura cognitiva, e têm subordinadas a si ideias progressivamente mais específicas/menos inclusivas.

Reconciliação Integrativa

Já a reconciliação integrativa trata do modo como Ausubel também descreve as relações buscando apontar similaridades e diferenças entre idieas, com vistas a contornar discrepâncias reais ou imaginárias (Moreira, 2001). Ou seja, gradualmente os conceitos vão se especializando e, concomitantemente, estabelecendo relações que produzem significados que configuram uma situação típica de aprendizagem significativa. Assim como define Faria (1989), a reconciliação integrativa consiste, basicamente, no delineamento explícito das relações entre ideias, de assinar semelhanças e diferenças relevantes entre as mesmas, e de reconciliar inconsistências reais e aparentes.

No trabalho pedagógico, a reconciliação integrativa deve acontecer em dois contextos: na preparação do material instrucional, e no relacionamento das ideias nele contidas com a estrutura cognitiva do aluno. Na preparação e no uso do material instrucional, alguns cuidados devem ser tomados como, por exemplo:

- Evitar que o uso de palavras distintas para representar conceitos equivalentes gere confusão no aluno, motivando-o a aprender de forma mecânica. Usando o caso da própria teoria ausubeliana, se os termos subsunçor, ideia âncora, ideia de esteio, ideia relevante, ideia mais inclusiva, ideia mais geral e ideia mais ampla não forem devidamente esclarecidos, pode-se acreditar que se referem a conceitos distintos quando, na verdade, são sinônimos de uma mesma coisa.

- Na apresentação dos vários tópicos constitutivos de um mesmo material, devem-se explicitar eventuais relações existentes entre eles, visto que parte da aprendizagem só será de fato conseguida caso estas relações sejam percebidas.

- Evidenciar as diferenças existentes entre conceitos aparentemente semelhantes, a fim de que eles não sejam retidos como se fossem idênticos.

Já no que diz respeito ao relacionamento das novas ideias apresentadas e aquelas já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, alguns cuidados seriam:

- Evidenciar eventuais diferenças entre as ideias já estabelecidas e aquelas que se estão aprendendo, a fim de que, caso haja alguma analogia entre elas, isso não leve os alunos a reduzirem uma à outra ou a confundirem ambas.

- Esclarecer eventuais contradições (aparentes ou reais) entre os conceitos que estão sendo aprendidos e aqueles que já se sabe. Caso isso não seja feito, pode acontecer de o aluno recusar o novo aprendizado, ou de retê-lo como algo isolado do anterior. Assim, pode-se recusar o princípio da diferenciação progressiva por se alegar (corretamente) que é impraticável apresentar o conceito mais abrangente de polígonos antes do conceito menos abrangente de triângulo. No entanto, se este princípio for analisado dentro do conjunto limitado dos conceitos relativos a uma disciplina, a eventual contradição desaparece.

Organizadores Prévios

Seguindo todas as etapas previstas anteriormente na seleção, a sequenciação e a preparação dos conteúdos mais pertinentes, clareza e estabilidade das necessárias ideias de esteio para se trabalhar significativamente este novo material, propõe uma fase seguinte, que seria a da preparação dos organizadores prévios, em função destes fatores mencionados. Segundo Ausubel (2003), organizadores prévios são materiais introdutórios destinados a facilitar a aprendizagem de tópicos específicos ou conjunto de ideias consistentemente relacionadas entre si.

A finalidade de um organizador prévio é prover ideias de esteio, ou evidenciá-las na estrutura cognitiva do aluno, de modo a potencializar ao estudante uma aprendizagem significativa. Portanto, não deve ser confundido com introdução ou resumo, uma vez que sua função não é (somente) fornecer uma visão geral sobre o que se vai estudar, ou apontar os pontos principais do conteúdo em questão. A função do organizador prévio é potencializar a criação de relações não-arbitrárias e substantivas entre os novos conceitos e as ideias que lhes servirão de âncora na estrutura cognitiva do aluno, através da "inserção" ou da explicitação destas ideias.

Com isso Moreira (2004) afirma que a vantagem [do organizador prévio] é permitir ao aluno o aproveitamento das características de um subsunçor, ou seja:

a) identificar o conteúdo relevante na estrutura cognitiva e explicar a relevância deste conteúdo para a aprendizagem do novo material;

b) dar uma visão geral do material em um nível mais alto de abstração, salientando as relações importantes;

c) prover elementos organizacionais inclusivos, que levem em consideração mais eficientemente e ponham em melhor destaque o conteúdo específico do novo material.

2.2 - Mapas conceituais

Os mapas conceituais representam a organização e representação do conhecimento, ou seja, por exemplo, para organizarmos os materiais didáticos podemos representá-los em gráficos que visam expressar a relação entre palavras que formam um determinado conceito ou as relações entre conceitos que compõem significados. Estes diagramas constituem uma técnica desenvolvida por *Joseph Novak* e seus colaboradores, a partir de 1972, na Universidade Cornell, nos Estados Unidos, e amolda-se substancial e propositalmente à teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, inclusive prefaciando a edição mais recente de sua obra, faz referência a esse ”mapeamento cognitivo” como um esforço sem precedentes da parte do seu idealizador (AUSUBEL, 2003, p. xiv; MOREIRA, 2004).

Do ponto de vista de sua estruturação, os mapas conceituais apresentam-se bastante flexíveis, mas embora Moreira (2001) afirme a inexistência de regras fixas para delineá-los, descreve também alguns aspectos que devem ser observados na elaboração dos mesmos. O primeiro deles aponta no sentido de que geralmente tais mapas apresentam uma estrutura hierárquica, na qual os conceitos são organizados a partir dos mais amplos, colocados na parte superior, passando pelos intermediários, até chegar aos mais específicos situados na parte inferior. Essa formatação, bem longe de representar relações de poder ou de atribuições comuns aos organogramas e fluxogramas usuais, sugere na teoria ausubeliana, a inequívoca observância aos princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa. Na teoria ausubeliana, a construção do conhecimento corresponde a uma atividade cognitiva composta por etapas organizadas de maneira sequencial e hierárquica, inter-relacionando-se desde a apreensão da nova informação até sua sistematização cerebral.

A fundamentação teórica que permeia a constituição de um mapa conceitual, por inferência, leva aos critérios concernentes ao grau de generalidade e exclusividade que identifiquem as circunstâncias às quais o mesmo se destina. Isto significa dizer que, dependendo de sua abrangência ou especificidade, os mapas conceituais podem ser aplicáveis especificamente ao conteúdo de uma aula, ao planejamento de um curso de curto prazo, bem como a uma ação mais ousada, em termos de desenvolvimento de um programa educacional mais complexo (NOVAK, 2000a; 2000b; 2003).

Contudo, a principal propriedade de um mapa conceitual está na possibilidade que a pessoa tem de exteriorizar seus conhecimentos ao construir o seu próprio mapa, com isso, compatibilizando a formação de uma sequência lógica de conceitos subsunçores e de ordenação das novas ideias do material didático capazes de direcionar significativamente a aprendizagem. Segundo corrobora Moreira (2004, p. 6), a pragmática dos mapas de conceitos converte-os em instrumentos indispensáveis para: 1) identificar a estrutura de significados aceita no contexto da matéria de ensino; 2) identificar os subsunçores (significados) necessários para a aprendizagem significativa da matéria de ensino; 3) identificar os subsunçores preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz; 4) organizar sequencialmente o conteúdo e selecionar materiais curriculares, usando as ideias de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa como princípios programáticos; 5) ensinar usando organizadores prévios, para fazer pontes entre os significados que o aluno já tem e os que ele precisaria ter para aprender significativamente a matéria de ensino, bem como para o estabelecimento de relações explícitas entre o novo conhecimento e aquele já existente e adequado para dar significados aos novos materiais de aprendizagem.

Capítulo 3

3.1 Conceitos da Dinâmica Newtoniana

As leis de Newton são os pilares de sustentação da Mecânica clássica. Elas descrevem o movimento dos corpos, tanto no céu como na terra, as órbitas dos planetas, prevêem a existência de novos planetas e explicam, por exemplo, os fenômenos das marés. Mas precisamos de cautela ao interpretá-las e aplicá-las ao nosso cotidiano.

Segundo Aristóteles, tanto para colocar um corpo em movimento, como para mantê-lo em movimento, é necessária a ação de uma força. Conforme ele, o movimento se divide em duas grandes classes: a do movimento natural e a do movimento violento. Aristóteles afirmava que o movimento natural decorre da "natureza" de um objeto, dependendo de qual combinação dos quatro elementos (terra, água, ar e fogo), ele fosse feito. O movimento natural poderia ser diretamente para cima ou para baixo, no caso de todas as coisas da Terra, ou ser circular, no caso dos corpos celestes. Ao contrário do movimento para cima ou para baixo, o movimento circular não possuía começo ou fim. Ele acreditava que existiam leis diferentes que se aplicavam aos céus, e afirmava que os corpos celestes são esferas perfeitas, formados por uma substância perfeita e imutável, que foi denominada quintessência (quinta essência, as outras quatro sendo terra, água, ar e fogo).

O movimento violento resultava de forças que puxavam ou empurravam. Este nada mais era que o movimento imposto. Uma pessoa empurrando um carro de mão ou sustentando um objeto pesado impunha movimento, como faz alguém quando atira uma pedra ou vence um cabo-de-guerra. O conceito de movimento violento enfrentava suas dificuldades, pois empurrões e puxões nem sempre eram evidentes. As afirmações de Aristóteles a respeito do movimento constituíram o início do pensamento científico, em que suas ideias perduraram durante quase dois mil anos.

Somente no século XVI, Galileu, um dos mais importantes cientistas daquela época, demoliu as hipóteses de Aristóteles. Galileu deixou cair da torre de Pisa vários objetos com pesos diferentes e comparou suas quedas. Ao contrário do que afirmava Aristóteles, ele comprovou que uma pedra duas vezes mais pesada que outra não caía duas vezes mais rápido, exceto pelo pequeno efeito da resistência do ar. Galileu descobriu que objetos de vários pesos, soltos ao mesmo tempo, caíam juntos e atingiam o chão ao mesmo tempo. Observamos que a ideia fundamental de Aristóteles era que sempre fosse necessário empurrar ou puxar um objeto para mantê-lo em movimento. E este princípio básico foi negado por Galileu, afirmando que, se não houvesse interferência sobre um objeto móvel, este deveria mover-se em linha reta para sempre, no qual, nenhum empurrão, puxão ou qualquer tipo de ação era necessário para isso.

Galileu testou suas hipóteses fazendo experiências com o movimento de diversos objetos sobre planos inclinados. Observou que bolas que rolavam para baixo adquiriam maior velocidade, enquanto as que rolavam para cima menor velocidade. Então, ele concluiu que essas bolas que rolassem no plano horizontal não deveriam torna-se mais ou menos velozes. A bola atingiria finalmente o repouso não por causa da sua “natureza”, mas por causa do atrito. Ele raciocinou que, na ausência de atrito ou de forças opositoras, um objeto movendo-se na horizontal continuaria movendo-se indefinidamente. A propriedade de um objeto de tender a manter-se em movimento numa linha reta foi chamada por ele de inércia.

Em 1642, no mesmo ano da morte de Galileu, nasceu Isaac Newton. Quando tinha 23 anos, ele desenvolveu suas famosas leis do movimento, que suplantaram em definitivo as ideias de Aristóteles que haviam dominado o pensamento dos cientistas por dois milênios. O conceito de inércia, como vimos anteriormente, foi conceituado pela primeira vez por Galileu e, após algumas décadas, Newton reafirmou essa ideia e formulou o seu primeiro princípio, no qual denominou lei da inércia ou princípio da inércia.

Podemos observar que a descrição do “estado de movimento” é caracterizado pela tendência natural de um corpo ou objeto estar no seu estado de descanso ou no seu estado de movimento retilíneo, devido à própria inércia da matéria. Ou seja, a ação impressa é uma ação exercida sobre um corpo para mudar seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta. É importante enfatizarmos que a ação representada e citada anteriormente no texto acima representa o conceito de força ($\vec{F}$).

Essa resistência à mudança do estado representa a inércia do corpo, pois um sistema é caracterizado como sendo inercial quando uma ação externa é aplicada ao corpo e esse resiste devido ao seu estado inercial. É importante ratificarmos que podemos caracterizar o estado inercial de um corpo por assim dizer como a quantidade de matéria contida num corpo, que chamamos de massa na qual a representação dessa massa, se observamos com cuidado, determina o princípio da inércia. Pois, no Principio, Newton afirma que: "A força inata (ínsita) da matéria é um poder de resistir pelo qual cada corpo, enquanto depende dele, persevera em seu estado, seja de descanso, seja de movimento uniforme em linha reta." Ou seja, quanto maior a quantidade de matéria de um corpo, maior será a sua tendência ao repouso ou ao movimento retilíneo e uniforme.

Contudo, para especificarmos o quanto de matéria algum corpo tem, usamos o termo massa, e, quanto maior for a massa de um objeto, maior será a sua inércia. Seguindo o método axiomático de Euclides, como era costume no século XVII, Newton definiu o conceito de massa que chamava "quantidade de matéria", como o produto da densidade e do volume. Tal definição passou a ser considerada problemática, já que ele não define o que seria "densidade". Segue abaixo algumas definições mais recentes sobre massa:

- "A quantidade de matéria num objeto". (HEWITT, 2002)
- "É a medida da inércia ou lerdeza que um objeto apresenta em resposta a qualquer esforço feito para movê-lo, pará-lo ou alterar de algum modo o seu estado de movimento". (HEWITT, 2002)

A unidade de massa é definida em termos de um protótipo (depositado no Ofício Internacional de Pesos e Medidas em Paris), que representa o quilograma (kg), e foi construído originalmente para corresponder a massa de 1 litro de água a pressão atmosférica e a temperatura de 4 ^{o}C. Adotaremos o Sistema internacional de medidas (SI) de unidades, onde a unidade de comprimento é metro, a de massa é quilograma e tempo é o segundos. (NUSSENZVEIG, 2002)

É pela inércia da matéria que todo corpo dificilmente sai de seu estado de repouso ou de movimento. Ou seja, o que Newton chama de Inércia é a força de resistência ao movimento, que todo o corpo possui. Podemos observar outras formas de ratificar o princípio da inércia, através de outros autores, como:

- "Todo corpo persiste em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo e uniforme, a menos que seja compelido a modificar esse estado pela ação de forças impressas sobre ele". (NUSSENZVEIG, 2002).
- "Todo objeto permanece em seu estado de repouso ou de movimento uniforme numa linha reta, a menos que seja obrigado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele." (HEWITT, 2002).

- “Um corpo permanece em repouso ou com velocidade constante (aceleração nula), quando abandonado a si mesmo, isto é, quando forças externas não atuam sobre ele.” (BERKELEY, 1973).

Salientamos que a primeira lei de Newton (inércia) não é válida para qualquer referencial. Os referenciais em que ela é válida chamam-se referenciais inerciais. Por exemplo, um referencial ligado às estrelas fixas é uma excelente aproximação de um referencial inercial. Um referencial em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial é também inercial, porque todo corpo em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação a um deles também estará em repouso ou em movimento retilíneo em relação ao outro. Logo, dispomos de um referencial inercial (ligado às estrelas fixas), consequentemente de uma infinidade deles.

É importante ratificarmos que Newton sabia que as suas leis sobre o movimento só faziam sentido se definisse um sistema de eixos, um referencial ou sistema de referência, em relação ao qual pudessem fazer as medidas sobre o movimento dos corpos. Pois ele admitiu previamente ao enunciado das leis a existência de um espaço absoluto que na sua própria natureza, sem comparação a nada de exterior, permanece sempre o mesmo e inamovível, o que o obrigou também a definir um espaço relativo correspondendo a uma dimensão ou medida movível do espaço absoluto. Portanto, do ponto de vista newtoniano, o movimento a que se referem suas leis é o movimento absoluto que possui como referencial o espaço absoluto.

Tal como Newton admitiu a existência do espaço absoluto, também definiu o tempo como sendo absoluto de forma igual sem relação com qualquer coisa de exterior. Esta noção newtoniana, como a de espaço absoluto, esteve sempre sob a mira dos críticos: se o tempo fluía de uma forma igual, de modo uniforme, isto deveria implicar a existência de qualquer coisa que controlaria a forma como se desenrolava esse fluxo. No entanto, o próprio Newton acrescentava que o tempo absoluto fluía, então, não seria possível sem relação com qualquer coisa exterior controlar a uniformidade do fluir temporal. O tempo absoluto apresentava-se, assim, como uma entidade fisicamente impossível de definir, de aceitação exclusivamente metafísica. É com a teoria da relatividade que este conceito é ultrapassado, definindo-se o processo físico de comparar instantes ditos simultâneos, sem recorrer a esse termo de comparação que é o tempo absoluto.

Ou seja, define-se referencial de inércia como aquele em relação ao qual são válidas as leis de Newton para qualquer sistema de eixos. Todavia, ainda de acordo com a Primeira Lei, movendo-se com velocidade uniforme e retilineamente em relação ao referencial absoluto, também será um referencial de inércia.

Contudo, uma das implicações da primeira lei da inércia é que qualquer variação da velocidade $\vec{v}$ (intensidade, direção e sentido do movimento) de um corpo em relação a um referencial inercial, resulta numa aceleração associada à ação de forças. A lei fundamental da mecânica clássica é a segunda lei do movimento de Newton. Esta nos permite determinar a evolução de um sistema na mecânica clássica. Temos que destacar que a primeira lei pode ser considerada como um caso particular da segunda lei, pois se a força ($\vec{F}$) que atua sobre um corpo é nula mostra que o corpo está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Com isso, a segunda lei como a primeira só é válida num referencial inercial.

A apresentação da segunda lei de Newton implicou na existência de uma relação entre grandezas entendidas como entidades físicas mensuráveis. Mas, como foi citado anteriormente, Newton, nas suas definições prévias, nada diz sobre como medir massa e força. Logo, a Segunda Lei não se pode constituir como tal, sendo por muitos autores apresentada antes como a forma de definir a grandeza física força, pois a força é uma grandeza que resulta do produto da massa pela aceleração. Ou seja, a segunda lei de Newton corresponde efetivamente à definição de força, que é determinada pelas interações induzidas pelos corpos, uns sobre os outros, segundo as linhas que os unem.

A segunda lei de Newton que é apresentada nos livros didáticos do Ensino Médio não corresponde à formulação original. Ele definiu o que chamou de “quantidade de movimento” seria a medida do mesmo, que se origina conjuntamente da velocidade e da massa, como exposto na Eq. 41.

$$\vec{p} = m.\vec{v} \qquad \textbf{(41)}$$

Quando ocorre variação do momento linear $\Delta\vec{p}$ em relação à taxa temporal Δt e à massa m não variando com o tempo, obteremos uma força $\vec{F}$ atuante em um corpo que é descrita na Eq. 42.

$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=m.\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=m.\vec{a} \qquad \textbf{(42)}$$

A Eq. 42 corresponde à formulação da segunda lei de Newton, ou seja, a taxa de variação do momento linear de uma partícula é proporcional à resultante das forças que atuam sobre a partícula e tem a direção e o sentido da força onde o “coeficiente de inércia” m associado à partícula sobre a qual age a força $\vec{F}$ chama-se massa inercial dessa partícula.

Podemos observar também que a aceleração que se imprime sobre um objeto depende não apenas da força aplicada, mas da inércia do mesmo. Como citado acima, o quanto de inércia que um objeto possui depende da quantidade de matéria que ele tem, ou seja, quanto mais matéria mais inércia ele tem.

No cotidiano é comum que as pessoas em geral confundam a ideia de massa (m) e peso ($\vec{P}$), sabemos que a massa é uma característica intrínseca do corpo, mas o peso é uma força sobre um objeto devido à gravidade. A massa e o peso são diretamente proporcionais e representados através da Eq. 43.

$$\vec{P}=m.\vec{g} \qquad \textbf{(43)}$$

Na Eq. 43, m é a massa inercial do corpo e $\vec{g}$ a aceleração da gravidade, vertical e dirigida para baixo e de magnitude g. A proporcionalidade da força-peso à massa inercial é uma peculiaridade notável dessa força. É graças a ela que a aceleração da gravidade é a mesma para qualquer partícula. E através dela podemos medir a massa inercial pelo peso.

A segunda lei apresenta ainda diversas implicações. Uma delas é que só intervêm na dinâmica, deslocamentos, velocidades e acelerações das partículas. Outra aplicação importante está relacionada com o caráter vetorial da Eq. 42. Como $\vec{a}$ é um vetor e m um escalar, segue-se que $\vec{F}$ é um vetor. Assim, se $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,..., $\vec{F}_n$ são forças de diferentes origens que atuam sobre a mesma partícula, $\vec{F}$ na Eq. 42 é a força resultante que atua sobre a partícula, ou seja,

(44)

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

Outra atuação importante é quando o sistema apresentar *n* partículas, no qual apresentam momento linear conhecido. As partículas podem interagir umas com as outras e forças externas podem, também, atuar sobre elas. Ou seja, o sistema como um todo terá um momento linear $\vec{P}$, que será definido como a soma dos momentos lineares de cada uma das partículas. Assim:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = m_1 .\vec{v}_1 + m_2 .\vec{v}_2 + m_n .\vec{v}_n \quad \textbf{(45)}$$

$$\vec{P} = M .\vec{v}_{cm} \quad \textbf{(46)}$$

Sendo assim, o momento linear de um sistema de partículas é igual ao produto da massa total M do sistema pela velocidade do seu centro de massa. Então,

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = M .\frac{\Delta\vec{v}_{cm}}{\Delta t} = m.\vec{a}_{cm} \quad \textbf{(47)}$$

Com isso,

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \quad \textbf{(48)}$$

Caso não haja forças externas atuando sobre um sistema de partículas, isto é, o momento linear total do sistema permaneça constante, diremos que houve a conservação do momento. Segundo Nussenzveig (2002), é extremamente difícil realizar na prática uma situação como esta, pois é preciso assegurar que todas as demais forças que atuam sobre as duas partículas tenham efeitos desprezíveis.

Para melhor entendermos a conservação do momento, vamos considerar experiências entre duas bolas de bilhar (duas partículas) idênticas - de mesma massa. As forças de interação entre as bolas de bilhar são forças de contato, que atuam somente durante o tempo da colisão, o intervalo de tempo Δt em que as duas bolas de bilhar permanecem em contato.

Este intervalo é tão curto que é praticamente impercebível, e podemos falar no instante da colisão, como se fosse instantânea. Antes e depois da colisão, a força resultante sobre cada bola de bilhar é nula, de modo que as velocidades dos discos antes e depois da colisão são constantes.

Vamos chamar de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ as velocidades das bolas de bilhar 1 e 2 antes da colisão, e $\vec{v}'_1$ e $\vec{v}'_2$ as velocidades correspondentes depois da colisão. Os momentos correspondentes são $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ (antes da colisão) e $\vec{p}'_1$ e $\vec{p}'_2$ (depois da colisão). Vamos considerar somente colisões frontais. O que se observa em cada experiência está representado nas figuras a seguir. (NUSSENZVEIG, 2002)

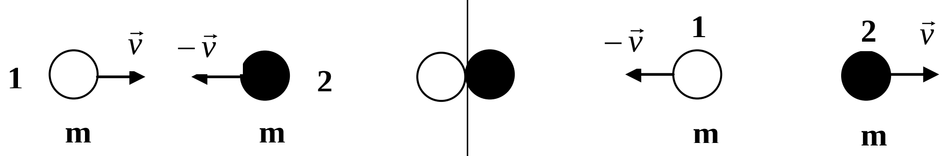
Experiência 01	
Antes da Colisão	**Depois da colisão**
	
Velocidades $\vec{v}_1 = \vec{v}$ $\vec{v}_2 = -\vec{v}$	$\vec{v}'_1 = -\vec{v}$ $\vec{v}'_2 = \vec{v}$
Momentos $\vec{p}_1 = m.\vec{v}$ $\vec{p}_2 = -m.\vec{v}$	$\vec{p}'_1 = -m.\vec{v}$ $\vec{p}'_2 = m.\vec{v}$
Total $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$	$\vec{P}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0$

Fig. 26 - Colisão entre as bolas de bilhar com velocidades opostas.

Na experiência 01, as bolas de bilhar se aproximam com velocidades iguais e contrárias, depois da colisão, afastam-se tendo intercambiado as velocidades. A seguir, na experiência 02, uma bola de bilhar está inicialmente parada e a bola de bilhar 01 se aproxima dela com velocidade $\vec{v}$ e após a colisão, a bola de bilhar 1 parou e 2 se afasta de 1 com velocidade $\vec{v}$.(NUSSENZVEIG, 2002)

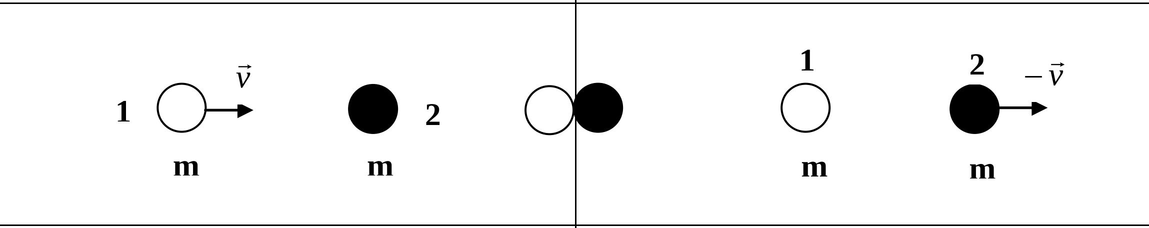
Experiência 02	
Antes da Colisão	**Depois da colisão**
	
Velocidades $\vec{v}_1=\vec{v}$ $\vec{v}_2=0$	$\vec{v}'_1=0$ $\vec{v}'_2=\vec{v}$
Momentos $\vec{p}_1=m.\vec{v}$ $\vec{p}_2=0$	$\vec{p}'_1=0$ $\vec{p}'_2=m.\vec{v}$
Total $\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=m.\vec{v}$	$\vec{P}'=\vec{p}'_1+\vec{p}'_2=m.\vec{v}$

Fig. 27 - Colisão com uma bola de bilhar em repouso.

Já na experiência 03, a situação inicial é a mesma da experiência 02, entretanto, grudamos na bola de bilhar 1 um adesivo de massa desprezível de tal forma que, ao colidirem, as bolas de bilhar permanecem coladas, passando a se moverem juntas, ou seja, com uma massa 2m e podemos observar também que se movem com velocidade $\vec{v}/2$. (NUSSENZVEIG, 2002)

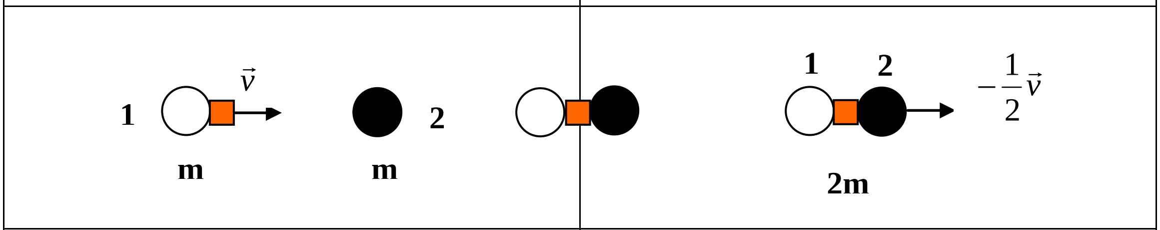
Experiência 03	
Antes da Colisão	**Depois da colisão**
	
Velocidades $\vec{v}_1=\vec{v}$ $\vec{v}_2=0$	$\vec{v}'_1=\vec{v}'_2=\frac{1}{2}.\vec{v}$
Momentos $\vec{p}_1=m.\vec{v}$ $\vec{p}_2=0$	$\vec{p}'_1=\vec{p}'_2=\frac{1}{2}.m.\vec{v}$
Total $\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=m.\vec{v}$	$\vec{P}'=\vec{p}'_1+\vec{p}'_2=m.\vec{v}$

Fig. 28 - Colisão com agregação.

Podemos constatar através das experiências 01, 02 e 03 que podemos calcular o momento total do sistema, que definimos como a soma dos momentos das bolas de bilhar 1 e 2, antes e depois da colisão, pois em todos os casos:

$$\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}'_1+\vec{p}'_2=\vec{P}' \qquad \textbf{(49)}$$

Ou seja, o momento total antes e depois da colisão é o mesmo. Então, podemos dizer que o momento total do sistema se conserva. (NUSSENZVEIG, 2002)

Entretanto, se fizéssemos as mesmas experiências com bolas de bilhar com massas diferentes e quaisquer velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ antes da colisão, verificaríamos sempre a validade da equação 49, desde que as únicas forças que atuem sobre o sistema sejam as interações entre as duas partículas durante a colisão, desde que possamos desprezar os efeitos de forças externas ao sistema, como por exemplo, a força de atrito.

Com isso, experiências como as que acabamos de demonstrar acima, entre outras, levaram ao princípio de conservação do momento, ou seja, o momento total do sistema isolado se conserva. Este é um dos princípios fundamentais da Física clássica, e é uma das razões da importância do conceito do momento. Podemos observar abaixo que ele se generaliza a sistemas de mais de duas partículas e a situações mais gerais do que a que consideramos, pois a Eq. 50 equivale a: (NUSSENZVEIG, 2002)

$$\Delta\vec{p}_1=\vec{p}'_1-\vec{p}_1=-(\vec{p}'_2-\vec{p}_2)=\Delta\vec{p}_2 \qquad \textbf{(50)}$$

Onde $\Delta\vec{p}_1$ e $\Delta\vec{p}_2$ são as variações de momento das partículas 1 e 2, respectivamente, em consequência da colisão. Estas variações se produzem durante o intervalo de tempo Δt que dura o processo da colisão, tempo muito curto. Decorre então através da Eq. 50 que,

$$\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t}=-\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \qquad \textbf{(51)}$$

Como Δt é muito pequeno,

$$\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \quad \textbf{(51)}$$

Durante a colisão,

$$\frac{\Delta}{\Delta t} = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \quad \textbf{(52)}$$

Ou seja, o momento total do sistema se conserva a cada instante, inclusive durante a colisão. (NUSSENZVEIG, 2002)

Até agora consideramos apenas as forças exercidas sobre uma única partícula. Num sentido mais amplo, uma força é resultado da interação entre objetos. Um boxeador ao bater no saco, mais coisas estão acontecendo além da pancada. O saco também está "batendo" o boxeador. De que forma poderíamos explicar por que as mãos do boxeador ficam doendo e avermelhadas? A mão do boxeador e o saco empurram-se mutuamente. Existe um par de forças envolvidas. A força aplicada pelo boxeador no saco e a força de volta do saco no boxeador são iguais em intensidade ou módulo, apresentam mesma direção e são opostas em sentido. (NUSSENZVEIG, 2002)

É comum que nossos alunos perguntem: "Quem exerce a força e quem sofre a ação da força?" A resposta de Newton para isso foi que nenhuma força pode ser definida como "ação" e "reação", ele concluiu que ambos os objetos devem ser tratados igualmente. Por exemplo, na interação de um martelo e um prego, o martelo exerce uma força sobre o prego, mas ele mesmo sofre uma parada neste processo. Tais observações conduziram Isaac Newton a sua terceira lei do movimento:

- "Sempre que um objeto exerce uma força sobre um outro objeto, este exerce uma força igual e oposta sobre o primeiro". (HEWITT, 2002)
- "Sempre que dois corpos interagem, a força $\vec{F}_{12}$ no segundo corpo, devido ao primeiro, é igual e oposta à força $\vec{F}_{21}$ no primeiro, devida ao segundo ($\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$)." (BERKELEY, 1973).

A terceira lei de Newton com frequência é enunciada assim: "A cada ação corresponde sempre uma reação igual". Em qualquer interação há sempre um par de forças de ação e reação, que são iguais em valor e de sentidos opostos. Nenhuma força existe sem a outra, as forças aparecem em pares. O par de forças de ação e reação constitui uma interação entre as duas. (HEWITT, 2002)

Aplicando a segunda lei de Newton, veremos que $\Delta\vec{p}_1 / \Delta t$ representa a força sobre a partícula 1 devido à partícula 2 durante a colisão, ou seja, $\vec{F}_{12}$, analogamente, $\Delta\vec{p}_2 / \Delta t$ seria igual a $\vec{F}_{21}$, no qual a Eq. 53 representaria:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad \textbf{(53)}$$

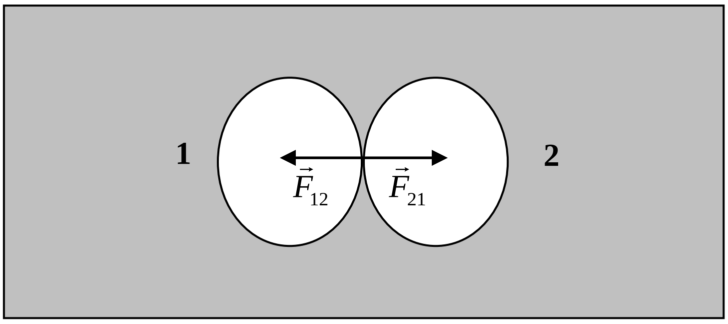


Fig. 29 – Par ação-reação.

Portanto, a força exercida por 1 sobre 2 é igual e contrária aquela exercida por 2 sobre 1. Dizemos, então, que se trata de uma par ação-reação, pois a Eq. 53 obtida representa as interações de contato numa colisão entre duas partículas, que é um caso particular da terceira lei de Newton. Assim anunciada: “A toda ação corresponde uma reação igual e contrária, ou seja, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos”. (NUSSENZVEIG, 2002)

3.2. Torque e Momento Angular

Como foi já citado anteriormente nesse trabalho, temos que perceber o “momento” acontecendo. Quando, por exemplo, damos uma “tacada” em uma bola de bilhar, aplicamos-lhe um determinado momento (vimos que precisamos conhecer a sua massa e velocidade), o qual chamamos de "momento" ou "momento linear" $\vec{p}$.

Entretanto, como todas as grandezas lineares, o momento linear possui uma contrapartida angular que chamamos de "momento angular" $\vec{L}$, que seria o movimento aplicado sobre o sistema rotativo, em relação a um eixo de simetria. Por exemplo, o planeta Terra que está em rotação em torno de um eixo imaginário no espaço, um pião é outro exemplo de objeto que executa movimento de rotação. No entanto, o seu movimento pode ser bem mais complexo do que a simples rotação em torno de um eixo, como exemplo, as portas das nossas casas que são fixadas aos batentes utilizando-se de duas ou três dobradiças. Estas servem para permitir o movimento de rotação da porta em torno do batente da porta.

Mas devemos tomar cuidado em objetos que estão em repouso, pois, como vimos, tendem a permanecer em repouso ou um objeto em movimento tende a mover-se em linha reta. Então um objeto que roda em torno de um eixo tende a permanecer rodando em torno desse mesmo eixo, a menos que sofra algum tipo de interferência externa. A propriedade de um objeto de resistir a alterações em seu estado de movimento de rotação é chamada de inércia rotacional. Por exemplo, como citamos o movimento do pião, se o mesmo estiver rodando, tende a permanecer em rotação, mas, se estiver em repouso, tende a permanecer em repouso, na ausência de interferências externas.

Como a inércia para o movimento linear depende da massa, a inércia rotacional de um objeto também depende. Por exemplo, um cilindro sólido que parte do repouso rolará com maior velocidade que um anel, pois todos giram em torno de um eixo central, a forma para a qual a maior parte da massa fica mais afastada do eixo é o anel, assim para um mesmo peso o anel tem mais inércia rotacional e é mais difícil começar a rolar. Ou seja, diferentemente do movimento linear, o momento de inércia depende da distribuição de massa em relação ao eixo de rotação. Quanto maior for à distância entre a maior parte da massa de um objeto e o eixo de rotação, maior será a sua inércia rotacional. (HEWITT, 2002)

Portanto, quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo, as partículas constituintes do corpo movem-se em círculos concêntricos em torno desse eixo. Se eliminarmos essa restrição e considerarmos uma partícula movendo-se em três dimensões, em torno da origem de um sistema de coordenadas estaremos conceituando o torque $\vec{\tau}$. O torque é a contrapartida rotacional da força. A força tende a alterar o movimento das coisas, mas o torque tende a fazer girar ou a alterar o estado de rotação das coisas, ou seja, se se quer fazer um objeto estacionário rodar, aplique-se-lhe um torque. (HEWITT, 2002)

O torque $\vec{\tau}$ de uma força $\vec{F}$ é definido como o produto vetorial entre a posição $\vec{r}$ e a força $\vec{F}$.

$$\vec{\tau} = \vec{r}\, x\, \vec{F} = \vec{r}\, x \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \qquad \textbf{(54)}$$

Trata-se, portanto, de uma grandeza vetorial.

Tanto o torque como a inércia rotacional envolve a distância até o eixo de rotação. No caso do torque, esta distância, que provê a vantagem mecânica da alavanca, é chamada de braço de alavanca, pois, ela é a distância mais curta entre a força aplicada e o eixo de rotação.

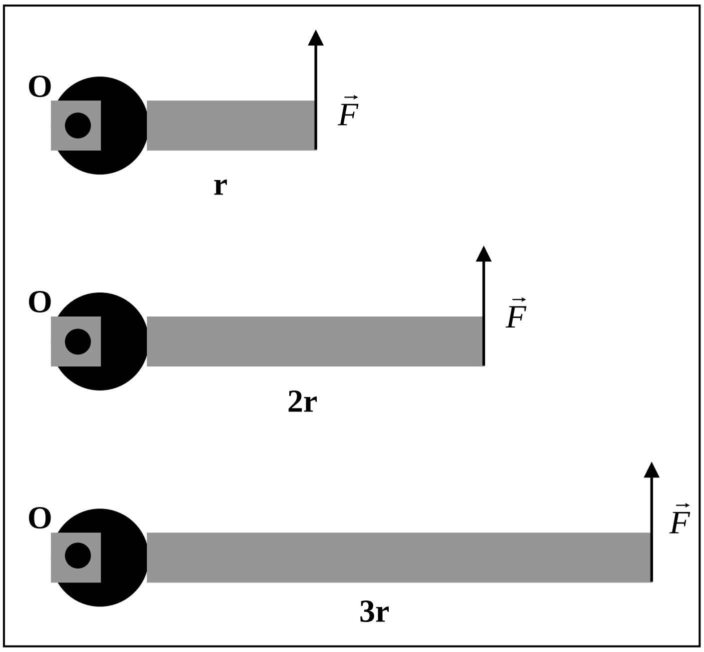


Fig. 30 – Torque de uma força.

Podemos observar na Fig. 30 três exemplos de forças aplicadas numa alavanca com distâncias diferentes do eixo de rotação, no qual encontraremos valores de torques diferentes.

$$\begin{aligned} &\vec{\tau} = \vec{F}\, x\, \vec{r} \\ &1)\, \tau = F.r \\ &2)\, \tau = 2.F.r \\ &3)\, \tau = 3.F.r \end{aligned} \qquad \textbf{(55)}$$

Com isso, podemos comprovar que quanto maior a distância da força ao ponto **O** (fulcro) menor será o esforço mecânico, sendo assim, maior será o torque aplicado.

É importante também observarmos que a direção e o sentido do torque têm um significado físico importante na rotação, pois ele é perpendicular ao plano e a direção é a direção do eixo de rotação. Já o sentido é tal que, vista da extremidade do torque, a rotação tem sentido anti-horário, mas, se substituirmos a força por uma força de sentido anti-horário, o sentido se inverte e teremos um torque negativo, que indicará que o sentido da rotação se inverteu também.

O momento angular, $\vec{L}$, é uma grandeza física muito importante, especialmente em se tratando de rotações. Por exemplo, um planeta girando em torno do Sol, uma pedra presa á extremidade de um barbante e os minúsculos elétrons girando em torno dos núcleos atômicos, todos possuem momento angular. A definição do momento angular é um tanto quanto abstrata. Ela é definida como o produto vetorial do vetor posição e do vetor quantidade de movimento.

$$\vec{L}=\vec{r}\ x\ \vec{p}=m.(\vec{r}\ x\vec{v}) \qquad \textbf{(56)}$$

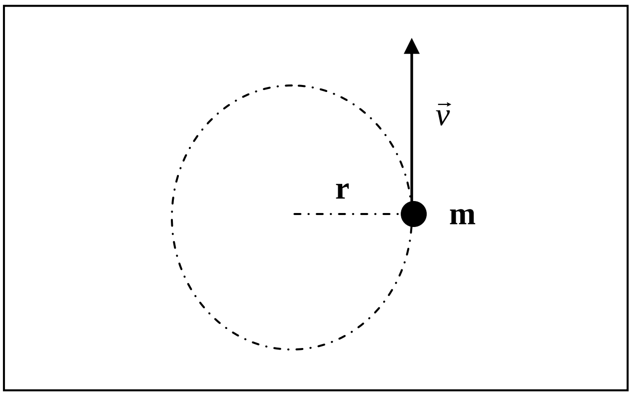


Fig. 31 – Partícula de massa m em rotação numa trajetória circular

Podemos observar que $\vec{L}$ é um vetor perpendicular a $\vec{r}$ e a $\vec{p}$ e por isso, na maioria das vezes, ela acaba levando a dificuldade de visualização. No entanto, é uma quantidade física fundamental e importante no estudo da rotação de um corpo.

A quantidade de movimento de um corpo pode ser nula (o que significa que ele não está em movimento de translação), e ainda assim ter momento angular total diferente de zero. O momento angular total está para o movimento de rotação assim como a quantidade de movimento total está para o movimento de translação.

Caso tenhamos um sistema de *n* partículas, definiremos o momento angular total como a soma dos momentos angulares de cada uma das partículas, temos que:

$$\vec{L}_T = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_n = \vec{r}_1 \, x \, \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \, x \, \vec{p}_2 + ... + \vec{r}_n \, x \, \vec{p}_n \qquad \textbf{(57)}$$

Portanto, uma partícula em rotação tem um valor definido para o momento angular, ou seja, se a partícula estiver em rotação, ele tem momento angular e vice-versa.

Da mesma forma que o momento linear de qualquer sistema é conservado se nenhuma força resultante está atuando sobre ele, o momento angular se conserva quando nenhum torque resultante atua sobre o sistema. Na ausência de um torque externo resultante, o momento angular de qualquer sistema mantém-se constante. A lei da conservação do momento angular para qualquer sistema é representada por:

$$\vec{\tau}_{ext} = 0 \iff \vec{L} = \vec{L}_o = constante \qquad \textbf{(58)}$$

Ou seja, se a resultante dos torques externos em relação a um dado ponto se anula, o momento angular do sistema em relação a esse ponto se conserva. (NUSSENZVEIG, 2002)

Em particular, isto vale sempre na ausência de forças externas (para um sistema isolado). Neste caso, como o torque é nulo em relação a qualquer ponto do espaço, o momento angular em relação a qualquer ponto se conserva. Por exemplo, o momento angular orbital da Terra em torno do Sol se conserva, porque a força gravitacional é central. A Eq.58 é uma lei de conservação vetorial. Isso significa, por um lado, que a conservação de seu módulo, direção e sentido. Por outro lado, significa também que a lei se aplica separadamente a cada componente. Assim, se uma dada componente do torque resultante se anula, a componente correspondente do momento angular total se conserva independente do que suceda com as demais. (NUSSENZVEIG, 2002)

CAPÍTULO 4

4.1 Concebendo ergonomias cognitivas para o ensino de Física

Nos capítulos anteriores, apresentamos de forma significativa uma visão histórica das idéias dos principais autores que contribuíram no desenvolvimento da álgebra Clifford. Apresentamos também em detalhes o desenvolvimento que conduz a ampliação do conceito de vetor e suas operações incluindo o produto de Clifford. Foram abordados os conceitos fundamentais do modelo cognitivista Ausubeliano de aprendizagem, no qual destacamos as principais categorias deste modelo que nortearam a construção de um mapa conceitual.

Desenvolvemos e representaremos também os principais conceitos da dinâmica tais como: massa, momento linear, momento angular, força, torque. Neste capítulo, ocupar-nos-emos de desenvolver uma representação quantitativa dos conceitos acima descritos utilizando a estrutura algébrica desenvolvida no Capítulo 1. Isto quer dizer que estamos modelando estes conceitos com a Álgebra de Clifford.

Uma das nossas preocupações é criar fatores que facilitem a aprendizagem dos conceitos fundamentais da dinâmica. Portanto, desenvolver mecanismos facilitadores da percepção, da memória, do raciocínio lógico conduz a apreensão significativa de um determinado conteúdo. Dessa forma a Ergonomia Cognitiva atua de maneira a minimizar os fatores que prejudicam os processos da aprendizagem. A Ergonomia Cognitiva é uma área que se preocupa, particularmente, com o processamento da informação humana. Esta área ratifica o papel do aparato sensorial do aprendente no seu processo de interação com o meio ambiente em que está inserido.

Quando oferecemos condições mais agradáveis, como materiais mais adequados que forneçam uma melhor hierarquia dos conceitos, um ferramental matemático que permita uma fácil articulação com Física, um ambiente físico que elimine o stress de fatores externos, entre outros, haverá condições propicias para uma aprendizagem significativa.

4.2 Hierarquizando Conceito – Mapa Conceitual

Os mapas conceituais são uma ferramenta poderosa no processo preparação de material didático. Ele permite explicitar a hierarquia apresentado pelos conceitos facilitando a assimilação no processo de aprendizagem. Tais mapas buscam traçar a representação conceitual do assunto, criando ligações com os modelos mentais ou esquemas conceituais que os aprendentes constroem a partir de suas interações no ambiente social e durante a sua aprendizagem. Balizado no exposto acima, propomos um mapa conceitual dos principais conceitos da mecânica newtoniana. Buscamos ao longo de sua confecção a incorporação dos fatores substantivos da facilitação pedagógica segundo a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel.

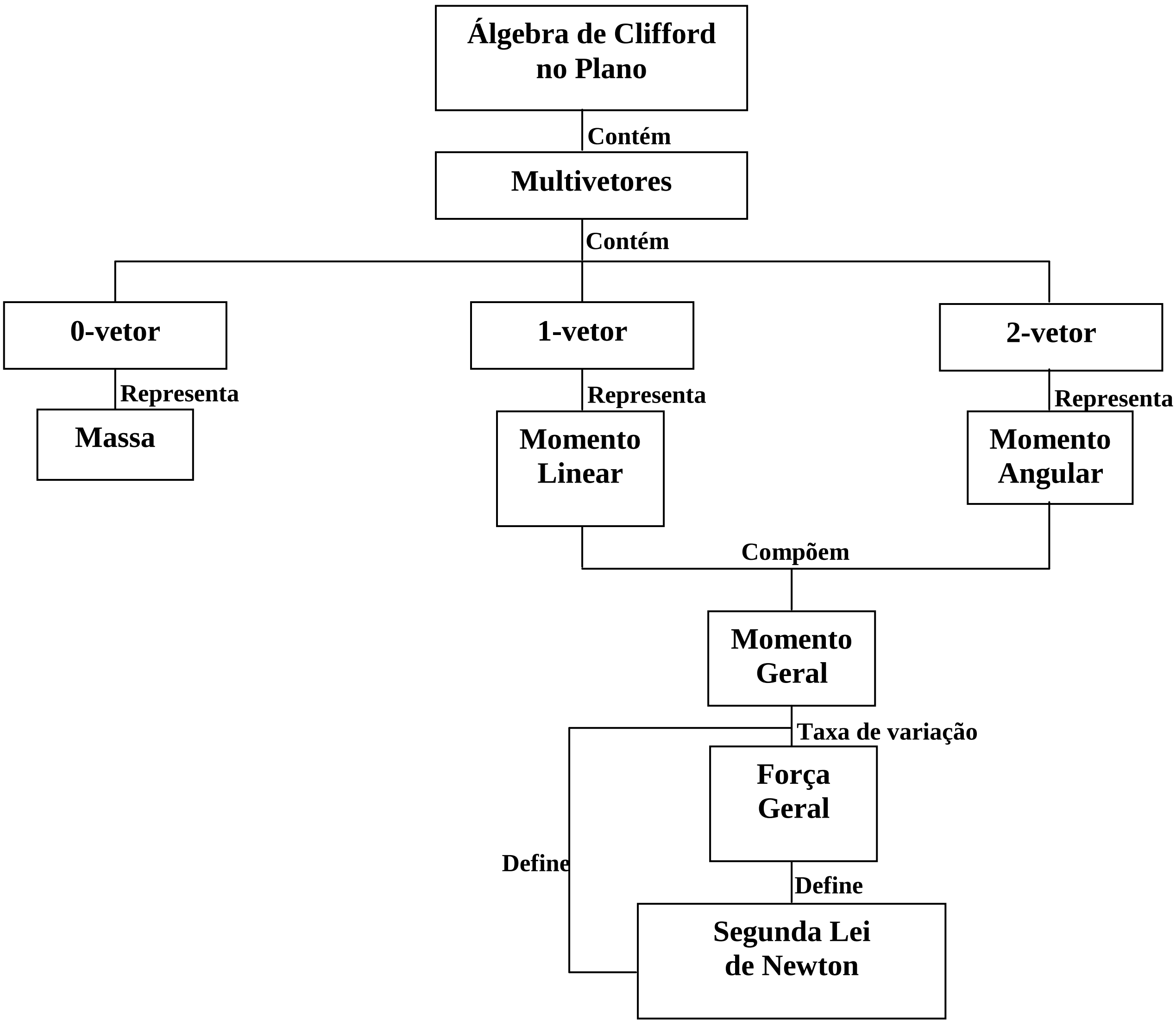


Fig. 32 - Mapa conceitual referente aos principais conceitos da mecânica newtoniana

Construindo Ergonomias Cognitivas

Uma das principais características da Álgebra de Clifford é nos permitir representar e manipular objetos geométricos de forma algébrica. Isto facilita a integração consistentemente dos conceitos físicos as suas representações geométricas. Portanto, os conceitos físicos trabalhados no Capítulo 3 devem ser explorados nesta perspectiva para atender as exigências cognitivas dos aprendentes do Primeiro Ano do Ensino Médio.

Assim, um elemento da álgebra de Clifford desenvolvido no espaço euclidiano em duas dimensões é representado por:

$$u = 0-vetor + 1-vetor + 2-vetor \qquad \textbf{(59)}$$

onde,

$$\begin{aligned} &0-vetor \Rightarrow escalar \\ &1-vetor \Rightarrow segmento\ de\ reta\ orientado \\ &2-vetor \Rightarrow área\ orientada \end{aligned}$$

Neste sentido, buscaremos representar os conceitos físicos trabalhados no Capítulo 3 por meio desta nova abordagem matemática.

Como foi tratado no capitulo anterior, o conceito de massa de um corpo é uma característica intrínseca do mesmo e que representa a quantidade de matéria do objeto. Devido às características apresentadas por este conceito, a forma mais apropriada de representá-la é através de uma grandeza escalar, ou seja, um 0-vetor, pois a mesma fica completamente definida apenas pela sua magnitude, ou seja, por um número real positivo.

O momento linear de um corpo é uma grandeza física dada por um produto, entre a massa, que, como vimos é um 0-vetor e a velocidade, que é representada por um segmento de reta orientado, ou seja, uma quantidade que apresenta uma intensidade, um sentido e uma direção. Com isso, podemos concluir que o momento linear possui a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade cujo módulo é o produto da massa pelo módulo da velocidade (comprimento do segmento). Utilizando a nomenclatura da Álgebra de Clifford, o momento linear poderá ser representado por 1-vetor.

Gostaríamos de relembrar que o momento linear apresenta a propriedade de que, na ausência de forças externas, ele se conserva.

Então, se denominamos $\vec{p}$ o momento linear da partícula, m a massa da partícula e $\vec{v}$ a sua velocidade, podemos escrever:

$$\vec{p}=m.\vec{v} \tag{60}$$

Onde o ponto representa a operação "produto por um escalar" trabalhado no Cap. 1. O interessante nesta abordagem é que momento linear passa a ser representado por um objeto matemático que pertence a uma estrutura algébrica, onde as operações usuais de soma, subtração, multiplicação e divisão estão definidas. E mais, nos permite operar conjuntamente e de forma mais elegante com outros conceitos físicos, como veremos mais adiante.

Já o momento angular de um corpo é uma grandeza física dada pelo produto vetorial entre o vetor posição, que, como vimos, é um 1-vetor e a quantidade de momento linear, que também é 1-vetor. Como destacado no Cap. 1 e devido ao nosso interesse em desenvolver nossa argumentação física no plano, devemos substituir a representação matemática do momento angular.

Com isso, se denominarmos $\vec{L}$ o momento angular, $\vec{r}$ o vetor posição e $\vec{p}$ a quantidade de momento linear. O momento angular passa a ser representado por um objeto da álgebra de Clifford que é um 2-vetor. Assim a sua representação será:

$$L=\vec{r}\wedge\vec{p} \tag{61}$$

Na literatura atual do Ensino Médio, o momento linear (1-vetor) e o momento angular (2-vetor) são expostos de forma distinta, porém a Álgebra de Clifford no plano é capaz de representá-los em uma única entidade matemática, ou seja, um multivetor, cuja propriedade foi trabalhada no capítulo1. Assim, denominando de **P** o Momento Geral, podemos representá-lo pela combinação,

$$\mathrm{P}=\vec{p}+\lambda L \tag{62}$$

Onde λ é um fator de correção dimensional (PEZZAGLIA, 2008).

Uma das vantagens de se definir o momento desta forma é proporcionar uma visualização geométrica mais adequada ao conceito físico expressado por essa grandeza.

A taxa de variação desse Momento Geral P em relação ao tempo é representada por:

$$\frac{\Delta \mathrm{P}}{\Delta t}=\frac{\Delta(\vec{p}+\lambda \vec{L})}{\Delta t}=\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}+\lambda \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \qquad \textbf{(64)}$$

O primeiro termo da última igualdade representa a taxa de variação do momento linear $\Delta\vec{p}$ em relação ao tempo Δt. Como vimos no Cap. 3, isto nada mais é que a força $\vec{F}$ atuante em um corpo. Portanto, representaremos a força com um 1-vetor. O segundo termo da última igualdade representa a taxa de variação temporal do momento angular em relação ao tempo. Isto nos deve conduzir ao conceito de torque. Vejamos é o torque que permite definimos por um 2-vetor, ou seja,

$$\frac{\Delta L}{\Delta t}=\frac{L(t+\Delta t)-L(t)}{\Delta t}=\frac{\vec{r}\,(t+\Delta t)\wedge \vec{p}\,(t+\Delta t)-\vec{r}\,(t)\wedge \vec{p}(t)}{\Delta t} \qquad \textbf{(65)}$$

Subtraindo e somando $\vec{r}\,(t+\Delta t)\wedge \vec{p}(t)$ ao numerador resulta:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t}=\frac{\vec{r}\,(t+\Delta t)\wedge \vec{p}(t+\Delta t)-\vec{r}\,(t+\Delta t)\wedge \vec{p}\,(t)+\vec{r}\,(t+\Delta t)\wedge \vec{p}\,(t)-\vec{r}\,(t)\wedge \vec{p}(t)}{\Delta t} \qquad \textbf{(66)}$$

$$=\left[\vec{r}\,(t+\Delta t)\wedge\frac{\vec{p}\,(t+\Delta t)-\vec{p}\,(t)}{\Delta t}\right]+\left[\frac{\vec{r}\,(t+\Delta t)-\vec{r}\,(t)}{\Delta t}\wedge \vec{p}\,(t)\right] \qquad \textbf{(67)}$$

Fazendo o intervalo de tempo Δt tão pequeno quanto se deseja, dá relação acima encontramos:

$$\vec{r}\,(t+\Delta t) = \vec{r}(t) \text{ a posição em } t\,, \qquad \textbf{(68)}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\,\vec{p}\,(t+\Delta t)-\vec{p}\,(t)=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \text{ a taxa de variação temporal do momento} \qquad \textbf{(69)}$$

linear e

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\vec{r}\,(t+\Delta t)-\vec{r}\,(t)=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \text{ a taxa de variação temporal da posição.} \qquad \textbf{(70)}$$

Então teremos:

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{r}\wedge\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}+\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\wedge\vec{p} \qquad \textbf{(71)}$$

$$=\vec{r}\wedge\vec{F}+\vec{v}\wedge\vec{p}\ , \qquad \textbf{(72)}$$

pois, a taxa de variação temporal do momento linear é a força $\vec{F}$ (ver Cap.3). Por outro lado, o segundo termo da última igualdade é nulo, já que $\vec{v}\wedge m\vec{v}$ representa o produto de Grassmann de dois 1-vetor paralelos. Assim, o torque τ passa a ser um 2-vetor na nova representação, isto é,

$$\tau=\vec{r}\wedge\vec{F}\ . \qquad \textbf{(73)}$$

Utilizando a álgebra de Clifford no plano, fomos capazes de representar a taxa da variação do Momento Geral P em uma única entidade matemática. Esta entidade matemática representa a Força Geral F_G que atua no sistema. Portanto, podemos escrever:

$$\frac{\Delta\mathrm{P}}{\Delta t}=F_G=\vec{F}+\lambda\,\tau \qquad \textbf{(74)}$$

Obtemos, assim, um multivetor, pois é a combinação de 1-vetor ($\vec{F}$) e um 2-vetor (τ). A expressão acima é, no novo formalismo, a representação do segundo princípio da dinâmica newtoniana.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo desenvolver um material didático no domínio da mecânica newtoniana, voltado para o primeiro ano do Ensino Médio. Seu percurso foi orientado pelo cognitivismo ausubeliano juntamente com uma estrutura matemática denominada Álgebra de Clifford. Neste sentido, foram trabalhados os conceitos norteadores da aprendizagem significativa, como também os pilares conceituais da estrutura algébrica. O nosso estudo nos convenceu da grande vantagem didático-conceitual da utilização deste ferramental matemático para representar ou modelar os principais conceitos da dinâmica. Isto se deve em grande parte a capacidade desta álgebra de representar e manipular conceitos geométricos básicos tais como: magnitude, direção, sentido e dimensão.

A capacidade desta álgebra de ampliar a capacidade representacional dos conceitos físicos em diversas dimensões fica evidenciada na sua utilização para o momento angular e o torque. Isto pode proporcionar novas interpretações das grandezas físicas que representa, assim como introduzir novos métodos de resolução. Além disso, o seu largo espectro de atuação (ampliação dimensional) permite a exploração gradual do aprofundamento do conceito físico modelado, não havendo a necessidade de introdução de outro sistema matemático complementar.

Como é possível associar essa estrutura matemática ao “espaço”, no nosso caso o plano, que serve de palco aos acontecimentos físicos, isto contribui para a indução pelo aprendente da compreensão do papel modelador da Matemática e o de descrição da realidade objetiva pela Física. Somando-se a isso, a facilidade que essa abordagem proporciona na articulação dos princípios da teoria cognitiva ausubeliana para a preparação de conteúdo expositivo. Isto fica evidenciado no mapa proposto onde a integração físico-matemática dos conceitos, segundo os fatores substantivos da facilitação pedagógica, tais como diferenciação progressiva, reconciliação integrativa e organizadores prévios, foram explorados.

A introdução de um novo objeto matemático, o multivetor, permitiu a compactação de diversos conceitos físicos como momento linear com momento angular e força com torque em um sistema consistente e coerente de equações facilmente manipulável e interpretável, permitindo, assim, a incorporação natural dos conceitos físicos à estrutura algébrica utilizada na própria descrição do palco dos fenômenos físicos – o plano. Este extraordinário fato possibilitou uma nova representação do segundo princípio da mecânica newtoniana.

Evidentemente que vemos este trabalho como um “pontapé inicial” no processo de incorporação desta estrutura matemática – a Álgebra de Clifford, no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos físicos. Entendemos que a sua continuidade parece ser imperativo. Neste sentido, visamos à continuidade de aprofundamento deste estudo com nosso orientador.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALONSO, Marcelo,; FINN, Edward J. **Física: um curso universitário**. São Paulo: E. Blucher, 1972.

AUSUBEL, D., NOVAK, J., & HANESIAN, H. **Educational Psychology: A Cognitive View** (2nd Ed.). New York: Holt, Rinehart & Winston, 1978.

AUSUBEL, David. **The Psychology of Meaningful Verbal Learning.** New York: Grune & Stratton, 1963.

_____________ **In defense of advance organizers: A reply to the critics**. Review of Educational Research, 48, 251-257, 1978.

_____________ **Aquisição e Retenção do Conhecimento: uma perspectiva cognitiva**. Tradução Lígia Teopisto. Lisboa: Editora Plátano, 2003.

BARCELOS, N.J. Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana. 1.ed, 2004.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares de Física para a Educação Básica**. Secretaria de Educação do Paraná. Curitiba: 2006.

DE GÓES BRENNAND, E**. Álgebra de Clifford e Aprendizagem significativa: pilares para a construção de uma nova abordagem para o ensino da Física.** Projeto guarda-chuva. Mestrado em Ensino de Física. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2007.

______________ **Fundamentos e aplicações da Álgebra de Clifford no Ensino de Física**. Nas aulas conferidas em pós-graduação em Ensino de Ciências na Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2008.

DORAN, Chris. **Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics**. Ph.D. thesis, University of Cambridge (1994)

HESTENES**,** David. **New Foundations for Classical Mechanics**. London: Kluwer Academic Publishers, 2nd Edition, 1999.

_________________. **Space-Time Algebra**, New York: Gordon & Breach, 1966.

_________________. **Multivector Functions**, J. Math. Anal. And Appl. **24**, 467-473 (1968)

_________________. **Reforming the Mathematical Language of Physics**, Am. J. Phys. 71 (2), 104-121 2003.

_________________. **Spacetime Physics with Geometric Algebra**, Am. J. Phys. 71 (7), 691-714, 2003.

HESTENES, David & SOBCZYK, Garret. **Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics.** London: Kluwer Academic Publishers, Reprinted, 1999.

HEWITT, Paul G. **Física Conceitual**.ed.9, editora Bookman, 2002.

PEZZAGLIA, Jr. W. M. **Physical Applications of a Generalized Clifford Calculus: Papapetrou Equations and Metamorphic Curvature**, e-Print Archive: Gr-qc/9710027, 2008.

LASENBY, Anthony. **Geometric Algebra for Physicists**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

LIMA, Elon Lages. **A Matemática do Ensino Médio**. Sociedade Brasileira de Matemática. Vol. 01. (2006)

MOREIRA, M. A. & MASINI, Elcie. F. Salzano. **Aprendizagem significativa: Teoria de David Ausubel**. São Paulo: Centauro, 2001.

_____________. **Ensino de Física no Brasil: Retrospectiva e Perspectivas**. Rev. Bras. Ens. Fis. Vol. 22 no.1 2000.

______________. **Aprendizagem significativa: um conceito subjacente**. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigsubport.pdf. Acesso em: 2 mar. 2004.

MOREIRA, M. A. & GRECA, I. M. **Cambio conceptual: analysis crítico propuestas a la luz de la teoría del aprendizaje significativo.** Ciência & Educação, 9(2): 301-315. 2003

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica.** 1. ed. rev. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.

NOVAK, J. D. ; Mintzes, J J e Wandersee, J H **Ensinando Ciência para a Compreensão**. Plátano Lisboa: 2000.

___________. **Aprender, criar e utilizar o conhecimento. Mapas conceituais como ferramentas de facilitação nas escolas e empresas.** Lisboa: Plátano Universitária, 2000.

SOUZA, C. M. S. G. **A Resolução de Problemas e o Ensino de Física: uma análise psicológica.** Tese de Doutorado. Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília. 2001.